AL K. VEKT.

a. előadás (09.21)

Juhász László: Algebra
Középiskolai szakköri füzetek

Matolcsi Tamás: Analízis sorozat (1. kötet: halmazok és számok)
(2. kötet: vektorok)

Az algebra algebrai struktúrákkal foglalkozik
↳ halmaz műveletekkel

~~művelet~~ Bizonyos objektumok relációban állnak egymással
$2; 5 \Rightarrow 2<5$
a, b egyenes $\Rightarrow a \parallel b$

- reláció megadása: – az ~~összes~~ $A \times B$ halmaz részhalmazának megadásával
  pl: soroljuk fel az összes (a, b)-t, ahol $a > b$

ekvivalencia reláció: szimmetrikus, reflexív, tranzitív
- szimmetria: ha $aRb \Rightarrow bRa$
- reflexív: aRa
- tranzitív: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Az egyidejűség látszólag ekvivalencia reláció, de a relativitás elmélet miatt NEM AZ
A párhuzamosság is ekvivalencia reláció.
Egyenlőség az. A hasonlóság is.

A halmazon belül a_0 $\overset{\text{ekv}}{}$ relációval áll $a_1, a_2, \ldots$ -vel $\Rightarrow S$ halmaz
TF, hogy $b_0 \in A$ nincs benne a korábbi körben! $b_0 R b_1$; $b_0 R b_2 \ldots \Rightarrow T$ halmaz

állítás: $S \cap T = \emptyset$

bizonyítás: TFH. $x \in S \wedge x \in T$

$$\begin{array}{ccc} x \in S & & x \in T \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x R a_0 & & x R b_0 \\ \Downarrow & & \\ a_0 R x & \Rightarrow & a_0 R b_0 \Rightarrow \text{Ellentmondás} \end{array}$$

Egy halmaz felosztható diszjunkt halmazokra, amiken belül az elemek ekv. relációban állnak

$\Rightarrow$ Skatulyázás.

A pihhelyezés csak véges halmazokban működik, legalábbis triviális szinten

OSZTÁLYOK: minden halmaz eleme van egy osztályban, de csak egyben

Ha egy halmaz elemeit önkényesen felosztjuk diszjunkt részhalmazokra, amelyek uniója a teljes halmaz, akkor létrehoztunk egy ekv. relációt (osztályzási reláció)

Vegyük az egész számok halmazát

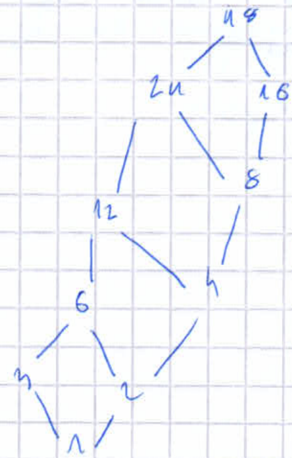
$a,b \in Z$ $\quad a<b \vee a=b \vee a>b$ hármas közül az egyik biztosan igaz

$\Rightarrow$ trichotom

Az egész számokat sorba rendezhetem a $<$ reláció segítségével: rendezési reláció

$a|b$: $a,b \in N^+$ $\exists n$ $b=n\cdot a$

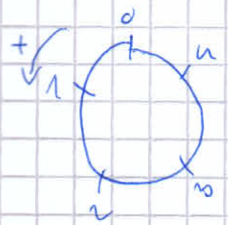
Ez nem trichotom



$\Rightarrow$ Háló struktúra

A halmaz részhalmazai is hálót alkotnak

Pl. A számegyenes körben



+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

zárt, asszociatív

van semleges elem (0)

van inverz [0-0; 1-4; 2-3]

$\Rightarrow$ Ez egy csoport !!!

$(Z_5, +)$

a táblázat a ciklikus permutáció szerint van

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$2\cdot 3 = 6^* = 3+3 = 1$

$2\cdot 4 = 8^* = 4+4 = 3$

$3\cdot 3 = 9^* \equiv 4$ (mert 5-ös periódus van)

$3\cdot 4 = 12^* = 7^* = 2$

zárt, asszociatív

van semleges elem (1)

van inverz (1-1; 2-3; 4-4)

Ez is csoport (szorzással)

$(Z_5\setminus\{0\}, \cdot)$

Z_6-ben

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

Ez már nem csoport (nem zárt, és nem mindig van inverz)

Akkor lesz csoport a $(Z_p, \cdot)$, ha p prím

Mivel az gyűrű, vannak nullosztók. pl. 2, 3

A $(Z_5, +, \cdot)$ egy véges test

$7 \equiv 2 \mod 5$ (kongruens)

Az egész számok az osztási maradékuk alapján osztályokba sorolhatók

$\Rightarrow$ A kongruencia is ekv. reláció

ALKVEKTOR

2. előadás (09.28.)

$\exists n\ \forall a: n+a=a \rightarrow$ n a semleges elem (összeadásra nullelem)

$\exists g\ \forall a: g\cdot a=g \rightarrow$ g az agresszív elem

Hatványozás

$a^b: (a,b) \rightarrow c$ bal oldalt nincs semleges elem, jobb oldalt van.

Létezik-e olyan művelet, amire bal és jobb oldalt is van semleges elem?

állítás: ha van, azok egyenlőek

ugyanis: $\forall a: (n_b, a) \rightarrow a$

$\forall a: (a, n_j) \rightarrow a$ $\Rightarrow$ $(n_b, n_j) = \underline{n_b = n_j}$

Ez akkor érdekes, ha nem kommutatív

Önzetlen elem:

$\forall a: a^0 = 1$

Idempotens elem: $a\cdot a = a$ (pl: 1; 0; •)

A halmazelméletben minden elem idempotens:

$\forall A: A \cap A = A$
$\forall A: A \cup A = A$

Félcsoport (Semi-group) S

zárt, és asszociatív: - $\forall a,b \in S\ \exists c \in S\ a*b=c$

- $\forall a,b,c \in S\ (a*b)*c = a*(b*c)$

pl: pozitív egész számok az összeadásra

Van végtelen sok betű ábécénk, amiből véges hosszú szavakat rakunk ki

abaxc $\rightarrow$ string

$(abaxc)(byb) = (abaxcbyb)$ $\rightarrow$ Ez egy művelet

$\sqcup \rightarrow$ üres string

A stringek a „szorzással" egységelemes félcsoportot alkot

Azt akarjuk, hogy a stringek csoportot alkossanak

a ... z
A ... Z

Bevezetünk egy ekv. relációt: $[(\ldots)a][A(\ldots)] = (\ldots)aA(\ldots) = (\ldots)(\ldots)$

$\Rightarrow$ így van inverz!

$(abAC)(caBA) = (abA)(Cc)(aBA) = (ab)(Aa)(BA) = a(bB)A = aA = \sqcup$

EZ ÍGY CSOPORT !!!

Hilbert: megállapodunk a szabályokban új m axiómákban, és ebből egy bonzá nem értő „robot" felírja az összes matematikai állítást.

Így nincs ellentmondás $\Rightarrow$ FORMALIZMUS

Gödel: Minden ilyen (↑) rendszerben tudunk mondani olyan állítást, amelyet se bebizonyítani, se megcáfolni.

Legyenek az alábbi szabályok: $aa = \sqcup$ (két betű van)

$bbb = \sqcup$

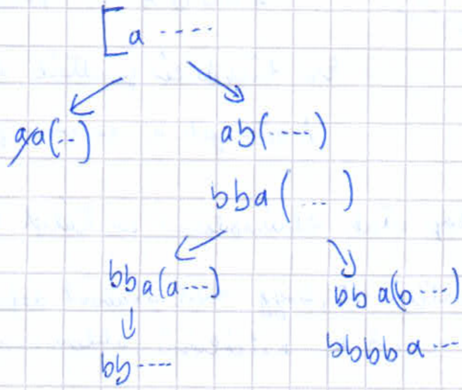
$ab = bba$

$\underbrace{aa}_{\emptyset}\underbrace{ab}_{bba}a\,bbb\,baab \ldots b = bba$

bbba

bb bbb

bba



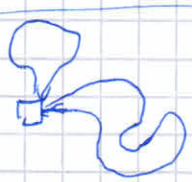
buborékoltatás -> Az „a"-k vagy mennek jobbra, vagy meghalnak. Akkor jut el „a" a végére, ha páratlan volt

6 féle végállapot „a" „ba" „bba" „$\sqcup$" „b" „bb"

Egy algoritmus alapján bármely szó átalakítható a hat kat szóvá

Több betű esetén és bonyolultabb szabályok esetén is kéne algoritmus.

Tetszőleges szabályok esetén nincs ilyen szabály

Kirándulás:  Mik az utak fontosan

Vegyük az utak halmazát! Vezessük be olyan műveletet, hogy egymás után megyünk

Ez egy félcsoport (egységelemes)

Hogy ez ebből csoport?

Legyen két út ekv., ha hig vonalzásokban u.a

Ha megkerüli a fát, a két, nem vihető át egyik a másikba

Ha kétszer kerüli meg, az sem

Ezek a ~~Ixxxx~~ egész számokkal jellemezhetőek

Legyen 2 dk. fa!

A fák megkerülését betűkkel jellemezhetjük, az irányt a betű méretével

a a b B A $\Rightarrow$ string

Ez kiinduló ponttól független.

A stringek a szorzásra jellemző, a stringek csoportot alkotnak

A homotóp utak ekvivalencia osztályt alkotnak

Hogyan döntjük el, hogy két alakzat deformálható-e egymásba? Mindkettőhöz rendelek egy számot, így ha különböző, akkor nem. Topológiailag invariáns

Ha a két szám azonos, még akkor sem feltétlen invariáns

S (z, a), ES (z, a, e), G (z, a, e, i) – Egy műveletes

$(\mathbb{R}, +, \times)$, $(K, +, \times)$ – 2 műveletes

$(V, S, V\times V \to V, V\times S \to V)$ – 2 műveletes, 2 halmazos struktúra; $S \downarrow K$

$A: (V, +, \times, \cdot, \mathbb{R}) \to$ Algebra

$$V \ni \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \qquad \forall \alpha, \beta \in S$$

Hogy szorzunk?

