ANALÍZIS I.

1. előadás (09. 15.)

Izsák Ferenc   izsak@cs.elte.hu   3-705
szóbeli vizsga   www.cs.elte.hu/~izsak   f. óra: H: 13-14
Cs: 14-15

Általános struktúrák

Vektortér: halmaz, két művelettel $(V, +, \cdot)$, a következő tulajdonságokkal

- Ha $u, v, w \in V$ akkor $\underbrace{w+v \in V}_{\text{zártság összeadásra}}$ és $\underbrace{(u+v)+w = u+(v+w)}_{\text{az összeadás asszociatív}}$
- $\exists\, 0 \in V$ amelyre $0+v = v+0 = 0$
- $\forall v \in V$-hez $\exists -v \in V$ amire $v+(-v) = 0$
- kommutatív, azaz $\forall u, v \in V$-re $u+v = v+u$

(valós test feletti vektortereken):

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall v \in V$ esetén $\lambda v \in V$ úgy, hogy
  $1 \cdot v = v$; $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$ esetén $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$; $\mu(v+u) = \mu v + \mu u$
  $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$ teljesülnek

pl.: I) $V = \mathbb{R}^3$, vektorok komponensenként λu = Lambdau ~ Landau

II) Legfeljebb 4-edfokú polinomok: $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \mid a_i \in \mathbb{R}\ \ i \in [0,4]\}$

vektor: szokásos módon

(ez azonosítható $\mathbb{R}^5$-tel)

Gyakran értelmezhető „hossz" fogalom: norma, jelölés: $\|v\|$ normája
az olyan fgv., amely $V \to \mathbb{R}$ a következő tulajdonságokkal:

$\|v\| \geq 0$

$\|v\| = 0 \iff v = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \forall v \in V$ esetén $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

$\forall u, v \in V \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ háromszög egyenlőtlenség

A vektortér egy norma fgv.-nyel alkotja a <u>Normált Tér</u>

Pl.: $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ folytonos}\}$

$\left.\begin{array}{l}(f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)\end{array}\right\}$ ezek teljesítik a vektortér szabályait

$\|f\| := \max\limits_{[0,1]} |f|$ ez értelmes (nem triviális) és kielégíti a norma szabályait (ellenőrizve V)

~~metrikus tér~~ valójában nem is vektortér és a hosszaik elhelyezkedése, hanem halmaz elemeinek távolsága

jelölés: (X,ρ) ahol X egy alaphalmaz (nem feltétlenül struktúra)

$\rho: X\times X \to \mathbb{R}$ az alábbi szabályokkal:

- $\forall a,b\in X: \rho(a,b)\geq 0$
- $\rho(a,b)=0 \iff a=b$
- $\rho(a,b)=\rho(b,a)$
- $\rho(a,b)\leq \rho(a,c)+\rho(c,b)$

Spec eset: Ha X normált tér, akkor $\rho(x,y)=\|x-y\|$

A metrikus tér kell a definícióhoz

Def: Egy (X,ρ) metrikus térben a körüli r sugarú nyílt gömbnek (vagy r sugarú környezetének) nevezzük a következő halmazt:
$\{x\in X: \rho(x,a)<r.\}$ jelölés $B_r(a)$

Pl. $X=\{100$ hosszúságú 0,1 karaktersorozat$\}$

$\rho(x,y):=\{$azon helyek száma, ahol x és y különböznek$\}$ (ellenőrizni ✓ a $\Delta\leq$ indirekt bizonyítással)

Def: $x\in X$ belső pontja egy $M\subset X$ halmaznak, ha van olyan $r>0$, hogy $B_r(x)\subset M$

Def: $x\in X$ külső pontja egy $M\subset X$ halmaznak, ha van olyan $r>0$, hogy $B_r(x)\subset M^c$

Def: $x\in X$ határpontja egy $M\subset X$ halmaznak, ha minden $r>0$-ra $B_r(x)$-nek van M-beli és M^c-beli eleme is.

jelölés: belső pont $x\in \operatorname{int} M$; külső pont $x\in \operatorname{ext} M$; $x\in\partial M$

Állítás: Tetszőleges metrikus térre és $M\subset X$ részhalmazra $\partial M=\partial M^c$

Biz: $x\in\partial M \iff \forall r>0$-ra $B_r(x)$ tartalmaz M és M^c-beli pontot
azaz $B_r(x)$ tartalmaz M^c és M^{cc} beli pontot $\iff x\in\partial M^c$ $\square$

Állítás: Minden metrikus térre és $M\subset X$ halmazra $X=\operatorname{int} M \uplus \operatorname{ext} \uplus \partial M$ ahol $\uplus$: diszjunkt unió

Biz: ami eleme a bal oldalnak, az eleme a jobb oldalnak is. A fordítottját is igazolni kell. azaz $x\in X$ pontosan az egyikben van benne.
Ha $x\in\operatorname{int} M$ akkor van $r>0$, hogy $B_r(x)\subset M$, tehát a többiben nem lehet
Ha $x\notin\operatorname{int} M$ és van $r>0$, hogy $B_r(x)\subset M^c$. tehát $x\in\operatorname{ext} M$, de határpont nem lehet
Ha $x\notin\operatorname{int} M$ és $x\notin\operatorname{ext} M$, akkor nincs M-en se belüli, se kívüli környezete, tehát minden környezetében van M-en kívüli és belüli pont, tehát $x\in\partial M$. $\square$

Def: Legyen (X, ϱ) metrikus tér! $G \subset X$ halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont, azaz $G = \operatorname{int} G$

Def: Legyen (X, ϱ) metrikus tér! $F \subset X$ halmaz zárt, ha tartalmazza az összes határpontját azaz $\partial F \subset F$

Jelölés: $M \subset X$ esetén $\overline{M} = M \cup \partial M$ (M lezártja)

Állítás: Ha M zárt, akkor megegyezik a lezártjával, és fordítva, ha M megegyezik a lezártjával, akkor M zárt

Biz: Mivel $\overline{M} = M \cup \partial M$ ezért $\overline{M} = M \iff M \supset \partial M \iff M$ zárt $\square$

Állítás: Az $\overline{M}$ a legszűkebb M-t tartalmazó zárt halmaz

Biz: Biztos, hogy $\overline{M} = M \cup \partial M \supset M$, valamint $\overline{M}$ biztos, hogy zárt, mert ha $x \in \partial \overline{M}$, akkor minden környezete tartalmaz $\overline{M}^c$ és $\overline{M}$ beli elemeket. Ha $x \notin M \cup \partial M$ lenne akkor feltétlenül $x \in \operatorname{ext} M$ lenne, de akkor lenne M^c beli környezete, így nem lehetne $\overline{M}$-nak határa
Ha veszünk egy zárt halmazt, akkor annak tartalmaznia kell M-et és ∂M-et is, de mivel $M \cup \partial M$ már zárt, ezért ez a legszűkebb. $\square$

Állítás: Minden $M \subset X$-re $\operatorname{int} M \subset X$ nyílt.

Biz: Azt kell igazolni, hogy minden $x \in \operatorname{int} M$-hez van olyan $r > 0$: $B_r(x) \subset \operatorname{int} M$
Ha $x \in \operatorname{int} M$, akkor $\exists\, r^*$ hogy $B_{r^*}(x) \subset M$. Vegyük $r = \frac{r^*}{2} - \varepsilon$, akkor $y \in B_r(x)$ esetén $B_r(y)$ beli z elemre teljesül, hogy $\varrho(z, x) \leq \varrho(z, y) + \varrho(y, x) < r + r = 2r = r^*$, tehát $z \in B_{r^*}(x)$ így $z \in M$, tehát y is belső pont volt, így $B_r(x)$ példa olyan x környezetre ami igazolja, hogy $x \in \operatorname{int} M$ $\square$

ANALÍZIS I.

2. előadás (09.22.)

Tétel: Egy $M \subset X$ halmaz (ahol (X, ρ) metr. tér) pontosan akkor nyílt, ha M^c zárt.

Biz: M nyílt $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ Minden pontja belső $\Longleftrightarrow M \cap \partial M = \emptyset \Longleftrightarrow M \cap \partial(M^c) = \emptyset \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \partial(M^c) \subset M^c \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} M^c$ zárt $\square$

Példák: 1) $X = \mathbb{R}$; $\rho(a,b) = |a-b|$; $M = (a_1, a_2) = \{x \in \mathbb{R} : a_1 < x < a_2\}$
Ekkor M nyílt.

Biz: Legyen $y \in (a_1, a_2)$! Igazoljuk, hogy y belső pont!
$a_1 < y < a_2$, ekkor az $\rho^* = \frac{1}{2} \min(\rho(a_1, y), \rho(a_2, y))$ sugarú gömbje benne van M-ben.

2) $X = \mathbb{R}$; $\rho(a,b) = |a-b|$; milyen halmaz a $\mathbb{Z}$, az $\mathbb{R}$ és a $(1, 2]$

a) $\partial \mathbb{Z} = ?$ Ha $y \notin \mathbb{Z}$ van olyan környezete, amely nem tartalmaz $\mathbb{Z}$-beli elemet, tehát $y \in \text{ext}\, \mathbb{Z}$

Ha $y \in \mathbb{Z}$, akkor tetszőleges környezete tartalmazza önmagát, és nem egészet

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ minden pontja határpont, és minden határpont eleme: $\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ zárt

b) A teljes metrikus tér egyszerre nyílt is zárt is most
Ny: minden pontban létezik olyan környezet, ami a halmazban van $\Rightarrow X$ nyílt
Z: nincs határpontja, mert ha y határpont lenne, akkor y minden környezetének tartalmaznia nem X-beli pontot, tehát $\partial X = \emptyset \Rightarrow \partial X \subset X \Rightarrow X$ zárt
A fenti tétel miatt a $\emptyset$ is nyílt és zárt is.

c) se nem nyílt, se nem zárt, triviális, mert a határpontok az 1 és a 2.

3) $X = [1, 2)$; $\rho(a,b) = |a-b|$; $M = [1; 1{,}5)$ nyílt.
Biz: mert megy, hogy a komplementer zárt: $[1{,}5; 2)$
$\partial [1{,}5; 2) = \{1{,}5\}$ és $\{1{,}5\} \subset [1{,}5; 2)$

Állítás: Nyílt halmazok uniója nyílt, és véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.
Biz: - Ha H_j halmazok nyíltak, ahol $j \in J$ akkor azt kell igazolni, hogy tetszőleges $x \in \bigcup_{j \in J} H_j$ esetén belső pontja az uniónak

$x \in \bigcup_{j \in J} H_j \Rightarrow \exists j \in J : x \in H_j \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset H_j \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcup_{j \in J} H_j \Rightarrow x$ belső pont

- Ha $x \in \bigcap_{j=1}^{k} H_j$ akkor azt kell igazolni, hogy van olyan környezete ami a metszet része

$x \in \bigcap_{j=1}^{k} H_j \Rightarrow \forall j \; x \in H_j \Rightarrow \forall j, \exists r_j > 0 \; B_{r_j}(x) \subset H_j \Rightarrow \forall j$-re $B_{\min(r_j)}(x) \subset H_j \Rightarrow$
$\Rightarrow B_{\min(r_j)}(x) \subset \bigcap_{j=1}^{k} H_j$ $\square$

Ellenpélda végtelen metszet esetén: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]$

Sorozatok konvergenciája metrikus terekben

Def: Sorozat egy olyan fgv: $f: \mathbb{Z}^+ \to X$ (általában $f(1), f(2) \dots$ értékeket adjuk meg, jelölés: $a_1, a_2 \dots$ vagy (a_n))

Def: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke az $a \in X$ pont, ha a pont tetszőleges $B_\varepsilon(a)$ környezetéhez van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$, hogy $n > n_\varepsilon \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(a)$

(Formálisan: $\forall \varepsilon$-hoz van olyan n_ε, hogy $n > n_\varepsilon$ esetén $\varrho(a_n, a) < \varepsilon$)

jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $(a_n) \to a$

Tulajdonságok: 1) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, akkor (a_n) minden a_{n_k} részsorozatára is

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

[Def: Legyen $g: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ monoton növő. Ekkor (a_n) részsorozata az $(a_{g(n)})$ sorozat, amelyet (a_{n_k})-val jelöljük.]

