ANALÍZIS III

1. előadás (09.12.)

Tarcsay Zsigmond D3-621

tarcsay@cs.elte.hu www.cs.elte.hu/~tarcsay

szóbeli vizsga

Prehilbert és Hilbert-terek

Def: Legyen X egy $\mathbb{K}$ feletti vektortér! A $(\cdot|\cdot): X\times X \to \mathbb{K}$ fv-t skaláris szorzatnak nevezzük ha:

- $(x+x'|z) = (x|z)+(x'|z) \quad \forall x,x',z\in X$

  $(\lambda x|z) = \lambda(x|z) \quad \forall x,z\in X \ \forall \lambda\in\mathbb{K}$

- $(x|z) = \overline{(z|x)}$ (konjugált szimmetria)

- $(x|x)\geq 0$ és $x=0 \iff (x|x)=0$

megjegyzés: az első kettőből következik, hogy: $(x|z+z') = (x|z)+(x|z')$

$(x|\lambda z) = \overline{\lambda}(x|z)$

$$(x|z)+(z|x) = 2\,\mathrm{Re}\,(x|z) = 2\,\mathrm{Re}\,(z|x)$$

Pl.: (1) $\mathbb{K}^n =: X$ $\quad x:=(x_1,\dots,x_n)$, $y:=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$(x|y) := \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$$

(2) ℓ^2 sorozattér: olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$-beli sorozatok halmaza, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$

$$x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

$$(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\overline{y_n}$$

(3) L^2 Lebesgue-tér: Ha $M\subseteq\mathbb{R}^n$ mérhető halmaz, akkor $L^2(M)$ jelöli a $\varphi: M\to\mathbb{K}$ olyan mérhető fv-ek halmazát, amelyek

$$\int_M |\varphi|^2\,d\mu < \infty.$$

konvenció: $\varphi \cong \psi$ $(\varphi,\psi\in L^2(M))$ ha $\varphi=\psi$ majdnem mindenhol

$(\varphi|\psi) := \int_M \varphi\cdot\overline{\psi}\,d\mu$ ← ez a def csak a konvencióval lehet sk. szorzás

Def: Az $(X,(\cdot|\cdot))$ párt prehilbert-térnek nevezzük, ha X vektortér, $(\cdot|\cdot)$ pedig skaláris szorzat X-en.

Tétel: (Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség): X prehilbert tér és $x, y \in X$. Ekkor:

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)\,(y|y)$$

Biz: Ha $x=0$, v. $y=0 \Rightarrow (x|y)=0$ def miatt
a jobb oldal szintén

TFH: $y \neq 0$ $\quad u := (y|y)\,x - (x|y)\,y$

$$0 \leq (u|u) = (y|y)\left[(y|y)(x|x) - |(x|y)|^2 - |(x|y)|^2 + |(x|y)|^2\right] =$$
$$= (y|y)\left[(y|y)(x|x) - |(x|y)|^2\right] \Rightarrow \quad 0 \leq (y|y)(x|x) - |(x|y)|^2$$

$\square$

Tétel: Legyen X prehilbert tér! Ekkor a $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$
$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ leképezés norma.

Biz: (1) $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0$
$\Downarrow$ triviális $\quad \hookrightarrow$ 3. tul-ból

(2) $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x|x)} = |\lambda| \sqrt{(x|x)} = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \checkmark$$

(3) $x, y \in X$

$$\|x+y\|^2 = (x|x) + 2\,\mathrm{Re}\,(x|y) + (y|y) \leq (x|x) + 2\,|(x|y)| + (y|y) \leq \text{CBS miatt}$$
$$\leq (x|x) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} + (y|y) = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

ez pont a $\triangle$ egyenlőtlenség. $\square$

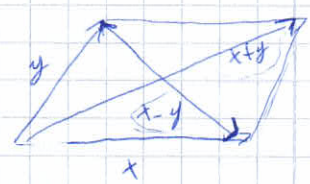
Def: A fenti normát a sk. szorzat által indukált normának nevezzük.
Innentől a prehilbert tér egyben normált tér is, tehát minden igaz rá anal 1.-ből.

Def: Az X prehilbert-teret Hilbert-térnek nevezzük, ha a sk. szorzat által indukált normával teljes, azaz Banach-tér.

Megj: a CBS átfogalmazása: $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Paralelogramma szabály: X prehilbert-tér és $x, y \in X$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$



„az átlók hosszának összege = az oldalak hosszának összegével"

Állítás: Ha egy normált térre igaz a paralelogramma szabály, akkor ∃ olyan sk. szorzás, amiből az adott norma indukálható.

Polarizációs formulák

Legyen X prehilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, akkor

(a) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén: $(x|y)=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right]$

(b) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetén: $(x|y)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} i^k\|x+i^k y\|^2$

Állítás: Legyen X prehilbert-tér $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X$ sorozatok, amelyre $x,y\in X$, $x_n\to x$, $y_n\to y$! Ekkor $(x_n|y_n)\to(x|y)$, vagyis a $(\cdot|\cdot): X\times X\to\mathbb{K}$ folytonos

Biz: $$|(x_n|y_n)-(x|y)|=|(x_n|y_n)-(x|y_n)+(x|y_n)-(x|y)|\leq$$
$$\leq|(x_n|y_n)-(x|y_n)|+|(x|y_n)-(x|y)|=$$
$$=|(x_n-x|y_n)|+|(x|y_n-y)|\leq\underbrace{\|x_n-x\|}_{\downarrow 0}\cdot\underbrace{\|y_n\|}_{\downarrow y}+\|x\|\cdot\underbrace{\|y_n-y\|}_{\downarrow 0}\to 0$$

□

Következmény: X prehilbert tér rögzített $y,z\in X$ elemei mellett
$f_z(x)=(x|z)$ és $g_y(x)=(y|x)$ $X\to\mathbb{K}$ fv-k is folytonosak.

Ortogonalitás

Def: Legyen X prehilbert, $x,y\in X$! x és y-t merőlegesnek nevezzük, ha $(x|y)=0$.
Ha $\emptyset\neq M\subseteq$, akkor a $M^\perp=\{y\in X: \forall x\in M\ y\perp x\}$ halmazt az M halmaz ortokomplementerének nevezzük.

megjegyzés: $x,y\in X$

(1) $x\perp y \Leftrightarrow y\perp x$

(2) $x\perp x\Leftrightarrow x=0$ illetve $0\perp x$ $(\forall x\in M)$

$\Rightarrow X^\perp=\{0\}$ (de $M^\perp=\{0\}\not\Rightarrow M=X$)

$\Rightarrow M\cap M^\perp\subseteq\{0\}$

$\Rightarrow 0\in M^\perp$ $\forall M$ esetén

ANALÍZIS III.

2. előadás (09.19.)

Állítás: Legyen X prehilbert-tér és $M, N \subseteq X$, nem üresek!

Ekkor (1) $M^{\perp} \subseteq X$ zárt lineáris altér

(2) $N \subseteq M \implies M^{\perp} \subseteq N^{\perp}$

(3) $M \subseteq M^{\perp\perp}$ és $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$

Biz: (1) $x, y \in M^{\perp}$ Igazolni kell, hogy $x+y \in M^{\perp}$ $\forall z \in M$-re:

$(x+y|z) = (x|z) + (y|z) = 0 + 0 = 0$ ✓

ugyanígy λx-re $\implies M^{\perp}$ lin tér.

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $M^{\perp}$ beli sorozat, és $x_n \to x \in M$

$\forall n$-re: $(x_n|z) = 0$ ha $z \in M$

$$\begin{array}{cc} (x_n|z) & 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ (x|z) & 0 \end{array}$$

sk. szorzat miatt a két oldal egyenlő $\implies$

$\implies z \perp x \implies x \in M^{\perp} \implies M^{\perp}$ zárt. □

(2) $x \in M^{\perp} \iff \forall z \in M: x \perp z \implies \forall z \in N: x \perp z \iff x \in N^{\perp}$ □

(3) $x \in M$ $\forall z \in M^{\perp} \implies x \perp z \implies x \in M^{\perp\perp}$

$M^{\perp} \subseteq (M^{\perp})^{\perp\perp}$ továbbá $M \subseteq M^{\perp\perp} \implies M^{\perp} \supseteq (M^{\perp\perp})^{\perp}$

↑ előző sor miatt ↑ (2) miatt

□

Def: A $M^{\perp\perp}$ halmazt a M halmaz bikomplementerének tekintjük

Def: X vektortér, $M \subseteq X$ nem üres. Ekkor $\mathrm{span}(M)$ jelöli a legkisebb olyan lin. alterét X-nek, amely $M \subseteq \mathrm{span}(M) \subseteq X$.

Előállítás: $\mathrm{span}(M) = \bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ altér} \\ M \subseteq Y}} Y$

Állítás: Ha X, Y normált tér, $A \in B(X,Y)$ folytonos lineáris operátor, akkor $\ker(A) := \{x \in X : Ax = 0\} \subseteq X$ halmaz zárt lin. altér.

Biz: $\boxed{\text{HF}}$

Áll: X prehilbert tér, valamint $\emptyset \neq M \subseteq X$! Ekkor $M^\perp = \left[\overline{\mathrm{Span}(M)}\right]^\perp$

Biz: $M \subseteq \overline{\mathrm{Span}(M)} \Rightarrow \left[\overline{\mathrm{Span}(M)}\right]^\perp \subseteq M^\perp$

Legyen $z \in M^\perp \Leftrightarrow (x|y) = 0 \quad \forall x \in M$-re

$f_z(x) := (x|z) \Rightarrow f_z : X \to \mathbb{K}$ lineáris és folytonos és $z \in M^\perp \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M \subseteq \ker f_z$ ami zárt altér $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{Span}(M)} \subseteq \ker f_z \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \overline{\mathrm{Span}(M)} : (x|z) = 0 \Leftrightarrow z \in \left[\overline{\mathrm{Span}(M)}\right]^\perp$ $\square$

Riesz-féle felbontási tétel

Def: (X, ρ) metrikus tér és $\emptyset \neq Y \subseteq X$ és $x \in X$!

Legyen $\rho_Y(x) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in Y\}$ az x pont Y halmaztól való távolsága.

Azt mondjuk, hogy Y halmaz távolsága x-től realizálódik az $y_0 \in Y$ pontban, ha $\rho_Y(x) = \rho(x, y_0)$

Tétel (Riesz-tétel): H Hilbert tér, és $C \subseteq H$ zárt, konvex, nem üres halmaz! Ekkor bármely $x \in H$ pont C-től való távolsága egyértelműen realizálódik. Azaz: $\forall x \in H : \exists! z \in C : \rho_C(x) = \|x - z\|$

Biz: $x \in H$, $d := \rho_C(x) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in C\} \Rightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C-beli sorozat, amire

$d_n := \|x - y_n\| \to d$.

$v := x - y_n$, $w := y_m - x$! $\quad n, m \in \mathbb{N}$

Paralelogramma-szabály miatt:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left[\|v\|^2 + \|w\|^2\right] = 2(d_n^2 + d_m^2)$$

$$= \|y_m - y_n\|^2 + \|2x - (y_n + y_m)\|^2$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = -4\Big\|x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C}\Big\|^2 + 2d_n^2 + 2d_m^2 \leq -4d^2 + 2\underset{\downarrow d}{d_n^2} + 2\underset{\downarrow d}{d_m^2} \to 0$$

$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy Cauchy-sorozat és mivel H teljes ezért $y_n \to z \in H$

Mivel C zárt $z \in C$

$$\|x - z\| = \lim_{n\to\infty}\|x - y_n\| = \lim_{n\to\infty} d_n = d = \rho_C(x).$$

unicitás: TFH $z_1, z_2 \in C$ $d = \|x - z_1\| = \|x - z_2\|$! $y_n = \begin{cases} z_1 & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ z_2 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

ekkor $\|x - y_n\| = d \to d \Rightarrow (y_n)_n$ konvergens $\Rightarrow z_1 = z_2$ $\square$

Tétel (Riesz ortogonális felbontási tétele): H Hilbert-tér, $K \subseteq H$ zárt lin. altér! Ekkor bármely $x \in H$ vektor előáll $x = x_1 + x_2$ alakban valamely egyértelmű $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$ vektorokkal $[H = K \oplus K^\perp]$

Bz: $x \in H$, $K \subseteq H$ zárt konvex halmaz. $\exists!\, x_1 \in K : \rho_K = \|x - x_1\|$

$x_2 := x - x_1$, $y \in K$

$P(t) := \|x - \underbrace{(x_1 + ty)}_{\in K}\|^2 \quad (t \in \mathbb{R})$

$P(0) = (\rho_K(x))^2 \leq P(t)$ $\forall t$-re $\Rightarrow$ $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-nek 0-ban minimuma van.

$P(t) = \|x_2 + ty\|^2 \overset{*}{=} \|x_2\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x_2|y) + t^2\|y\|^2 \Rightarrow P$ deriválható $t=0$-ban

$\Rightarrow 0 = P'(0) = 2\operatorname{Re}(x_2|y) \Rightarrow \operatorname{Re}(x_2|y) = 0$

Ha $K = \mathbb{R}$, akkor kész vagyunk.

