

Állóhullámok kötélén

Asztalos Bogdán (7. mérőpár)

mérés időpontja: 2017. 03. 07.

jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2017. 03. 14.

A mérés célja

A mérés két részből áll. Az első részben a vastagabb kötelet terheljük állandó feszítőerővel, és a különböző rezgési módusai előállításához szükséges rezgetési frekvenciát mérjük. Ebből következtetünk majd a kötélen a hullám terjedési sebességére.

A második részben a vékonyabbik kötélen terjedő hullámok sebességének anyagi minőségétől való függését vizsgáljuk. Különböző feszítőerőknél egy adott módus eléréséhez szükséges rezgető frekvenciát mérjük, és igazoljuk a feszítőerő és a rezgető frekvencia közötti összefüggést.

A mérés eszközei

- 2 db, egy vastagabb és egy vékonyabb kötél
- vibrátor és a hozzá tartozó szinuszhullám generátor a kötél rezgetéséhez, és a frekvencia méréséhez
- csiga
- mérőszalag
- 20 g-os tömegek

A mérés menete

A mérés első részében 90 g tömeget akasztottunk a kötél csigán átvett vastagabbik kötél végére, a másik végét pedig a vibrátor segítségével rezgettük, aminek a frekvenciáját a szinuszhullám generátor segítségével tudtuk állítani, és leolvasni. A rezgés során igyekeztünk megtalálni azt a frekvenciát, ami mellett a kötélen pontosan $n \in \mathbb{N}$ darab félhullám fér el. Azt, hogy pontosan melyik frekvencián következik ez be, úgy tudtuk eldönteni, hogy azt néztük, milyen frekvencia mellett lesz a kötél rezgésének amplitúdója a legnagyobb adott számú csomópont mellett.

A mérés bizonytalansága, hogy nem tudjuk, hogy pontosan hol volt az amplitúdó maximuma, csak egy tartományt amin belül nem látjuk változni az amplitúdót. Ennek a tartománynak a közepét vettük az f frekvenciának, a tartomány szélességének a felét pedig a frekvenciamérés Δf bizonytalanságának.

A második részben vékonyabbik kötelet használtuk. A rezgetési frekvenciát most úgy állítottuk be, hogy a kötélen pontosan három félhullám jelenjen meg (ennek megtalálása ugyanúgy zajlott, mint az előző esetben). Ez esetben viszont a kötélnél csigán átvett végére akasztott tömeget változtattuk, 50 g-ról indulva 170 g-ig, ezzel különböző feszítőerőket biztosítva. Minden tömeg esetén háromszor mértük meg a szükséges frekvenciát, hogy azok átlagával számolhassunk tovább.

Hibák

- rosszul megfigyelt amplitúdó-maximum
- a generátor vagy a vibrátor szisztematikus hibája

- húzó súlyok kilengése
- fonál hosszának hibás mérése

Kiértékelés

Terjedési sebesség meghatározása

A különböző rezgési módusok előállításához szükséges rezgési frekvenciát az 1. táblázat tartalmazza. Mivel ebben a mérésben a kötélen lévő félhullámok n számát mi állítottuk

L [cm]	n	f [Hz]	Δf [Hz]
152	2	12,2	0,3
	3	18,4	0,3
	4	25,5	0,2
	5	30,7	0,2
	6	36,7	0,2

1. táblázat. A módusok előállításához szükséges frekvencia

be, ezért a hullámhossz adott:

$$\lambda = \frac{L}{\frac{n}{2}} = \frac{2L}{n}$$

amiből a terjedési sebesség már következik:

$$v = f\lambda = \frac{2Lf}{n}$$

Ez azt jelenti, hogy a frekvencia, és a félhullámok száma konstans, más szóval, az egymás után jövő frekvenciák aránya egyenlő és félhullámok számának arányával. Továbbá, a képlet alapján kiszámolható a vastag kötélen terjedő hullám sebessége. Ezeket az adatokat a 2. táblázat tartalmazza. Ezek alapján, a vastagabb kötélen 90 g tömeg terhelése esetén

n	várt arány	f(n)/f(n-1)	v [m/s]	Δv [m/s]
2	-	-	18,54	0,46
3	1,50	1,51	18,65	0,30
4	1,33	1,39	19,38	0,15
5	1,25	1,20	18,67	0,12
6	1,20	1,20	18,59	0,10

2. táblázat. Adott módusokhoz tartozó frekvencia arányok, és terjedési sebességek

a terjedési sebessége $v = 18,77 \frac{m}{s} \pm 0,35 \frac{m}{s}$.

A terjedési sebesség anyagi minőségtől való függése

A különböző tömegek függvényében a három félhullám előállításához szükséges rezgetési frekvenciák mért értékeit a 3. táblázat tartalmazza.