Biz: Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $n > n_0$ $a_n \in B_\varepsilon(a)$. Legyen $k > n_0$! Így $n_k \geq k > n_0 \Rightarrow a_{n_k} \in B_\varepsilon(a)$

2) A határérték egyértelmű.

Biz: TFH $(a_n) \to a$ és $(a_n) \to b$ akkor $\varrho(a,b) = \delta > 0$
Legyen n_0 olyan, hogy $n > n_0$-ra $a_n \in B_{\frac{\delta}{2}}(a)$ és $a_n \in B_{\frac{\delta}{2}}(b)$

Ekkor $n > n_0$-ra:
$\delta = \varrho(a,b) \leq \varrho(a,a_n) + \varrho(a_n,b) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ Ellentmondás.
□

3) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, akkor az összefésült sorozatnak is a.

Biz: triviális

4) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, akkor (a_n) korlátos.

[Def: Egy (a_n) sorozat korlátos, ha $\exists x \in X, r > 0$ úgy, hogy $(a_n) \subset B_r(x)$.]

Biz: Tekintsük az $B_1(a)$ gömböt! Def szerint $\exists n_0$, hogy $n > n_0$-ra $a_n \in B_1(a)$. Tekintsük a $\varrho(a_1,a), \varrho(a_2,a) \dots \varrho(a_{n_0},a)$ távolságokat! Legyen ezek maximuma ε^*! Ekkor $\forall j$-re $\varrho(a,a_j) = \varepsilon^* + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall j$-re $a_j \in B_{\varepsilon^*+2}(a) \Rightarrow (a_n)$ korlátos

Műveleti tulajdonságok (Most az alaphalmaz $(X, \|\cdot\|)$ normált tér)

Állítás: Ha $(a_n) \to a$ és $(b_n) \to b \Rightarrow (a_n+b_n) \to a+b$ ahol (a_n+b_n) n. tagja a_n+b_n

Biz: Igazolni kell, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n_\varepsilon$, hogy $n > n_\varepsilon$-ra $\|a_n+b_n-(a+b)\| < \varepsilon$

Legyen n_1 olyan, hogy $n > n_1$-re $\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Legyen n_2 olyan, hogy $n > n_2$-re $\|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ha $n > \max(n_1, n_2)$, akkor

$\|a_n+b_n-(a+b)\| \le \|a_n-a\| + \|b_n-b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ Tudunk olyan n_ε-t választani, hogy a fenti jó legyen $\square$

Megjegyzés: Ha $(a_n) \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon\ \|a_n - 0\| < \varepsilon \iff$
$\iff \forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon\ \|a_n\| < \varepsilon \iff (\|a_n\|) \to 0$

Állítás: Ha (a_n) sorozat korlátos és $(\lambda_n) \to 0$ akkor $(\lambda_k a_k) \to 0$ $(\forall k : \lambda_k \in \mathbb{R})$

Biz: $\|\lambda_n a_n\| \to 0$ ezt kell igazolni

$0 \le \|\lambda_n a_n\| = |\lambda_n|\,\|a_n\| \le *$ Mivel (a_n) korlátos, $(\|a_n\|)$ is

$* \le A \cdot |\lambda_n|$ De $A|\lambda_n| \to 0$ így a rendőr elv miatt $|\lambda_n|\,\|a_n\| \to 0$

Állítás: Ha $(\lambda_n) \to \lambda$ és $(a_n) \to a$, akkor $(\lambda_n a_n) \to \lambda a$

Biz: $0 \le \|\lambda_n a_n - \lambda a\| \le \|\lambda_n a_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \lambda a\| = \underbrace{\underbrace{|\lambda_n|}_{\lambda}\,\underbrace{\|a_n - a\|}_{0}}_{} + \underbrace{\|\underbrace{(\lambda_n - \lambda)}_{0} a\|}_{\text{előző miatt} \to 0} \to 0$

$\|\lambda_n a_n - \lambda a\| \to 0 \iff \lambda_n a_n - \lambda a \to 0 \iff \lambda_n a_n \to \lambda a$

Konvergens sorozatok és zárt halmazok

Tétel: Egy (X, ρ) metrikus tér M halmaza zárt P.A.H. minden $(a_n) \subset M$ konvergens sorozatra $\lim a_n \in M$

Biz: I. zártság $\Rightarrow$ konv

Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és ezt kell igazolni, hogy ha $\forall n$-re $a_n \in M$ akkor $a \in M$.

~~...~~, Ekkor a nem lehet ext M-ben, mert akkor $\exists\, B_r(a)$ környezet, aminek nincs M-beli eleme. Tehát $a \in \bar{M}$, ami, ha M zárt, akkor $\bar{M} = M$

II. konv $\Rightarrow$ zártság

Legyen $b \in \partial M$ és $b_1 \in B_1(b) \cap M$ valamint $b_2 \in B_{\frac{1}{2}}(b) \cap M$ stb. $b_k \in B_{\frac{1}{k}}(b) \cap M$!
Ekkor def szerint $b_k \to b$ és $(b_k) \subset M \Rightarrow b \in M \Rightarrow M$ zárt

Bolzano – Weierstrass-féle kiválasztási tétel: Ha $(a_n) \subset \mathbb{R}$ korlátos, akkor van konvergens részsorozata.

Biz: Van olyan $[b_1, c_1]$, hogy $(a_n) \subset [b_1, c_1]$. Válasszuk ennek azon felét, amelyben végtelen sok eleme van, legyen ez $[b_2, c_2]$. Ezt folytatjuk: $[b_{n+1}, c_{n+1}]$ a $[b_n, c_n]$ azon fele, ahol a sorozatnak végtelen sok eleme van.

(b_n) monoton növő, (c_n) monoton csökkenő, továbbá $(c_n - b_n) \to 0$

Mivel korlátosak, mindkettőnek van limesze, és e miatt a két sorozat limesze u.a.

Vegyünk olyan részsorozatot, amelyre ~~[illegible]~~ $a_{n_k} \in [c_k, d_k] \Rightarrow c_k \le a_{n_k} \le d_k$

Mivel $k \to \infty$ esetén c_k és d_k is ugyanahhoz tart, ezért a rendőr-elv miatt a_{n_k} is ugyanahhoz tart. □

ANALÍZIS

3. előadás (09.29.)

A BW-tétel általánosítása: Ha $(a_n) \subset \mathbb{R}^k$ korlátos, akkor van konvergens részsorozata

Biz: (a_n) korlátos $\Rightarrow$ minden komponense korlátos.

Vegyünk egy olyan n_k részsorozatot, hogy (a_{n_k}) első komponensei konvergáljanak. (A BW-tétel miatt ilyen létezik.)
Az (a_{n_k}) sorozat második komponensei is korlátosak, tehát annak is létezik konvergens részsorozata, ami az eredeti részsorozata.
Ezt az eljárást rekurzívan folytatva az összes komponensre, olyan részsorozatot kapunk, ahol az összes komponens alkotta sorozat konvergens, tehát az egész sorozat konvergens.

$\square$

Def: Egy $K \subset (X,\rho)$ halmazt sorozatkompaktnak (kompaktnak) nevezzük, ha benne minden sorozatnak létezik konvergens részsorozata, úgy, hogy a limesz is K-beli.

Tétel: $\mathbb{R}^k$-ban minden korlátos zárt halmaz sorozatkompakt.

Biz: Legyen $K \subset \mathbb{R}^k$ korlátos és zárt! Tekintsünk egy $(a_n) \subset \mathbb{R}^k$ sorozatot. Ennek van $\mathbb{R}^k$-beli konvergens (a_{n_k}) részsorozata, azaz $(a_{n_k}) \to a \in \mathbb{R}^k$. Mivel K zárt ezért $a \in K$ (zárt karakterizációs tétele miatt), vagyis K sorozatkompakt. $\square$

Igaz-e a megfordítás? Azt látjuk, egy vallal erősebben is:

Tétel: Ha (X,ρ) metrikus térben egy K halmaz sorozatkompakt, akkor az korlátos is zárt, de általában egy korlátos és zárt halmaz nem sorozatkompakt

Biz: Ha K nem lenne korlátos, akkor tetszőleges $x \in X$-re van $a_1 \notin B_1(x)$.
Ugyanúgy van $a_2 \notin B_{\rho(a_1,x)+1}(x)$ stb. Ez egy olyan sorozatot konstruál ami már nem korlátos, tehát az nem lehet kompakt. $\Rightarrow$ K korlátos

Ha K nem lenne zárt akkor lenne benne (a_n) sorozat úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \notin K$, de ekkor minden $(a_{n_k}) \subset (a_n)$-re is $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \notin K$. Ekkor (a_n)-nek nincs olyan részsorozata, amelynek limesze K-ban van, tehát K nem lenne sorozatkompakt $\Rightarrow$ K zárt $\square$

Példa olyan halmazra, ami zárt és korlátos de nem sorozatkompakt:

$X = 0$-1 sorozatok tere és $\rho(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a = b \\ 1 & \text{ha } a \neq b \end{cases}$

Legyen $a_n = 0, 0, \ldots 0, \underset{n.\text{ tag}}{1}, 0 \ldots$ és $K = \{(a_n)\}$

Ez korlátos, hiszen a $B_2((0,0\ldots0))$-ban benne van minden eleme

Ha az (a_n) sorozatnak volna konvergens részsorozata, akkor egy tagtól kezdve $\rho(a_{n_k}, a) < \frac{1}{2}$, azaz ~~egy tagtól kezdve~~ attól kezdve minden $a_{n_k} = a$, de ez nem igaz

Cauchy-sorozatok, teljesség

(X,ϱ) térben

Def: Azt mondjuk, hogy az $(a_n) \subset (X,\varrho)$ Cauchy-sorozat, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n, hogy $k, \ell > n$ indexekre $\varrho(a_k, a_\ell) < \varepsilon$.

Állítás: Ha $(a_n) \to a$, akkor (a_n) Cauchy-sorozat

Biz: Legyen ε adott! Ekkor a konvergencia miatt van olyan n, hogy $k, \ell > n$, hogy $\varrho(a, a_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\varrho(a, a_\ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. Δ-egyenlőtlenség miatt $\varrho(a_k, a_\ell) \leq \varrho(a_k, a) + \varrho(a_\ell, a) = \varepsilon$ $\square$

Def: Ha (X,ϱ) metr. térben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor (X,ϱ)-t teljesnek nevezzük

Ellenpélda: $(\mathbb{Q}, \varrho)$ ahol $\varrho(a,b) = |b-a|$.
Tekintsünk egy $\sqrt{2}$-höz tartó racionális sorozatot (a_n)! Mivel az $(a_n) \subset (\mathbb{R},\varrho)$-en konvergens ezért az Cauchy-sorozat, és mivel ϱ u.a. szerint $\mathbb{Q}$-en is Cauchy, de mégsem konvergens.

Állítás: A $(\mathbb{R}^k, \varrho)$ metrikus tér teljes.

Biz: Legyen $(a_n) \subset \mathbb{R}^k$ Cauchy sorozat!
Def szerint $\varepsilon = 1$-hez van olyan n, hogy $k, \ell > n$-re $|a_k - a_\ell| < 1$, azaz minden $k > n$-re $|a_{n+1} - a_k| < 1$. Legyen $R = \max\limits_{j \in \mathbb{N}} \{|a_{n+1} - a_j| + 1\}$. Ekkor $(a_n) \subset B_R(a_{n+1})$, tehát (a_n) korlátos.
A kiválasztási tétel miatt van $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ konvergens részsorozat ahol $(a_{n_k}) \to a$.
Legyen $\varepsilon > 0$ adott! Ekkor van olyan n_1, hogy $k > n_1$ esetén $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ugyanakkor van olyan n_2, hogy $\ell, k > n_2$-re $|a_k - a_\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$
Ekkor $n_0 = \max(n_{n_1}, n_2)$ esetén $n > n_0$-ra $|a_n - a| \leq |a_{n_+} - a| + |a_{n_+} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
ahol $n_+ > n_{n_1}$

Def: A teljes normált teret Banach-térnek nevezzük.