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \times (\gamma\vec{a} + \delta\vec{b}) = \alpha\gamma(\vec{a}\times\vec{a}) + \beta\gamma(\vec{b}\times\vec{a}) + \alpha\delta(\vec{a}\times\vec{b}) + \beta\delta(\vec{b}\times\vec{b}) =$$

$$= (\alpha\gamma - \beta\delta)\vec{a} + (\beta\gamma + \alpha\delta)\vec{b}$$

Legyen
$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{a}$
$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}$
$\vec{b}\times\vec{a} = \vec{b}$
$\vec{b}\times\vec{b} = -\vec{a}$

Ez olyan, mint a komplex számok

$\vec{a} \sim 1$

$\vec{b} \sim i$

Ez azért van, mert a komplexeket vektorokként is értelmezték

$\Rightarrow$ A komplexek Testet alkotnak, de a valósakkal együtt Algebrát

Mivel $\vec{a}$ az egységelem, az legyen 1. $\vec{b}$ meg legyen i

ALK. VEKTOR

3. előadás (10.12.)

Algebra: Skalárral bővített vektortér + szorzás, ami kompatibilis a két művelettel

$(A_s, +, \cdot, *)$ $*$ nem feltétlen kommutatív

$$(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) * \underline{c} = \alpha(\underline{a} * \underline{c}) + \beta(\underline{b} * \underline{c})$$

Egy $N \times M$-es mátrix-vektortér $N \cdot M$ dimenziót alkot

Természetes bázis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$

A négyzetes mátrixok a szorzással algebrát

Sőt a négyzetes mátrixok a szorzással félcsoport alkotnak (a det $\underline{A}=0$ mátrixnak nincs inverze)

DE a nem 0 determinánsú mátrixok a szorzással csoportot alkotnak

$GL(n, \mathbb{R})$ általános lineáris csoport ($n \times n$-es mátrixok a valós számokkal)

komplexekkel $GL(n, \mathbb{C})$

Az 1 determinánsú mátrixok is csoport alkotnak

$SL(n, \mathbb{R})$ és $SL(n, \mathbb{C})$

nevezetes: $SL(2, \mathbb{C}) \to$ relativisztikus kvantummechanika

ortogonális mátrix: $\underline{F} \cdot \tilde{\underline{F}} = \underline{1}$

Ezek is csoportot alkotnak

zártság bizonyítása:

$$\underline{A} \in O(n) \qquad \underline{B} \in O(n)$$

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$$

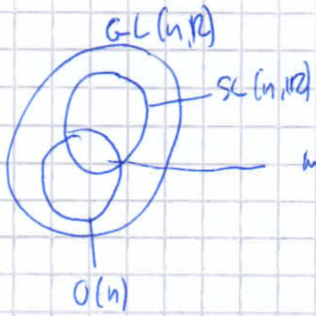
$$C_{kl} = \sum_m A_{km} B_{ml}$$

$$\tilde{C}_{kl} = C_{lk} = \sum_m A_{lm} B_{mk} = \sum_m (\tilde{A})_{ml} (\tilde{B})_{km} = \sum_m (\tilde{B})_{km} (\tilde{A})_{ml} = (\tilde{\underline{B}} \tilde{\underline{A}})_{kl} =$$

$$\Rightarrow \tilde{\underline{C}} = \tilde{\underline{B}} \tilde{\underline{A}}$$

$$\underline{A} \tilde{\underline{A}} = \underline{1} \qquad \underline{B} \tilde{\underline{B}} = \underline{1} \qquad \tilde{\underline{B}} \underline{B} = \underline{1}$$

$$\underline{C} \tilde{\underline{C}} = (\underline{A} \underline{B})(\tilde{\underline{B}} \tilde{\underline{A}}) = \underline{A}(\underline{B} \tilde{\underline{B}}) \tilde{\underline{A}} = \underline{A} \, \underline{1} \, \tilde{\underline{A}} = \underline{A} \tilde{\underline{A}} = \underline{1}$$



Metszetben azok az 1 determinánsú mátrixok, amik ortogonálisak

Ha $\underline{F}\tilde{\underline{F}} = \underline{1}$

$(\det F)(\det \tilde{F}) = \det 1 = 1$

$(\det F)^2 = 1$

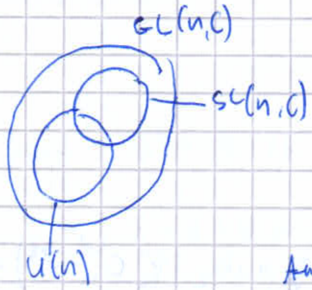
$\det F = 1$ $\qquad$ $\det F = -1$

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

SO(n) is csoport

$\Downarrow$

n dimenziós térben a forgatást írják le.



Mátrix konjugáltja: minden szám konjugáltja

$\underline{A}^+ = (\tilde{\underline{A}})^*$: adjungálás

Amik $\underline{U}^+ = U^{-1}$: unitér mátrixok

SU(n) $\rightarrow$ kvantummechanikában fontos

Egy mátrixot számmal szorozva a det-ja α^n-re lesz

Vegyük a vektoriális szorzást:

$(V_3, +, \cdot, \times)$ $\rightarrow$ algebra

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} =$ $\rightarrow$ kifejtési tétel

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) = 0}$$

Antikommutativitás és Jacobi szabály $\Rightarrow$ Lie-algebra

$n\times n$-es mátrixok esetén:

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$: ismert

Legyen $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ $\rightarrow$ mit kap?

$\underline{\underline{D}} = B * A = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{C}}$ $\rightarrow$ antikommutatív

$$(\underline{\underline{A}} * \underline{\underline{B}}) * \underline{\underline{C}} + (\underline{\underline{C}} * \underline{\underline{A}}) * \underline{\underline{B}} + (\underline{\underline{B}} * \underline{\underline{C}}) * \underline{\underline{A}} = (A*B)C - C(A*B) + (C*A)B - B(C*A) + (B*C)A - A(B*C) =$$

$$= (AB-BA)C - C(AB-BA) + (CA-AC)B - B(CA-AC) + (BC-CB)A - A(BC-CB) =$$

$$= ABC - BAC - CAB + CBA + CAB - ACB - BCA + BAC + BCA - CBA - ABC - ACB = 0$$

$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ $\rightarrow$ kommutátor

A mátrixok a kommutátorukkal LIE algebrát alkotnak

Algebrát struktúra állandóval kell megadni

A algebrában $\vec{e}^{(k)}$ bázis

$\vec{a} = \sum_k a_k \vec{e}^{(k)}$ $\qquad b = \sum_l b_l \vec{e}^{(l)}$

$$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b} = \Big(\sum_k a_k \vec{e}^{(k)}\Big) * \Big(\sum_l b_l \vec{e}^{(l)}\Big) = \sum_k \sum_l a_k b_l \left(\vec{e}^{(k)} * \vec{e}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l a_k b_l \Big(\sum_m C_m^{kl} \vec{e}^{(m)}\Big) =$$

$$= \sum_m \Big(\sum_k \sum_l C_m^{kl} a_k b_l\Big) \vec{e}^{(m)} = \sum_m c_m \vec{e}^{(m)}$$

$\dim V = 2$ $\qquad \vec{e}, \vec{f}$ bázis

$\vec{a} = a_1 \vec{e} + a_2 \vec{f}$ $\qquad \vec{b} = b_1 \vec{a} + b_2 \vec{f}$

$$\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 (\vec{e} * \vec{e}) + a_1 b_2 (\vec{e} * \vec{f}) + a_2 b_1 (\vec{f} * \vec{e}) + a_2 b_2 (\vec{f} * \vec{f}) =$$

Legyen
$$\begin{aligned} \vec{e} * \vec{e} &= e &&= 1e + 0f \\ \vec{e} * \vec{f} &= \vec{f} &&= 0e + 1f \\ \vec{f} * \vec{e} &= \vec{f} &&= 0\vec{e} + 1f \\ \vec{f} * \vec{f} &= -\vec{e} &&= (-1)e + 0f \end{aligned}$$

$= (a_1 b_1 - a_2 b_2)\vec{e} + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\vec{f}$ $\qquad$ Mint a komplexeknél

A komplex a valós számok felett egy 2D-s algebrát alkotnak (csak tudjuk őket ábrázolni)

$\vec{e}$ a szorzásra egységelem. Az ilyen algebrát hiperkomplexnek hívjuk

Másképp vezessük be a komplexeket:

Legyen $j^2 = 3 - 2j$ (a -1 helyett)

$z = a + bj \quad a, b \in \mathbb{R}$

$(5+2j)(3-4j) = 15 + 6j - 20j - 8jj = 15 - 14j - 8(3-2j) = 15 - 14j - 24 + 16j =$

$= -9 + 2j$ → így is zárt ⇒ hiperkomplex rendszer

Fejezzük ki a földi i-t!