$*$: A sk. normát tul. miatt kifejthető.

Ha $\mathbb{C} = K$:

$\operatorname{Re}(x_2|iy) = 0$

$= \operatorname{Re}[(-i)(x_2|y)] = +\operatorname{Im}(x_2|y)$ ✓

unicitás: TFH: $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$, ahol $x_1, x_1' \in K$, $x_2, x_2' \in K^\perp$

$K \ni x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in K^\perp \Rightarrow x_1 - x_1' \in K \cap K^\perp = \{0\}$ $\square$

Def: Ha H Hilbert-tér, $K \subseteq H$ zárt lineáris altér, akkor az $x \in H$ ~~vec~~ K-ra merőleges vetületének azt az $x_1 \in K$ vektort, amin $x = x_1 + x_2$ alakban előállítja x-t és $x_2 \in K^\perp$.

Jelölés: $P: H \to K \quad P(x) = x_1$
ortogonális projekció.

Tétel: H Hilbert-tér, $K \subseteq H$ zárt lineáris altér! Ekkor $K = K^{\perp\perp}$.

Bz: Tudjuk, hogy $K \subseteq K^{\perp\perp}$.

Legyen $x \in K^{\perp\perp}$ Riesz-felb. tétel m: $x = x_1 + x_2$ ahol $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$

Mivel $x \in K \subseteq K^{\perp\perp}$ és $x_2 = x - x_1 \Rightarrow x_2 \in K^\perp \cap (K^\perp)^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow x \in K \Rightarrow K^{\perp\perp} \subseteq K$ $\square$

Állítás: H Hilbert, $K \subseteq H$ zárt lineáris altér, és $K \neq H \Rightarrow K^\perp \neq \{0\}$.

Bz: TFH $K^\perp = \{0\} \Rightarrow K = K^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H$ ellentmondás $\square$

Állítás: H Hilbert, $\emptyset \neq M \subseteq H \Rightarrow \overline{\operatorname{Span}(M)} = M^{\perp\perp}$

Bz: $M^\perp = [\overline{\operatorname{Span}(M)}]^\perp \Rightarrow M^{\perp\perp} = [\overline{\operatorname{Span}(M)}]^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Span}(M)}$ $\square$

ANALÍZIS III.

3. előadás (09.26.)

Ortogonális sorozatok, sorok

Def: (1) X normált tér, és $M \subseteq X$, akkor M-t totális halmaznak nevezzük, ha $\overline{\operatorname{Span} M} = X$

(2) H Hilbert-tér, $M \subseteq X$, akkor M teljes halmaz, ha $M^\perp = \{0\}$

Tétel: H Hilbert-tér, $M \subseteq H$! Ekkor M totális $\iff$ M teljes.

Biz: $\Rightarrow$: $\overline{\operatorname{Span} M} = H \Rightarrow \{0\} = \left[\overline{\operatorname{Span} M}\right]^\perp = M^\perp$

$\Leftarrow$: $M^\perp = \{0\} \Rightarrow H = M^{\perp\perp} = \left[\overline{\operatorname{Span} M}\right]^{\perp\perp} \underset{\uparrow}{=} \overline{\operatorname{Span} M}$ □

itt kell, hogy H Hilbert

Def: A X normált tér szeparábilis, ha $\exists$ megszámlálható totális részhalmaz.

Köv: H Hilbert szeparábilis $\iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ sorozat ahol $\{x_n \mid n=0,1,2\ldots\}^\perp = \{0\}$

Def: H Hilbert-tér $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$

a) az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat, ha $\forall n,m \in \mathbb{N}$ $n \neq m$ $x_n \perp x_m$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált, ha ortogonális és $\|x_n\| = 1$ $\forall n$-re.

c) Az ortogonális sorozatokból nyert sorokat ortogonális soroknak nevezzük.

Megj: Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-beli sorozat, akkor a belőle nyert sort $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, a sorösszeget $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jelöli, amennyiben létezik. (itt $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in H$)

Tétel (Pithagorasz-tétel): X prehilbert tér $x_1, x_2 \ldots x_n$ véges sok páronként merőleges X-beli vektor! Ekkor:
$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Biz:
$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i \,\Big|\, \sum_{k=1}^n x_k\Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n (x_i|x_k)\Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n \delta_{ik}\|x_i\|^2\Big) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \square$$

Áll: Ha X prehilbert tér, $Y \subseteq X$ olyan halmaz, hogy $y \in Y \Rightarrow y \neq 0$ és $\forall y,x \in Y$-ra $x \neq y \Rightarrow x \perp y$! Ekkor Y lineárisan független.

Biz: $y_1 \ldots y_n \in Y$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k = 0$ azt kell megmutatni, hogy $\lambda_i = 0$ $\forall i$.

$\forall i = 1,2 \ldots n$-re: $0 = \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \,\Big|\, y_i\Big) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (y_k|y_i) = \lambda_i \cdot \underbrace{\|y_i\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_i = 0$ □

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: X prehilbert tér, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineárisan független sorozat. Ekkor $\exists$ olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat, hogy $\forall n$-re

$$\operatorname{span}\{y_1, y_2 \ldots y_n\} = \operatorname{span}\{e_1 \ldots e_n\}$$

Bz: Mivel $y_1 \neq 0$, ezért $\exists\, e_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}$! Olyan e_2 kell, ami $\perp e_1$-re és 1 normájú.

$z_2 := y_2 - \lambda_1 e_1$ Milyen λ_1 kell, hogy $z_2 \perp e_1$? $\Rightarrow 0 = (y_2 - \lambda_1 e_1 | e_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = (y_2|e_1) - \lambda_1 1 \Rightarrow \lambda_1 = (y_2|e_1).$$

z_2 nem lehet 0 a lin. függetlenség miatt, tehát $e_2 := \frac{z_2}{\|z_2\|}$ létezik. Így $\operatorname{span}\{y_1,y_2\} = \operatorname{span}\{e_1,e_2\}$

$z_3 := y_3 - \mu_1 e_1 - \mu_2 e_2$ úgy, hogy $z_3 \perp e_1, e_2$

$$\Rightarrow 0 = (y_3 - \mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 | e_1) = (y_3|e_1) - \mu_1 \Rightarrow \mu_1 = (y_3|e_1)$$

$$0 = (y_3 - \mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 | e_2) = (y_3|e_2) - \mu_2 \Rightarrow \mu_2 = (y_3|e_2)$$

Ezzel $\operatorname{span}\{e_1,e_2,e_3\} = \operatorname{span}\{y_1,y_2,y_3\}$

ezzel $e_3 := \frac{z_3}{\|z_3\|}$ Ezt az eljárást folytatva $e_1 \dots e_n$ jó lesz. □

Tétel (Parseval-tétel): H Hilbert-tér, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ ortogonális sorozat.

1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ortogonális sor konvergens.

2) a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ numerikus sor konvergens. $\left(\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\right)$

Ha 1 v. 2 teljesül, akkor $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$.

Bz: $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2$. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ $n > m$.

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|^2 = S_n - S_m \Rightarrow \forall n,m\text{-re } \|s_n - s_m\|^2 = |S_n - S_m|$$

$\Rightarrow \left[(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy } H\text{-ban} \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy } \mathbb{R}\text{-ben}\right] \Rightarrow$ teljesség miatt

$\Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv

$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} x_i$ konv $\quad \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_i\|^2$ konv

$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad S := \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$.

$$\underbrace{\|s_n\|^2}_{\downarrow\ \|x\|^2} = \left\|\sum_{k=0}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2 = S_n \to S$$

$$\Rightarrow S = \|x\|^2 \qquad \square$$

Megj: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat, $x_n \neq 0 \Rightarrow e_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \Rightarrow (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS.

$\alpha_n := \|x_n\| \Rightarrow x_n = \alpha_n e_n$.

Elegendő $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ ortogonális sorozatokat vizsgálni, ahol $\alpha_n \in \mathbb{K}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS

Parseval átfogalmazása: H Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ ONS, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$.

1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ ortogonális sor konv.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\|^2 < \infty$

Ha 1) v. 2) teljesül $\Rightarrow \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\|^2$

Állítás: H Hilbert-tér $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \subset H$ konv. Ekkor $\forall y \in H$-ra:

$\sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n | y)$ konv és $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n | y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \,\middle|\, y \right)$.

Biz: $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$, $(s_n | y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k | y)$

$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n =: x$ $\hookrightarrow$ Mivel $(\cdot | y)$ folyt $\to (x|y) \Rightarrow \exists \sum_{n=0}^{\infty} (x_n | y)$

konv. egyértelműsége miatt $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n | y) = (x|y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \,\middle|\, y \right)$ □

Állítás: H Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$-beli, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ konv,

$x := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$! Ekkor $\forall n$-re: $\alpha_n = (x | e_n)$

Biz: $\exists \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k e_k | e_n)$ $\forall n$-re: $= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (e_k | e_n)$

Ha $m > n \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (e_k | e_n) = \alpha_n \Rightarrow$ a fenti sorozat adott indextől α_n,

tehát ahhoz tart, tehát $\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (e_k | e_n) = (x | e_n)$ □

Köv (Fourier-eh-k egyértelműsége): H Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ ONS, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$

és $\exists \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e_n \Rightarrow \forall n$-re: $\alpha_n = \beta_n$.

Biz: $x := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e_n$ Előző állítás miatt,

$\alpha_n = (x | e_n) = \beta_n$

□

Def: H Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS, akkor egy $x \in H$ vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerinti n. Fourier-eh-n az $\alpha_n := (x | e_n)$ számot értjük, az $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ ortogonális sort az x $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerinti Fourier-sorának nevezzük.

ANALÍZIS III

4. előadás (10.03.)

Bessel-egyenlőtlenség: H Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq H$ ONS, $x\in H$

ekkor: $$\sum_{n=0}^{\infty} |(x|e_n)|^2 \le \|x\|^2$$

speciálisan: a $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x|e_n)e_n$ Fourier-sor konvergens.

Biz: $\alpha_n := (x|e_n)$, $n\in\mathbb{N}$, $s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k$

~~Adott~~ $0 \le \|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x|s_n) + \|s_n\|^2 = *$

$(x|s_n)=\sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k}\,(x|e_k) = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2$; $\|s_n\|^2 =$ Pith. miatt $= \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2$

$* = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n}|\alpha_k|^2 \Rightarrow \forall n$-re $\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2\le\|x\|^2$

Parseval miatt minden ilyen sor konv, és minden elemét felülről becsültük $\|x\|^2$-tel. □

Tétel: H Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq H$ ONS, $K := \overline{\mathrm{span}\,\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}}$! Minden $x\in H$ esetén az x Fourier-sorának összege, azonos az x K-ra vett merőleges vetületével azaz $P_K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)e_n$-nel.

Biz: $u := \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)e_n$, $(x|e_n) =: \alpha_n$. Azt is ~~rögz~~ tudjuk, hogy $\alpha_n = (u|e_n)$.

$x = u + (x-u)$. ami kell, hogy $u\in K$ és $x-u\in K^\perp$

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \Rightarrow s_n\to u$ és $s\in K \Rightarrow u\in K$

Mivel $K^\perp = \{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}^\perp \Rightarrow$ elég belátni $(x-u|e_n)=0$

$(x|e_n) - (u|e_n) =$ ezt tudjuk $= 0$ □

Def: Az $x\in H$ elemet az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS szerint F. sorba fejthetőnek nevezzük, ha $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)e_n$.

Következmény: H Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq H$ ONS, $x\in H$! x pontosan akkor F. sorbafejthető (e_n)-nek szerint, ha $x\in \overline{\mathrm{span}\,\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}}$.

Biz: ~~Ha~~ $x\in K$ akkor $x = \underset{K}{x} + \underset{K^\perp}{0} \Rightarrow x = P_K(x) \Rightarrow$ sorbafejthető

Ha x sorbafejthető $\Rightarrow x = \sum_{n=0}^{\infty}(x|e_n)e_n \in K$. □

Értelmezés lehetnek azok a rendszerek, amelyek szerint minden F-sorba fejthető, mert az a lineáris algebra-beli bázissal analóg.

Tétel (F-sorok alaptétele): H Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ ONS.
Pontosan akkor ezr $\forall x\in H$ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerint F-sorba fejthető, ha $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes, azaz totális ONS.

Biz: Tanult, de elég sok dualitást csak, ami fontosnak tűnik [videó]

Példák: 1) $I=[a,b]$, $L^2(I)$ $\quad P_n(t)=t^n$.

$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lineárisan független (tanult)

$\Rightarrow$ Gram-Schmidttel kapjuk egy $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS-t (L_n $\forall n$-re valós)

$\hookrightarrow$ Legendre-polinomok

Igazolható, hogy $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ teljes.