Függvények határértéke és folytonossága

$f: X \to Y$ ahol (X,ϱ_1), (Y,ϱ_2) metrikus terek

Def: Legyen $x \in X$ olyan, hogy $\forall r > 0$-ra $\exists x' \neq x$: $x' \in \mathcal{D}_f$ és $x' \in B_r(x)$!
Ekkor azt mondjuk, hogy f határértéke x-ben az $y \in Y$ pont, ha $\forall r > 0$-ra $\exists$ x-nek V környezete, hogy $x_0 \in V$, $x \neq x_0$ esetén $f(x_0) \in B_r(y)$

másképp: ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$: $\forall x_0 \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$-ra $f(x_0) \in B_\varepsilon(y)$
akkor f határértéke x-ben y.

Def: Legyen $x \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f folytonos x-ben, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x_0 \in B_\delta(x) \cap \mathcal{D}_f$: $f(x_0) \in B_\varepsilon[f(x)]$

Állítás (átviteli elv): f folytonos x-ben PAH tetszőleges $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$; $(x_n) \to x$ sorozatra $(f(x_n)) \to f(x)$

Biz: oda: Tetsz. ε-hoz kell olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $\varrho(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. A feltét miatt van olyan δ, hogy ha $(x, x_0) < \delta$ akkor $\varrho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Legyen n_0 olyan, hogy $\varrho(x_n, x) < \delta$. ekkor $\varrho(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ ✓
vissza: TFH. az f nem folytonos, azaz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$-ra: $\exists x_0$, hogy $\varrho(x_0, x) < \delta$, de $\varrho(f(x_0), f(x)) > \varepsilon$
Legyen $\delta = \frac{1}{n}$ és a hozzá tartozó x_n. Ekkor $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow (x_n) \to x$. A feltétel miatt $f(x_n) \to f(x)$.
viszont $\varrho(f(x_n), f(x)) > \varepsilon$, tehát $f(x_n) \not\to f(x)$ ez ellentmondás
$\square$

Műveleti szabályok

Legyen $(Y, \|\cdot\|)$ normált tér, $f: X \to Y$ és $g: X \to Y$ | $c \in \mathbb{R}$

$f+g$ értelmes: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ $\quad x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

cf is értelmes: $(cf)(x) := c f(x)$ $\quad x \in \mathcal{D}_f$

Állítás: Ha f és g folytonos x-ben, akkor $f+g$ is az. Ha f folytonos x-ben cf is az

Biz: Legyen $(x_n) \to x$, $(x_n) \subset \mathcal{D}_{f+g}$

$$(f+g)(x_n) = \underset{\downarrow\atop f(x)}{f(x_n)} + \underset{\downarrow\atop g(x)}{g(x_n)}$$

sorozatok lineáris összege az összeg limesze

Tehát $((f+g)(x_n)) \to f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

$$(cf)(x_n) \overset{DEF}{=} c\, f(x_n) \underset{\text{sorozatok limesze}}{\to} c \cdot f(x) \overset{DEF}{=} (cf)x$$

$\square$

Állítás: Legyen $f: X \to Y$; $g: Y \to Z$ ahol X, Y, Z normált terek. TFH $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$ és f folytonos x-ben, valamint g folytonos $f(x)$-ben! Ekkor $g \circ f$ folytonos x-ben.

Biz: Ha $(x_n) \to x$, akkor $(f(x_n)) \to f(x)$ f folytonossága miatt

Ha $(f(x_n)) \to f(x)$, akkor $g(f(x_n)) \to g(f(x))$ g folytonossága miatt.

$\square$

ANALÍZIS

4. előadás (10.06.)

Állítás: Legyen $f: X \to Y$ injektív, $D_f \subset X$ sorozatkompakt, f folytonos. Ekkor f^{-1} is folytonos. (X és Y metrikus terek)

Biz: Legyen $y_0 \in D_{f^{-1}}$ (ezen $f(x_0)=y_0$) és $(y_n) \to y_0$ sorozat! Azt kell igazolni, hogy $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0) = x_0$.

TFH ez nincs így. Ekkor $\exists \varepsilon: \forall n_0$ indexhez $\underset{\exists n > n_0}{\wedge}$ $\rho(f^{-1}(y_0), f^{-1}(y_n)) > \varepsilon$

Vegyük $f^{-1}(y_{n_1}), f^{-1}(y_{n_2}) \dots$ sorozatot, $\subset D_f$ így sorozatkompakt. Vegyük ennek egy olyan $f^{-1}(y_{k_1}), f^{-1}(y_{k_2}) \dots$ részsorozatát ami konv. és limesze $x^* \neq x_0$

$y_{k_1}, y_{k_2} \dots$ részsorozata (y_n)-nek, tehát limesz y_0

$f^{-1}(y_{k_1}), f^{-1}(y_{k_2}) \dots$ limesz x^*

$f(f^{-1}(y_{k_1})), f(f^{-1}(y_{k_2})) \dots$ limesz $f(x^*) \neq f(x_0)$

de $\uparrow$ ez u.a. m. $y_{k_1}, y_{k_2} \dots$ aminek limesze y_0. Ez ellentmondás $\square$

Segédállítás: Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, akkor f injektív, és f^{-1} is szigorúan monoton nő

Biz: Ha $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ vagy $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ injektív.

Ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$, így a fordítottja is igaz: ha $f(x_1) < f(x_2)$ akkor $x_1 < x_2$, így f^{-1} is szig. mon. nő. $\square$

Állítás: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ úgy, hogy D_f intervallum és f szig. mon. nő. Ekkor f^{-1} folytonos.

Biz: Legyen $y_0 \in D_{f^{-1}} = R_f$, $f(x_0) = y_0$, $f^{-1}(y_0) = x_0$! Kellene adott ε-hoz y_0-nak környezete, hogy abból $\forall y$-ra $f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0) + \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Tekintsük $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ f-képét (akkor értelmes ha $y_0 \notin \partial D_{f^{-1}}$)! Ekkor ebben van y_0. Így létezik y_0-nak olyan U környezete, amelyre $U \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, tehát $\forall y \in U$-ra $y \in (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ így U megfelelő.

Tétel: Ha $f: X \to Y$ folytonos és D_f sorozatkompakt, akkor R_f is sorozatkompakt.

Biz: Legyen $(y_n) \subset R_f$! $y_n = f(x_n)$, tekintsük a $(x_n) \subset D$ sorozatot. Ennek van D_f-ben konvergens részsorozata (mert D_f kompakt), jelölje $(x_{n_k}) \to x^*$

Ekkor $f(x_{n_k})$ részsorozata (y_n)-nek, és a folytonosság miatt $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$. Tehát (y_n) is konvergens. $\square$

$\hookrightarrow$ „kompakt halmaz folytonos képe kompakt"

Következmény: létezik R_f maximuma (mert van sup, és a zártság miatt az eleme $\mathbb{R}$-ben alaphalmaznak)
(Weierstrass-maximumelv)

Def: Az $f: X \to Y$ fgv egyenletesen folytonos a $H \subset D_f$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ hogy ha $\rho(x_1, x_2) < \delta$ akkor $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \quad (x_1, x_2 \in H)$

Ellenpélda: $f(x) = x^2 \quad D_f = \mathbb{R}_0^+$ ez nem egyf folyt mert

Legyen $\varepsilon = 1$! Keresünk olyan δ-t, hogy $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén $|x_1^2 - x_2^2| < 1 \quad \forall x_1, x_2$-re,
Ha lenne ilyen, akkor $\forall x_1$-re $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$ jó lenne:
$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1^2 - (x_1 + \frac{\delta^2}{4} - x_1\delta)| = \frac{\delta^2}{4} + x_1\delta$ ez viszont nem lesz jó minden
x_1-re, mert $x_1 > \frac{1}{\delta}$ esetén > 1.

Tétel (Heine): Ha $f: X \to Y$ folytonos és D_f sorozatkompakt, akkor f egyenletesen folytonos D_f-en

Biz: TFH nem az. Ekkor lenne olyan ε, hogy $\forall \delta$-hoz (így $\delta = \frac{1}{n}$-hez is) található lenne olyan $x_1, x_2 \in D_f$ hogy $\rho(x_1, x_2) < \delta$, de $(f(x_1), f(x_2)) > \varepsilon$

Legyenek (x_{1n}) és (x_{2n}) ~~azon~~ olyan elemekből álló sorozatok, hogy a $\rho(x_{1n}, x_{2n}) < \frac{1}{n}$ de $\rho(f(x_{1n}), f(x_{2n})) > \varepsilon$.

$\Rightarrow$ (x_{1n}) egy részsorozata konvergens (mert D_f kompakt). (x_{2n}) szintén ez legyen $(x_{2n_k}) \to x_2$
$(x_{1n_k}) \to x_1$

Mivel $\rho(x_{2n_k}, x_{1n_k}) < \frac{1}{n}$ ezért; $x_1 = x_2$, hiszen ha nem így volne, akkor egy indextől (x_{1n_k}) összes eleme $B_{\frac{\rho(x_1,x_2)}{3}}(x_1)$-ben,
(x_{2n_k}) összes eleme $B_{\frac{\rho(x_1,x_2)}{3}}(x_2)$-ben lenne,
így $\rho(x_1, x_2) \le \rho(x_1, x_{1n_k}) + \rho(x_{1n_k}, x_{2n_k}) + \rho(x_{2n_k}, x_2) \le$
$\le \frac{\rho(x_1,x_2)}{3} + \rho(x_{1n_k}, x_{2n_k}) + \frac{\rho(x_1,x_2)}{3}$ lenne
amiből $\frac{\rho(x_1,x_2)}{3} \le \rho(x_{1n_k}, x_{2n_k})$ ami nem lehetne,
hiszen $\rho(x_{1n_k}, x_{2n_k})$ 0-hoz tart.

De így $\rho(f(x_{1n_k}), f(x_{2n_k})) > \varepsilon$ volt a feltevés, viszont mivel
$f(x_{1n_k}) \to f(x_1)$, $f(x_{2n_k}) \to f(x_2)$ ezért $\to 0$ és ez ellentmondás $\square$

Ez alapján az $f\,[0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos fgv egyenletesen konvergens.

Tétel (Bolzano): Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos! Ekkor minden $\eta \in (f(a), f(b))$ esetén van olyan $\xi \in (a,b)$ hogy $f(\xi) = \eta$

Biz: Legyen $M = \{x \in [a,b] : f(x) < \eta\}$ Mivel $f(a) < \eta$ vagy $f(b) < \eta$ ezért $M \neq \emptyset$.
Tekintsük $\sup M$ értékét, annál igazoljuk, hogy jó lesz.
- Ha $f(\sup M) > \eta$ akkor f folyt miatt $\sup M$ környezetében is $> \eta$, ekkor nem lehet felső korlátja az M halmaznak
- Ha $f(\sup M) < \eta$, akkor szintén teljesül $< \eta$ a $\sup M$ környezetében, tehát nem $\sup M$ a felső korlát

Mivel $\sup M$ se nem kisebb se nem nagyobb, mint η, ezért a tétel belátva

Def: f Darboux-tulajdonságú, ha $\forall f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz a (a,b) intervallumon

ANALÍZIS

5. előadás (10.13.)

A Bolzano tétel következménye: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor $R_f = [\min\limits_{[a,b]} f, \max\limits_{[a,b]} f]$

Ezzel akarnánk általánosítani a B. tételt metrikus terekre

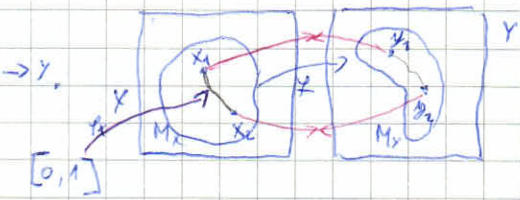
Bolzano-tétel általánosítása

(X metrikus tér)

Def: $M \subset X$ halmaz útszerűen összefüggő, ha $\forall m_1, m_2 \in M$-hez $\exists \varphi:[0,1]\to X$ folytonos fgv, melyre $\varphi(0)=m_1$, $\varphi(1)=m_2$, $R_\varphi \subset M$

Tétel: Ha $f: X\to Y$ folytonos, akkor egy útszerűen összefüggő halmaz képe is útszerűen összefüggő

Biz: Igazolni kell, hogy a tétel feltételeinek teljesülése $y_1, y_2 \in M_Y$-hoz $\exists \varphi_y$ fgv, hogy $R_{\varphi_y} \subset M_Y$, $\varphi_y [0,1]\to Y$, $\varphi_y(0)=y_1$, $\varphi(1)=y_2$.