$i = x + yj$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$

$i^2 = (x+yj)(x+yj) = x^2 + xyj + yjx + y^2j^2 = x^2 + 2xyj + y^2(3-2j) =$

$= x^2 + 3y^2 + (2xy - 2y^2)j = -1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot j$

$$\Downarrow \quad \left.\begin{array}{l} x^2 + 3y^2 = -1 \\ 2xy - 2y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Ezt nem lehet megoldani ☹

Ez nem u.a., mint a földi $\mathbb{C}$

Más: $k^2 = -9 + 2k$

$z = a + bk \quad a, b \in \mathbb{R}$

$i = x + yk \quad x, y \in \mathbb{R}$

$i^2 = (x+yk)(x+yk) = x^2 - 2xyk + y^2k^2 = x^2 - 2xyk + y^2(-9+2k) =$

$= x^2 - 2xyk - 9y^2 + 2y^2k = (x - 9y^2) + (2xy - 2y^2)k = -1$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 9y^2 = -1 \\ 2xy - 2y^2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ úgy $y = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ nem jó

úgy $x - y = 0 \Rightarrow x^2 - 9y^2 = -8x^2 = -1$

itt $i = \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}}k$ $\qquad x = \frac{1}{\sqrt{8}}$

vagyis $k = -1 + \sqrt{8}\,i$

Minden $z(k)$ átváltható $z(i)$-re. ⇒ a $\mathbb{C}$-n kicseréltük a bázist

Tetszőleges $j^2 = \alpha + \beta j$ esetén ~~két~~ három esetben:
- létezik i ami $i^2 = -1$
- létezik ε ami $\varepsilon^2 = 0$
- létezik φ, ami $\varphi = 1$

Legyenek 2×2-es mátrixok!

a) $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = -\underline{1}$ $\qquad i^2=-1$

Tehát $a+bi \to a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix} = C(a,b)$

$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ $\quad \varphi=\frac{\pi}{2}$ esetén $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

90°-os forgatás

determináns $= a^2+b^2\neq 0$
csak $a=b=0$
$\Rightarrow$ test

b)

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \underline{1}$ $\qquad \varphi^2=1$

Tehát $a+b\varphi = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$

antikomplex számok

determináns a^2-b^2 $\Rightarrow$ nem test mert nincs mindenkinek reciproka

c)

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon^2=0$

$a+b\varepsilon = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$

Ha $a=0$ $\Rightarrow$ nincs inverz

Nevezik az $1+v\varepsilon$ számokat Study-féle számok $S(v)$

$1+v\varepsilon \to \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&v\\0&1\end{pmatrix}$

$S(u)S(v) = \begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&v\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&v+u\\0&1\end{pmatrix} = S(u+v)$

$S(u)S(v)=S(u+v)$ $\Rightarrow$ exp alak

$\exists$ B mátrix, hogy $S(u)=e^{Bu}$

$S(0)=\underline{1}$

$S'(u)=B e^{Bu}$ $\qquad S'(0) = \underline{B}\,\underline{1} = \underline{B}$

$=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \underline{B} = \varepsilon$

Tehát $S(u)=e^{u\underline{\varepsilon}}$

Hatványsor miatt $S(u)=\underline{1}+u\underline{\varepsilon}+\frac{u^2\varepsilon^2}{2!}+\frac{u^3\varepsilon^3}{3!} = 1+u\underline{\varepsilon}+0+0+0$ $\Rightarrow$ stimmel

Szorozzuk $S(v)$ mátrixot és vektorral az $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ vektorral

$$\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + vt \\ t \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= x + vt \\ t' &= t \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{Galilei transzformáció}$$

A v sebességgel mozgó vonatban u sebességgel mozgunk

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = S(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = S(u) \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = S(u) \left(S(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right) = S(u) S(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = S(w) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$w = u + v$ a talajhoz képest $u+v$ sebbel megyünk

ALK. VEKTOR

4. előadás (10.19)

Komplex szám algebrája

$$1, i \to \vec{e^{(1)}}, \vec{e^{(2)}}$$

$$z = a\cdot 1 + bi \to \vec{v} = a\vec{e^{(1)}} + b\vec{e^{(2)}}$$ ⇒ kell egy műveleti tábla

$a, b \in \mathbb{R}$

	1	i
1	1	i
i	i	-1

Quaterniók

$1, i, j, k$ $\qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$a\cdot 1 + bi + cj + dk = q$$

Az összeadáson új számok szorzása és egy 4D-s vektortér

Algebra bevezetéséhez kell egy szorzástábla

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

$\Rightarrow \mathbb{H}$ (kvaterniók algebrája)

$$q_1 q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 (-1) - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2) j$$
$$+ (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) k$$

$$q_2 q_1 = (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1) + (a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1) i + (a_2 c_1 + c_2 a_1 - b_2 d_1 + d_2 b_1) j$$
$$+ (a_2 d_1 + d_2 a_1 + b_2 c_1 - c_2 b_1) k$$

$$\Rightarrow q_1 q_2 \neq q_2 q_1$$

Nézzük a kommutátort:

$$[q_1, q_2] = \frac{q_1 q_2 - q_2 q_1}{2} = (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k$$

Ez olyan, mint $(b_1 \underline{i} + c_1 \underline{j} + d_1 \underline{k}) \times (b_2 \underline{i} + c_2 \underline{j} + d_2 \underline{k})$

Nem csoda, hisz a forgatás leírásához kell egy ez együ.

Anti-kommutátor

$$\{q_1, q_2\} = \frac{q_1q_2 + q_2q_1}{2} =$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2)k$$

Az első tagban el van dugva a skaláris szorzás

$q = a + bi + cj + dk$ → a skalár, a többi három úgy, mint egy 3D-s vektor

$= a + \underline{v}$ $\qquad a = \mathrm{Re}\, q$

$\mathrm{Im}\, q = bi + cj + dk$

Konjugált: $\bar{q} = a - bi - cj - dk = a - \underline{v}$

$$q\bar{q} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = |q|^2 = a^2 + |\underline{v}|^2 \geq 0 \qquad (\text{mellesleg } q\bar{q} = \bar{q}q)$$

Reciprok:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q}\frac{\bar{q}}{\bar{q}} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

⇒ A kvaterniók egy nem kommutatív testet alkotnak

Kvaterniókra teljesül, hogy, ami komplexekre: $|q_1q_2| = |q_1||q_2|$

Frobenius tétele: Csak 4 olyan test létezik, amelyre igaz a fenti azonosság!

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ + a 8 dimenziós hiperkomplexek

↳ Oktoniók / Oktávok / Cayley-féle számok

DE az októniók már nem asszociatívak

Nézzük a $\mathbb{H}$-nak azt a részhalmazát, ahol $a = 0$ ⇒ Tisztán képzetes kvaterniók

És egy általános $q_1 = 0 + b_1i + c_1j + d_1k \to 0 + \underline{v_1}$ $\qquad q_2 = 0 + b_2i + c_2j + d_2k \to 0 + \underline{v_2}$

$$q_1q_2 = (-b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1c_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k$$

$$\to -(\underline{v_1}\,\underline{v_2}) + \underline{v_1} \times \underline{v_2}$$

Ha $q \in \mathbb{H}_k < \mathbb{H}$ ⇒ $\mathrm{Re}(q_1q_2) = -(v_1v_2)$ $\qquad \mathrm{Im}(q_1q_2) = \underline{v_1} \times \underline{v_2}$

A XIX. sz. végéig kvaterniókkal írták le a teret (pl.: Maxwell)

Heaviside és Gibbs → vektorok (ez leválasztja az elméletet a számokról)

A kvaterniók asszoc. de nem komm, így reprezentálhatóak mátrixokkal

Pauli-mátrixok

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Állítás: lineárisan függetlenek:

$$\alpha \sigma^{(1)} + \beta \sigma^{(2)} + \gamma \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha - i\beta \\ \alpha + i\beta & -\gamma \end{pmatrix}$$ → Ez csak a triv. esetben 0.

tehát $\mathbb{R}^3 \ni \underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & \alpha - i\beta \\ \alpha + i\beta & -\gamma \end{pmatrix} = \underline{\underline{H}}(\underline{v})$

Adjungálás: $\underline{\underline{A}}^{\dagger} = \tilde{\underline{\underline{A}}}^{*} = \underline{\underline{A}}$ → önadjungált vagy hermitikus

A főátlóbeli elemek összege (a mátrix nyoma): $\sum_k A_{kk} = Sp\, \underline{\underline{A}} \; (= Tr\, \underline{\underline{A}})$

~~Sp~~ A, ez egy spúrtalan mátrix

$$Sp\, H(v) = 0$$

Beláthatnó, hogy az összes spúrtalan hermitikus mátrix Pauli mátrix

$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} u_3 & u_1 - i u_2 \\ u_1 + i u_2 & u_3 \end{pmatrix}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow H(\underline{v}) = \begin{pmatrix} v_3 & v_1 - i v_2 \\ v_1 + i v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

$$H(u)H(v) = \begin{pmatrix} u_3 & u_1 - i u_2 \\ u_1 + i u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & v_1 - i v_2 \\ v_1 + i v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \left(\sum_k u_k \sigma^{(k)}\right)\left(\sum_l v_l \sigma^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l u_k v_l \sigma^{(k)} \sigma^{(l)}$$

$$\sigma^{(1)}\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

$$\sigma^{(2)}\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

$$\sigma^{(3)}\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

$$\sigma^{(1)}\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma^{(3)}$$

$$\sigma^{(2)}\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma^{(3)}$$

$$\sigma^{(1)}\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^{(2)}$$

$$\sigma^{(3)}\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^{(2)}$$

$$\sigma^{(2)}\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^{(1)}$$

$$\sigma^{(3)}\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^{(1)}$$

Általánosan: $\boxed{\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(e)} = i\sum_m \varepsilon_{kem}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)} + \delta_{ke}\underline{\underline{1}}}$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{u})\underline{\underline{H}}(\underline{v}) = \sum_k\sum_e u_k v_e \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(e)} = \sum_k\sum_e u_k v_e\left(\delta_{ke}\underline{\underline{1}} + i\sum_m \varepsilon_{kem}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) =$$

$$= \left(\sum_k\sum_e u_k v_e \delta_{ke}\right)\underline{\underline{1}} + i\sum_m\left(\sum_k\sum_e \varepsilon_{kem} u_k v_e\right)\sigma^{(m)} =$$

$$= \left(\sum_k u_k v_k\right)\underline{\underline{1}} + i\sum_m (u\times v)_m\,\sigma^{(m)} = (\underline{u}\,\underline{v})\underline{\underline{1}} + i\,H(\underline{u}\times\underline{v})$$

ALK VEKTOR
9. előadás (10.26.)