2) Komplex trigonometrikus polinomok: $L^2_{\mathbb{C}}(0,2\pi)$

$\varphi_n(t)=e^{int}$ ahol $t\in[0,2\pi]$, $n\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (\varphi_n|\varphi_m)_{L^2_{\mathbb{C}}}=\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}\,dt = \begin{cases}\frac{1}{i(n-m)}\left[e^{i(n-m)t}\right]_0^{2\pi}=0 & \text{ha } n\neq m\\ \int_0^{2\pi} dt = 2\pi & \text{ha } n=m\end{cases}$$

$\Rightarrow \psi_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ már ONS, és igazolható, hogy teljes.

3) Valós trigonometrikus polinomok: $L^2(0,2\pi)$ valós H-tér

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{2n}(t)&=\cos(nt)\\ \varphi_{2n+1}(t)&=\sin(nt)\end{aligned}\right\} \quad t\in[0,2\pi],\ n\in\mathbb{N}$$

HF: ortogonális, teljes rendszer, $\|\varphi_0\|=\sqrt{2\pi}$, $\|\varphi_{n>0}\|=\sqrt{\pi}$

$\Rightarrow \psi_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi_0$, $\psi_{n\geq 1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi_n$ $\Rightarrow$ $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totális ONS $L^2(0,2\pi)$-ben.

Van még a tisztán sin-os és tisztán cos-os sorok $[0,\pi]$-n, de már nem.

<u>Duális terek</u>

Emlékeztető: X,Y NT, $A: X\to Y$ lin. operátor folyt. ha $\underbrace{\sup\{\|Ax\| \mid x\in X, \|x\|\leq 1\}}_{\|A\|:=} < \infty$

Igazolható, hogy $\|A\|=\inf\{C\geq 0 \mid \|Ax\|\leq C\|x\| \ (\forall x\in X)\}$

és $\|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|$

$B(X,Y):=\{A: X\to Y \mid \text{ahol } A \text{ folytonos, lineáris}\}$

$B(X,Y)$ Banach, ha Y teljes, azaz ~~teljes~~ Banach. (Tehát nemcsak előtt láttuk kell ezzel a bizonyítást)

Def: Ha $Y = \mathbb{K}$, akkor $X' := B(X, \mathbb{K})$ az X (topologikus) duális terének nevezzük, X' elemeit folytonos lineáris funkcionáloknak nevezzük.

Állítás: Ha X Hilbert-tér (elég prehilbert), $y \in X$, akkor az $f_y(x) = (x \mid y)$ $\quad (x \in X)$
$f_y : X \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál és $\|f_y\| = \|y\|$

Biz: $x \in X$: $|f_y(x)| = |(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ tehát $\|f_y\| \leq \|y\|$ és folytonos (sőt)

kell olyan x, amil $\|x\| \leq 1$, és $|f_y(x)| = \|f_y\|$.

ha $y = 0$: triviális

ha $y \neq 0$: $x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|x\| = 1 \Rightarrow \|f_y\| \geq |f_y(x)| = \|y\|$

$\Rightarrow \|f_y\| = \|y\|$ $\square$

Tétel (Riesz-féle reprezentációs tétel): H Hilbert-tér, ekkor bármely $f \in H'$ egyértelműen előáll $f = f_y = (\cdot \mid y)$ alakban valamely $y \in H$ alakban.

Az $\exists\, y \in H : \forall x \in H : f(x) = (x \mid y)$.

Biz: Ha $f = 0 \Rightarrow y = 0$.

TFH $f \neq 0$, $f \in H' \Rightarrow \ker f \subsetneq H$ zárt lineáris altér.

A Riesz-féle ortogonalitási tétel miatt $[\ker f]^{\perp} \neq \{0\}$ (ide kell a teljesség)

Legyen $0 \neq z \in [\ker f]^{\perp}$. Ha $x \in H$, akkor $v = f(z)x - f(x)z \in \ker f$

mert $f(v) = f(z)f(x) - f(x)f(z) = 0$. Emiatt $(v \mid z) = 0$

$0 = (v \mid z) = (f(z)x \mid z) - (f(x)z \mid z) \iff f(x) = \frac{1}{\|z\|^2} f(z)(x \mid z) = (x \mid y)$

ahol $y := \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$

unicitás: $f_{y_1} = f_{y_2} \iff \forall x\ (x \mid y_1) = (x \mid y_2) \iff \forall x: (x \mid y_1 - y_2) = 0$

$\iff y_1 - y_2 \in H^{\perp} = \{0\} \iff y_1 = y_2.$ $\square$

ANALÍZIS III.

5. előadás (10.10.)

Példa: 1) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mérhető, $\mathcal{L}^2(M) = M$

~~Minden~~ $\forall f \in L^2(M)'$-hoz $\exists! \psi \in L(M)$

$$f(\varphi) = \int_M \varphi \cdot \psi \qquad (\varphi \in L^2(M))$$

Ugyanis Riesz $\exists! \chi \in L^2(M)$ $\quad \psi := \overline{\chi}$

$$f(\varphi) = (\varphi|\chi) = \int_M \varphi \cdot \overline{\chi} = \int_M \varphi \cdot \psi$$

2) $p \in]1, \infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow L^p(M)$ Banach tér

$\psi \in L^q(M)$

Hölder-egyenlőtlenség: $\left|\int_M \varphi \cdot \psi\right| \leq \|\varphi\|_p \cdot \|\psi\|$

(Lemaradtam, majd a jegyzetből kiegészítem)

tétel: $\Psi: L^q(M) \to (L^p(M))'$, $\Psi(\psi) := f_\psi$
ez egy izometrikus, izomorf leképezés.

$\Rightarrow L^p(M)$-nek $L^q(M)$ a duálisa.

<u>Lineáris operátorok és funkcionálok kiterjesztése</u>

Tétel: X normált tér, Y Banach-tér, $X_0 \subseteq X$ altér, $A: X_0 \to Y$ folyt. lin. op.
Ekkor létezik egyetlen $\tilde{A}: \overline{X_0} \to Y$ folyt. lin. operátor, úgy, hogy $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Biz: Legyen $x \in \overline{X_0}$: $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X_0$, úgy, hogy $x_n \to x$.

Kellene, hogy $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens legyen Y-ban!

adott n, m esetén: $\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{\to 0} \to 0 \Rightarrow (Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy $\Rightarrow$

Mivel Y Banach, ezért $\exists \lim_{n \to \infty} Ax_n =: \tilde{A}x$.

Meg kell mutatni, hogy ez független a sorozat választásától [HF, most kell!!]

tudni, hogy $A \subset \tilde{A}$. Kell még, hogy $\tilde{A}$ folyt. és $\|\tilde{A}\| = \|A\|$

$\|\tilde{A}(x)\| = \lim_{n \to \infty} \|Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\tilde{A}\| \leq \|A\|$ (másik irány triviális)

$\square$

Kiváltás: X normált tér, $X_0 \subseteq X$ altér, $f: X_0 \to \mathbb{K}$ folyt. lin. fv. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists! \tilde{f}: \overline{X_0} \to \mathbb{K}$ folyt. lin. funkc. $f \subset \tilde{f}$, $\|f\| = \|\tilde{f}\|$

Tétel (Hahn–Banach-tétel): X normált tér, $X_0 \subseteq X$ altér, $f_0 : X_0 \to \mathbb{K}$ folyt lin funkc. Ekkor létezik (általában nem egyértelmű) $f \in X'$ folyt lin funkc. $f_0 \subset f$ és $\|f_0\| = \|f\|$

Tétel: (kis H-B-tétel): X normált tér, $0 \neq x_0 \in X$. $\exists f \in X'$, $\|f\| = 1$ és $f(x_0) = \|x_0\|$

Biz: $X_0 = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \{\lambda e \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ ahol $e = \frac{x_0}{\|x_0\|}$

$f_0 : X_0 \to \mathbb{K}$, $f_0(\lambda e) := \lambda$ ez lin funkc. és olyan igaz, hogy $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

$\|f_0\| = \sup\{\underbrace{|f(\lambda e)|}_{|\lambda|} \mid \underbrace{\|\lambda e\|}_{|\lambda|} \leq 1\} = 1 \Rightarrow$ folytonos.

$\Rightarrow$ Az előző tétel miatt f_0 kiterjeszthető f-fé.

$\square$

Követk.: X normált tér, $X \neq \{0\}$, akkor bármely $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ vektorokhoz $\exists f \in X' : f(x_1) \neq f(x_2)$

Biz: kis H B tételt alkalmazzuk a $x_0 = x_2 - x_1 \neq 0$ vektorra $\square$

<u>Normált tér biduálisa</u>

Def: X normált tér, így X' Banach-tér, tehát $\exists (X')' =: X''$ az X biduálisa, mely szintén Banach-tér

Áll: $x \in X$, $\hat{x} : X' \to \mathbb{K}$, $\hat{x}(f) := f(x)$. $\forall x \in X$-re $\hat{x} \in X''$ és $\|\hat{x}\| = \|x\|$.

Biz: • lineáris: $f, g \in X'$ $\hat{x}(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g)$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ $\hat{x}(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \hat{x}(f)$.

• folyt: $\forall f \in X'$: $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\hat{x}\| \leq \|x\|$

• egyenlőség: kis H-B miatt $\exists f \in X'$, $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\hat{x}\| \geq |\hat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\|$

$\square$

Tétel: X normált tér, $\phi(x) := \hat{x}$, $\phi : X \to X''$ leképezés izometrikus lineáris operátor.

Biz: az izometrikusságot láttuk. A linearitás

$x, y \in X$: $\phi(x+y) = (\widehat{x+y}) \overset{?}{=} \hat{x} + \hat{y} = \phi(x) + \phi(y)$

$f \in X'$ $(\widehat{x+y})(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \hat{x}(f) + \hat{y}(f)$

ugyanígy $\lambda \hat{x}$-re

$\square$

Ezek szerint $\phi : X \to X''$ lineáris izometria (injektív), azaz mindent megőriz, ami egy normált teret jellemez. $\Rightarrow X \cong \phi\langle X \rangle (= \operatorname{ran} \phi)$ azonosítható
R_ϕ

Tehát X tekinthető X'' Banach-tér altereként: $\overline{\phi\langle X \rangle} =: \hat{X} \subseteq X''$, és mivel zárt, ezért maga is Banach-tér, ezt nevezhetjük az X normált tér teljessé tételének.

Def: Az X Banach-teret reflexívnek nevezzük, ha Φ leképezés szürjektív, azaz $\Phi : X \to X''$ izometrikus izomorfizmus.

Példa: 1) X véges dimenziós, H Hilbert, ℓ^p $(1<p<\infty)$, $L^p(M)$ $(1<p<\infty)$ reflexívek

2) ℓ^1, ℓ^∞, $L^1(M)$, $L^\infty(M)$, $C[A,B]$ nem reflexív Banach-terek.

Banach-terek alaptételei

Def: X, Y normált terek, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$, $A \in B(X,Y)$. Azt mondjuk, hogy $A_n \to A$ pontonként, ha $A_n x \to Ax$ $\forall x \in X$-re.

Állítás: Ha $\|A_n - A\| \to 0 \Rightarrow A_n \to A$ pontonként, de visszafelé nem!

Biz: $\|A_n - A\| \to 0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| \, \|x\| \to 0$

megfordítás: $X = H$ Hilbert, $Y = \mathbb{K}$, $A_n = f_n$ ahol $f_n(x) = (x|e_n)$
ahol $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS.
$\Rightarrow \|f_n\| = \|e_n\| = 1 \not\to 0$ DE Bessel miatt $\sum_{n=0}^{\infty} |(x|e_n)|^2 < \infty$
ami miatt $|(x|e_n)|^2 \to 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$ $\forall$-re.

mutattunk egy ellenpéldát, jippi

$\square$

megjegyzés: „$f_n \to f$ pontonként" helyett szokás „$f_n \to f$ gyenge* konvergencia szerint", azaz „$f_n \xrightarrow{w^*} f$".

Def: X, Y NT $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $B(X,Y)$-beli operátor.
(a) $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pontonként korlátos, ha $\forall x\in X$ esetén $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda x\| < \infty$
(b) $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egyenletesen korlátos, ha $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda\| < \infty$

megj: $(b) \Rightarrow (a)$: $x\in X$, $M := \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda\| \Rightarrow \forall\lambda\in\Lambda$ $\|A_\lambda x\| \le \|A_\lambda\|\cdot\|x\| \le$
$\le M\cdot\|x\| \Rightarrow (a)$

Tétel (Banach egyenletes korlátosság tétele): Ha X, Y Banach, akkor $(a) \Leftrightarrow (b)$

nem bizonyítjuk.

Tétel (Banach–Steinhaus-tétel): X, Y Banach-tér, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X,Y)$!
TFH: $\forall x\in X$: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x =: Ax$! Ekkor $A\in B(X,Y)$
valamint $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egyenletesen korlátos.