Mivel $y_1, y_2 \in R_f$, ezért $\exists x_1, x_2 \in M_X$: $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. Legyen $\varphi_X:[0,1]\to M_X$ folytonos úgy, hogy $\varphi_X(0)=x_1$, $\varphi_X(1)=x_2$! Ilyen létezik, mert M_X útszerűen összefüggő.

Az $\varphi_y = f\circ\varphi_x$ jó lesz, mert
- folytonos fgv-k kompozíciója folytonos
- Mivel $R_{\varphi_x} \subset M_X$ ezért $R_{f\circ\varphi_x} \subset M_Y$
- $(f\circ\varphi_x)(0) = f(\varphi_x(0)) = f(x_1) = y_1$ és $(f\circ\varphi_x)(1) = f(\varphi_x(1)) = f(x_2) = y_2$

Függvénysorozatok konvergenciája

Jelölés: (f_j) függvénysorozat tagjai $f_j: X\to Y$ (metrikus terek); $\forall j$-re $D_{f_j} = M \subset X$

Def: Azt mondjuk, hogy (f_j) fgv.sorozat pontonként tart az $f: X\to Y$ fgv.hez az M halmazon, ha minden $x\in M$ pontban $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$

Pl.: $M=[0,1]$; $f_j(x) = x^j$. Ekkor minden j-re f_j folytonos és korlátos. Van-e pontonkénti határértéke?
Ha $x\in[0,1)$ akkor $x^j\to 0$, ha $x=1$ akkor $x^j\to 1$.
Tehát a pontonkénti limesz: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x\in[0,1) \\ 1 & \text{ha } x=1 \end{cases}$

Bár minden f_j folytonos, a limeszük nem az ☹

Def: Azt mondjuk, hogy $f_j: M\to Y$ fgv-k sorozata egyenletesen tart az $f: M\to Y$ fgv-hez ha $\forall \varepsilon>0$-hoz $\exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ index: $\forall j > j_\varepsilon$ és $\forall x\in M$ esetén $\rho(f_j(x), f(x)) < \varepsilon$

Tétel: Legyenek $f_j: M\to Y$ folytonos fgv-k, valamint teljesüljön, hogy $f_j\to f$ egyenletesen! Ekkor f is folytonos.

Biz: Legyen $x_0 \in M$ tetszőleges! $\rho(f(x), f(x_0)) \le \rho(f(x), f_j(x)) + \rho(f_j(x), f_j(x_0)) + \rho(f_j(x_0), f(x_0))$

Legyen j akkora, hogy $\rho(f_j(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (ilyen van az egyenletes konv. miatt) $\forall x$-re adott ε-ra

Most legyen δ olyan, hogy $\rho(x, x_0) < \delta$ esetén $\rho(f_j(x), f_j(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (a folytonosság miatt van ilyen)

Emiatt a fenti összeg $\rho(f(x), f(x_0)) \le \varepsilon$, tehát f folytonos $\square$

Pl.: Legyen $X = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ folytonos} \}$, legyen $\rho_{max}(f_1, f_2) = \max_{x \in [0,1]} |f_1(x) - f_2(x)|$ $\forall f_1, f_2 \in X$-re

Ez metrikus tér. Mit jelent itt, hogy $(f_n) \to f$?
$\rho_{max}(f_n, f) = 0 \iff \max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ez pont az egyenletes konvergencia

Következmény: a fenti metrikus tér teljes

Függvénysorok

Def: Az $f_j : M \to Y$, $D_j = M \subset X$ fgv-ek ből álló $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ alakú kifejezést f_j elemekből álló fgv-sorozat nevezzük.

Azt mondjuk, hogy ennek összege (vagy limesze) f fgv pontonként, ha $\left(\sum_{k=1}^{j} f_k \right)$ sorozat tart f-hez pontonként

Azt mondjuk, hogy f egyenletes egyenletes limesz a fenti kifejezésnek, ha $\left(\sum_{k=1}^{j} f_k \right) \to f$ egyenletesen

Állítás: Legyen $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$, ahol $g_j : M \to Y$ folytonos. Ekkor g is folytonos
egyenletesen

Biz: Minden k-ra $\sum_{j=1}^{k} g_j$ folytonos. Mivel $g = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} g_j$ egyenletesen, ezért g is folytonos

Tétel (Weierstrass-kritérium): Legyenek $f_j : M \to \mathbb{R}$ fgv-ek amelyekre $|f_j| \le a_j \subset \mathbb{R}$ teljesül, ahol $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$. Ekkor $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ egyenletesen konvergens

Biz: Tetszőleges x-re teljesül, hogy $\left| \sum_{j=1}^{k} f_j(x) - \sum_{j=1}^{\ell} f_j(x) \right| = \left| \sum_{j=\ell+1}^{k} f_j(x) \right| \le \sum_{j=\ell+1}^{k} |f_j(x)| \le \sum_{j=\ell+1}^{k} a_j \le$
$\le \sum_{j=\ell+1}^{\infty} a_j \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$

Vagyis $\left(\sum_{j=1}^{\ell} f_j(x) \right)$ Cauchy-sorozat, legyen a limesze $f(x)$ minden rögzített x-re.

Mivel a fenti egyenlőtlenség minden x-re egyenletesen igaz, ezért $\left| \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) - \sum_{j=1}^{\ell} f_j(x) \right| \le \sum_{j=\ell+1}^{\infty} a_j$

is teljesül, itt viszont a jobb oldal $\to 0$ ha $\ell \to \infty$, tehát a limesz egyenletes.

~~Ald~~

Alkalmazás:

A c_j-k ismeretében hogyan x értékére tudjuk, hogy $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ egyenletesen konvergens-e?

$\limsup c_j :=$ {(c_j) részsorozatainak limeszének szuprémuma}

ha $\lim c_j$ létezik, akkor $\limsup c_j = \lim c_j$

Def: A fenti 0 közepű hatványsor konvergencia sugara $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$

Tétel: Ha $0 < R_0 < R$, akkor a fenti hatványsor egyenletesen konvergens a $[-R_0, R_0]$ halmazon

Bizonyítás: A fgv sor j. tagja $c_j x^j$. A Weierstrass kritérium értelmében olyan konvergens számsort kell találni $|x| \le R_0$ esetén felülbecslésére $|c_j x^j|$-nek

$|c_j x^j| \le |c_j| \cdot |x|^j \le \underbrace{|c_j| \cdot R_0^j}$ a kérdés, hogy $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| R_0^j$ konv-e?

A gyökkritérium szerint $\limsup \sqrt[j]{|c_j| R_0^j} = R_0 \limsup \sqrt[j]{|c_j|} < \frac{1}{\limsup \sqrt[j]{|c_j|}} \limsup \sqrt[j]{|c_j|} = 1$

Tehát tényleg konvergens

Lineáris operátorok

Def: Legyenek X, Y vektorterek, és $M \subset X$ maga is vektortér! Ekkor $A: X \to Y$, $\mathcal{D}_A = M$ fgv-t (operátort) lineárisnak nevezzük, ha $\forall x_1, x_2 \in X$ és $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$$

Következmény: $A0 = 0$, mert $A(0 \cdot x) = 0 \cdot Ax = 0$

$\Rightarrow$ nem minden egyenes képű fgv. lineáris

ANALÍZIS I.

5. előadás (10.20.)

Lineáris operátorok

X és Y normált terek

Állítás: Legyenek $A, B: X \to Y$ lineárisak, és $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$! Ekkor $A+B$ és $\lambda \cdot A$ is lineáris
(def szerint $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$ és $(\lambda A)(x) = \lambda(Ax)$)

Biz: $(A+B)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ az értelmes, mert ha $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ akkor mivel A lineáris $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{D}(A)$. u.a. B-re.

$$(A+B)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 + \lambda_1 B x_1 + \lambda_2 B x_2 =$$

$$= \lambda_1 (A x_1 + B x_1) + \lambda_2 (A x_2 + B x_2) = \lambda_1 (A+B) x_1 + \lambda_2 (A+B) x_2$$

tehát $(A+B)$ lineáris

λA-ra ugyanígy

$\square$

Következmény: Közös értelmezési tartományú rendelkező lineáris operátorok az előzőek szerint a számmal való szorzásra, és a összeadásra vektorteret alkotnak

Spec eset: $A, B: X \to X$ lineáris operátorok. Ekkor $A \circ B$ vagy AB is értelmezhető
$\mathcal{D}(A \circ B) = \{x \in X : x \in \mathcal{D}(B), Bx \in \mathcal{D}(A)\}$

Legyen $I: X \to X$, $\mathcal{D}(I) = X$, $Ix = x$ $\forall x$-re
$O: X \to X$, $\mathcal{D}(O) = X$, $Ox = 0$ $\forall x$-re

Ilyenkor az alábbiak teljesülnek:

$A(BC) = (AB)C$ (Azaz értelmes mindkét oldal egyenlőre az $x \in X$-ekre, és az eredmény is u.a)

$A(B+C) = AB + AC$

$IA = AI = A$

$A + O = A$

$AO = OA = O$ (Ez csak $\mathcal{D}(A)$-n értelmes)

Jelölés: $\underbrace{AAA \cdots A}_{n} = A^n$

Példa: $X = \mathbb{R}^n$
A-nak megfeleltethető egy mátrix (ha $\mathcal{D}(A) = \mathbb{R}^n$) $\quad \underset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}{A} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}^{n \times n}}{\mathcal{A}}$

Hogy értelmezzük két mátrix összegét és szorzatát?
$\mathcal{A} + \mathcal{B} :=$ $(A+B)$-hez tartozó mátrix
$\mathcal{A}\mathcal{B} = (AB)$-hez tartozó mátrix

ez alapján jön ki az adott definíció

Tétel: Legyen $A: X \to X$! A^{-1} pontosan akkor létezik (azaz A injektív) ha $Ax = 0 \iff x = 0$.
azaz ha $\operatorname{Ker} A = \{x \in X : Ax = 0\}$ $\exists A^{-1} \iff \operatorname{Ker} A = \{0\}$

Biz: Ha A^{-1} létezik, azaz A injektív akkor $Ax = 0$ miatt x csak 0 lehet, hisz a 0-hoz csak egy elemet rendel.
Legyen $Ax_1 = Ax_2$, azaz $A(x_1 - x_2) = 0$. De ha $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ akkor $x_1 - x_2 = 0$, vagyis $x_1 = x_2$ így a injektív.

$\square$

Állítás: Ha $A: X \to X$ lineáris akkor $A^{-1}: X \to X$ is lineáris

Állítás: Ha $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ és $\mathcal{D}(A) = \mathbb{R}^d$ akkor A folytonos.

Biz:

Lemma: $A: X \to Y$ folytonos X-en, ha A folytonos 0-ban.

Biz: Legyen $(x_n) \to x$! Ha $Ax_n \to Ax$ $\forall (x_n)$-re akkor jók vagyunk

$x_n - x \to 0 \Rightarrow A(x_n - x) \to A0 = 0$

Tehát $Ax_n - Ax \to 0 \iff Ax_n \to Ax$ $\square$

Elég észrevenni, hogy ha $(x_n) \to 0$ akkor $Ax_n \to 0$

Ha $x_n \to 0$ $\mathbb{R}^d$-ben akkor $\max\{|x_{n_1}|, |x_{n_2}| \cdots |x_{n_d}|\} \to 0$

Nézzük $(Ax_n)_j$-t: $|(Ax_n)_j| = \left|\sum_{i=1}^{d} a_{ji} x_{n_i}\right| \leq \sum_{i=1}^{d} |a_{ji}||x_{n_i}| =$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|\right) \underbrace{\max_{\ell=1}^{d} |x_{n_\ell}|}_{\to 0} \to 0$ $\forall j$-re, tehát A folytonos 0-ban, így az egész $\mathcal{D}(A)$-n $\square$

Mi van nem véges dimenzióban:

Példa: $C[0,1] = \{f: [0,1] \to \mathbb{R} : \mathcal{D}(f) = [0,1],\ f \text{ folytonos}\}$

itt $\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$

$(x_n) = \frac{e^{-nx}}{n}$ itt $\|x_n\| = \frac{1}{n}$ tehát $x_n \to 0$

Legyen az operátor: $\Delta: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $\Delta_0(f) := f''(0)$

Vegyük $\mathcal{D}(\Delta) \subsetneq C[0,1]$ mert nem minden diffható ezért a $\mathbb{R}^n$-en

$\Delta(x_n) = \left(\frac{e^{-xn}}{n}\right)'' = n e^{-nx}\Big|_{x=0} = n$ tehát Δ_0 nem folytonos

Def: $A: X \to Y$ lineáris operátor korlátos ha $\{\|Ax\| : x \in \mathcal{D}(A), \|x\| = 1\}$ korlátos

Tétel: Ha $A: X \to Y$ lineáris operátor folytonos akkor korlátos és viszont

Biz: TFH A folytonos de nem korlátos. Ha $(x) \to 0$. Ha nem korlátos, akkor van olyan $y_1\, y_2 \cdots y_k$ sorozat amelyre $\|y_j\| = 1$ és $\|Ay_j\| \geq j^2$

Ekkor $\left\|A\left(\frac{y_j}{j}\right)\right\| \geq \frac{1}{j}\|Ay_j\| \geq j$. De $\frac{y_j}{j} \to 0$ ez ellentmondás.

