Lineáris erőtörvény vizsgálata

Asztalos Bogdán (7. mérőpár)

mérés időpontja: 2017. 04. 04.
jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2017. 04. 11.

A mérés célja

Megnyúlás hatására a rugókban ébredő erő kiszámítására a Hook-törvényt alkalmazzuk, vagyis feltesszük, hogy a rugóerő nagysága arányos a megnyúlásával. A mérés célja ennek igazolása, és a mérésben használt rugók arányossági tényezőinek meghatározása.

A mérés eszközei

- Két rugó
- Állvány, amire felakaszthatjuk a rugót
- 50 g tömegű súlyok, amik a rugóra akaszthatók
- Mérőszalag
- Stopper

A mérés menete

A direkciós állandó meghatározására két fajta mérést is végzünk, egy statikait, és egy dinamikait. Az első esetben azt mérjük, hogy adott erő esetén mennyire nyúlik meg a rugó. A rugó végére ráakasztunk 50 g-os súlyokat, és a mérőszalag segítségével lemérjük a rugó aljának helyzetét. A kezdeti hely ismeretében kiszámolhatjuk a rugó megnyúlását, amiből meghatározható a direkciós állandó.

A második esetben a rugó rezgéséből fogunk számolni. Mivel a rugóban ébredő visszatérítő erő a megnyúlással egyenesen arányos, a lendületet adva a ráakasztott tömegnek, harmonikusan fog rezegni. A rezgés periódusideje függ a terhelő erőtől, így különböző tömegeket akasztva rá, megmérhető a rezgési frekvencia, és ebből következtethetünk a rugó direkciós állandója.

Hibák

- A mérőszalag bizonytalansága
- Időmérés esetén a reakcióidő
- Gyors rezgés esetén a periódus megállapítása
- A rugó oldalirányú rezgése

Kiértékelés

A statikai mérés során a rugóra akasztott tömeg függvényében mértük a rugó pozícióját. Mivel a tömeg nehézségi erőtéreben volt, a rugónak a tömegre ható nehézségi erőt kellett kiegyensúlyoznia, tehát ezzel egyenlő erő ébredt benne. A nehézségi gyorsulás értékét $g = 9,81\ \frac{m}{s^2}$-nak véve, kiszámolható a rugóban ébredő erő, a rugó aljának kezdeti és aktuális pozíciójából pedig a megnyúlás. Ezeket az adatokat mindkét rugó esetére az 1. táblázat tartalmazza.

1. rugó	m [g]	F [N]	x [cm]	Δx [cm]	x_0 [cm]
	50	0,49	38,60	4,45	43,05
	100	0,98	34,15	8,90	
	150	1,47	29,80	13,25	
	200	1,96	25,35	17,70	
	250	2,45	21,20	21,85	
	300	2,94	16,85	26,20	

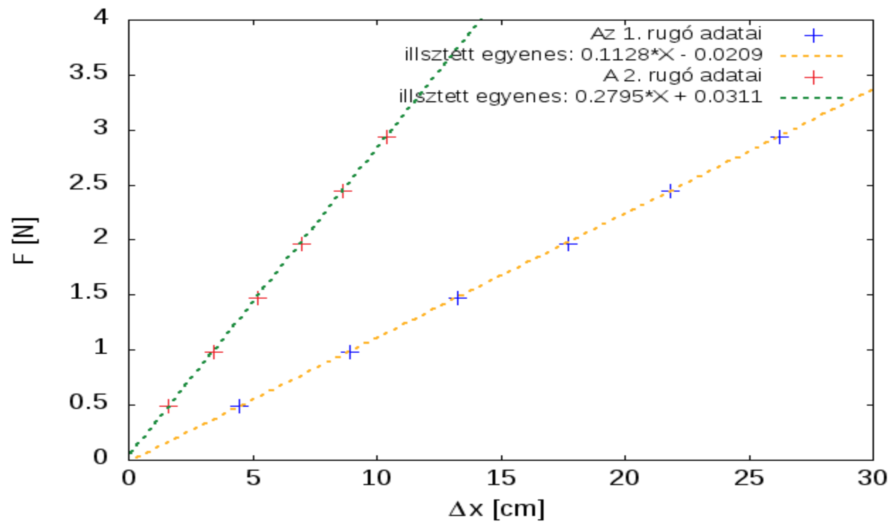
(a)

2. rugó	m [g]	F [N]	x [cm]	Δx [cm]	x_0 [cm]
	50	0,49	41,00	1,60	42,60
	100	0,98	39,20	3,40	
	150	1,47	37,40	5,20	
	200	1,96	35,65	6,95	
	250	2,45	34,00	8,60	
	300	2,94	32,20	10,40	

(b)

1. táblázat. A statikai mérés során mért adatok (a) az első rugó (b) a második rugó esetén

Az erőt ábrázolva a megnyúlás függvényében, a mérési pontok mindkét esetben jól illeszkednek egy egyenesre. A konkrét grafikonok az 1. ábrán láthatók. Mivel feltételeztük, hogy a rugóban ébredő erő, és a megnyúlás között fennáll a $F = D \cdot \Delta x$ lineáris kapcsolat, ezért az egyenesek meredeksége adja a rugók direkciós állandóját.