Biz: A lineáris, HF
$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elég bizonyítani, hogy pontonként is az.
$x\in X \Rightarrow \|A_n x\| \to \|Ax\| \Rightarrow$ konvergens $\Rightarrow$ korlátos $\Rightarrow \sup\|A_n x\| < \infty$

folytonosság: $x\in X \Rightarrow \|Ax\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|A_n x\| \le M\|x\| \Rightarrow A\in B(X,Y)$ és $\|A\|\le M$
$\square$

Def: X NT $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x\in X$! Azt mondjuk, hogy $x_n\to x$ gyengén $(x_n \xrightarrow{w} x)$
ha $\forall f\in X'$: $f(x_n)\to f(x)$.

megj: Ha $\|x_n - x\|\to 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$ nyilván $f\in X'$-re: $|f(x_n) - f(x)| \le \|f\|\,\|x_n - x\| \to$
$\to 0$

Megfordítás nem igaz, H Hilbert-térben $\forall (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS esetén $e_n \rightharpoonup 0$
(lsd: Bessel-egyenlőtlenség)

megj: Ha X NT $\Rightarrow X'$ NT $\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$, $f_n\in X'$, akkor
$$f_n \xrightarrow{w} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall F\in X'': F(f_n)\to F(f)$$
$$f_n \xrightarrow{w^*} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x\in X: f(x_n)\to f(x)$$
Vagyis $f_n \xrightarrow{w} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f$, általában visszafele nem igaz.
(csak reflexív NT esetén)

Tétel: Ha X reflexív Banach-tér, akkor bármely X-beli korlátos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak
van gyengén konvergens részsorozata.

Nyílt leképezés

Áll: X, Y VT, $A: X \to Y$ lin op, injektív. Akkor és csak akkor, ha $\ker A = \{0\}$ és A^{-1} is lineáris

Biz: A inj $\Rightarrow \ker A = \{0\}$.

Ha $\ker A = \{0\}$, $x, y \in X$: $Ax = Ay \iff A(x-y) = 0 \iff x-y \in \ker A = \{0\} \Rightarrow x = y$.
Tehát a inj.

Világos, hogy $Y_0 := \operatorname{ran} A \subseteq Y$ lin altér és $A^{-1}: Y_0 \to X$.

$y_1 := Ax_1$, $y_2 := Ax_2$. Ekkor:
$$\underbrace{A^{-1}(y_1+y_2)}_{=A^{-1}(A(x_1+x_2))} = \underbrace{A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2}_{=A^{-1}Ax_1 + A^{-1}Ax_2}$$

$\Rightarrow A^{-1}$ additív (u.i. homogén) $\Rightarrow$ lineáris $\square$

Ha X, Y NT, $A \in B(X,Y)$ injektív vajon igaz-e, hogy A^{-1} folytonos?

általában nem, de kell még feltétel, amivel ezt tudni

Tétel (Banach nyílt leképezés tétele): X, Y Banach-terek, $A \in B(X,Y)$ szürjektív. Ekkor A nyílt leképezés, azaz $\forall G \subseteq X$ nyílt halmaz esetén $A\langle G\rangle := \{Ax : x \in G\} \subseteq Y$ nyílt.

nem bizonyítjuk.

Tétel (Banach lineáris homeomorfizmus tétele): X, Y Banach-terek, $A \in B(X,Y)$ bijektív. Ekkor $A^{-1} \in B(Y,X)$

Biz: azt kell bizonyítani, hogy A^{-1} folytonos. (Elég 0-ban megmutatni)
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\quad \|A^{-1}y\| < \varepsilon \quad (y \in Y, \|y\| < \delta)$. (Ezt szeretnénk találni)

$G = B_\varepsilon(0;X) \subseteq X$ nyílt. Mivel A nyílt, $0 \in A\langle G\rangle \subseteq Y$ nyílt $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \delta: B_\delta(0,Y) \subseteq A\langle G\rangle$. Ez már jó, mert $A^{-1}\langle B_\delta(0,Y)\rangle \subseteq A^{-1}\langle A\langle G\rangle\rangle = G = B_\varepsilon(0,X)$

azaz $\forall y \in B_\delta(0,Y)$: $A^{-1}y \in B_\varepsilon(0,X) \Rightarrow$ ezt akartuk látni $\square$

Def: (X,d), (Y,ϱ) metrikus terek, $f: X \to Y$ fv zárt leképezés, ha $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ zárt.

Azaz f zárt leképezés bármely $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sorozatra, ahol $x_n \to x$, $f(x_n) \to y$ valamely $x \in X$, $y \in Y$ esetén, akkor $f(x) = y$.

Kommentárképp:
$$\left.\begin{array}{l}(a)\ x_n \to x \\ (b)\ f(x_n) \to y \\ (c)\ f(x) = y\end{array}\right\}$$
f zárt leképezés $\iff$ "$(a) \wedge (b) \Rightarrow (c)$"
érdekesség: f folytonos $\iff$ "$(a) \Rightarrow (b) \wedge (c)$"
(tehát a folytonosság sokkal erősebb annál)

Pl.: $X = Y = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

ez nem folytonos, de zárt

Áll.: X, Y Banach-terek, $A: X \to Y$ zárt lineáris operátor, ekkor

$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ Banach-tér az $\|(x, Ax)\|_{G(A)} := \|x\| + \|Ax\|$ normával.

Bi: $X \times Y$ Banach-tér: $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$ és A zárt $\Leftrightarrow$ $G(A) \subseteq X \times Y$ zárt halmaz, továbbá $G(A)$ lineáris altér $X \times Y$-ban, vagyis $G(A)$ zárt lineáris altere $X \times Y$ Banach-térnek $\Rightarrow$ $G(A)$ Banach-tér $\square$

Tétel (Banach zárt gráf tétele): X, Y Banach-terek, $A: X \to Y$ (az X-en mindenütt értelmezett) zárt lin operátor. Ekkor $A \in B(X, Y)$

Bi: $G(A)$ Banach-tér, $\quad U: G(A) \to X \quad U(x, Ax) = x$
$V: G(A) \to Y \quad V(x, Ax) = Ax \quad$ (ezek lineárisak triviálisan)

$\|U(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\| \Rightarrow U$ folytonos. hasonlóan, V is az.

$x = y \Rightarrow U(x, Ax) = U(y, Ay) \Rightarrow Ay = Ax \Rightarrow U$ injektív
hasonlóan szürjektív

$\Rightarrow x \in X: x = U(x, Ax) \Rightarrow U: G(A) \to X$ egy folyt lin bijekció $\Rightarrow$
$\Rightarrow U^{-1}$ is folytonos (Banach lin. homeomorf miatt)

$U^{-1}x = (x, Ax) \Rightarrow VU^{-1}x = V(x, Ax) = Ax \quad \forall x \in X$-re

$\Rightarrow A = VU^{-1} \Rightarrow A$ is folytonos $\square$

Operátorok spektruma

Motiváció: X, Y VT, $A: X \to Y$ lin op, $b \in Y$: Mikor oldható meg $Ax = b$?

Akkor és csak akkor, ha $b \in \operatorname{ran} A$. Mikor oldható meg $\forall b$-re?
Akkor ha $\forall b \in \operatorname{ran} A$, tehát, ha A szürjektív. Mikor lesz a megoldás egyért.?

Akkor, ha A injektív, tehát a $A: X \to Y$ bijekció.

Cluss kérdés: Ha $Ax = b$-re ismerjük x-et, milyen dx-re lesz
$A(x + dx) = b + db$ megoldás?

ANALÍZIS

7. előadás (10.24.)

Def: X normált tér, $A \in B(X)$ folytonosan invertálható, ha A bijektív, és $A^{-1} \in B(X)$.
A folyt. invertálható operátorok halmazát $G(B(X))$ jelöli.

megjegyzés: ha $A, B \in G(B(X)) \Rightarrow A \cdot B \in G(B(X))$ és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Def: X normált tér, $A \in B(X)$. Egy $\lambda \in \mathbb{K}$-t az A reguláris értékének nevezzük, ha $A - \lambda I \in G(B(X))$ és $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid A - \lambda I \in G(B(X))\}$ az A operátor rezolvens halmaza.

A $Sp(A) := \mathbb{K} \setminus \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid A - \lambda I \notin G(B(X))\}$ halmazt az A operátor spektrumának nevezzük.

Megj: $\lambda \in Sp(A)$ pontosan akkor, ha az alábbiak közül legalább az egyik igaz:

(1) $A - \lambda I$ nem injektív $\Longleftrightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

(2) $A - \lambda I$ nem szürjektív $\Longleftrightarrow \operatorname{ran}(A - \lambda I) \neq X$

(3) $(A - \lambda I)^{-1}$ létezik, de nem folytonos.

[véges dimenzióban ezek u.a.*, ezért mindig az (1)-ből indultunk ki]

Állítás: X normált tér, $A \in B(X)$

(1) Ha $\dim X < \infty \Rightarrow \lambda \in Sp(A)$ pontosan akkor, ha $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

(2) Ha X Banach-tér és $A - \lambda I$ bijektív, akkor $\lambda \in \rho(A)$
// Banach lin. homeomorfia miatt

Def: X normált tér, $A \in B(X)$, akkor egy $\lambda \in \mathbb{K}$-t sajátértéknek nevezzük, ha $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ és $\forall x \in \ker(A - \lambda I)$-t az A λ-hoz tartozó sajátvektorának nevezzük.

A sajátértékek halmaza: $Sp_p(A)$.

megj: $Sp_p(A) \subseteq Sp(A)$, és ha $\dim X < \infty$ akkor a kettő $=$.

Példa: $X = \ell^2$, $Ax := A(x_0, x_1, x_2 \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$

könnyen látható, hogy $\ker A = \{0\}$, de $\operatorname{ran} A \neq \ell^2$, hiszen csak olyanokat képez, ahol $x_0 = 0$. $\Rightarrow 0 \in Sp(A) \setminus Sp_p(A)$.

Állítás: X Banach-tér, $A \in B(X)$, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(1) $A \in G(B(X))$

(2) $\exists c > 0 : \|Ax\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in X$-re és $\overline{\operatorname{ran} A} = X$

---

*: véges dimenzióban minden folytonos, ezért (3) mindig igaz volt, és az (1), (2) volt u.a.

Biz: (1) $\Rightarrow$ (2): Ha $A \in G(B(X)) \Rightarrow \operatorname{ran} A = X \Rightarrow \overline{\operatorname{ran} A} = X$ ✓

$\Rightarrow A^{-1} \in B(X) \Rightarrow \forall x \in X:\ x = A^{-1}Ax \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\| = \|A^{-1}Ax\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Ax\| \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|x\|$

ha $\|A^{-1}\| = 0$, akkor $\dim X = 0$, de ez nem baj.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\ker A = \{0\}$, mert triviális (elvileg)

Megmutatjuk, hogy $\operatorname{ran} A \subseteq X$ zárt:

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, olyan, hogy $Ax_n \to y$ valamely $y \in X$-re!

Ekkor (x_n) is konv, mert

$\|x_n - x_m\| \le \frac{1}{c} \|A(x_n - x_m)\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \to x$ valamely $x \in X$-re a Banachság miatt.

$\Rightarrow y = Ax \in \operatorname{ran} A \Rightarrow \operatorname{ran} A$ zárt.

Ebből: $\operatorname{ran} A = \overline{\operatorname{ran} A} = X \Rightarrow A$ szürjektív.

A^{-1} folytonos:

$y \in X \Rightarrow y = Ax$ valamely $x \in X$-re $\Rightarrow x = A^{-1}y$.

$\|A^{-1}y\| = \|x\| \le \frac{1}{c} \cdot \|Ax\| = \frac{1}{c}\|y\|$ $\forall y$-ra $\Rightarrow A^{-1} \in B(X)$ és $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{c}$.

Mivel tehát A bijektív, és A^{-1} folyt, ezért $A \in G(B(X))$. □

Lemma: X Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, úgy, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Ekkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergens X-ben.

Biz: $S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$, megmutatjuk, hogy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy.

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, s $n > m$

$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$, ha n,m nagy. meg ilyen dolgok.

□

Tétel (Carl Neumann-tétel): X Banach-tér, $A \in B(X)$, $\|A\| < 1$. Ekkor

(1) $I - A \in G(B(X))$

(2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ sor $B(X)$-ben konvergens

(3) $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$

Biz: (2) $\|A^n\| = \|A \cdot A \cdot A \cdots A\| \le \|A\|^n$ ahol $\|A\| < 1$, tehát $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|A\|^n$ konvergens $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|$ is konv. (majoráns krit.) $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ is konv. (lemma miatt)

(3): $B := \sum_{n\in\mathbb{N}} A^n \in B(X)$, $B_n := \sum_{k=0}^{n} A^k \to B$. Ekkor: $(I-A)B_n \to (I-A)B$, de

$(I-A)B_n = B_n - AB_n = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I - A^{n+1} \to I$ mert $\|A^n\| \to 0$.

tehát $(I-A)B = I$. □

Állítás: Ha X Banach-tér, $A \in G(B(X))$, $B \in B(X)$ és $\|A-B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, akkor $B \in G(B(X))$.