Ha $x_1, x_2 \cdots x_n \to 0$ akkor $\|Ax_1\| = \left\|A\left(\|x_1\| \frac{x_1}{\|x_1\|}\right)\right\| = \|x_1\| \left\|A \frac{x_1}{\|x_1\|}\right\| < \|x_1\| \cdot c$

Az $x_n \to 0$ esetén $\|Ax_n\| \leq c\|x_n\| \to 0 \Rightarrow \|Ax_n\| \to 0 \Rightarrow A$ folytonos $\square$

Korlátos folytonos $X \to Y$ operátorok terének jelölése $L(X, Y)$

Feltesszük, legyen az ÉT X.

Természetes norma $L(X,Y)$-n: $\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\|=1\}$

Tétel: A fenti természetes norma tényleg norma.

Biz: • $\|A\| \geq 0$, mert nemnegatív számok supremuma.

• Ha $\|A\| = 0$, akkor $\|Ax\| = 0$ $\forall x$-re, tehát $Ax = 0$ $\forall x$-re $\Rightarrow$ $A = 0$

• $\|\lambda A\| = \sup\{\|\lambda Ax\| : \|x\|=1\} = \sup\{|\lambda| \|Ax\| : \|x\|=1\} = |\lambda| \sup\{\|Ax\| : \|x\|=1\} = |\lambda| \|A\|$

• $\|A+B\| = \sup\{\|(A+B)x\| : \|x\|=1\} \leq \sup\{\|Ax\|+\|Bx\| : \|x\|=1\} \leq$

$\leq \sup\{\|Ax\| : \|x\|=1\} + \sup\{\|Bx\| : \|x\|=1\} = \|A\| + \|B\|$ $\square$

Tétel: Ha Y teljes, akkor $L(X,Y)$ is az.

Biz: Legyen $A_n \subset L(X,Y)$ egy Cauchy-sorozat! Legyen $x \in X$ tetszőleges! Ekkor $\|A_{n_1}x - A_{n_2}x\| \leq$
$\leq \underbrace{\|A_{n_1} - A_{n_2}\|}_{\to 0} \cdot \|x\|$. (*)

$\Rightarrow$ tehát $(A_n x)$ is Cauchy-sorozat Y-ban. Mivel azonban Y teljes, szerint $\exists \lim_{n\to\infty} (A_n x)$. Legyen $Ax := \lim_{n\to\infty}(A_n x)$ és igazoljuk, hogy $A_n \to A$!

$\|A_n - A\| = \sup\{\|(A_n - A)x\| : \|x\|=1\} = \sup\{\|A_n x - \lim_{k\to\infty} A_k x\| : \|x\|=1\} =$

$= \sup\{\lim_{k\to\infty} \underbrace{\|(A_n - A_k)x\|}_{\text{Cauchy-s}} : \|x\|=1\}$ ← Adott ε-ra n_0-tól kisebb ε-nál kisebb.

$\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0$

azaz minden Cauchy-sorozatnak van limesze, a kérdés, hogy $L(X,Y)$-n belül-e?

$\|Ax\| \leq \|(A-A_n)x\| + \|A_n x\| \underset{(*)}{\leq} \|A-A_n\|\|x\| + \|A_n\|\|x\| = (\underbrace{\|A-A_n\|}_{\to 0} + \underbrace{\|A_n\|}_{\text{korl}})\|x\|$

azaz $\|Ax\|$ is korlátos tehát $A \in L(X,Y)$ $\square$

(*): korábbi órán bizonyítjuk.

ANALÍZIS I.

7. előadás (10.27.)

Operátorok:

$A: X \to Y$ folytonos ($\Leftrightarrow$ korlátos) lineáris. Ekkor A normája
$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\|=1\}$

Példa 1. $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, A - egy mátrix

Ha az $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ teret tekintjük, akkor $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1\}$

ahol $\|x\|_2 = \|(x_1, x_2, \dots, x_d)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$

Általában: $\|A\|^2 = \max_{j=1,\dots,d}\{|\lambda_j| : \lambda_j \text{ sajátértéke } AA^T\text{-nek}\}$

Spec eset: Ha A szimmetrikus akkor $\|A\| = \max_{j=1..d}\{|\lambda_j| : \lambda_j \text{ A sajátértéke}\}$

Példa 2: Ha $\mathbb{R}^d$-en $\|x\|_{max} = \max_{j=1..d} |x_j|$

akkor $\|A\| = \max_{j=1,..d}\left(\sum_{k=1}^{d} |a_{jk}|\right)$

Állítás: A fenti feltételekkel $\|A\|\|x\| \geq \|Ax\|$

Biz: $\|A\| \geq \left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|$ mert $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$

$\|A\| \geq \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \Rightarrow \|A\|\|x\| = \|Ax\|$ □

Következmény: $\|A\| = \min\{c : c\|x\| \geq \|Ax\|\}$

Biz: A fenti állítás miatt ilyen $\|A\|$ is, csak azt kell igazolni, hogy ez a legkisebb

TFH $\exists c < \|A\|$: $c\|x\| \geq \|Ax\| \ \forall x \in X$-re

$c \geq \left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \Rightarrow \sup\{\|Ax_0\| : \|x_0\| = 1\} \leq c$

de ez ellentmondás □

Derivált

Motiváció: deriválás $\mathbb{R}$-en: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott, $x_0 \in \text{int}\, \mathcal{D}(f)$

Ekkor $\underline{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \eta(x)} \iff f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{\eta(x)}{x-x_0}$

A Def szerint $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[f'(x_0) - \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(-\frac{\eta(x)}{x-x_0}\right) = 0$

Az aláhúzottat tudjuk általánosítani

Def: Legyen $f: X \to Y$ olyan, hogy $x_0 \in \operatorname{int} D_f$! Ekkor az f fgv az x_0 pontban deriválható, ha $\exists\, A: X \to Y$ folytonos lineáris operátor és $\exists\, \eta: X \to Y$ függvény hogy
$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \eta(x)$ így x_0 egy környezetében ahol
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|}\right) = 0$$

A fenti $A \in L(X,Y)$ operátor az f függvény x_0 pont beli deriváltja, jele: $A = f'(x_0)$.

Kérdés: Egyértelmű a ~~fenti~~ definíció?

Állítás: A egyértelmű

Biz: Legyen 2 olyan A és bizonyítsuk, hogy ezek azonosak!

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = f(x_0) + A_1(x-x_0) + \eta_1(x) \\ f(x) = f(x)_0 + A_2(x-x_0) + \eta_2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (A_1 - A_2)(x-x_0) = \eta_2(x) - \eta_1(x)$$

Ha $A_1 - A_2 \neq 0$ akkor van olyan $z = x - x_0$ amelyre $(A_1 - A_2)z \neq 0$
$x = z + x_0$, és legyen $x_n = \frac{z}{n} + x_0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(A_1-A_2)(x_n-x_0)}{\|x_n - x_0\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(A_1-A_2)\left(\frac{z}{n}\right)}{\|\frac{z}{n}\|} = \frac{(A_1-A_2)z}{\|z\|} \neq 0$$

De

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_2(x_n) - \eta_1(x))}{\|x_n - x_0\|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_2(x)}{\|x_n - x_0\|}}_{\to 0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_1(x)}{\|x_n - x_0\|}}_{\to 0} = 0$$

A két oldal határértéke nem u. a., ez ellentmondás $\square$

Kicsit másképp írva: $f(x_0+\delta) = f(x_0) + A\delta + \eta_{x_0}(\delta)$ ahol $\lim_{\delta\to 0}\frac{\eta_{x_0}(\delta)}{\|\delta\|} = 0$

Példa 1: $sq: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$
$\tilde{A} \to \tilde{A}^2$

$(\tilde{A}+\Delta)^2 = \tilde{A}^2 + \tilde{A}\Delta + \Delta\tilde{A} + \Delta^2$ itt most $f(x_0+\delta) \sim (\tilde{A}+\Delta)^2$
$f(x_0) \sim \tilde{A}^2$
$\eta_{x_0}(\delta) \sim \Delta^2$

mert $\lim_{\|\Delta\|\to 0}\left\|\frac{\Delta^2}{\|\Delta\|}\right\| = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\frac{\|\Delta^2\|}{\|\Delta\|} \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0}\frac{\|\Delta\|\|\Delta\|}{\|\Delta\|} = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\|\Delta\| = 0$

Ez alapján $A\delta \sim \tilde{A}\Delta + \Delta\tilde{A}$ vagyis
$sq'(\tilde{A})(\Delta) = \tilde{A}\Delta + \Delta\tilde{A}$

Állítás: Ha $f: X \to Y$ és $f'(x_0)$ létezik, akkor f folytonos x_0-ban

Biz: Legyen $x_n \to x_0$, azt kell igazolni, hogy $f(x_0) \to f(x_n)$. Def miatt $f(x_n) - f(x_0) = f'(x_0)(x_n - x_0) + \eta(x_n)$ (1)
$\|f'(x_0)(x_n-x_0)\| \leq \underbrace{\|f'(x_0)\|}_{\text{véges}}\underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\to 0} \to 0$, $\eta(x_n) = \underbrace{\frac{\eta(x_n)}{\|x_n-x_0\|}}_{\to 0}\underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\to 0} \to 0$
Mivel a jobb oldal tart a 0-hoz, a baloldal is, így $f(x_n) - f(x_0) \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

$\square$

Állítás: Ha $f, g: X \to Y$ és $f'(x_0), g'(x_0)$ léteznek akkor $(f+g)'(x_0)$ is létezik és $(f+g)'(x_0) =$
$= f'(x_0) + g'(x_0)$

Biz: Mivel f és g is értelmezett egy-egy környezetben, így ezek metszetében értelmes így a összegük is. Ekkor ilyen x értékekre $(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \eta_f(x) + g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \eta_g(x) =$$

$$= (f+g)(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x-x_0) + \eta_f(x) + \eta_g(x).$$

Mivel $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta_f(x)+\eta_g(x)}{\|x-x_0\|} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta_f(x)}{\|x-x_0\|} + \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta_g(x)}{\|x-x_0\|} = 0$ ezért a $(f+g)$ deriváltja x_0 helyen

$f'(x_0) + g'(x_0)$ $\square$

Lemma: Ha $f: X \to Y$ deriválható x_0-ban, akkor $\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}$ korlátos x_0 egy környezetében.

Biz: Tudjuk hogy $f(x) - f(x_0) = A(x-x_0) + \eta(x)$ (a feltételekkel)

Így $\|f(x) - f(x_0)\| = \|A(x-x_0) + \eta(x)\| \leq \|A(x-x_0)\| + \|\eta(x)\| \leq \|A\| \|x-x_0\| + \left\|\frac{\eta(x)}{x-x_0}\right\| \|x-x_0\|$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} = \underbrace{\|A\|}_{\text{állandó}} + \underbrace{\left\|\frac{\eta(x)}{x-x_0}\right\|}_{\to 0 \text{ egy környezetben } < \varepsilon\text{-nél}}$$

Tehát ez tényleg korlátos $\square$

Állítás: Legyen $g: X \to Y$, $f: Y \to Z$, $\exists g'(x_0), f'(g(x_0))$! Ekkor $f \circ g: X \to Z$ deriválható x_0-ban
és $\underbrace{(f\circ g)'(x_0)}_{L(X,Z)} = \underbrace{\underbrace{f'(g(x_0))}_{\in L(Y,Z)} \underbrace{g'(x_0)}_{\in L(X,Y)}}_{L(X,Z)}$.