kvaterniók: $ii = jj = kk = -1$

$$ij = k \qquad ji = -k$$
$$jk = i \qquad kj = -i$$
$$ki = j \qquad ik = -j$$

$\mathbb{H} \ni q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$

Ettől függetlenül a Pauli-mátrixok

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \underline{\underline{1}}$$

$\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} = i \sigma^{(3)}$ . . . . stb: $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)} + \delta_{kl} \underline{\underline{1}}$

hasonlóság: asszociatív, de nem kommutatív szorzás
szorzási szabályok

különbség: a kvaterniók számok, a mátrixok nem
két ugyanolyan q szorzata -1, mátrixé $\underline{\underline{1}}$

DE: $\cancel{(i\sigma^{(1)})(i\sigma^{(2)}) = -i\sigma}$

$$\underset{i}{(-i\sigma^{(1)})}\,\underset{j}{(-i\sigma^{(2)})} = \underset{k}{(-i\sigma^{(3)})}$$

Alternatív mátrixok: $\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^{(3)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Így a kvaterniók és a mátrixok izomorfak:

$$\alpha \underline{\underline{1}} + \beta \rho^{(1)} + \gamma \rho^{(2)} + \delta \rho^{(3)} \longleftrightarrow \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

A kvaterniók algebrájának mx ábrázolása

$$\underline{a} \times \underline{y} = \underline{b} \qquad \underline{a} \neq \underline{0}$$

$$\underline{b} \times \underline{y} = \alpha \underline{a} \qquad \underline{b} \neq \underline{0}$$

$\underline{a}\underline{b} \neq 0$ $\qquad$ $\underline{b}\,\underline{a} = 0$

$\underline{y} \notin V$ $\qquad$ először: $\underline{y} = \lambda \underline{a} - \frac{1}{a^2}(\underline{a} \times \underline{b})$

$$\underline{b} \times \underline{y} = \underline{b} \times \left(\lambda \underline{a} - \frac{1}{a^2}(a \times b)\right) = \lambda b \times a - \frac{1}{a^2} b \times (a \times b) = \lambda \underline{b} \times \underline{a} - \frac{1}{a^2}\left(\underline{a}(\underline{b}\underline{b}) - b(\underline{a}\underline{b})\right) =$$

$$= \lambda \underline{b} \times \underline{a} - \frac{b^2}{a^2}\underline{a} = \alpha \underline{a} \Rightarrow \lambda = 0$$

DE ha $\alpha \neq -\frac{b^2}{a^2}$ Nincs megoldás

$$\boxed{\underline{y} = -\frac{1}{a^2}(a \times b)}$$

$$\underline{y} = \underline{a} \times \underline{y} + \underline{b} \qquad \begin{array}{l} \underline{a} \neq \underline{0} \\ \underline{b} \neq \underline{0} \end{array}$$

$\underline{b} = \lambda \underline{a}$

Ilyenkor $\underline{a} \times b = 0$

és $\underline{a}\,\underline{b} = \lambda \underline{a}^2$

Amásik megoldás

$$\underline{y} = \frac{\lambda a^2}{1+a^2}\underline{a} + \frac{1}{1+a^2}\lambda \underline{a} =$$

$$= \lambda \underline{a} = \underline{b}$$

Ez jó

$\underline{a} \times \underline{b} \neq 0$

$$\underline{y} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma(\underline{a} \times \underline{b}) \qquad | a \times$$

$$\underline{a} \times \underline{y} = \alpha \cdot 0 + \beta(\underline{a} \times \underline{b}) + \gamma\left[\underline{a}(\underline{a}\underline{b}) - \underline{b}a^2\right]$$

$$\underline{y} = \gamma(\underline{a}\underline{b})\underline{a} + (1 - \gamma a^2)\underline{b} + \beta(a \times b) = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma(\underline{a} \times \underline{b})$$

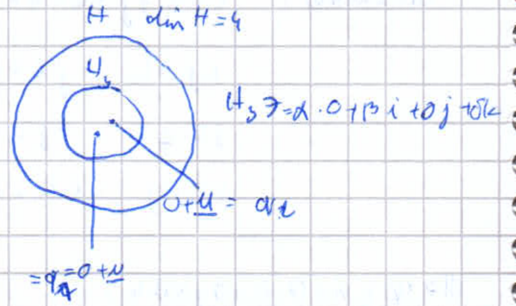
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(\underline{a}\underline{b}) = \alpha \\ 1 - \gamma a^2 = \beta \\ \beta = \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = \gamma = \frac{1}{1+a^2} \\ \alpha = \frac{\underline{a}\underline{b}}{1+a^2} \end{array}$$

$$\underline{y} = \frac{\underline{a}\underline{b}}{1+a^2}\underline{a} + \frac{1}{1+a^2}\left(\underline{b} + (\underline{a} \times \underline{b})\right)$$

A Pauli mátrixok önadjungáltak (hermitesek) A $\sigma^{(k)+} = \sigma^{(k)}$

Tétel: Önadjungált mátrix sajátértékei valósak.



$q = \alpha + \underline{v}$, ahol $\underline{v} = \beta \underline{i} + \partial \underline{j} + \delta \underline{k}$

$$\frac{q_1 q_2 - q_2 q_1}{2} = 0 + \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \rightarrow q_1 * q_2$$

$$q_1 q = -(u\,v)1 + \underline{v} \times \underline{u} \notin H_3$$

DE

$$q_1 * q_2 = 0 + \underline{v} \times \underline{u} \in H_3$$

Így a H_3 részhalmaz a kommutátorral algebra lett.

Ez izomorf a 3D vektorok (vekt szorzás) algebrájával

→ Lie-Algebra

Sejtétel: Mindig van egy $n > 3$ dimenziós asszociatív algebra, amiben egy részhalmazon értelmezzük a kommutátort, amiből egy adott Lie-algebrát lehet származtatni

Miért jó ez? Lehet mátrixokkal reprezentálni (pl: vektorok: $1 \times n$-es mátrixok)

Mostantól csak a Pauli mátrixokkal számolunk

$$\mathbb{R}^3 \ni \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \sum_k a_k \underline{e}^{(k)} \longleftrightarrow \sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = \underline{\underline{H}}(\underline{a})$$

Valós lin-tér (mert az együtthatók valósak, a benne lévő i lineáris műveleteket nem zavarja)

DE $\sigma^{(2)}$ akár hiperkomplex is elhagyható

$$\sigma^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \sigma^{(2)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sigma^{(3)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\boxed{HF}$ → ellenőrizni az azonosságokat

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{H}}^+ = \underline{\underline{H}} \qquad Sp\,\underline{\underline{H}} = 0$$

Legyen M, azon halmaz, amelyekre ez igaz

$$\underline{\underline{H}} \in M$$

Ez alapján $\mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow M$

Előző óra alapján:

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{H}}(\underline{b}) = (\underline{a}\,\underline{b})\,\underline{\underline{1}} + i\, H(\underline{a}\times\underline{b})$$

$$\frac{Sp\left[\underline{\underline{H}}(\underline{a})\cdot\underline{\underline{H}}(\underline{b})\right]}{2} = (\underline{a}\,\underline{b})\, Sp\,\underline{\underline{1}}\cdot\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\,Sp\left(H(a\times b)\right) = (\underline{a}\,\underline{b})\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\cdot 0 = \underline{a}\,\underline{b}$$

Mivel $Sp(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = Sp(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$ ezért $\underline{a}\,\underline{b} = \underline{b}\,\underline{a}$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a}\times\underline{b}) = \frac{\underline{\underline{H}}(\underline{a})\underline{\underline{H}}(\underline{b}) - \underline{\underline{H}}(\underline{b})\underline{\underline{H}}(\underline{a})}{2i}$$

$$\det \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & -a_3 \end{vmatrix} = a_3(-a_3) - (a_1 - i a_2)(a_1 + i a_2) = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = -|\underline{a}|^2$$

Az $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$ hasonlóan számít a Pauli-mátrixos transzformációknál

$$\underline{\underline{H}}'(\underline{a}) = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$Sp\,\underline{\underline{H}}'(\underline{a}) = Sp\left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right) = Sp\left(\underline{\underline{U}}^{-1}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\right) = Sp\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a})\right) = 0$$

Belátható, hogy $\widetilde{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}} = \tilde{\underline{\underline{B}}}\cdot\tilde{\underline{\underline{A}}}$ Emiatt: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^+ = \underline{\underline{B}}^+\,\underline{\underline{A}}^+$

és $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})^+ = \underline{\underline{C}}^+\,\underline{\underline{B}}^+\,\underline{\underline{A}}^+$ és analóg módon $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1}\,\underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$

$$\left(\underline{\underline{H}}'(\underline{a})\right)^+ = \left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)^+ = \underline{\underline{U}}^{-1+}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})^+\,\underline{\underline{U}}^+ =$$ ha $U^{-1} = U^+$, azaz unitér mátrix

$$= \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})^+\,U^{-1} = H(a)$$

Tehát $\underline{\underline{H}}'(\underline{a}) \in M \Rightarrow \exists\, a' :\ a' \leftrightarrow \underline{\underline{H}}'(\underline{a})$

Emiatt $\exists$ lin operátor, ami $a \rightarrow a'$ a fenti módon $\underline{a}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{a}$ ahol $H(a') = U H(a) U^{-1}$

$$+|a'|^2 = -\det \underline{\underline{H}}(\underline{a}') = -\det H'(a) = -\det\left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,U^{-1}\right) = -\det\underline{\underline{U}}\cdot\det\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\det\underline{\underline{U}}^{-1} = -\det\underline{\underline{H}}(\underline{a}) = |\underline{a}|^2$$

Olyan, mint a forgatás. Forgatásra igaz, hogy $\underline{a} \to \underline{a}'$ $\underline{b} \to \underline{b}'$ $\underline{a}\,\underline{b} = \underline{a}'\,\underline{b}'$