Biz: $B = A-(A-B) = \underset{G(B(X))}{\underset{\uparrow}{A}}\left[I - A^{-1}(A-B)\right]$ ezt kéne megmutatni, hogy $\in G(B(X))$.

ugyanis $\|A^{-1}(A-B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A-B\| < 1$ a feltétel miatt, tehát a Carl Neumann-tétel miatt $I - A^{-1}(A-B) \in G(B(X))$ $\square$

Következmény: Ha X Banach, akkor $G(B(X)) \subseteq B(X)$ nyílt.

Biz: $A \in G(B(X)) \Rightarrow r := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ esetén $B_r(A, B(X)) \subseteq G(B(X))$. $\square$

Következmény: X Banach-tér, $A \in B(X) \Rightarrow \rho(A) \subseteq \mathbb{K}$ nyílt, $Sp(A)$ zárt.

Biz: $\lambda_0 \in \rho(A)$, $r := \left(\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|\right)^{-1} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < r$ esetén:
$\|(A-\lambda I) - (A-\lambda_0 I)\| = |\lambda - \lambda_0| < r \Rightarrow A - \lambda I \in G(B(X)) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ $\square$

Def: X Banach-tér, $A \in B(X) \Rightarrow r(A) := \inf\{\|A^n\|^{1/n} : n \geq 1\}$ számot a A operátor spektrálsugarának nevezzük.

megj: $r(A) \leq \|A\|$

Tétel (spektrálsugár tétel): $A \in B(X)$. Ekkor $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$

Biz: $\varepsilon > 0$, lássuk be, hogy nagy n-re $r(A) - \varepsilon \leq \|A^n\|^{1/n} \leq r(A)+\varepsilon$
az első mindig igaz, a második így adódik:

Legyen r olyan, hogy $r(A) < r < r(A)+\varepsilon \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|A^{k_0}\| < r^{k_0}$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges $\Rightarrow n = m k_0 + l$ ahol $l, m \in \mathbb{N}$ és $l < k_0$

$\|A^n\| = \|A^{k_0 m} \cdot A^l\| \leq \|A^{k_0 m}\| \cdot \|A\|^l \leq \|A^{k_0}\|^m \cdot \|A\|^l \leq C\|A^{k_0}\|^m$

ahol $C = \max\{1, \|A\|, \dots \|A^{k_0}\|\}$

$\Rightarrow \|A^n\|^{1/n} \leq C^{1/n}\|A^{k_0}\|^{m/n} \leq C^{1/n}(r^{k_0})^{m/n} = \underbrace{C^{1/n}}_{\to 1} r^{\overbrace{\frac{n-l}{n}}^{\to 1}} \to r$

Tehát elég nagy n-re $\|A^n\|^{1/n} < r(A)+\varepsilon$ $\square$

ANALÍZIS III.

8. előadás (11.07.)

Tétel: Legyen X Banach-tér, $A \in B(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > r(A)$, akkor $\lambda \in \rho(A)$,
a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} = (\lambda I - A)^{-1}$

Biz: $r \in \mathbb{R}$, $r(A) < r < |\lambda|$, $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} < r \Rightarrow \exists n_0 : \|A^n\| < r^n \quad \forall n > n_0$-ra.

$$\Rightarrow \left\|\frac{A^n}{\lambda^n}\right\| \leq \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} = \frac{\|A^n\|}{r^n}\left|\frac{r}{|\lambda|}\right|^n \leq \left(\frac{r}{|\lambda|}\right)^n = q^n$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ konv $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\|\frac{A^n}{\lambda^n}\right\|$ konv $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{\lambda^n}$ konv $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ konv.

$$B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \in B(X)$$

$$(\lambda I - A)B = \lambda B - AB = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = \frac{A^0}{\lambda^0} = I$$

$B(\lambda I - A) = I$ (HF) $\square$

Követk: Ha X Banach-tér, $A \in B(X)$, akkor $Sp(A)$ korlátos, és $Sp(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq r(A)\}$

ábra a videón.

Továbbá $Sp(A)$ kompakt.

Tétel: X komplex Banach-tér. $\forall$ $A \in B(X)$ spektruma nemüres kompakt halmaz, továbbá
$$r(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp(A)\}$$

nem bizonyítjuk

valósban nem teljesül a feltétel.

Pl.: $X = \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow Sp(A) = \{\emptyset\}$

Hilbert-terek operátorai

Tétel: H, K Hilbert-terek, $A \in B(H,K)$. Létezik A^*.

Biz: $y \in K$. $\varphi(x) := (Ax \mid y) \quad \varphi : H \to \mathbb{K}$

φ folyt lin funkc. $|\varphi(x)| \leq |(Ax\mid y)| \leq \|A\|\cdot\|x\|\cdot\|y\| \Rightarrow \varphi \in H' \Rightarrow \exists! z = A^*(y) \in H$

így egy $(Ax \mid y) = \varphi(x) = (x \mid z) = (x \mid A^*(y))$ tehát A^* jól definiált

Def: Az $A^* : K \to H$ fv-t az $A \in B(H,K)$ adjungáltja, ha $(Ax \mid y) = (x \mid A^*(y))$.

Tétel: Ha H, K Hilbert-tér, $A \in B(H,K)$, akkor $A^* \in B(K,H)$, $\|A^*\| = \|A\|$ és $(A^*)^* = A$

Biz: • A^* lineáris: $y_1, y_2 \in K$ $\forall x \in H$

$$(x | A^*(y_1+y_2)) = (Ax | y_1+y_2) = (Ax|y_1) + (Ax|y_2) =$$
$$= (x|A^* y_1) + (x|A^* y_2) = (x | A^*(y_1) + A^*(y_2)).$$

homogenitás u.í.

• A^* folyt: $\forall y \in K$

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y | A^* y) = (AA^* y | y) = \|AA^* y\| \|y\| \leq \|A\| \|A^* y\| \|y\|$$

$$\Rightarrow \|A^* y\| \leq \|A\| \|y\| \Rightarrow A^* \text{ folyt. és } \|A^*\| \leq \|A\|$$

• $A^{**} = A$: $x \in H$, $y \in K$

$$(Ax|y) = (x|A^* y) = \overline{(A^* y | x)} = \overline{(y | A^{**} x)} = (A^{**} x | y)$$

$$\Rightarrow Ax = A^{**} x \ \forall x\text{-re} \Rightarrow A = A^{**}$$

• $\|A^*\| = \|A\|$: láttuk, hogy $\|A^*\| \leq \|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\| \Rightarrow \|A^*\| = \|A\|$ □

Állítás: H, K Hilbert-terek, $A \in B(H,K)$, akkor

$$\|A^* A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2. \quad \text{Ez } C^*\text{-tulajdonság}$$

Biz: $\|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$

Ha $x \in H$, $\|Ax\|^2 = (A^* A x | x) \leq \|A^* A x\| \cdot \|x\| \leq \|A^* A\| \|x\| \|x\|$

$$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^* A\| \quad \Rightarrow \quad \|A^* A\| = \|A\|^2$$

$\|AA^*\| = \|A\|^2$ ugyanígy. □

Állítás: H, K Hilbert-terek $A, B \in B(H,K)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$(A+B)^* = A^* + B^* \text{ és } (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$$

Ha $A, B \in B(H)$, akkor $(AB)^* = B^* A^*$.

Biz: HF.

Állítás: $A \in B(H,K) \Rightarrow \ker A^* = [\operatorname{ran} A]^\perp$ és $\overline{\operatorname{ran} A} = [\ker A^*]^\perp$

Biz: $y \in \ker A^* \Leftrightarrow A^* y = 0 \Leftrightarrow \forall x: (x|A^* y) = 0 = (Ax|y) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y \in (\operatorname{ran} A)^\perp \quad \Rightarrow \ker A^* = (\operatorname{ran} A)^\perp$$

$$\Rightarrow (\ker A^*)^\perp = (\operatorname{ran} A)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span}(\operatorname{ran} A)} = \overline{\operatorname{ran} A}. \quad \square$$

Def: H Hilbert-tér

(a) $T \in B(H)$ normális, ha $TT^* = T^* T$

(b) $A \in B(H)$ önadjungált, ha $A^* = A$.

(c) $A \in B(H)$ pozitív, ha önadjungált és $(Ax|x) \geq 0$ $\forall x \in H$-ra.

(d) $U \in B(H)$ unitér, ha normális, és $UU^* = U^* U = I$

(e) $P \in B(H)$ ortogonális projekció, ha önadjungált és $P = P^* = P^2$

Megj.: $T, S \in B(H)$, $T = S \iff (Tx|y) = (Sx|y)$ $\quad \forall x,y \in H$.

de viszont $(Tx|x) = (Sx|x)$ $\forall x$-re $\not\Rightarrow$ $T = S$

pl.: $H = \mathbb{R}^2$, $T = 0$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Lemma: H komplex Hilbert-tér, $T \in B(H)$

$$(Tx|y) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \left(T(x+i^k y) \mid x+i^k y\right). \qquad \forall x,y\text{-ra.}$$

Biz.: HF

Következmény: H komplex Hilbert-tér $S,T \in B(X)$

$$S = T \iff (Sx|x) = (Tx|x) \quad \forall x \in H$$

ezt csak valósban mutatta, bizonyította

Tétel: H komplex Hilbert-tér,

(a) $T \in B(X)$ normális $\iff \|Tx\| = \|T^* x\|$ $\quad \forall x \in H$

(b) $A \in B(X)$ önadj. $\iff (Ax|x) \in \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in H$ $\quad$ (ez a hermitikus def-je)

(c) $A \in B(X)$ pozitív $\iff (Ax|x) \geq 0$ $\quad \forall x \in H$ $\quad$ (elvileg itt ezt a önadjungált)

Biz.: (a) T normális $\iff T^*T = TT^* \iff \forall x \in H$ $\quad \|Tx\|^2 = (T^*Tx|x) = (TT^*x|x) = \|T^*x\|^2$

(b) $A = A^* \iff \forall x \in H$: $\quad (Ax|x) = (A^*x|x) = (x|Ax) = \overline{(Ax|x)} \iff (Ax|x) \in \mathbb{R}$

(c) Triv. (b)-ből $\quad \square$

Pl.: (1): $H = \mathbb{K}^n$ $\quad A \in B(H) \Rightarrow [A] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$[A^*] = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

(2): H Hilbert. $\quad (e_n), (f_n)$ ONS, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ korlátos

$$Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) f_n, \qquad Sx := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n} (x|f_n) e_n$$

$T, S \in B(H)$ és $T^* = S$

Tx értelmes $\iff \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n (x|e_n)|^2 < \infty$ $\quad ; \quad |\lambda_n(x|e_n)|^2 = |\lambda_n|^2 |(x|e_n)|^2 \leq M^2 \sum |(x|e_n)|^2 \leq M^2 \|x\|^2$

tehát Tx mindig létezik, és lineáris (triviális). és $\|T\| \leq M$

ugyanígy S.

$$(Tx|y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x|e_n)(f_n|y) = \Big(x \,\Big|\, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n}\, \overline{(f_n|y)}\, e_n\Big) = (x|Sy) \Rightarrow T^* = S \ ✓$$

ANALÍZIS III.

9. előadás (11.14.)

Hilbert-terek operátorainak spektruma

Lemma: H Hilbert-tér, $A \in B(H)$. A folytonosan invertálható $\Longleftrightarrow$ A^* is folytonosan invertálható és $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Biz.: $\Leftarrow$: az $\Rightarrow$ irány triviális a $*$ művelet idempotenssége miatt

$$\Rightarrow: \quad A^*(A^{-1})^* = (A A^{-1})^* = I^* = I$$
$$(A^{-1})^* A^* = (A^{-1}A)^* = I$$

Állítás: H Hilbert-tér, $T \in B(H) \Rightarrow Sp(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in Sp(T)\}$

Biz.: Kell: $\lambda \in Sp(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in Sp(T^*)$

ehhez elég, hogy $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T^*)$

Mivel $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow T - \lambda I$ invertálható, ezért az előző lemma miatt

$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow T^* - \bar{\lambda} I$ invertálható

$\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T^*)$ $\square$

Állítás: H Hilbert-tér, $T \in B(H)$ normális, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow T^* x = \bar{\lambda} x$$

Speciálisan: $Sp_p(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in Sp_p(T)\}$ és a s.v.-k is ugyanazok.

Biz.: T normális $\Rightarrow T - \lambda I$ is az, ezért $\|(T-\lambda I)u\|^2 = \|(T-\lambda I)^* u\|^2$, $\forall u \in H$-ra

Spec.: $(T-\lambda I)x = 0 \Leftrightarrow 0 = (T-\lambda I)^* x = T^* x - \bar{\lambda} x$ $\square$

Következmény: Normális operátor különböző s.é.-hez tartozó s.v.-k egymásra merőlegesek.

Biz.: $TT^* = T^*T$; $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq \mu$; $x, y \in H$; $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$

$$\lambda (x|y) = (\lambda x|y) = (Tx|y) = (x|T^* y) = (x|\bar{\mu} y) = \mu (x|y)$$
$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} (x|y) = 0 \Rightarrow (x|y) = 0$$

Numerikus értékkészlet és numerikus sugár

Def.: H Hilbert, $T \in B(H)$. A $W(T) = \{(Tu|u) \mid u \in H, \|u\| = 1\} \subseteq \mathbb{K}$ halmazt a T operátor numerikus ÉK-ának, a $w(T) := \sup_{u \in H, \|u\|=1} |(Tu|u)| = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda|$

számot a T numerikus sugarának nevezzük.