1. ábra. Az erő-megnyúlás grafikonok és a rájuk illesztett egyenes

A görbeillesztés alapján a rugók direkciós állandóinak értéke:

$$D_1 = 0,1128\frac{N}{cm} = 11,28\frac{N}{m} \qquad \text{és} \qquad D_2 = 0,2795\frac{N}{cm} = 27,95\frac{N}{m}$$

.

A dinamikai mérés során a rugóra akasztott tömeg függvényében mértük a rugó rezgésének periódusidejét. Ha a rugó erőtörvénye valóban lineáris, akkor a rezgés harmonikus lesz, aminek a rezgésideje ismert módon függ a tömegtől, tehát az adatokból meghatározható a rugó direkciós állandója. Mivel a rezgés 10 periódusának idejét mértük 3-szor, a valódi periódusidőt ezen mérések átlagának 10-dét vettük. Ebből származtatható az $\xi = \dfrac{T^2}{4\pi^2}$ változó. Ezeket az adatokat a 2. táblázat tartalmazza.

Mivel a rugó harmonikus rezgést végez, rezgésideje $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mu}{D}}$, ahol $\mu = m + m_{eff}$ ahol m_{eff} a rugó effektív tömege m pedig a rugóra akasztott tömeg. Ez alapján fennáll

	m (η) [g]	10 T_1 [s]	10 T_2 [s]	10 T_3 [s]	$T_{átlag}$ [s]	ξ [s^2]
1. rugó	50	4,25	4,25	4,19	0,42	0,00453
	100	6,06	6,03	5,97	0,60	0,00918
	150	7,36	7,34	7,34	0,73	0,01367
	200	8,44	8,46	8,37	0,84	0,01797
	250	9,32	9,34	9,40	0,94	0,02216
	300	10,31	10,25	10,29	1,03	0,02679

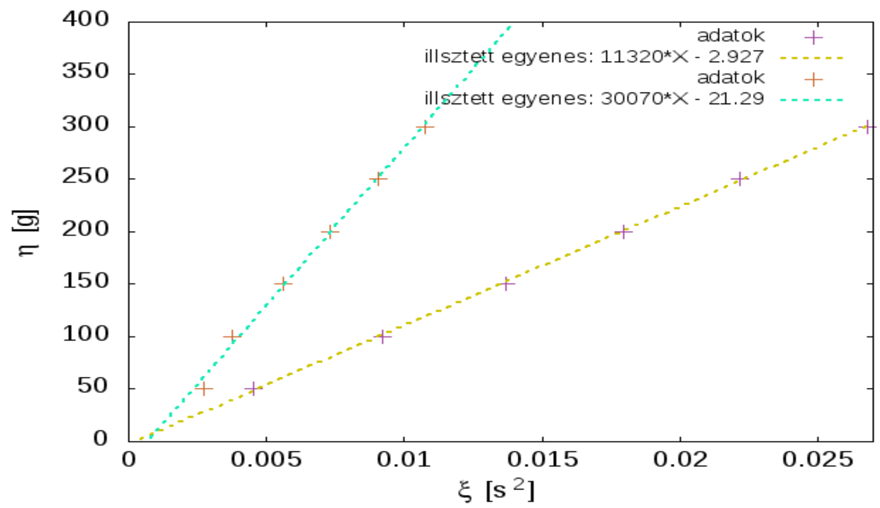
(a)

	m (η) [g]	10 T_1 [s]	10 T_2 [s]	10 T_3 [s]	$T_{átlag}$ [s]	ξ [s^2]
2. rugó	50	3,22	3,32	3,28	0,33	0,00271
	100	3,81	3,85	3,87	0,38	0,00374
	150	4,71	4,72	4,68	0,47	0,00560
	200	5,35	5,38	5,36	0,54	0,00729
	250	5,97	6,00	5,96	0,60	0,00905
	300	6,53	6,53	6,50	0,65	0,01077

(b)

2. táblázat. A dinamikai mérés során mért adatok (a) az első rugó (b) a második rugó esetén

az alábbi összefüggés: $m = \frac{T^2}{4pi^2}D - m_{eff}$. Vagyis, ha a rugóra valóban igaz a lineáris erőtörvény, akkor az $\eta = m$ é a $\xi = \frac{T^2}{4pi^2}$ között lineáris összefüggés van. Ábrázolva az adatokat, ha rájuk egyenes illeszthető, akkor ennek meredeksége adja a direkciós állandó értékét. Ezek az adatok, és a rájuk illesztett egyenes a 2. ábrán láthatók.