Biz: Először $x_0 \in \operatorname{int} D_{f\circ g}$: $f \circ g$ értelmes x_0 egy környezetében ha f értelmes $g(x_0)$ egy környezetében. Ehhez kell g folytonossága, ami igaz, így ez most jó ☺, mint az $f'(g(x))$ feltétele

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + \eta_f(g(x)) =$$

$$= f'(g(x_0))(g'(x_0)(x-x_0) + \eta_g(x)) + \eta_f(g(x))$$

Következő órán...

ANALÍZIS

8. előadás (11.10.)

Tétel: $f: Y \to Z$; $g: X \to Y$; $\exists\, f'(g(x_0))$ és $g'(x_0)$.
Ekkor $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$

Biz: először tisztázzuk, hogy $f'(g(x_0))$ és $f'(g(x_0))g'(x_0)$ értelmes

$$(f\circ g)(x) - (f\circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))\left[g(x)-g(x_0)\right] + \eta_1(g(x)) =$$

$$= f'(g(x_0))\left[g'(x_0)(x-x_0) + \eta_2(x)\right] + \eta_1(g(x)) = f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0) + f'(g(x_0))\eta_2(x) + \eta_1(g(x))$$

mert $f'(g(x_0))$ lineáris!

A kifejtésben megjelent a feltételezett derivált a jó helyen, a bizonyításhoz be kell látni, hogy az utolsó két tag:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(g(x_0))\eta_2(x)}{\|x-x_0\|} = 0 \quad (1) \quad \text{és} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\eta_1(g(x))}{\|x-x_0\|} = 0 \quad (2)$$

(1): $= f'(g(x_0)) \lim_{x\to x_0} \frac{\eta_2(x)}{\|x-x_0\|}$ ← erről tudjuk, hogy $\to 0$, hiszen η_2-t így választottuk.

(2): $= \lim_{x\to x_0} \frac{\eta_1(g(x))}{\|g(x)-g(x_0)\|} \cdot \frac{\|g(x)-g(x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0$

ez 0-hoz tart; ez pedig az előző lemma miatt korlátos □

Valós függvények deriváltjai

Állítás: $f: I \to \mathbb{R}$ (zárt intervallum), szigorúan monoton és folytonos. Ekkor $f'(x_0)$ létezik és $f'(x_0) \neq 0$. Továbbá f^{-1} létezik, és deriválható $f(x_0)$-ban és $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

vagy $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Biz: Az f^{-1} a szigorú monotonitásból következik. A deriválthoz az kell, hogy f^{-1} értelmes egy $f(x_0)$ környezetében. Mivel azonban $f'(x_0)$ létezik, $x_0 \in \operatorname{int} I$. A $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$ esetén $f(x_0-\delta) < f(x_0)$ és $f(x_0+\delta) > f(x_0)$ és a folytonosság és Bolzano-tétel miatt $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ f képe $(f(x_0-\delta), f(x_0+\delta))$. Ennek pedig belső pontja $f(x_0)$.

A derivált képlete: $(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$

Az inverz folytonossága miatt, ha $y \to y_0$ akkor $x \to x_0$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{y-y_0}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

mivel itt van egy nem 0 limesz, az eredmény a limesz reciproka □

Spec eset: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ és TFH $f'(x^{(0)})$ létezik. Hogy kapjuk meg?

$$f(x)-f(x^{(0)}) = f'(x^{(0)})(x-x^{(0)}) + \eta(x) \quad \text{ahol} \quad \lim_{x\to x^{(0)}} \frac{\eta(x)}{\|x-x^{(0)}\|} = 0.$$

és $f'(x^{(0)}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$

innentől $x^{(0)} = x_0$, mert az előadó elrontotta

Azonosítsuk egy olyan A mátrixszal amire igaz, hogy $A(x-x_0) = f'(x^{(0)})(x-x_0)$

A feltétel: $f(x)-f(x_0) = A(x-x_0) - \eta(x)$

Ha $\ell = 1$, akkor A 1 sorból áll,

$$f(x)-f(x_0) = A_1(x-x_0)_1 + A_2(x-x_0)_2 + \dots A_n(x-x_0)_n + \eta(x)$$

Keressük meg A_j-t! Ha $x = x_0 + \delta(0,0\dots \underset{j.\text{ elem}}{1},0\dots 0) = e_j$

$$f(x)-f(x_0) = f(x_0+\delta e_j) - f(x_0) = A\delta e_j + \eta(x) = \delta A_j + \eta(x)$$

amiből: $\underbrace{\frac{f(x_0+\delta e_j)-f(x_0)}{\delta}}_{\text{parciális derivált}} = A_j + \underbrace{\lim_{\delta\to 0}\frac{\eta(x)}{\delta}}_{0 \text{ def miatt}}$

így tehát $f'(x_0) \underset{\uparrow}{=} [\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0) \dots \partial_n f(x_0)]$

"azonosítható vele"

Ha $\ell \in \mathbb{N}^+$ akkor $f(x), f(x_0) \in \mathbb{R}^\ell$

akkor $[f(x)-f(x_0)]_k = A_k(x-x_0) + [\eta(x)]_k$

Az $x \to [f(x)]_k$ egy olyan $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fgv aminek deriváltja a fentiek szerint

$$[\partial_1 f_k(x_0), \partial_2 f_k(x_0) \dots \partial_n f_k(x_0)] \quad \text{ami a } A \text{ mátrix } k. \text{ sora}$$

Tehát $A \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ $\quad A_{kj} = \partial_j f_k(x_0)$

Vigyázat! Itt feltettük, hogy $f'(x_0)$ létezik. Attól, hogy $f(x)$ parciális deriváltjai kiszámíthatók és egy mátrixba befoglalhatók, még nem biztos, hogy maga f is deriválható

<u>Lokális növekedés, fogyás, extremális fgv-ek</u>

Most $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$

Def: Azt mondjuk, hogy f lokálisan növő a-ban, ha van olyan δ, hogy $(a-\delta, a)$ esetén $f(x) \le f(a)$, $x \in [a, a+\delta)$ esetén $f(x) \ge f(a)$.

Szigorúan lokálisan növő a-ban ha van δ, hogy ($(a-\delta, a)$ esetén $f(x) < f(a)$ ...

+ csökkenő

Tétel: TFH f a a-ban deriválható!
Ha f monoton növő akkor $f'(a)\geq 0$.
~~Ha f szig. növő akkor f'(a)>0~~. Ha $f'(a)>0$ akkor f szig. növő

Biz: Tudjuk, hogy $f'(a)=\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}\geq 0$ hiszen két pozitív szám hányadosa minden 0-hoz tartó sorozat esetén

Ha $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}>0$ akkor elég kis δ-ra $\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}>0 \Rightarrow f(a-\delta)>f(a)$

Ugyanez $\delta<0$-ra is. $\square$

Def: Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban lokális szé-je van, ha van olyan környezete, hogy ott nem vesz fel nagyobb vagy kisebb értéket.
Szigorú szé. értelem szerint

Állítás: Ha f-nek a-ban lokális szé-je van és f a a-ban deriválható, akkor $f'(a)=0$

Biz: Ha $f'(a)>0$ lenne, akkor előző alapján, minden környezetben volna nagyobb és kisebb érték is, hiszen balra kisebbek, jobbra nagyobbak vannak.
Ha $f'(a)<0$ akkor is. (vagy átfogalmazható $-f'(a)$-ra ami >0.) $\square$

megjegyzés: $f'(a)>0 \Rightarrow f$ szig. mon. lok. növő, de visszafele nem igaz!

Tétel (Rolle): Tegyük fel, hogy $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos és f deriválható (a,b)-n!
Ha $f(a)=f(b)$, akkor van olyan $c\in(a,b)$ ahol $f'(c)=0$.

Biz: Ha f konstans, akkor OK.
Ha ~~f~~ nem konstans, akkor feltehetjük pl. hogy $f(x)<f(a)=f(b)$ valamilyen $x\in(a,b)$
Azaz a max/min elv értelmében f felveszi valahol a min értéket és ez a hely nem a és nem b.
Ebben a pontban a derivált nem 0. $\square$

Tétel (Lagrange-féle középérték): TFH. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos és (a,b)-n deriválható!
Ekkor van olyan $c\in(a,b)$, ahol $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Biz: Tekintsük a következő fgv-t: $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Ekkor $g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)$

$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)-f(b)+f(a)=f(a)$ g kielégíti a Rolle-tétel feltételeit.

A Rolle-tétel miatt $\exists c\in(a,b):\ g'(c)=0$

$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1 \Rightarrow f'(c)=g'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$

Tétel: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton növő és f deriválható (a,b)-n akkor $f'\geq 0$ (a,b)-n és viszont

Biz: f minden pontban lokálisan növő, így a tétel teljesül minden pontban
visszafelé: Legyen $a<d_1<d_2<b$! Igazoljuk, hogy $f(d_1)\leq f(d_2)$. Lag. valahol c, hogy $f'(c)=\frac{f(d_2)-f(d_1)}{d_2-d_1}$ $f'(c)\geq 0$ a feltétel miatt, $d_2-d_1>0$

$\Rightarrow f(d_2)-f(d_1)\geq 0$ $\square$

ANALÍZIS I.

9. előadás (11. 17.)

A Lagrange-féle középértéktétel kiterjesztés: Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és nézzük rögzített y-ra a $x \to f(x, y)$ leképezést! Ekkor az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú. Erre alkalmazva a L.K.É.T.-t azt kapjuk, hogy x_1 és x_2-höz létezik $s \in (x_1, x_2)$ hogy $\frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{x_2 - x_1} = \partial_1 f(s, y)$

Előző órán volt olyan, hogy ha f 1-n monoton növő, akkor $f' \geq 0$ és fordítva

Következmény: Ha $f [a,b] \to \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$-re, akkor f konstans.

Biz: A fentiek szerint f monoton növő, de $-f$ is az, tehát csökken $\Rightarrow$ konstans $\square$

Állítás: Legyen $f [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és deriválható (a,b)-n! Ekkor f akkor és csak akkor szigorúan monoton növő, $[a,b]$-n ha $f'|_{(a,b)} \geq 0$ és nincs olyan $J \subset (a,b)$ intervallum ahol $f|_J = 0$

Biz: Ha f nem növő, akkor $f'|_{(a,b)} \geq 0$. Ha volna a fenti J intervallum, akkor ott az f konstans lenne, tehát nem lehetne szig. mon. növő.
Tudjuk, hogy a feltétel esetén monoton növő. Ha nem lenne szig. mon. növő, akkor létezne $a < a_1 < b_1 < b$, hogy f $[a_1, b_1]$ konstans és ott $f|_{(a_1,b_1)} \neq 0$ lenne. $\square$

Példa: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \cdot y = 0 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$

Igaz-e, hogy $f'(0,0) = (\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0))$
nem, hiszen a függvény nem folytonos, így nem deriválható

Tétel: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú és az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pont olyan, hogy annak környezetében minden parciális derivált létezik és ott folytonosak. Ekkor $f'(x^*)$ létezik és megadható a szokásos módon.