Tétel (Hausdorff – Toeplitz-tétel): $W(T)$ konvex

nem bizonyítjuk

Állítás: $T \in B(H) \Rightarrow w(T) \leq \|T\|$ és $|(Tx|x)| \leq w(T)\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$

Biz: $u \in H$, $\|u\|=1 \Rightarrow |(Tu|u)| \leq \|Tu\| \cdot \|u\| \leq \|T\|\|u\|^2 = \|T\| \Rightarrow$

$\Rightarrow w(T) \leq \|T\|$

$x \in H$, $x \neq 0$, $u := \frac{x}{\|x\|}$, $\|u\|=1 \Rightarrow \frac{1}{\|x\|^2}|(Tx|x)| = |(Tu|u)| \leq w(T)$. $\square$

Megj: $w(T) < \|T\|$ előfordulhat, valós esetben akár $w(T)=0$ is lehet $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

de ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $T=0 \Leftrightarrow w(T)=0$, és $\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|$

Lemma: H Hilbert-tér, $T \in B(H)$. Az alábbiak ekvivalensek:

(i) T invertálható $(\Leftrightarrow 0 \notin \mathcal{S}(T))$

(ii) $[\operatorname{ran} T]^\perp = \{0\}$ és $\exists c > 0 : \|Tx\| \geq c\|x\|$ $\forall x \in H$.

Biz: $[\operatorname{ran} T]^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\operatorname{ran} T} = H$ és van valami lemma a Banach tereknél

$\square$

Következmény: $T \in B(H)$, akkor $0 \in Sp(T)$ pontosan akkor, ha

- $[\operatorname{ran} T]^\perp = \{0\}$
- $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\|x_n\|=1$ sorozat, hogy $\|Tx_n\| \to 0$

legalább az egyik.

Tétel: H Hilbert-tér, $T \in B(H) \Rightarrow Sp(T) \subseteq \overline{W(T)}$

Biz: $\lambda \in Sp(T) \Leftrightarrow T - \lambda I$ nem invertálható.

Két eset:

a) $\operatorname{ran}(T-\lambda I)^\perp \neq \{0\}$, ekkor $\exists u \in \operatorname{ran}(T-\lambda I)^\perp$ ahol $\|u\|=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = ((T-\lambda I)u|u) = (Tu,u) - \lambda\|u\|^2 = (Tu|u) - \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = (Tu|u) \in W(T)$.

b) $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|x_n\|=1$, $\|(T-\lambda I)x_n\| \to 0$

$|(Tx_n|x_n) - \lambda| = |((T-\lambda I)x_n|x_n)| \leq \|(T-\lambda I)x_n\| \cdot \|x_n\| \to 0$

$W(T) \ni (Tx_n|x_n) \to \lambda \in \overline{W(T)}$ $\square$

Tétel: H Hilbert-tér, $A \in B(H)$

(a) Ha A önadjungált $\Rightarrow Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$

(b) Ha A pozitív $\Rightarrow Sp(A) \subseteq [0, +\infty[$

Biz: (a) $(Ax|x) \in \mathbb{R} \Rightarrow W(A) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \overline{W(A)} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$

(b) hasonló. □

Tétel: H Hilbert-tér, $A \in B(H)$ önadjungált $\Rightarrow w(A) = \|A\|$

Biz: $w(A) \leq \|A\|$ azt láttuk.

$x, y \in H$, $(A(x+y)|x+y) - (A(x-y)|x-y) = 2(Ax|y) + 2(Ay|x) = 2(Ax|y) + 2(y|Ax) =$

$= 2(Ax|y) + 2\overline{(Ax|y)} = 4\,\mathrm{Re}\,(Ax|y)$

$\Rightarrow |4\,\mathrm{Re}\,(Ax|y)| \leq |(A(x+y)|(x+y))| + |(A(x-y)|(x-y))| \leq$

$\leq w(A)\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) =$

$= 2w(A)\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$

Ha $u, v \in H$ $\|u\| = \|v\| = 1 \Rightarrow 4\,\mathrm{Re}\,(Au|v) \leq 4w(A)$

Ha $u = \frac{x}{\|x\|}$, $v = \frac{y}{\|y\|}$ $\quad \mathrm{Re}\,(Ax|y) \leq w(A)\|x\| \cdot \|y\|$ $\quad$ ha $y = Ax$

$\mathrm{Re}\,(Ax|Ax) \leq w(A)\|x\|\,\|Ax\|$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq w(A)\|x\|$ $\forall x$-re. $\Rightarrow \|A\| \leq w(A)$. □

ANALÍZIS III.

10. előadás (11.21.)

Pozitív operátorok

Def: X vektortér, $s: X\times X \to \mathbb{C}$ félskalárszorzat, ha
(1) 1. változóban lineáris
(2) konjugált szimmetrikus
(3) $s(x,x)\geq 0$ $(\forall x\in X)$

Tétel (CBS): s félskalárszorzat X-en $\Rightarrow$ $|s(x,y)|^2 \leq s(x,x)\,s(y,y)$ $(\forall x,y\in X)$

Biz: (1) ha $s(x,x)=s(y,y)=0$

$u := x - s(x,y)y$.

$0\leq s(u,u) = s(x,x) - \overline{s(x,y)}\,s(x,y) - s(x,y)\,s(y,x) + |s(x,y)|^2 s(y,y) =$

$= -|s(x,y)|^2\cdot 2 \leq 0 \Rightarrow s(x,y)=0$

(2) Ha $s(y,y)\neq 0$ $u := s(y,y)x - s(x,y)y$ innentől az előzőhöz hasonló □

Megj: H Hilbert-tér, $A\in B(H)$, A pozitív $\Leftrightarrow$ $s(x,y) := (Ax|y)$ félskalár.

Tehát a CBS alkalmazható: $|(Ax|y)|^2 \leq (Ax|x)(Ay|y)$ $(*)$

Tétel (operátorokra vonatkozó Schwarz-egyenlőtlenség):

H Hilbert-tér, $A\in B(H)$, $A\geq 0$ $\Rightarrow$ $\|Ax\|^2\leq \|A\|\,(Ax|x)$ $\forall x\in H$-ra

Biz: $(*)$-t alkalmazom $y=Ax$-re:

$|(Ax|Ax)|^2 = |(Ax|y)|^2 \leq (Ax|x)(Ay|y) = (Ax|x)(A^2x|Ax) \leq (Ax|x)\,\|A\|\,\|Ax\|\cdot\|Ax\| =$

$\| \quad = \|A\|(Ax|x)\,\|Ax\|^2$

$\|Ax\|^4$ $\Rightarrow$ $\|Ax\|^2\leq \|A\|\,(Ax|x)$ □

Tétel: H Hilbert, $A\in B(H)$, $A=A^*$, $m := \inf W(A) = \inf\{(Ax|x) \mid \|x\|=1\}$
$M := \sup W(A) = \sup\{(Ax|x) \mid \|x\|=1\}$

Ekkor $m, M\in Sp(A)$. [Tehát önadjungált operátor spektruma valóban nem üres]

Biz: (1) $m\in Sp(A)$

$B := A - mI \Rightarrow (Au|u) - m \geq 0$ $\forall u: \|u\|=1$-re.

$\Rightarrow 0\leq (Ax|x) - m\|x\|^2 = ((B-mI)x|x)$ $\forall x\in H$-ra

$\Rightarrow B\geq 0$.

Másrészt $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}: \|x_n\|=1$, $(Ax_n|x_n)\to m \Rightarrow (Bx_n|x_n)\to 0$

$\Rightarrow \|(A-Im)x_n\|^2 = \|Bx_n\|^2 \leq \|B\|\cdot(Bx_n|x_n)\to 0$

$\Rightarrow \nexists\, c>0: \|(A-mI)x\|^2\geq c\,\|x\|^2 \Rightarrow A-mI$ nem inv

$\Rightarrow m\in Sp(A)$.

(2) $M\in Sp(A)$
$B := MI - A\geq 0$ ugyanígy h.a. □

Következmény: H Hilbert-tér, $A \in B(H)$

(a) Ha $A = A^* \Rightarrow \|A\| = \max\{|m|, |M|\}$

(b) Ha $A \geq 0 \Rightarrow \|A\| \in Sp(A)$.

Biz: (a)
$$A = A^* \Rightarrow \|A\| = w(A) = \sup\{|(Ax|x)| \mid \|x\| = 1\} = \max\{|m|, |M|\}$$

(b)
$$\text{Ha } A \geq 0 \Rightarrow 0 \leq m \leq M \Rightarrow \|A\| \overset{(a)}{=} M \in Sp(A)$$
□

Tétel: H Hilbert-tér, $A \in B(H)$, $A \geq 0 \Rightarrow \exists!\, B \in B(H)$:

$B \geq 0$, $B^2 = A$, jelölés: $B = A^{1/2} = \sqrt{A}$

az A operátor négyzetgyökének hívjuk.

nem bizonyítjuk.

Ortogonális projekciók

Emlékeztető: H Hilbert-tér, $K \subseteq H$ zárt lin. altér $\Rightarrow \forall x \in H$ egyértelműen előáll:

$x = x_1 + x_2 =: P(x) + [x - P(x)]$ alakban, ahol

$x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$

Ezt a $P: H \to K$ operátort nevezzük a K-ra való ort. projekciónak

(idegen nyelven merőleges vetítés, de ez nagyképűen hangzik ☺)

Tétel: P ortogonális projekció $P \in B(H)$, $\|P\| \leq 1$ és $P = P^* = P^2$

Biz: (1) P lin: $x, y \in H$ vagy kéne mutatni, hogy $P(x+y) = P(x) + P(y)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + x_2,\ x_1 \in K,\ x_2 \in K^\perp \\ y = y_1 + y_2,\ y_1 \in K,\ y_2 \in K^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(x) = x_1 \\ P(y) = y_1 \end{array}$$

$x + y = \underbrace{x_1 + y_1}_{\in K} + \underbrace{x_2 + y_2}_{\in K^\perp}$ Mivel a felbontás egyértelmű

$P(x+y) = x_1 + y_1 = P(x) + P(y)$

homogenitás otthon.

(2) P folytonos. $x \in H \Rightarrow x_1 + x_2 = x$ ahol $x_1 \perp x_2$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2 = \|Px\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \text{ folyt és } \|P\| \leq 1$$

(3) idempotencia

$$x \in K \Rightarrow x = \underset{\in K}{x} + \underset{\in K^\perp}{0} \Rightarrow x = P(x)$$

Ha $x \in H$ tetsz, akkor $Px \in K \Rightarrow P^2 x = P(Px) = Px$

(4) önadjungáltság

$$(Px|y) = (\underset{K}{Px} \mid Py + \underset{K^\perp}{(y - Py)}) = (Px|Py) = (\underset{K^\perp}{(x - Px)} + Px \mid \underset{K}{Py}) = (x|Py)$$
□

Izometrikus és unitér operátorok

Def: H Hilbert akkor

(a) $V \in B(H)$ izometrikus ha $\|Vx\| = \|x\|$ $\forall x \in H$-a

(b) $U \in B(H)$ unitér, ha $UU^* = I = U^*U$

$\iff$ U invertálható és inverz az adjungált

Megj: $\forall$ unitér operátor izometrikus

$x \in H \Rightarrow (Ux|Ux) = (U^*Ux|x) = (x|x)$

De fordítva nem! $\forall$ unitér operátor szürjektív, de pl. a shift operátor izometrikus, de nem szürjektív

Állítás: H Hilbert, $V \in B(H)$, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(i) V izometrikus

(ii) $V^*V = I$

(iii) $(Vx|Vy) = (x|y)$ $\forall x,y \in H$

Biz: (ii) $\iff$ (iii) és (iii) $\Rightarrow$ (i) triviális. Elég (i) $\Rightarrow$ (ii):

V izometrikus $\iff$ $(V^*Vx|x) = (x|x)$ $\forall x \in H$

Ha H komplex, akkor előző fejezet szerint.

De ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$x, y \in H$:

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|V(x+y)\|^2 - \|V(x-y)\|^2 =$$
$$= (V^*V(x+y)|x+y) - (V^*V(x-y)|x-y) =$$
$$= 4(V^*V x|y) \Rightarrow \quad V^*V = I \qquad \square$$

Állítás: H Hilbert-tér, $U \in B(H)$, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(i) U unitér

(ii) U szürjektív és izometrikus

(iii) U és U^* is izometrikus.