Itt: $$\underline{a}'\,\underline{b}' = \frac{1}{2}Sp\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a}')\,\underline{\underline{H}}(\underline{b}')\right) = \frac{1}{2}Sp\left(\left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)\left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{b})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)\right) = \frac{1}{2}Sp\left(\left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\right)\left(\underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{U}}\right)\left(\underline{\underline{H}}(\underline{b})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}Sp\left(\underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{H}}(\underline{b})\right) = \frac{1}{2}Sp\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{H}}(\underline{b})\right) = \underline{a}\,\underline{b}\ \checkmark$$

Hogy kódoljuk ki a $H(\underline{a}) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & -a_3 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{a}$-t ?

$$H(a) = \sum_k a_k \sigma^{(k)} \qquad / \sigma^{(l)}$$

$$Sp\left(H(a)\sigma^{(l)}\right) = Sp\left(\sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) = Sp\left[\sum_k a_k\left(\delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\sigma^{(m)}\right)\right] =$$

$$= \sum_k a_k \delta_{kl} \underbrace{\left(Sp\,\underline{\underline{1}}\right)}_{2} + i\sum_k\sum_m a_k \varepsilon_{klm}\underbrace{\left(Sp\,\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right)}_{0} = 2\,a_l$$

$$a_k' = \frac{1}{2}Sp\left(H(a')\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right) = \frac{1}{2}Sp\left(\sigma^{(k)}H'(a)\right) = \frac{1}{2}Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(a)\underline{\underline{U}}^{-1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{U}}\left(\sum_l a_l \underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right)U^{-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_l a_l\, Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{l}\underline{\underline{U}}^{-1}\right) = \sum_l \left(\underbrace{\frac{1}{2}Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{l}\underline{\underline{U}}^{-1}\right)}_{F_{kl}}\right)a_l =$$

$$= \sum_l F_{kl}\,a_l$$

Mit csináltunk:

$$\begin{tikzcd} \underline{a} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\underline{\underline{F}}_1"'] & \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \arrow[r, "\underline{\underline{U}}_1"] & \underline{\underline{H}}(\underline{a}') \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[r, "\underline{\underline{U}}_2"] & \underline{\underline{H}}(\underline{a}'') \arrow[r, hook] & \underline{a}'' \\ & & \underline{a}' \arrow[urr, bend right, "\underline{\underline{F}}_2"'] & & \end{tikzcd}$$

$$H(a') = \underline{\underline{U}}_1\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}_1^{-1}$$

$$H(a'') = \underline{\underline{U}}_2\,\underline{\underline{H}}(\underline{a}')\,\underline{\underline{U}}_2^{-1} = \underline{\underline{U}}_2\left(\underline{\underline{U}}_1\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}_1^{-1}\right)\underline{\underline{U}}_2^{-1} = \left(\underline{\underline{U}}_2\underline{\underline{U}}_1\right)\underline{\underline{H}}(\underline{a})\left(U_1^{-1}U_2^{-1}\right)$$ Mivel az unitér m. csoport

$$= \underline{\underline{U}}_3\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}_3^{-1}$$

Ez alapján $\quad \underline{a}' = \underline{\underline{F}}_1\underline{a} \qquad \underline{a}'' = \underline{\underline{F}}_2\underline{a}' = \underline{\underline{F}}_2\left(\underline{\underline{F}}_1\underline{a}\right) = \left(\underline{\underline{F}}_2\underline{\underline{F}}_1\right)\underline{a} = \underline{\underline{F}}_3\underline{a}$

$U \to F$: homomorfizmus (! nem izomorfia !) $\qquad \begin{matrix} U \to F \\ -U \nearrow \end{matrix}$

Mivel $\underline{U}^+\underline{U} = \underline{1}$

$\det\underline{U}^+ \cdot \det\underline{U} = \det\underline{1} = 1 \qquad$ Mivel $\det\underline{U}^+ = \det\left(\tilde{\underline{U}}\right)^* = \left(\det\tilde{U}\right)^*$

$(\det\underline{U})^*(\det\underline{U}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det\underline{U} = e^{i\varphi}$

Legyen megszorítva $U \in SU(2)$, ahol $\det\underline{U} = 1$

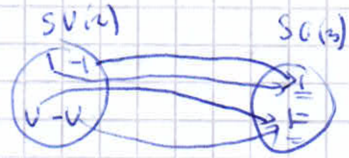
ALKVEKTOR

6. előadás (11.23.)

$$\mathbb{R}^3 \ni \underline{a} = \sum a_k e^{(k)} \longleftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = \sum_k a_k \sigma^{(k)} \xrightarrow{U \in SU(2)} \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{H}}'(\underline{a}) = \underline{\underline{H}}(\underline{a}') \longleftrightarrow \underline{a}'$$

$$\exists \underline{\underline{F}} \quad \underline{a}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{a}$$

$$\underline{\underline{U}} \in SU(2) \Rightarrow \underline{\underline{U}}^+ = U^{-1} + \det \underline{\underline{U}} = 1$$



$$\underline{\underline{F}} \in SO(3) \Rightarrow \tilde{\underline{\underline{F}}} = F^{-1}$$

$$a_k = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{H}}(\underline{a})\right) \quad \text{mert} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \sigma^{(m)}$$

$$a_k' = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{H}}(\underline{a}')\right) = \frac{1}{2} Sp\left(\sigma^{(k)} \underline{\underline{H}}'(\underline{a})\right) = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^+\right) = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{U}} \left(\sum_l a_l \underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) \underline{\underline{U}}^+\right) =$$

$$= \sum_l \underbrace{\left(\frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(l)} \underline{\underline{U}}^+\right)\right)}_{F_{kl}} a_l$$

Nézzük az $U(2)$ csoportot

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}^+ = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{U}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{U}}} \begin{pmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

$\det \underline{\underline{U}} = 1$

Feltétel: $\left.\begin{aligned} z_1^* &= z_4 \\ z_3^* &= -z_2 \\ z_2^* &= -z_3 \\ z_4^* &= z_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$

Ahhoz, hogy a det 1 legyen: $z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$

Legyen $z_1 = \cos\alpha\, e^{i\beta}$
$z_2 = \sin\alpha\, e^{i\gamma}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{U}}$-t 3db param-mal megadtuk.

$$SU(2) \ni \underline{\underline{U}}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, e^{i\beta} & \sin\alpha\, e^{i\gamma} \\ -\sin\alpha\, e^{-i\gamma} & \cos\alpha\, e^{-i\beta} \end{pmatrix}$$

$\underline{U} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ Ha $z_1 = a+ib$

$z_2 = c+id$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=1$$

$$\underline{U} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i&0\\0&-i\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix} =$$

$$= a\underline{1} + b\, i\, \underline{\sigma}^{(3)} + c\, i\, \underline{\sigma}^{(2)} + d\, i\, \underline{\sigma}^{(1)}$$

Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix}-d\\-c\\-b\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{U} = a\underline{1} - i\,\underline{H}(\underline{v})$

Feltétel: $a^2 + v^2 = 1$

Legyen $a = \cos\frac{\varphi}{2}$ $\quad |\underline{v}| = \sin\frac{\varphi}{2}$ $\quad \underline{v} = |\underline{v}|\underline{n}$

$\underline{U} = \cos\frac{\varphi}{2}\underline{1} - i\sin\frac{\varphi}{2}\underline{H}(\underline{n}) = \underline{U}(\underline{n},\varphi)$ $\qquad$ jelölés: $\underline{H}(\underline{n}) = \sum_k n_k \underline{\sigma}^{(k)} = \underline{n}\underline{\sigma}$

$$\underline{U}(\underline{n},\varphi)\,\underline{U}(\underline{n},\psi) = \left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{1} - i\sin\frac{\varphi}{2}\underline{n}\underline{\sigma}\right)\left(\cos\frac{\psi}{2}\underline{1} - i\sin\frac{\psi}{2}\underline{n}\underline{\sigma}\right) =$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\underline{1}\,\underline{1} - i\sin\underbrace{\frac{\varphi}{2}}_{\cos\frac{\psi}{2}}(\underline{n}\underline{\sigma}) - i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma}) \dots = *$$

$$(\underline{n}\underline{\sigma})^2 = \left(\sum_k n_k \sigma^{(k)}\right)^2 = \sum_k\sum_l n_k n_l \left(\delta_{kl}\underline{1} + \sum_m \varepsilon_{klm}\sigma^{(m)}\right) = \sum_k\sum_l n_k n_l \delta_{kl}\underline{1} + \underbrace{\sum_k\sum_l\sum_m n_k n_l \varepsilon_{klm}\sigma^{(m)}}_{n\times n = 0}$$

$= \sum_k n_k n_k \underline{1} = \underline{1}$ $\Rightarrow (\underline{n}\underline{\sigma}) \to$ tükrözési mátrix

$$* = \left(\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right)\underline{1} - i\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right)(\underline{n}\underline{\sigma}) =$$

$$= \cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\underline{1} - i\sin\frac{\varphi+\psi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma}) = \underline{U}(\underline{n},\varphi+\psi)$$