Bizonyítás: Legyen $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ az $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*)$ egy olyan környezetében, ahol a fenti feltételek teljesülnek! Ekkor

$$f(x^*) - f(x) = f(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) - f(x_1, x_2^*, \dots x_n^*) + f(x_1, x_2^*, \dots x_n^*) - \dots$$

$$\dots - f(x_1 \dots x_{n-1}, x_n^*) + f(x_1 \dots x_{n-1}, x_n^*) - f(x_1, x_2 \dots x_n)$$

Mivel $f(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) - f(x_1, x_2^*, \dots x_n^*) = (x_1^* - x_1) f(s, x_2^*, \dots x_n^*)$ valamilyen $s \in (x_1^*, x_1)$-re.
szerint:

$$f(x^*) - f(x) = (x_1^* - x_1)\partial_1 f(s_1, x_2^*, \dots x_n^*) + (x_2^* - x_2)\partial_2 f(x_1, s_2, \dots x_n^*) + \dots$$

$$\dots + (x_n^* - x_n)\partial_n f(x_1, x_2, \dots s_n) =$$

$$= (x_1^* - x_1)\partial_1 f(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) - (x_2^* - x_2)\partial_2 f(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) + \dots$$

$$\dots + (x_n^* - x_n)\partial_n f(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) + \eta(x, x^*)$$

ahol $\eta(x, x^*) = (x_1^* - x_1)\left[\partial_1 f(s_1, x_2^*, \dots x_n^*) - \partial_1 f(x^*)\right] + \dots + (x_n^* - x_n)\left[\partial_n f(x_1 \dots s_n) - \partial_n f(x^*)\right]$

Az kell, hogy $\lim_{x \to x^*} \frac{\eta(x, x^*)}{\|x - x^*\|} = 0$. Ez nyilván igaz:

$$\lim_{x \to x^*} \underbrace{\frac{x_1^* - x_1}{\|x^* - x\|}}_{\text{abszolút értéke} < 1} \left[\partial_1 f(s_1, x_2 \dots x_n) - \partial_1 f(x^*)\right] = 0$$

Az f' folytonossága miatt $\to 0$

$\square$

Megjegyzés: Hasonlóan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ esetén is igaz ez a tétel

Vissza az általánosabb esetre

~~Def~~: Legyen $f: X \to Y$! Ebben $f'(x) \in L(X,Y)$ olyan x-ekre értelmezett, ahol f deriválható, és az $f: x \to f'(x)$ definiálja. Azaz $f': X \to L(X,Y)$.
Ez alapján f'' is értelmezhető: $f''(x) \in L(X, L(X,Y))$, vagyis $f'': X \to L(X, L(X,Y))$

Tétel (Young): Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú és típusú fv, hogy (x^*, y^*) környezetében $\partial_1 \partial_2 f(x,y)$ és $\partial_2 \partial_1 f(x,y)$ léteznek! Ekkor $\partial_1 \partial_2 f(x^*, y^*) = \partial_2 \partial_1 f(x^*, y^*)$.

Biz: Vezessük be a következő fgv-ket: $F(x) = f(x,y) - f(x,y^*)$; $G(x) = f(x,y) - f(x^*,y)$!

$$F(x) - F(x^*) = f(x,y) - f(x,y^*) - f(x^*,y) + f(x^*,y^*)$$
$$G(y) - G(y^*) = f(x,y) - f(x^*,y) - f(x,y^*) + f(x^*,y^*)$$
Ezek egyenlőek.

Lagrange-féle középérték miatt
$$F(x) - F(x^*) = (x - x^*) F'(\vartheta_x) = (x - x^*)\left(\partial_1 f(\vartheta_x, y) - \partial_1 f(\vartheta_x, y^*)\right)$$
$$G(y) - G(y^*) = (y - y^*) G'(\vartheta_y) = (y - y^*)\left(\partial_2 f(x, \vartheta_y) - \partial_2 f(x^*, \vartheta_y)\right)$$
ahol $\vartheta_x \in (x, x^*)$, $\vartheta_y \in (y, y^*)$

Mégegyszer alkalmazva:
$$F(x) - F(x^*) = (x - x^*)(y - y^*)\partial_2 \partial_1 f(\vartheta_x, \vartheta_{y2})$$
$$G(y) - G(y^*) = (y - y^*)(x - x^*)\partial_1 \partial_2 f(\vartheta_{x2}, \vartheta_y)$$

Nézzük a két különbséget $x \to x^*$ és $y \to y^*$ esetén. Rendőrelv miatt $\vartheta_x, \vartheta_{x2} \to x^*$, $\vartheta_y, \vartheta_{y2} \to y^*$

A többváltozós parc deriváltak folytonossága miatt $\partial_2 \partial_1 f(\vartheta_x, \vartheta_{y2}) \to \partial_2 \partial_1 f(x^*, y^*)$
$\partial_1 \partial_2 f(\vartheta_{x2}, \vartheta_y) \to \partial_1 \partial_2 f(x^*, y^*)$

ezek azonosak

$\square$

$L(X, L(X,Y))$ elemeit akarjuk világosabb alakra hozni, ehhez vesszük a direkt szorzatot.

Normált terek direkt szorzata

Def: Ha $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, akkor ezek direkt szorzatán az alábbit értjük:
$(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ $\quad X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$
$$\|x, y\|_{X \times Y} = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$$

Állítás: Ez tényleg normált tér

Biz: $X \times Y$ nyilván vektortér, mert ~~$\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)$~~ a tanár gyakorlatilag hozta el a definíciót, de a műveleti szabályokat kell hivatkozni
normatulajdonságok:
- nem nulla ✓ (értelmesnek is jó)
- akkor akkor 0, ha valój 0: $\|\cdot\|_{X \times Y}$ csak akkor 0, ha a 0-nak a koordinátája, de ehhez az kell, hogy mindkét tag 0. ✓
- $\|\lambda(x,y)\|_{X \times Y} = \|(\lambda x, \lambda y)\|_{X \times Y} = \sqrt{\|\lambda x\|_X^2 + \|\lambda y\|_Y^2} = |\lambda|\sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} = |\lambda| \|(x,y)\|_{X \times Y}$ ✓
- háromszög egyenlőtlenség (ez kapni nyilvánvaló nem bizonyítjuk)

$\square$

Def: Azt mondjuk, hogy a $B: X \times Y \to Z$ függvény bilineáris, ha mindkét változójában lineáris, azaz $x \to B(x, y)$ hozzárendeléssel adott $X \to Z$ és
$y \to B(x, y)$ hozzárendeléssel adott $Y \to Z$ is lineáris

ANALÍZIS I.

10. előadás (11.24.)

Tétel: $B: X\times Y \to Z$ bilineáris operátor folytonos (itt a mindenütt folyt. és a egy pontbeli folyt. ekvivalens) pontosan akkor, ha $\exists\, c\in\mathbb{R}$: $\|B(x,y)\|_{X\times Y} \le c\,\|x\|_X\,\|y\|_Y$ $\forall x,y$-ra
(korlátosság)

Biz: vissza: A sorfolytonosság miatt azt kell igazolni, hogy $(x_n,y_n)\to(x,y)$ esetén
$B(x_n,y_n)\to B(x,y)$ ~~esetén~~ $\forall x,y$-ra.

$(x_n,y_n)\to(x,y)$ azt jelenti, hogy $(x_n-x,y_n-y)\to 0$ azaz $\sqrt{\|x_n-x\|_X^2+\|y_n-y\|_Y^2}\to 0$

$\Rightarrow \|x_n-x\|_X\to 0$ és $\|y_n-y\|_Y\to 0$.

$$\|B(x_n,y_n)-B(x,y)\|_{X\times Y} \le \|B(x_n,y_n)-B(x_n,y)\| + \|B(x_n,y)-B(x,y)\| =$$

$$= \|B(x_n,y_n-y)\| + \|B(x_n-x,y)\| \le \text{a feltételt használva} \le$$

$$\le c\,\underbrace{\|x_n\|}_{\text{korlátos}}\cdot\underbrace{\|y_n-y\|}_{\to 0} + c\,\underbrace{\|x_n-x\|}_{\to 0}\cdot\underbrace{\|y\|}_{\text{rögzített}} \to 0$$

Tehát $\|B(x_n,y_n)-B(x,y)\|\to 0$ vagyis $B(x_n,y_n)\to B(x,y)$

oda: TFH B folytonos, de nem korlátos! Ekkor $\forall n\ \exists\,(x_n,y_n)\in X\times X$:
$\|B(x_n,y_n)\| > n^2\|x_n\|\cdot\|y_n\|$.

Nézzük az $\frac{1}{n\|x_n\|}x_n$ és $\frac{1}{n\|y_n\|}y_n$ sorozatokat. Ezek a 0-hoz tartanak. Ekkor B:

$$\left\|B\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|},\frac{y_n}{n\|y_n\|}\right)\right\| = \frac{1}{n^2\|x_n\|\|y_n\|}\,\|B(x_n,y_n)\| > \frac{1}{n^2\|x_n\|\|y_n\|}\,n^2\|x_n\|\|y_n\| = 1$$

$\Rightarrow$ egy nullsorozat normája nagyobb, mint 1-hez tart. Ez ellentmond a folytonosságnak.

$\square$

Ez alapján $B: X\times Y\to Z$ folytonos bil. operátor normája lehet:

$$\|B\|_{bil} = \inf_{c\in\mathbb{R}}\left(\|B(x,y)\|\le c\|x\|\|y\|\right) = \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\|=\|y\|=1\}$$
ezt nem igazoljuk

Ez norma:
- létezik, mert a folytonosság miatt van ilyen c
- c nem negatív, mert eleve látszik
- pontosan akkor 0, ha $B(x,y)=0$ $\forall x,y$ esetén, ahol $\|x\|=\|y\|=1$. Mivel B bilineáris, tetszőleges $B(x^*,y^*)=0$
- háromszög-egyenlőtlenség

$$\sup\{\|(B_1+B_2)(x,y)\| : \|x\|=\|y\|=1\} \le \sup\{\|B_1(x,y)\|+\|B_2(x,y)\| : \|x\|=\|y\|=1\} \le$$

$$\le \sup\{\|B_1(x,y)\| : \|x\|=\|y\|=1\} + \sup\{\|B_2(x,y)\| : \|x\|=\|y\|=1\} = \|B_1\|_{bil}+\|B_2\|_{bil}$$

Ezek alapján definiálható az adott típusú, folytonos bilineáris operátorok normált tere, aminek normája az előbbi $\|\cdot\|_{bil}$

Ebben látni fogjuk, hogy bilineáris operátorok [illegible] is korlátos, de ez [illegible]

Legyen $A \in L(X, L(Y,Z))$! Nézzük az alábbi függvényt: $\tilde{A}: X\times Y \to Z$ $\quad \tilde{A}(x,y) = (Ax)(y)$.

Állítás: $\tilde{A}$ korlátos és bilineáris

Biz: $\tilde{A}(x_1+x_2, y) = [A(x_1+x_2)](y) = (Ax_1)(y) + (Ax_2)(y) = \tilde{A}(x_1,y)+\tilde{A}(x_2,y)$

$\tilde{A}(\lambda x, y) = [A(\lambda x)](y) = \lambda (Ax)(y) = \lambda \tilde{A}(x,y)$ u.e. a másik változóra $\Rightarrow$ bilineáris

$\|\tilde{A}(x,y)\| = \|(Ax)(y)\| \le \|Ax\|\cdot\|y\| \le C\|x\|\cdot\|y\|$ tehát $\tilde{A}$ korlátos $\square$

Állítás: Ha $B: X\times Y\to Z$ korlátos, bilineáris operátor, akkor $\exists\, \hat{B} \in L(X, L(Y,Z))$, amire $B(x,y) = (\hat{B} x)(y)$

Biz: Legyen $(\hat{B}x)(y) := B(x,y)$ minden definícióban. Ez a fenti típusú, továbbá $\hat{B}$ lineáris, mert $(\hat{B} x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = B(x, \lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2) = B(x,\lambda_1 y_1) + B(x,\lambda_2 y_2) = \lambda_1(\hat{B} x)(y_1) + \lambda_2(\hat{B} x)(y_2)$.

$\hat{B}x$ korlátos mert $\|(\hat{B} x)(y)\| = \|B(x,y)\| \le c\|x\|\cdot\|y\|$, vagyis ha $c\|x\|$ $\hat{B}$ normája, akkor $\|\hat{B} x\| \le c\|x\|$ vagyis $x \to \hat{B} x$ is korlátos, tehát $\hat{B}$ is az.