Biz: (i) $\Rightarrow$ (ii) triviális

(ii) $\Rightarrow$ (i): $U^*U = I$ $\Rightarrow$ U injektív és ezért bijektív $\Rightarrow \exists U^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow U^{-1}U = I = U^*U \Rightarrow U^{-1} = U^*$ ran U-n

$\Rightarrow U^{-1} = U^*$ H-n

$$\left.\begin{array}{l}\text{(iii)} \iff U \text{ izometria } U^*U = I \\ \qquad\quad U^* \text{ izometria } UU^* = I\end{array}\right\} \iff U \text{ unitér}$$

$\square$

Kompakt operátorok

Emlékeztető: (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$

(a) K kompakt, ha bármely olyan $(U_i)_{i\in I}$ M-beli nyílt halmazrendszer esetén, ahol $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ létezik $I_0 \subseteq I$ véges, hogy $K \subseteq \bigcup_{i\in I_0} U_i$

Ez a kompaktság eredeti, topológiai def-je.

(b) Metrikus terek esetén ez ekvivalens az alábbival:
K sorozatkompakt, ha $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K-beli sorozatból kiválasztható $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, amely K valamely pontjához konvergál.

(c) K teljesen korlátos, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ véges sok $x_1, \dots, x_n \in K$ hogy $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k)$

M ↑ itt mindegy, hogy M vagy K

Pótlóórán mondta el.

Tétel: (M, d) teljes metrikus tér, akkor egy $K \subseteq M$ halmaz sorozatkompakt p.a.h. K teljesen korlátos & zárt.

ANALÍZIS III.

11. előadás (11.28.)

Kompakt operátorok

X, Y Banach terek, $B := \overline{B}_1(0, X) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$

Def: A $T: X \to Y$ lineáris operátort kompakt operátornak nevezzük, ha $\overline{T\langle B\rangle} \subseteq Y$ kompakt
$\iff$ $T\langle B\rangle$ teljesen korlátos.

(a 0 operátor nyilván kompakt, de már az identitás nem az jellemzően.)

Állítás: $T: X \to Y$ lin op. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

(i) T kompakt operátor

(ii) $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, y_1, \dots, y_m \in Y$ véges pontrendszer, hogy $\forall x \in B$-re $\exists j: \|Tx - y_j\| < \varepsilon$ „véges ε-háló létezése”

(iii) $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ korlátos sorozatnak van $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, hogy $T(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens.

a bizonyítás lényegét elmondta szóban.

Állítás: Bármely $T: X \to Y$ Banach terek közötti kompakt operátor folytonos.

Biz: T kompakt $\iff$ $T\langle B\rangle \subseteq Y$ teljesen korlátos $\Rightarrow$ korlátos $\iff$ T folytonos.

Jelölés: a $T: X \to Y$ kompakt operátorok halmazát $\mathcal{K}(X,Y)$ jelöli. (általában matematikustól függ)

Következmény: $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$. (Általában $\subsetneq$ szigorú, ha X és Y ∞ dimenziós)

Tétel: $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ zárt altér.

Biz: • altér: Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ egy korlátos sorozat! Ha $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ kompakt, akkor $\exists\,(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, ami* konvergens. Ha $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ is kompakt, akkor $\exists\,(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ rész-részsorozat, ami $(Tx_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ *: (Sx_{n_k})

Mivel két konv sorozat összege konv, ezért $((T+S)x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ is konv.

$\Rightarrow S + T \in \mathcal{K}(X,Y)$. (A számmal szorzás hasonló.)

• zárt: Legyen $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$ és $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ olyan, hogy $\|T_n - T\| \to 0$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}: \|T_N - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow \exists\, y_1, \dots, y_m \in Y$ hogy $\forall x \in B$-re $\exists\, i \in \{1, \dots, m\}$ hogy $\|T_N x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mivel $x \in B$: $\|Tx - y_j\| \le \|Tx - T_N x\| + \|T_N x - y_j\| \le \underbrace{\|T - T_N\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{\|x\|}_{\le 1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\Rightarrow T \in \mathcal{K}(X,Y)$ $\square$

Tétel: Jelölje $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X,X)$! $\forall A \in \mathcal{B}(X)$ és $T \in \mathcal{K}(X)$ esetén $AT, TA \in \mathcal{K}(X)$

Bizonyítás: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ korlátos $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; ami adott $y \in X$-re: $Tx_{n_k} \to y$.

Mivel $A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow ATx_{n_k} \to Ay \Rightarrow AT \in \mathcal{K}(X)$.

TA hasonló, de egy kicsit más (otthon megmutatjuk)

Állítás: $T \in B(X,Y)$ és $\operatorname{ran} T \subseteq Y$ véges (azaz véges rangú). Ekkor $T \in \mathcal{K}(X,Y)$

Biz: $Y_0 := \operatorname{ran} T \subseteq Y$! $\overline{T\langle B\rangle} \subseteq \overline{Y_0} = Y_0$

kpl, zárt — véges — A két feltétel teljesül $\Rightarrow$ $\overline{T\langle B\rangle} \subseteq Y$ kompakt □

Következmény: $T \in B(X,Y)$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ véges rangúak és $\|T_n - T\| \to 0$. Ekkor $T \in \mathcal{K}(X,Y)$

Spec: $B_{00}(X,Y) := \{A \in B(X,Y) \mid \dim(\operatorname{ran}(A)) < \infty\} \Rightarrow B_{00}(X,Y) \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$

Biz: $T_n \in B_{00}(X,Y) \Rightarrow T_n \in \mathcal{K}(X,Y)$, $T_n \to T \in B(X,Y) \Rightarrow T \in \mathcal{K}(X,Y)$ □

Ha van egy eleven megfogható ellenpélda, akkor az általában nem egy

Megjegyzés: Általában $\overline{B_{00}(X,Y)} \subsetneq \mathcal{K}(X,Y)$

Kompaktoperátorok Hilbert-téren

Eml: H Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS H-ban, és $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$, $\lambda_n \to 0$.

$Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) f_n$. Láttuk, hogy $T \in B(H)$ és $\|T\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$

Állítás: A fent definiált T kompakt.

Biz: $T_n x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x|e_k) f_k$. $T_n x \in \operatorname{span}\{f_0, \dots, f_n\} \Rightarrow T_n$ véges rangú, $T_n \in B(H) \Rightarrow T_n \in \mathcal{K}(H)$

Ezen kívül $(T - T_n)(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (x|e_k) f_k \Rightarrow \|T - T_n\| \le \sup_{k \ge n+1} |\lambda_k| \to 0 \Rightarrow T \in \mathcal{K}(H)$ □

Megj: T^* szintén kompakt. Általában is igaz, hogy ha $T \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow T^* \in \mathcal{K}(H)$ (Schauder-tétel)

Megj: $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ nullsorozat $\Rightarrow$ $Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n$ kompakt önadjungált

Cél: Megmutatjuk, hogy minden kompakt önadjungált operátor ilyen alakban írható fel.

VEH: $Te_n = \lambda_n e_n$ tehát a T-t diagonalizálja a sajátvektorok rendszere szerint.

ANALÍZIS III.

12. előadás (12.05.)

Lemma: H Hilbert, $A \in B(H)$, $A = A^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $e \in H$, $\|e\| = 1$ és teljesül $Ae = \lambda e$.
Ekkor:

(a) $H_0 := \{e\}^\perp$ A invariáns $\left(\iff A\langle H_0 \rangle \subseteq H_0 \right)$

(b) $A_0 := A|_{H_0} \Rightarrow A_0 \in B(H_0)$, $A_0^* = A_0$

(c) ha $P: H \to H_0$ projekció, $\Rightarrow Ax = \lambda (x|e) e + A_0 P x \quad \forall x \in H$.

Biz:

(a)
$$(Ax|e) = (x|Ae) = (x|\lambda e) = 0 \text{ ha } x \perp e$$

(b)
$$x, y \in H_0 \Rightarrow (A_0 x | y) = (Ax|y) = (x|Ay) = (x|A_0 y) \Rightarrow A_0 = A_0^*$$

(c) $x \in H \Rightarrow x = \underbrace{(x|e)e}_{\in H_0^\perp} + \underbrace{[x - (x|e)e]}_{\in H_0}$ ahol $e \in H_0$

Tehát $x - (x|e)e = Px$
$(x|e)e = (I - P)x$

$$\Rightarrow Ax = A[(x|e)e] + A[x - (x|e)e] = \lambda(x|e)e + APx = \lambda(x|e)e + A_0 Px. \qquad \square$$

Megj: Ha $e_1, \dots, e_n$ olyan, hogy $\|e_i\| = 1$ és $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$

$K := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. $P: H \to K$ proj.

$$Px = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i$$

Lemma: H Hilbert, $A \in \mathcal{K}(H)$ kompakt, önadjungált operátor. $\exists \lambda \in \mathbb{R}: |\lambda| = \|A\|$ és λ az A s.é.-e.

Biz: $A = A^* \Rightarrow w(A) = \|A\| \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}: \|x_n\| = 1, |(Ax_n|x_n)| \to \|A\| \Rightarrow$

$\Rightarrow (Ax_n|x_n)$ korlátos $\Rightarrow$ alkalmas $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat kell: $(Ax_{n_k}|x_{n_k}) \to \lambda$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re és $|\lambda| = \|A\|$. (BW-tétel) [inkább $x_{n_k} \to x_k$ ra jelölés]

Mivel $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is korlátos, és $A \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow Ax_{k_\ell} \to y$ valamely $y \in H$ (innen x_ℓ)

$$0 \le \|Ax_n - (Ax_n|x_n)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2|(Ax_n|x_n)|^2 + |(Ax_n|x_n)|^2 =$$

$$= \|Ax_n\|^2 - |(Ax_n|x_n)|^2 \le \|A\|^2 - |(Ax_n|x_n)|^2 \to 0 \Rightarrow Ax_n - (Ax_n|x_n)x_n \text{ konvergens.}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (Ax_n|x_n)x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = y \Rightarrow \|y\| = \lim \|(Ax_n|x_n)x_n\| = \lim |(Ax_n|x_n)| = \|A\|$$

$\Rightarrow A = 0$ esetén a lemma triviális, egyéb esetben pedig $y \neq 0$.

$$(Ax_n|x_n)x_n \to y \Rightarrow \begin{array}{c} A(Ax_n|x_n)x_n \to Ay \\ \| \\ \underbrace{(Ax_n|x_n)}_{\to \lambda}\underbrace{Ax_n}_{\to y} \to \lambda y \end{array} \Rightarrow Ay = \lambda y$$

$\square$

Tétel (Hilbert-Schmidt-tétel): H végtelen dimenziós valós vagy komplex Hilbert-tér, $A \in S\mathcal{K}(H)$
Ekkor $\exists (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ A n. é.-éhez álló nullsorozat és
$\exists (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ A s.v.-ihoz álló ONS úgy, hogy

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x|e_n) e_n \qquad \forall x \in H$$

Biz: $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}: \|A\| = |\alpha_0|$, $\exists e_0 \in H$, $\|e_0\| = 1$ amire $Ae_0 = \alpha_0 e_0$

Ha $H_0 := e_0^{\perp}$ és $P_0 : H \to H_0$ ort. proj. és $A_0 := A|_{H_0} \in S\mathcal{K}(H_0)$ akkor
A_0 önadjungált, és $Ax = \alpha_0 (x|e_0)e_0 + A_0 P_0 x \quad \forall x \in H$

A_0-ra megint eljátszhatjuk az előbbit:
$\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}: |\alpha_1| = \|A_0\| \le \|A\| = |\alpha_0|$, $\exists e_1 \in H_0$, $\|e_1\| = 1$ amire $A_0 e_1 = \alpha_1 e_1$
Ha $H_1 = \{e_0, e_1\}^{\perp}$ és $P_1 : H_0 \to H_1$ ort proj akkor $A_1 = A|_{H_1} \in S\mathcal{K}(H_1)$ önadj és
$$Ax = \alpha_0 (x|e_0)e_0 + \alpha_1 (x|e_1)e_1 + A_1 P_1 x \qquad \forall x \in H.$$

Rekurzióval: $\exists (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\exists (e_n) \subset H$ ONS, hogy ha $H_n := \{e_0 \cdots e_n\}^{\perp}$ és
$A_n := A|_{H_n}$ és $P_n : H \to H_n$ ort proj, akkor

(a) $|\alpha_0| = \|A\|$, $|\alpha_{n+1}| = \|A_n\|$, $Ae_n = \alpha_n e_n$

(b) $A_{n+1} = A_n|_{H_{n+1}} \Rightarrow |\alpha_{n+1}| \le |\alpha_n|$

(c) $Ax = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x|e_k)e_k}_{B_n x} + A_n P_n x \qquad \forall x \in H$

Ami kell: $\alpha_n \to 0$, és $B_n x \to Ax$ $(\Leftrightarrow A_n P_n x \to 0)$.

$\|A_n P_n\| \le \|A_n\| = |\alpha_{n+1}|$ tehát elég csak a $\alpha_n \to 0$.