Jelöljük $\underline{U}(\underline{n},\varphi) = e^{\underline{B}\varphi}$-vel

Mivel ez minden φ-re igaz, kis értékben is kell, hogy $\underline{B} = \left(\frac{d\underline{U}(\underline{n},\varphi)}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}$

$$\frac{dU}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{1}} - \frac{i}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = -\frac{i}{2}(\underline{n}\underline{\sigma}) \Rightarrow \boxed{\underline{U}(n,\alpha) = e^{-\frac{i\alpha}{2}(n,\sigma)}}$$

$$e^{-\frac{i\alpha}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})} = \underline{\underline{1}} + \left(-\frac{i\alpha}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) + \left(-\frac{i\alpha}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right)^2 + \dots =$$

$$= \underline{\underline{1}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^4 \dots\right] + (\underline{n}\underline{\sigma})\left[\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^3 \dots\right] =$$

$$= \underline{\underline{1}} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - (\underline{n}\sigma)(\sin\frac{\alpha}{2})$$ Jó tényleg

ennek semi értelme nem volt

$$F_{ke} = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{U}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(e)} \underline{\underline{U}}^{+}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{U}} = \cos\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{1}} - i(\underline{n}\underline{\sigma})\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$U^{-1} = \cos\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{1}} + i(\underline{n}\underline{\sigma})\sin\frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{U}}^{+}$$ már ez elhetett ett

$$F_{ke} = \frac{1}{2} Sp\left[\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{1}} - i(\underline{n}\underline{\sigma})\sin\frac{\alpha}{2}\right)\underline{\underline{\sigma}}^{e}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{1}} + i(\underline{n}\underline{\sigma})\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} Sp\left[\sigma^{(k)}\underline{\underline{1}}\sigma^{(e)}\underline{\underline{1}}\right] + \frac{1}{2} i \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) - \frac{1}{2} i \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}(\underline{n}\underline{\sigma})\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}\underline{\underline{1}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}(\underline{n}\underline{\sigma})\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} Sp(\sigma^{k}\sigma^{e}) + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sum_p n_p\, Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\right) - \frac{i}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sum_p n_p\, Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\sigma^{(e)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sum_p\sum_q n_p n_q\, Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}\underline{\underline{\sigma}}^{(q)}\right) = *$$

$$\sigma^{(k)}\sigma^{(e)} = \delta_{ke}\underline{\underline{1}} + i\sum_m \varepsilon_{kem}\sigma^{(m)} \qquad Sp(\sigma^{(k)}\sigma^{(e)}) = 2\delta_{ke} + 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)} = \left(\delta_{ke}\underline{\underline{1}} + i\sum_m \varepsilon_{kem}\sigma^{(m)}\right)\underline{\underline{\sigma}}^{(p)} = \delta_{ke}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)} + i\sum_m \varepsilon_{em}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\right)$$

$$Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\right) = \delta_{ke}\underbrace{Sp(\sigma^{(p)})}_{0} + i\sum_m \varepsilon_{kem}\, Sp\left(\sigma^{(m)}\sigma^{(p)}\right) = 2i\,\varepsilon_{kep}$$

$$Sp\left(\sigma^{(k)}\sigma^{(p)}\sigma^{e}\sigma^{q}\right) = Sp\left[\left(\delta_{kp}\underline{\underline{1}} + i\sum_m \varepsilon_{kpm}\sigma^{(m)}\right)\left(\delta_{eq}\underline{\underline{1}} + i\sum_s \varepsilon_{eqs}\sigma^{(s)}\right)\right] =$$

$$= Sp\left(\delta_{kp}\delta_{eq} + \_\_\,\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^{m}\underline{\underline{1}}}_{0} + \_\_\,\underbrace{\underline{\underline{1}}\sigma^{(s)}}_{0} - \sum_m\sum_s \varepsilon_{kpm}\varepsilon_{eqs}\sigma^{(m)}\sigma^{(s)}\right) =$$

$$= 2\delta_{kp}\delta_{\ell q} - \sum_m \sum_n \varepsilon_{kpm}\varepsilon_{\ell q n}\, \mathrm{Sp}(\underbrace{\sigma^{(m)}\sigma^{(n)}}_{\delta_{mn}}) = 2\Big(\delta_{kp}\delta_{\ell q} - \sum_m \varepsilon_{kpm}\varepsilon_{\ell q m}\Big) =$$

$$= 2\left(\delta_{kp}\delta_{\ell q} - \delta_{k\ell}\delta_{pq} + \delta_{kq}\delta_{p\ell}\right)$$

$$F_{k\ell} = * = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\, 2\delta_{k\ell} + \frac{i}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\, 2i\,\varepsilon_{k\ell p} - \frac{i}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\, 2i\,\varepsilon_{kp\ell} + \text{fenti}$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2}\delta_{k\ell} - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\varepsilon_{k\ell p} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\varepsilon_{kp\ell} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\big(\delta_{kp}n_\ell - \delta_{k\ell}n_p + \delta_{p\ell}n_k\big) =$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2}\delta_{k\ell} + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\varepsilon_{kp\ell} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\big(n_k n_\ell - \delta_{k\ell} + n_\ell n_k\big) =$$

$$= \underbrace{\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}_{\cos\varphi}\delta_{k\ell} + \underbrace{2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}_{\sin\varphi}\sum_p n_p\varepsilon_{kp\ell} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\, n_\ell n_k =$$

$$= \cos\varphi\,\delta_{k\ell} + \sin\varphi\sum_p n_p\varepsilon_{kp\ell} + \Big(1 \underbrace{- \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}}_{-\cos\varphi}\Big) n_\ell n_k =$$

$$= \cos\varphi\,\delta_{k\ell} + \sin\varphi\sum_p n_p\varepsilon_{kp\ell} + (1-\cos\varphi)\, n_k n_\ell$$

Ez: $\underline{F}$ teljes forgásmátrix

$U(n,\varphi) \longrightarrow F(n,\varphi) \Rightarrow F_{k\ell}$ n tengely körüli φ szögű forgatás

$F(n,2\pi)_{k\ell} = \delta_{k\ell} \rightarrow \underline{F}(n,2\pi) = \underline{1}$

$\underline{U}(n,2\pi) = -\underline{1}$

A csoportelmélet nyelvén: $SU(2)/C_2 \cong SO(3)$

$F(n,2\pi$ $\underline{F}(n,\varphi)$ sajátértékei 1, spurja $1+2\cos\varphi$

DE a forgatások összetételén van egy jobb módszer $SU(2)$-n felbontásban

ALKVEKTOR

7. előadás (11.30.)

$SU(2) \longrightarrow SO(3)$

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^{+} \\ \det \underline{\underline{U}} = 1 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{array}{l} \tilde{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \\ \det \underline{\underline{E}} = 1 \end{array}$$

$$\underline{\underline{U}}(\underline{n},\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2}\,\underline{\underline{1}} - i \sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\,\underline{\underline{\sigma}}) \qquad \text{ahol } \underline{n}\,\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{k=1}^{3} n_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$$

$$\hookrightarrow = e^{-i\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\,\underline{\underline{\sigma}})}$$

$$E_{kl} = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{k}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{l}\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right) = \delta_{kl}\cos\varphi + n_k n_l (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{klm} n_m \sin\varphi$$

A múltkori alapján: $\underline{\underline{U}}(\underline{n},\alpha)\,\underline{\underline{U}}(\underline{n},\beta) = \underline{\underline{U}}(\underline{n},\alpha+\beta)$ adott $\underline{n}$-nel a csoport

ez alapján $\underline{\underline{E}}(\underline{n},\alpha)\,\underline{\underline{E}}(\underline{n},\beta) = \underline{\underline{E}}(\underline{n},\alpha+\beta)$ Elvileg hogyan a képlet alapján

$\hookrightarrow$ HF

célszerű ezzel $F(\underline{n},\alpha) = e^{\alpha \underline{\underline{B}}}$

mivel $\frac{d}{d\alpha} F(\underline{n},\alpha) = \underline{\underline{B}}\, e^{\alpha \underline{\underline{B}}}$ ha $\alpha = 0$ $\quad \left.\frac{dF(\underline{n},\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \underline{\underline{B}}\, e^{0\cdot\underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{B}}$

$$\frac{dF_{kl}}{d\varphi} = -\delta_{kl}\sin\varphi + n_k n_l \sin\varphi + \varepsilon_{klm} n_m \cos\varphi = \varepsilon_{klm} n_m$$

$$E_2 \text{ alapján } \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ -n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} = n_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^{(1)}} + n_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^{(2)}} + n_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^{(3)}} = \underline{n}\,\underline{\underline{C}}$$

Így $\underline{\underline{F}} = e^{\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{C}})}$

mivel $C^{(k)}_{lm} = -\varepsilon_{klm}$

$$\underline{\underline{F}} = e^{\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{C}})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k (\underline{n}\,\underline{\underline{C}})^k}{k!} = \sum \frac{\varphi^k \underline{\underline{B}}^k}{k!}$$

$$\underline{\underline{B}}^0 = \underline{\underline{1}} \qquad \underline{\underline{B}}^1 = \underline{\underline{B}} \qquad \underline{\underline{B}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ -n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ -n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_3^2-n_2^2 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & -n_3^2-n_1^2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_2^2-n_1^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n_1 n_1 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 & \cdots & \\ & n_2 n_2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 & \\ \vdots & \cdots & n_3 n_3 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 \end{pmatrix} = \quad \text{mivel } \underline{n} \text{ egység vektor } n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow B_{kl} = n_k n_l - \delta_{kl}$$

Indexesen: $(\underline{\underline{B}}^2)_{ke} = B_{km} B_{me} = (n_p C^{p})_{km} (n_q C^{q})_{me} = (-n_p \varepsilon_{pkm})(-n_q \varepsilon_{qme}) =$

$= n_p n_q \varepsilon_{pkm} \varepsilon_{meq} = n_p n_q (\delta_{pe}\delta_{kq} - \delta_{pq}\delta_{ke}) =$

$= n_e n_k - n_q n_q \delta_{ke} = n_e n_k - \delta_{ke}$

$(\underline{\underline{B}}^3)_{ke} = (\underline{\underline{B}}^2 \underline{\underline{B}})_{ke} = (\underline{\underline{B}}^2)_{km} B_{me} = (n_k n_m - \delta_{km})(n_p C^{p}_{me}) = (n_k n_m - \delta_{km})(-n_p \varepsilon_{pme}) =$

$= \underbrace{-n_k n_m n_p \varepsilon_{pme}}_{0} + \delta_{km} n_p \varepsilon_{pme} = n_p \varepsilon_{pke} = -n_p C^{(p)}_{ke} = -B_{ke}$