Referencia kötéll		f [Hz]		
L [m]	m [g]	1.	2.	3.
4,163	0,35	74,9	74,8	74,9
Csomópontok száma*:		88,6	88,6	88,7
2		90	100,5	100,7
g [m/s ²]		110	110,9	111,2
9,81		130	121,0	121,3
		150	130,1	130,4
		170	138,6	138,8

3. táblázat. A rezgetési frekvencia a kötéltre akasztott tömeg függvényében

Az elmélet szerint, egy feszített kötéllben terjedő transzverzális hullám terjedési sebessége

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ahol μ a kötéll lineáris sűrűsége, F pedig a feszítőerő, amit jelen esetben a tömegekre ható nehézségi erő biztosít, tehát $F = mg$. Felhasználva ezt, és az előző részben kapott összefüggést a sebességre és a frekvenciára, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$f^2 = \frac{n^2 g}{4L^2 \cdot \mu} m$$

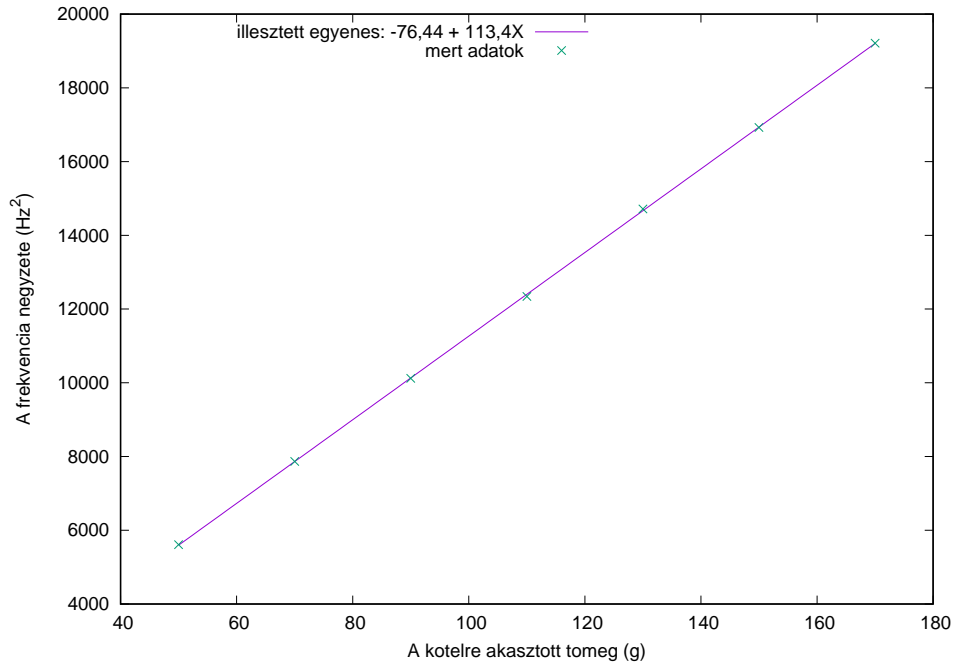
vagyis elvileg a frekvencia négyzete arányos a kötéll végére akasztott tömeggel, ezt szeretnénk igazolni a méréssel.

A három mért frekvencia átlagát, és ezek négyzetét a 4. táblázat tartalmazza. A li-

m [g]	f _{átlag} [Hz]	f ² [Hz ²]	f _{ill} ² [Hz ²]	Δf ² [Hz ²]
50	74,9	5610,01	5593,56	-16,45
70	88,7	7867,69	7861,56	-6,13
90	100,6	10120,36	10129,56	9,20
110	111,1	12343,21	12397,56	54,35
130	121,3	14713,69	14665,56	-48,13
150	130,1	16926,01	16933,56	7,55
170	138,6	19209,96	19201,56	-8,40

4. táblázat. A mért frekvenciából számolt adatok

neáris összefüggés igazolásához ábrázoljuk grafikonon a frekvencia négyzetét a kötéltre akasztott tömeg függvényében, és illesszünk a mért pontokra egyenest! Ezt az 1. ábrán megtettem, és az illesztett egyenes egyenlete: $f^2 = -76,44 \text{ Hz}^2 + 113,4 \frac{\text{Hz}^2}{g} \cdot m$. Az illesztett egyenes egyenlete által kiszámolt f_{ill}^2 értékek, és a mért értékek ettől való



1. ábra. A rezgő frekvencia négyzete a kötéltre akasztott tömeg függvényében

Δf^2 eltérését szintén a 4. táblázat tartalmazza. Ezen adatokból, a szimmetrikus téglalap módszere alapján, az illesztett egyenes M meredekségének hibája:

$$\Delta M = \frac{2|\Delta f_{max}^2|}{m_{max} - m_{min}} = \frac{2 \cdot 54,35 \text{ Hz}^2}{170 \text{ g} - 50 \text{ g}} = 0,45 \frac{\text{Hz}^2}{\text{g}}$$

Mivel a frekvencia tengelyének metszete $-76,44 \text{ Hz}^2$, aminek abszolút értéke sokkal kisebb, mint a többi adat, így valóban egyenes arányosság áll fenn a frekvencia négyzete és a kötel végére akasztott tömeg között, ahol az arányossági tényező

$$M_{mert} = 113,4 \frac{\text{Hz}^2}{\text{g}} \pm 0,5 \frac{\text{Hz}^2}{\text{g}}$$

Ebből, az adatból, valamint a frekvencia és a tömeg közötti összefüggésből kiszámítható a kötel lineáris sűrűsége:

$$\mu_{mert} = \frac{n^2 g}{4L^2 \cdot M} = 8,42 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{m}} \pm 0,04 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

Mivel a referencia kötel adatai ismertek, ki is számolható a kötel lineáris sűrűsége:

$$\mu_{szamitott} = \frac{0,35 \text{ g}}{4,163 \text{ m}} = 8,41 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

Ez a mérési hibán belül azonos a mért adattal.

Diszkusszió

A mérésünk sikeresnek mondható, hiszen mindkét részben az elméleti háttérnek megfelelő eredményt kaptunk, és ezzel beláttuk az igazolandó összefüggéseket. Továbbá, két független módszerrel következtettünk a kötélen lévő hullámok terjedési sebessége, amik a mérési hibán belül megegyeztek, így megfelelően pontos is volt.