TFH $\alpha_n \not\to 0$, de mivel $|\alpha_n|$ fogyó $\Rightarrow \exists \delta > 0 : |\alpha_n| \ge \delta$

$n, m \in \mathbb{N}$: $\|Ae_n - Ae_m\|^2 = \|\alpha_n e_n - \alpha_m e_m\|^2 = |\alpha_n|^2 + |\alpha_m|^2 \ge 2\delta^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|Ae_n - Ae_m\| \ge \sqrt{2}\delta$. De mivel $A \in S\mathcal{K}(H)$ és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korl, kéne ennek konvergens részsorozat $\Rightarrow$ ellentmondás $\square$

Kompakt operátorok Riesz-féle elmélete

Lemma (Riesz-lemma): X NT, $M \subseteq X$ valódi zárt altér $\Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists x \in X : \|x\| = 1,\ d_M(x) \ge 1 - \varepsilon$

Biz: $y \in X \setminus M$. Mivel M zárt $\Rightarrow d := d_M(y) > 0 \Rightarrow \forall \delta > 0 : \exists z \in M : \|y - z\| \le d + \delta$

Legyen $x_\delta := \frac{y-z}{\|y-z\|}$ ekkor $\|x\| = 1$

$v \in M$-re: $\|x - v\| = \frac{1}{\|y-z\|} \|y - z - \|y-z\| v\| = \frac{1}{\|y-z\|} \|y - [\overbrace{z + \|y-z\| v}^{\in M}]\| \ge \frac{d}{\|y-z\|} \ge \frac{d}{d+\delta} \ge$

$\ge 1 - \varepsilon$ ha $\delta \to 0 \Rightarrow d_M(x) = \inf_{v \in M} \|x - v\| \ge 1 - \varepsilon$. $\square$

Következmény: X NT, $\dim X = +\infty \Rightarrow$ az X-beli $\overline{B_1(0)}$ egységgömb nem kompakt.

(Értsd: a végtelen dimenziós normált tér nem lokálisan kompakt.)

Biz.:

Állítás: $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\|x_n\|=1$ úgy hogy $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$-re $m \neq n$

Biz: $M := \mathbb{K}\cdot x_0 \subsetneq X$ zárt altér $\Rightarrow \exists x_1 \in X$, $\|x_1\| = 1$, $d_M(x_1) \geq \frac{1}{2}$ így $\|x_0 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$

$M := \operatorname{span}\{x_0, x_1\} \subsetneq X$ mivel zárt $\Rightarrow \exists x_2 \in X$, $\|x_2\| = 1$, $d_M(x_2) \geq \frac{1}{2}$,

így $\|x_0 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ és $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$

és így tovább...

nincsen konvergens részsorozata a kapott sorozatnak. □

□

Tétel: X Banach-tér, $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Az alábbiak ekvivalensek:

(i) $\lambda \notin Sp(T)$ ($\Leftrightarrow T - \lambda I$ invertálható)

(ii) $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$

(iii) $\operatorname{ran}(T - \lambda I) = X$

nem bizonyítjuk

Tétel: X Banach-tér, $T \in \mathcal{K}(X)$

(i) $Sp(T) \setminus \{0\} = Sp_p(T) \setminus \{0\}$

(ii) $\forall \lambda \in Sp_p(T) \setminus \{0\} \Rightarrow \ker(T - \lambda I)$ véges dimenziós

(iii) $Sp(T)$ vagy véges vagy megszámlálhatóan végtelen, ami csak a 0-ban torlódik.

ANALÍZIS III.

13. előadás (12. 12.)

Nem korlátos operátorok

Cél: Adott $A: H \supset\!\!\to K$ nem feltétlen korlátos operátor adjungáltját értelmezni

(jelölés: $A: H \supset\!\!\to K$ értelme $\operatorname{dom}(A) \leq H$ lin. altér)

Olyan $A^*: K \supset\!\!\to H$ lin. opot találni, ami $(Ax|y) = (x|A^*y)$ elég $\quad x \in \operatorname{dom} A$, $y \in \operatorname{dom}(A^*)$

és $\operatorname{dom}(A^*)$ a lehető legnagyobb legyen, amire egy ilyen teljesül

Korlátos esetben láttuk, hogy $\forall x \in H$-ra $\exists!\, y^* \in H: (Ax|y) = (x|y^*)$

Itt viszont ha $z \in \operatorname{dom}(A)^\perp$ és y^* olyan, mint fent:

$z^* = y^* + z$ is olyan, amire az egyenlőség fennáll $\Rightarrow$ y^* nem egyértelmű

DE ha $\operatorname{dom}(A)^\perp = \{0\}$ és y^*, z^* olyanok, amikre $(Ax|y) = (x|y^*) = (x|z^*)$

akkor $(x|y^* - z^*) = (Ax|y-y) = 0 \Rightarrow y^* - z^* \in \operatorname{dom}(A)^\perp \Rightarrow y^*$ egyértelmű, ha létezik

$\Rightarrow$ A^*-t értelmezni csak akkor lehet, ha $\operatorname{dom}(A)^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\operatorname{dom}(A)} = H$

„A sűrűn definiált operátor" (SDO)

Def: H, K Hilbert-terek, $A: H \supset\!\!\to K$ SDO! Ekkor A (Neumann-)adjungáltját a következő képpen értelmezzük:

$$\operatorname{dom}(A^*) := \{ y \in K \mid \exists\, y^* \in H\ \ (Ax|y) = (x|y^*)\ \ \forall x \in \operatorname{dom}(A)\}$$

$$A^*(y) := y^* \qquad (y \in \operatorname{dom} A^*)$$

Állítás: $\operatorname{dom}(A^*) \leq K$ lin. altér és $A^*: K \supset\!\!\to H$ lineáris

Bz: $y_1, y_2 \in \operatorname{dom}(A^*)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \operatorname{dom}(A)$

$$(Ax|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \bar{\lambda}_1 (Ax|y_1) + \bar{\lambda}_2 (Ax|y_2) = (x|\lambda_1 y_1^*) + (x|\lambda_2 y_2^*) =$$
$$= (x|\lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^*) = (x|\lambda_1 A^*(y_1) + \lambda_2 A^*(y_2)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \operatorname{dom} A^*$, $\quad A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A^*(y_1) + \lambda_2 A^*(y_2)$ $\quad\square$

Állítás: $A: H \supset\!\!\to K$ SDO, $y \in K$! Az alábbiak ekvivalensek:

(i) $y \in \operatorname{dom}(A^*)$

(ii) $\exists M = M_y \geq 0: |(Ax|y)| \leq M_y \cdot \|x\| \quad (\forall x \in \operatorname{dom}(A))$

(iii) $f_y(x) := (Ax|y) \quad (x \in \operatorname{dom} A)$ lin. funkc. folytonos.

Bz: (i) $\Rightarrow$ (ii): HF, hogy $M_y = \|A^* y\|$ jó.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $|f_y(x)| \leq M_y \|x\| \Rightarrow f_y$ folyt és $\|f_y\| \leq M_y$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $f_y: \operatorname{dom}(A) \to \mathbb{K}$ folyt $\Rightarrow \exists!\, \tilde{f}_y: \overline{\operatorname{dom}(A)} \to \mathbb{K}$ folyt. lin, $\tilde{f}_y \supset f_y \Rightarrow \tilde{f}_y \in H'$

$\Rightarrow \exists!\, y^* \in H: \tilde{f}_y(u) = (u|y^*) \Rightarrow (Ax|y) = f_y(x) = \tilde{f}_y(x) = (x|y^*)$ $\quad\square$

Megjegyzés: A műveletekkel vigyázni kell, hiszen ha $A, B : H \supset\!\!\rightarrow K$ SDO-k, akkor azt gondolnánk, hogy $(A+B)^* = A^* + B^*$ DE NEM!
Hiszen $\mathrm{dom}(A+B) = \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$ nem feltétlen sűrű.

Ugyanígy: $(AB)^* \neq B^* A^*$

$(A^*)^* \neq A$

Állítás: $A : H \supset\!\!\rightarrow K$ SDO és $\mathrm{dom}(A^*)$ is sűrű. Ekkor $A \subset A^{**}$

Biz: $x \in \mathrm{dom}(A) \Rightarrow (A^* y \mid x) = (y \mid Ax) \quad \forall y \in \mathrm{dom}(A^*) \Rightarrow x \in \mathrm{dom}(A^{**})$ és itt $A^{**} x = Ax$

Emlékeztető: $T : H \supset\!\!\rightarrow K$ zárt operátor $\Leftrightarrow G(T) \subseteq H \times K$ zárt $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathrm{dom}(T)$ és $x_n \to x$ és $Tx_n \to y$ adott $x \in H$ és $y \in K$ esetén akkor $x \in \mathrm{dom}(T)$ és $Tx = y$

Állítás: $A : H \supset\!\!\rightarrow K$ SDO $\Rightarrow A^* : K \supset\!\!\rightarrow H$ zárt.

Biz: Legyen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathrm{dom}(A^*)$ és $y_n \to y \in K$ és $A^* y_n \to y^* \in H$.

$\forall x \in \mathrm{dom} A : (Ax \mid y) \leftarrow (Ax \mid y_n) = (x \mid A^* y_n) \to (x \mid y^*) \Rightarrow y \in \mathrm{dom}(A^*)$

$A^* y = y^*$ □

Def: Az $A : H \supset\!\!\rightarrow K$ lin operátort lezárhatónak nevezzük, ha $\exists \tilde{A} : H \supset\!\!\rightarrow K$ zárt lin op, hogy $\tilde{A} \supset A$

Megj: $A \subset \tilde{A} \Leftrightarrow G(A) \subseteq G(\tilde{A}) \Rightarrow \overline{G(A)} \subseteq \overline{G(\tilde{A})} = G(\tilde{A}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \bar{A} : H \to K$ lin op: $G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$ amely nyilván zárt kiterj. A-nak és ez a legkisebb ilyen zárt operátor

$\bar{A}$-t az A lezártjának nevezzük.

Tétel: $A : H \supset\!\!\rightarrow K$ SDO akkor ekvivalensek az alábbiak:
(i) A lezárható
(ii) $\mathrm{dom}(A^*) \subseteq K$ sűrű
Továbbá ha ezek teljesülnek, $\bar{A} = A^{**}$

nem bizonyítjuk.

Következmény: $A : H \supset\!\!\rightarrow K$ zárt SDO! Ekkor $\mathrm{dom}(A^*) \subseteq K$ sűrű és $A^{**} = A$

Állítás: $A : H \supset\!\!\rightarrow K$ SDO lezárható! Ekkor $A^* = A^{***}$

Szimmetrikus és önadjungált operátorok

Def: Az $S: H \supset\to H$ operátor szimmetrikus, ha $(Sx|y) = (x|Sy)$ $(\forall x, y \in \operatorname{dom} S)$

Állítás: $S: H \supset\to H$ SDO: Az alábbiak ekvivalensek:

(i) S szimmetrikus

(ii) $S \subset S^*$

Biz: $\Rightarrow$ S szim, $y \in \operatorname{dom}(S) \Rightarrow (Sx|y) = (x|Sy)$ $\forall x \in H$-ra $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \in \operatorname{dom} S^*, \; S^* y = Sy \Rightarrow S \subset S^*$

$\Leftarrow$ $y \in \operatorname{dom} S \Rightarrow y \in \operatorname{dom} S^*, \; S^* y = Sy \Rightarrow \forall x \in \operatorname{dom} S: \; (Sx|y) = (x|S^*y) = (x|Sy)$ □

Megj: Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ akkor S szim $\iff (Sx|x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in H$-ra.

Def: Az $S: H \supset\to H$ SDO önadjungált, ha $S = S^*$

Megj: Minden önadj operátor szimmetrikus és zárt DE nem minden SDO zárt szimmetrikus operátor önadjungált.

Tétel (Hellinger–Toeplitz-tétel): $S: H \to H$ szimmetrikus! Ekkor $S \in B(H)$, $S^* = S$

Biz: $S \subset S^*$, $\operatorname{dom} S = H \Rightarrow S = S^* \Rightarrow S^*: H \to H$ zárt operátor $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ zárt gráf tétel sz. $S = S^* \in B(H)$ □

Pl.:

$S: L^2(0,1) \supset\to L^2(0,1)$, $\operatorname{dom}(S) := \{f \in C^2(0,1) \mid f(0) = f(1) = 0\}$

Igazolható, hogy ez zárt,

$Sf := f''$. Azt állítom, hogy S szimmetrikus.

$$(Sf|g) = \int_0^1 f'' \bar{g} = [f' \bar{g}]_0^1 - \int_0^1 f' \bar{g}' = 0 - \left([f \bar{g}']_0^1 - \int_0^1 f \bar{g}''\right) =$$
$$= 0 - 0 + \int_0^1 f \bar{g}'' = (f|Sg)$$

Igazolható, hogy $S \neq S^*$

Tétel: Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $S: H \supset\to K$ SDO, szimmetrikus. Ekvivalens:

(i) $S = S^*$

(ii) $\operatorname{ran}(S + iI) = \operatorname{ran}(S - iI) = H$

Továbbá $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: \; (S + \lambda I)^{-1} \in B(H)$

Tétel: Ha $T: H \supset\to K$ SDO zárt, akkor T^*T és TT^* önadjungált operátorok és $(I + T^*T)^{-1} \in B(H)$, $(I + TT^*)^{-1} \in B(K)$