2. ábra. A ξ - η grafikonok és a rájuk illesztett egyenes

A görbeillesztés alapján a rugók direkciós állandóinak értéke:

$$D_1 = 11320\frac{g}{s^2} = 11,32\frac{N}{m} \qquad \text{és} \qquad D_2 = 30070\frac{g}{s^2} = 30,07\frac{N}{m}$$

.

Hibaszámítás

A mérés hibáját a szimmetrikus téglalapok módszerével lehet kiszámolni. Kiszámolva az ábrázolt érték eltérését az illesztett egyenes által meghatározott értékétől, akkor a hibák ezen értékek maximumából meghatározható. Ezen adatokat a statikai mérésre a 3. táblázat, a dinamikai mérésre a 4. tartalmazza.

	Δx [cm]	$F_{mért}$ [N]	$F_{ill.}$ [N]	ΔF [N]
1. rugó	4,45	0,491	0,481	-0,009
	8,90	0,981	0,983	0,002
	13,25	1,472	1,474	0,002
	17,70	1,962	1,976	0,014
	21,85	2,453	2,444	-0,009
	26,20	2,943	2,934	-0,009

(a)

	Δx [cm]	$F_{mért}$ [N]	$F_{ill.}$ [N]	ΔF [N]
2. rugó	1,60	0,491	0,416	-0,074
	3,40	0,981	0,919	-0,062
	5,20	1,472	1,422	-0,049
	6,95	1,962	1,911	-0,051
	8,60	2,453	2,373	-0,080
	10,40	2,943	2,876	-0,067

(b)

3. táblázat. A statikai mérés adatainak eltérése az illesztett egyenestől

A statikai mérés alapján a direkciós állandó mérési hibája: $\Delta D = \dfrac{2\,|\Delta F_{max}|}{\Delta x_{max} - \Delta x_{min}}$. A két rugó esetén ez:

$$\Delta D_1 = \frac{2 \cdot 0,014\ N}{21,75\ cm} = 0,129\ \frac{N}{m} \qquad \text{és} \qquad \Delta D_2 = \frac{2 \cdot 0,080\ N}{8,8\ cm} = 1,82\ \frac{N}{m}$$

	ξ [s^2]	$\eta_{mért}$ [g]	$\eta_{ill.}$ [g]	$\Delta\eta$ [g]
1. rugó	0,00453	50	48,38	-1,62
	0,00918	100	100,99	0,99
	0,01367	150	151,84	1,84
	0,01797	200	200,52	0,52
	0,02216	250	247,93	-2,07
	0,02679	300	300,29	0,29

(a)

	ξ [s^2]	$\eta_{mért}$ [g]	$\eta_{ill.}$ [g]	$\Delta\eta$ [g]
2. rugó	0,00271	50	60,32	10,32
	0,00374	100	91,22	-8,78
	0,00560	150	147,20	-2,80
	0,00729	200	197,81	-2,19
	0,00905	250	250,79	0,79
	0,01077	300	302,50	2,50

(b)

4. táblázat. A statikai mérés adatainak eltérése az illesztett egyenestől

A dinamikai mérés alapján a direkciós állandó mérési hibája: $\Delta D = \dfrac{2\,|\Delta\eta_{max}|}{\xi_{max} - \xi_{min}}$. A két rugó esetén ez:

$$\Delta D_1 = \frac{2 \cdot 2,07\ g}{0,02226\ s^2} = 0,186\ \frac{N}{m} \qquad \text{és} \qquad \Delta D_2 = \frac{2 \cdot 10,32\ g}{0,00806\ s^2} = 2,56\ \frac{N}{m}$$

Diszkusszió

Mindkét mérésnél a mért értékek olyan összefüggést mutattak egymással, amit a lineáris erőtörvény esetén elvártunk, vagyis nagy valószínűséggel igazoltuk, hogy a rugóra érvényes. A mérés konkrét eredménye a statikai mérésnél: $D_{1s} = 11,28\ \frac{N}{m} \pm 0,13\ \frac{N}{m}$ és $D_{2s} = 27,95\ \frac{N}{m} \pm 1,82\ \frac{N}{m}$, a dinamikai mérésnél pedig $D_{1d} = 11,32\ \frac{N}{m} \pm 0,19\ \frac{N}{m}$ és $D_{2d} = 30,07\ \frac{N}{m} \pm 2,56\ \frac{N}{m}$. Tehát, mindkét esetben a mért értékek benne vannak egymás hibahatárában, így kijelenthetjük, hogy a rugó direkciós együtthatójának mérése sikeres volt.