Vagyis $\underline{\underline{B}}^0 = \underline{\underline{1}}$ $\quad \underline{\underline{B}}^1 = \underline{\underline{B}}$ $\quad \underline{\underline{B}}^2 = -\underline{\underline{Q}}$ $\quad \underline{\underline{B}}^3 = -\underline{\underline{B}}$ $\quad \underline{\underline{B}}^4 = \underline{\underline{Q}}$ $\quad \underline{\underline{B}}^5 = \underline{\underline{B}}$

mert $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{P}}$ ahol $\underline{\underline{P}} = n \circ n$

Így $e^{\varphi \underline{\underline{B}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k \underline{\underline{B}}^k}{k!} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{B}}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right) + \underline{\underline{Q}}\left(-\frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) =$

$= \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{B}} \sin\varphi + \underline{\underline{Q}}(\cos\varphi - 1) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{B}}\sin\varphi + (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{P}})(\cos\varphi - 1) =$

$= \underline{\underline{1}} \cos\varphi + \underline{\underline{P}}(1 - \cos\varphi) + \underline{\underline{B}} \sin\varphi$

$(e^{\varphi \underline{\underline{B}}})_{ke} = \delta_{ke} \cos\varphi + n_k n_e (1 - \cos\varphi) + n_p C^{p}_{ke} \sin\varphi = \delta_{ke} \cos\varphi + n_k n_e (1-\cos\varphi) + \sin\varphi\, n_m \varepsilon_{kme} =$

$= F_{ke}$ tényleg jó az exp alak

$\underline{U} = e^{-i\varphi(\underline{n}\frac{\underline{\sigma}}{2})}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\underline{\sigma}}{2} \to i\,\underline{C}}$ ez a konverziós lépés

$\underline{\underline{F}} = e^{-i\varphi(\underline{n}\, i\, \underline{C})}$

$\sigma^{(k)}\sigma^{(e)} = \delta_{ke}\underline{\underline{1}} + i\,\varepsilon_{kem}\sigma^{(m)}$ $\qquad \sigma^{(e)}\sigma^{(k)} = \delta_{ek}\underline{\underline{1}} + i\,\varepsilon_{ekm}\sigma^{(m)}$

$[\sigma^{(k)}, \sigma^{(e)}] = \sigma^{(k)}\sigma^{(e)} - \sigma^{(e)}\sigma^{(k)} = 2i\,\varepsilon_{kem}\,\sigma^{(m)}$

$\left[\frac{\sigma^{(k)}}{2}, \frac{\sigma^{(e)}}{2}\right] = i\,\varepsilon_{kem} \frac{\sigma^{(m)}}{2}$

Legyen $J^{(k)} = i\,C^{(k)}$ $\quad J^{(k)}_{em} = -i\,\varepsilon_{kem}$ belátható, hogy $(J^{(k)} J^{(e)})_{pq} =$

$[J^{(1)} J^{(2)}] = J^{(3)} i$ $\quad$ vmi ilyesmi

Az összes forgatás halmaza kitölt egy π sugarú gömböt, ahol a gömb felülete ugyanaz a 1-elem

A TÉR ALAKJA

c. könyv

Legyen $|\underline{a}| = |\underline{b}| = 1$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{a}, \alpha) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{b}, \beta) = \underline{\underline{F}}(\underline{c}, \gamma) \qquad \underline{c} = ? \quad \gamma = ?$$

$$\underline{\underline{U}}(\underline{a}, \alpha) = \cos\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{1}} - i \sin\frac{\alpha}{2}(\underline{a}\underline{\sigma}) = \cos\frac{\alpha}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i \, tg\frac{\alpha}{2}(\underline{a}\underline{\sigma})\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i \underline{p}\underline{\sigma}\right)$$

$$\underline{\underline{U}}(\underline{b}, \beta) = \cos\frac{\beta}{2}\underline{\underline{1}} - i \sin\frac{\beta}{2}(\underline{b}\underline{\sigma}) = \cos\frac{\beta}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i \, tg\frac{\beta}{2}(\underline{b}\underline{\sigma})\right) = \cos\frac{\beta}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i \underline{q}\underline{\sigma}\right)$$

Legyen $\underline{p} = \underline{a} \, tg\frac{\alpha}{2} \quad \underline{q} = \underline{b} \, tg\frac{\beta}{2}$

Ha $\alpha_1 = \alpha_0 + 2\pi$ az $\underline{\underline{F}}$ ugyanaz marad, de $\underline{\underline{U}}$ előjelet vált (homomorfizmus)

$$\underline{\underline{U}}(\underline{b}, \beta)\,\underline{\underline{U}}(\underline{a}, \alpha) = \cos\frac{\beta}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i \underline{q}\underline{\sigma}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i\underline{p}\underline{\sigma}\right) = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{1}} - i\underline{q}\underline{\sigma}\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{1}}i\underline{p}\underline{\sigma} - (\underline{q}\underline{\sigma})(\underline{p}\underline{\sigma})\right) =$$

$$= \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i\underline{q}\underline{\sigma} - i\underline{p}\underline{\sigma} - (\underline{q}\,\underline{p})\underline{\underline{1}} - i(\underline{q}\times\underline{p})\underline{\sigma}\right) =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left[(1 - \underline{q}\,\underline{p})\,\underline{\underline{1}} - i\left(\underline{p} + \underline{q} + \underline{q}\times\underline{p}\right)\underline{\sigma}\right] =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}(1 - \underline{q}\,\underline{p})\left[\underline{\underline{1}} - i\,\frac{\underline{p} + \underline{q} + \underline{q}\times\underline{p}}{1 - \underline{p}\,\underline{q}}\,\underline{\sigma}\right] = \underline{\underline{U}}(\underline{c}, \gamma) = \cos\frac{\gamma}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i\,\underline{r}\underline{\sigma}\right)$$

A forgatások kodolása:

$$\underline{p} = \underline{a} \, tg\frac{\alpha}{2}$$

$$\underline{q} = \underline{b} \, tg\frac{\beta}{2}$$

$$\underline{r} = \underline{c} \, tg\frac{\gamma}{2} \qquad \text{ahol} \qquad \underline{r} = \frac{\underline{p} + \underline{q} + \underline{q}\times\underline{p}}{1 - \underline{p}\,\underline{q}} = \underline{q} * \underline{p}$$

Beláthatói, hogy asszociatív → HF

Rodrigues-formula (DGy is vágott nagyítói)

ismert ~~vektor~~ forgatásra kiszámolón → HF

Ha $1-\underline{\varrho}\,\varphi \to 0$ és $r \to \infty$ akkor $\underline{\varrho}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} \to \infty \Rightarrow \underline{\gamma = 180^\circ}$

---

8 lehetőség zóvár: Duális tér
Hodge-dualitás
Affine-tér
Projektív geometria
Homogén koordináták
Sokaság

ALKVEKTOR
8. előadás (12.07)

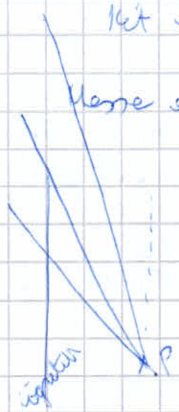
A vektorok általánosítása másfajta terekben

A Tér általában nem vektortér (görbült tér) de a pontban mutató vektorok tere az.

Mi van a végtelenben

Két egyenes egy pontban metszi egymást hacsak nem párh.-k

Messze egymást követő két egyenes



Mivel párh.-ba amit távolabban metszi egymást, de ekkor két végtelen van. ⇒ Legyen a két végtelen u.a.

Legyen egy kört! ha valahol kimegyünk, szemben bejövünk

véges területű, de szél nélküli alakzat

projektív sík RP^2 (2ment valós vektortér ...
2ment 2D-s

Ezek ilyen „ideális" pontok, végtelen sok van

Az egyenes zárt görbe. Bármely két ponton átmenő egyenes a végtelenben is ...

Az ekvivalencia reláció eddig az egybevágóság volt. Mostantól a nagyítás is

Legyen transzformáció az affinitás (összenyomás), ez is lehet ekvi rel.

A relativitáselmélet affin geometria

perspektivikus torzítás

Tapasztalat: bármely konvex négyszöghöz létezik olyan perspektív szög, amellyel egy négyzet alakú látszik.

Ezekben van egy enyészpont, ami a valóságban nincs; de a képen ott van

Horizont: az ideális pontok leképezése a képre

Ehhez meg kell fogalmazni a végtelennel kiegészített teret

Tartsuk meg a folytonosságot

Sík, és tér. Egy vektort jellemezhetünk (x, y)-koordinátákkal

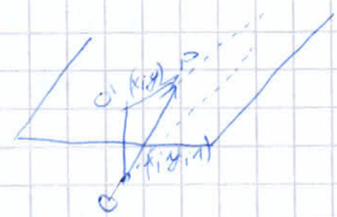
Ha az origó nincs benne a síkban, akkor $(x, y, 1)$

Számítsuk ki két pont felezőpontját: $f = \frac{1}{2}(a+b)$

Ha nem osztunk 2-vel, a síkot ugyanott metszi, legyenek ekvivalensek: $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Tetszőleges $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ megfeleltethető a sík $\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix}$ pontjainak kivéve, ha $z = 0$

Ha $z \to 0$, a P a végtelenbe tart.



a sík pontjait megfeleltettük a tér egyeneseit

emiatt a két ∞ távoli pont u.a.

síkbeli pontok $\to$ térbeli vektorok; a tér egyeneseivé merőleges síkok az (origóban)

eredeti síkban egyenest határoznak meg: pontok $\to$ egyenesek (polárisegyenes)

Az origó fölötti pont polárisa egy végtelen beli egyenes. (pontok és egyenesek duálisak)

Ugyanez 3D-ben: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \\ \alpha \end{pmatrix}$

itt egy pont meg egy sík egymás duálisai (egyenesnek egyenes)

$(V, +, \cdot)$ tér

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$

$(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ test

mint tér ugyanazon skalárok felett

$A : V \to W$

$v \to w = Av$

Ha A lineáris: $(v_1 + v_2) \to (w_1 + w_2)$

$(\alpha v) \to (\alpha w)$

$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha(Av_1) + \beta(Av_2)$ lineáris leképezés (Ha $V = W$ akkor A operátor)

A mátrixszal reprezentálható

Legyen W egydimenziós tér (maga a skalárok önmaga felett)

$\Phi : V \to \mathbb{F}$

pl: rögzített vektorral vett skaláris szorzás

$\vec{v} \to \alpha = \vec{a}\,\vec{v}$

(Állítás: Ez az összes lineáris leképezés V-ből $\mathbb{F}$-ba Riesz-Fischer-tétel)

Funkcionál: leképezés V-ből $\mathbb{F}$-ba (legyen lineáris)

$\Phi: \underline{v} \to \alpha = f(\underline{v})$

$f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$ és $f(\alpha \underline{v}) = \alpha \cdot f(\underline{v})$

$A : V \to W$

$B : V \to W$

$C = A + B$ legyen olyan: $C(v) = (Av) + (Bv)$

$(\alpha A)(v) = \alpha(A(v))$

A funkcionálok is vektorteret alkotnak

Ugyanez φ-vel: $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\varphi_3(\underline{v}) = \varphi_1(\underline{v}) + \varphi_2(\underline{v}) \qquad (\alpha\varphi)(\underline{v}) = \alpha\varphi(\underline{v})$$

a funkcionálok lineáris tere duális az eredetinek $V \to \varphi \in V^*$

továbbá $(V^*)^* = V$

Legyen $\underline{e}^{(k)} \in V$ $\quad \forall \underline{v} = \sum c_k \underline{e}^{(k)} \quad c_k \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\underline{e}^{(k)}) = \varphi_k \in \mathbb{C}$$

$$\varphi(\underline{v}) = \varphi\left(\sum_k c_k \underline{e}^{(k)}\right) = \sum \varphi(c_k \underline{e}^{(k)}) = \sum_k c_k \varphi(\underline{e}^{(k)}) = \sum_k c_k \varphi_k$$

φ-t a eredeti tér bázisvektorai képeivel lehet reprezentálni $\Rightarrow \dim V^* = \dim V$

Ez $\dim V = \infty$-re nem igaz

Hilbert-tér: olyan véges dimenziós, vagy olyan ∞ dimenziós lineáris tér, amelyek izomorfak a duális térükkel.

$$\varphi(\underline{v}) = \sum_k \varphi_k c_k \sim (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{skaláris szorzás !!!}$$

így a transzponálás felfogható egy dualizálásként

így fogható fel a sk. szorzás

ALK. VEKT.

9. előadás (12. 14.)

Vegyünk asszociatív algebrákat

Van ennek A, B
$$A \cdot B = 0$$
$$B \cdot B = 0$$
$$ABA = A$$
$$BAB = B$$

Hogyan néz ki? Mik a további elemek?

$$\exists C = AB \qquad AC = A(AB) = (AA)B = 0$$
$$\exists D = BA \qquad CA = (AB)A = A$$
$$BC = B(AB) = B$$
$$CD = (AB)(BA) = A(BB)A = 0 \qquad CB = (AB)B = A(BB) = 0$$
$$AD = A(BA) = A$$
$$DC = (BA)(AB) = B(AA)B = 0 \qquad DA = (BA)A = B(AA) = 0$$
$$BD = B(BA) = (BB)A = 0$$
$$DB = BAB = B$$

Tetszőleges elem: $X = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$

Szerintem olyan 4D-s algebra, amire az teljesül, ha behozunk új E-t, az is jó egy, de minek.

Mátrixszal reprezentálva: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} = 0$ $\quad \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}} = 0$ $\quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ez az 2×2-es mátrixok algebrája

állítás: $\cancel{AB}$ $AB + BA = 1$

Ellenőrzés: $(AB + BA)A = ABA + BAA = A + 0$
$$(AB + BA)B = ABB + BAB = 0 + B$$

Mátrix algebra operátorok:

$$\hat{a}\ ;\ \hat{a}^+ \qquad V/_c \to V/_c$$

$$\hat{a}^+ \leftrightarrow \hat{b}$$

~~Felt~~ Kikötés: $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{1} \quad = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = \hat{1}$

Hány dimenziós? TFH reprezentálják: $\underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A} = \underline{1}$

Mivel $Sp(\underline{A}\,\underline{B}) = Sp(\underline{A}\,\underline{B})$

$$Sp(\underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A}) = 0 = Sp(\underline{1}) \qquad \text{0 dimenziós lenne?}$$

Ha végtelen dimenziós, akkor $\infty - \infty = \infty$

Végtelen dimenziós mátrix spurja nincs

Legyen $\hat{N} = \hat{b}\hat{a}$

Határozzuk meg $\hat{N}$ sajátértékeit és vektorait

$\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$

$\hat{N}^+ = (\hat{a}^+\hat{a})^+ = \hat{a}^+\hat{a}^{++} = \hat{a}^+\hat{a} = \hat{N}^+ \implies$ sajátértékei valósak

sajátérték egyenlet: $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ ahol $\langle n|n\rangle = 1$

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$$

Mivel $n \in \mathbb{R}$:

$$n = n\cdot 1 = n\langle n|n\rangle = \langle n|n|n\rangle = \langle n|\hat{N}|n\rangle =$$

$$= \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = * \qquad \text{Legyen } |u\rangle = \hat{a}|n\rangle$$

$$\langle u| = \langle n|\hat{a}^+$$

$$* = \langle u|u\rangle \geq 0 \implies n \geq 0$$

Legyen $|v\rangle = \hat{a}^+|n\rangle$

$$\hat{N}|v\rangle = (\hat{a}^+\hat{a})(\hat{a}^+|n\rangle) = \hat{a}^+(\hat{a}\hat{a}^+)|n\rangle = \hat{a}^+(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{1})|n\rangle =$$

$$= \hat{a}^+(\hat{N} + \hat{1})|n\rangle = \hat{a}^+(n|n\rangle + |n\rangle) = \hat{a}^+(n+1)|n\rangle =$$

$$= (n+1)\hat{a}^+|n\rangle = (n+1)|v\rangle$$

Ha n sajátérték, akkor $n+1$ is az.

$$\hat N|u\rangle = (\hat a^+\hat a)\hat a|n\rangle = (\hat a\hat a^+ - \hat 1)\hat a|n\rangle = (\hat a\hat a^+\hat a - \hat a)|n\rangle = (\hat a\hat N - \hat a)|n\rangle =$$

$$= \hat a\hat N|n\rangle - \hat a|n\rangle = \hat a\, n|n\rangle - \hat a|n\rangle = (n-1)\hat a|n\rangle = (n-1)|u\rangle$$

Ha n sajátérték $n-1$ is az.

DE a normálás, az hogy lett?

Legyen $|v\rangle = \alpha_n|n+1\rangle$ és $|u\rangle = \beta_n|n-1\rangle$

akkor $\alpha_n = \alpha_n\cdot 1 = \alpha_n\langle n+1|n+1\rangle = \langle n+1|\alpha_n|n+1\rangle = \langle n+1|v\rangle = \langle n+1|a^+|n\rangle$

$$\alpha_n^* = \langle n+1|\hat a^+|n\rangle^* = \langle n|\hat a^{+*}|n+1\rangle = \langle n|\hat a|n+1\rangle = \langle n|\beta_{n+1}|n\rangle =$$

$$= \beta_{n+1}\langle n|n\rangle = \beta_{n+1}$$

$$n = \dots = \langle n|\hat N|n\rangle = \langle n|\hat a^+\hat a|n\rangle = \langle u|u\rangle = (\langle n-1|\beta_n^*)(\beta_n|n-1\rangle) = \beta_n^*\beta_n\langle n-1|n-1\rangle =$$

$$= \beta_n^*\beta_n = |\beta_n|^2 \Rightarrow \beta_n = \sqrt{n} \Rightarrow \alpha_n = \beta_{n+1}^* = \sqrt{n+1}^* = \sqrt{n+1}$$

$|u\rangle = \hat a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ és $|v\rangle = \hat a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

Ellenőrzés: $\hat N|n\rangle = \hat a^+\hat a|n\rangle = \hat a^+(\hat a|n\rangle) = \hat a^+\sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n}(\hat a^+|n-1\rangle) =$

$$= \sqrt{n}(\sqrt{n}|n\rangle) = n|n\rangle$$

és

$$\hat a\hat a^+|n\rangle = \hat a(\hat a^+|n\rangle) = \hat a(\sqrt{n+1}|n+1\rangle) = \sqrt{n+1}(\hat a|n+1\rangle) =$$

$$= \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}|n\rangle) = (n+1)|n\rangle$$

és

$$[a, a^+]|n\rangle = (\hat a\hat a^+ - \hat a^+\hat a)|n\rangle = (\hat a\hat a^+)|n\rangle - (\hat a^+\hat a)|n\rangle = (n+1)|n\rangle - n|n\rangle = |n\rangle$$

Mivel $\hat N$ nem csúnya, sajátvektorai bázist alkotnak, így $\hat a$ és $\hat a^+$ Lie algebrát alkotnak. DE MENNYI AZ n ?? ÉS HOGY lehet $\in$?

Ha $n=1$, akkor $\hat a|n\rangle = 0$ és a létra véget ér.

$\Rightarrow$ létezik $n=0$ sajátérték $\Rightarrow$ $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

$$a_{n'n} = \langle n'|\hat a|n\rangle = \langle n'|\sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n}\langle n'|n-1\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}$$

$$\hat a \to \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \sqrt{3} \\ \vdots & \vdots & & 0 & \sqrt{4} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^+ = A^T$$

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} \quad \Rightarrow \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{A}}^+ \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 2 & & \\ \vdots & & & 3 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^+ = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^+ - \underline{\underline{A}}^+ \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$$

Legyen $\underline{\underline{H}} = f(\hat{N})$ ekkor $\hat{H}\,|n\rangle = f(n)\,|n\rangle$

pl.: $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{1}\right)$

$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$ ← harmonikus oszcillátor