Második derivált

Ha $f: X\to Y$ kétszer deriválható, akkor $f': X\to L(X,Y)$ és $f'': X\to L(X, L(X,Y))$

Tehát $f''(x_0) \in L(X, L(X,Y))$ ez minden megfeleltethető egy bil. operátornak

Példa: $X = \mathbb{R}^n$

$$f''(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \underbrace{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}_{\mathbb{R}^n}) \Leftrightarrow L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$

részletesen mondva: $f''(x_0) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bil. fgv.,

$$f''(x_0)(y,z) = \langle \underbrace{f''(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}} y, z\rangle$$

Multilineáris leképezések

Definíció: Adott $X_1, X_2, \dots X_n, Y$ normált terek esetén az $X_1\times X_2\times\dots\times X_n \to Y$ operátort multilineárisnak, ha bármelyik $n-1$ változót rögzítem a maradékban lineáris. Azt mondjuk, ha van olyan $c\in\mathbb{R}_0^+$ $\|A(x_1,x_2\dots x_n)\|\le c\|x_1\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_n\|$

Állítás: A folytonosság ekvivalens a korlátossággal

Állítás: Egy ilyen multilineáris operátor megfeleltethető egy $L(X_1, L(X_2, \dots L(X_n, Y)))$ operátornak, így az n. derivált egy rögzített pontban megfeleltethető egy n-lineáris operátornak

Példa: determináns: $\underbrace{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\dots\mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$. A determináns az egyetlen n-lineáris antiszimmetrikus függvény, amelyre $\det(e_1, e_2, \dots e_n) = 1$

Lagrange-féle középértéktétel általánosítása

$f: X \to \mathbb{R}$

Tétel: Legyen f folytonos az alábbi halmazon: $\{a+t(b-a) = a(1-t)+bt\}$ ahol $a, b \in X$ adottak és $0 \le t \le 1$. Legyen $0 < t < 1$ esetén f deriválható.
Ekkor $\exists\ s \in X$:
$$f(b) - f(a) = f'(s)(b-a)$$

Biz: Visszavezetjük a valós esetre! Legyen $\phi: [0,1] \to \{\dots\}$ és $f: \{\dots\} \to \mathbb{R}$. Ekkor $g(t) = f(\phi(t))$, ahol $\phi(t) = a + t(b-a)$. Itt $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-ként... Ha ez deriválható és folytonos $[0,1]$-en, akkor jók vagyunk.

folytonosság: ϕ folytonos, mert a képlet olyan, f pedig azért, mert feltettük.
ez alapján $f \circ \phi$ is az.

deriválhatóság: $\phi'(t) = b-a$ teljesül, mert
$$\phi(t) - \phi(t^*) = (t - t^*)\underbrace{(b-a)}_{\text{derivált}} + \underbrace{0}_{\text{maradék tag}}$$

$\Rightarrow$ g is deriválható

A klasszikus L-f KÉT miatt $\exists\ s^* \in (0,1)$ hogy $g(1) - g(0) = g'(s^*)(1-0) = g'(s^*)$
átírva: $f(\phi(1)) - f(\phi(0)) = f'(\phi(s^*))\,\phi'(s^*)$

mivel azonban $\phi'(s^*) = b-a$ amint
$\phi(0) = a$
$\phi(1) = b$

$$f(b) - f(a) = f'(\phi(s^*))(b-a)$$

Tehát $s = \phi(s^*)$ megfelelő. $\square$

További általánosítás már nem tud (pl.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a kör). Ehelyett: Lagrange-egyenlőtlenség

Tétel: ~~Tegye~~ TFH $f: X \to Y$ folytonos az $a, b \in X$ pontokat összekötő zárt szakaszon és deriválható a végpontok kivételével. Ekkor teljesül, hogy $\|f(b) - f(a)\| \le \sup \|f'(s)\| \cdot \|b-a\|$ ahol s a szakasz belső pontja. Sőt a $\le \sup \|f'(s)(b-a)\|$

nem bizonyítjuk

ANALÍZIS I.

11. előadás (12. 01.)

Állítás: TFH $\Omega \subset X$ olyan, hogy bármely 2 pontja törött vonallal összeköthető, azaz $\forall x, y \in \Omega$ pontokra $\exists z_1, z_2 \dots z_k \in \Omega$ pontok, hogy $[x, z_1], [z_1, z_2], \dots [z_k, y]$ szakaszok Ω-ban vannak!
Ha emellett $f: X \to Y$ fgv deriváltja Ω-n mindenütt 0, akkor f konstans.

Biz: Azt kell igazolni, hogy tetszőleges $x, y \in \Omega$-ra $f(x) = f(y)$. Ehhez legyen $z_1, z_2, \dots z_k$ a szükséges pontsorozat. Ekkor:
$f(x) - f(y) = f(x) - f(z_1) + f(z_1) - f(z_2) + \dots \dots + f(z_k) - f(y)$

Lagrange egyenlőtlenség miatt $\|f(x) - f(z_1)\| \leq \sup_{s \in x, z_1} \|f'(s)(z_1 - x_1)\| = 0$

tehát $f(x) = f(z_1)$. És minden z_e, z_{e+1} párra igaz: $f(z_e) = f(z_{e+1})$.

Emiatt $f(x) - f(y) = 0$ $\square$

<u>Valós függvények, Taylor-sorok</u>

Tétel (Cauchy-féle középérték tétel): TFH $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = [a,b]$, és folytonos! Legyenek deriválhatóak (a,b)-n és $g' \neq 0$ sehol!
Ekkor létezik $s \in (a,b)$ hogy
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$$
(ha $g(x) = x$ akkor ez a Lagrange-középérték)

Biz: Tekintsük az alábbi fgv-t: $F: [a,b] \to \mathbb{R}$; $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$!

$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$ (ez létezik)

Tudjuk, hogy $F(a) = f(a)$ valamint $F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(b) - g(a)) = f(a)$

A Rolle-tétel szerint $\exists s \in (a,b)$: $F'(s) = 0$. Vagyis:

$$0 = f'(s) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(s) \implies \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)} \quad \square$$

L'Hospital szabály: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$ ha $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ és $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

Tétel: TFH a feltételek az előzőek és a limesz van f és g -n túl!
Ekkor a hányados limesz: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ha ez értelmes

Biz: Értelmezzük az f és g függvényeket úgy, hogy $f(a) = g(a) = 0$ (ezzel folytonosak lesznek).
A Cauchy-féle középérték-tétel szerint
$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$ valamilyen s-re ha $g \neq 0$ (a, x)-en. (Ha a-nak minden környezetében $g(x) = 0$ lenne, nem is teljesülne a feltétel)

Vegyünk egy olyan (x_n) sorozatot, hogy $x_n \to a$. Erre: $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(s_n)}{g'(s_n)}$ egy $s_n \in [a, x_n]$-re

rendőrelv miatt $s_n \to a$, tehát $n \to \infty$ esetén $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}$ és $\frac{f'(s_n)}{g'(s_n)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$

Kérdés: Milyen feltételekkel igaz, hogy $f_n \to f \Rightarrow f_n' \to f'$?

Állítás: Legyen (f_n) sorozat tagjai $[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, (a,b) deriválható!
Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ egyenletesen és $f_n' \to g$ egyenletesen! Ekkor f deriválható és $f' = g$

g is folytonos

Lemma: A fenti feltételekkel $\forall x, x+h \in (a,b)$-re $\exists \xi_h$: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(\xi_h)$

ezt nem bizonyítjuk

Biz: $\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) \right| \leq \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(\xi_h) \right| + |g(\xi_h) - g(x)|$

$$\underset{0}{\|}$$

$\lim_{h\to 0} |g(\xi_h) - g(x)| = 0$, hogy folytonos x-ben

Ekkor $\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) \right| \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x)$$

$\square$

Átírás sorokra: Ha $\sum f_n = f$ egyenletesen az $[a,b]$-n

$\sum f_n' = g$ egyenletesen a $[a,b]$ és $\underbrace{\text{folytonos}}_{\text{minden } f_n}$ (a,b)-n

Ekkor f deriválható és $f' = g$ (azaz $\sum f_n' = g = f' = \left(\sum f_n\right)'$ vagyis ilyen sorokat szabad tagonként deriválni)

Biz: a feltétel $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N} f_k \to f$ egyenletesen

$\sum_{k=1}^{N} f_k' \to g$ egyenletesen

Ezekből már a előző állítás miatt $f' = g$

Taylor-sorok: TFH $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ alakú, akkor f akárhányszor deriválható a körön

Ekkor meghatározhatjuk c_k együtthatókat.

$f(a) = c_0 (a-a)^0 = c_0$

$f'(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k (x-a)^k\right)'_{x=a}$ a kérdés, hogy ide be szabad-e deriválni

Tudjuk, hogy a ~~konvergenciakör~~ konvergenciasugáron belül egyenletesen konvergens.

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} (k+1) (x-a)^k$ ennek konv. sugara: $r_k = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_{k+1}(k+1)|}}$

belátható, hogy ez $\frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}}$ azaz a eredeti konv. sugár, tehát

ahol a függvény e. konverg., ott a deriváltja is.

$f'(a) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (a-a)^{k-1} = c_1 \cdot 1 = c_1$

$f''(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k k (x-a)^{k-1}\right)'_{x=a} = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k (k-1) (a-a)^{k-2} = c_2 \cdot 1 \cdot 2$

folytatva teljes indukcióval: $f^{(n)}(a) = c_n \cdot n!$

Összefoglalva: ha f előállítható egy intervallumban ~~belsejében~~ alakban, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{alakú lesz.}$$

Kérdés: tényleg előáll ilyen alakban?

f közelítése egy a pont körül:

$$f(x) \approx \sum_{d=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = P_{a,N}(x)$$

Állítás: $P_{a,N}$ első N deriváltja a-ban azonos f első N deriváltjával a-ban

Biz: Az előzőekből $f^{(n)}(a) = n!\, c_n$.

Másrészt $P_{a,N}^{(n)}(a)$ ~~=~~ -ban az n-nél kisebb tagok kiesnek, a nagyobbak meg nem számítanak

$= n!\, c_n$ $\square$

Állítás (Taylor-formula Lagrange-maradéktaggal): TFH f $N+1$-szer deriválható a környezetében.
Ekkor a környezetben tetszőleges x pontra igaz, hogy

$$f(x) = P_{a,N}(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} \quad \text{alakú valamilyen } \xi \in (a,x)\text{-re}$$

Biz: Tekintsük a $g(x) = f(x) - P_{a,N}(x)$ függvényt! Erre a $g(a) = 0$ valamint $g^{(k)}(a) = 0$ $\forall k$-ra.

$$\frac{g(x)}{(x-a)^{N+1}} = \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{N+1}-(a-a)^{N+1}} = \text{Cauchy-középérték tétellel} = \frac{g'(\xi_1)}{(N+1)(\xi_1-a)^N} =$$

$$= \frac{g'(\xi_1)-g'(a)}{(N+1)\left[(\xi_1-a)^N-(a-a)^N\right]} = \frac{g''(\xi_2)}{(N+1)N(\xi_2-a)^{N-1}} = \dots = \frac{g^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!\,\underbrace{(\xi_{N+1}-a)^0}_{1}}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{g^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} = \frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} \quad \text{hiszen } P_{a,N}^{(N+1)}(x) = 0$$

ANALÍZIS I.

12. előadás (12.08.)

Milyen feltétellel igaz, hogy $P_{a,N}(x) \to f(x)$ (pontonként v. egyenletesen) ezzel ekvivalens: Taylor-sor előállítja $f(x)$-et

Ez csak a konvergenciasugáron belül lehet, és arra egy elégséges feltétel, hogy ~~...~~ a maradéktag tartson 0-hoz.

$$\sup_{s\in(a,x)} \frac{f^{(n+1)}(s)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

A sinus fgv 0 körüli Taylor sorát vizsgáltuk, ott a maradéktag 0-hoz tart. Akkor a sin Taylor sora előállítja a sin-t?

- Egyszerűbb kérdés? minden pontban igaz, mert a konvergencia teljesül minden x-re.

- Egyenletesen is tart hozzá? csak korlátos, zárt intervallumon mert itt az $|x-a|$ korlátos, ezért $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ továbbá $\sup_{s\in(a,x)} |f^{(n+1)}(s)| \le 1$ korlátos, vagyis az $f(x)-P_{a,N}(x)$ az egész intervallum felülről becsülhető

- akkor a $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ igaz egyenletesen $\mathbb{R}$-en is?
  nem, mert $P_{a,N}(x)$ polinom, így $\lim_{x\to\infty} |P_{a,N}(x)| = \infty$ de $|\sin(x)| \le 1 \ \forall x$-re
  Tehát tetszőleges intervallumon jó, de a teljes $\mathbb{R}$-en nem

ellenpélda:

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ ez deriválható, de minden rosszul jön ki

Binomiális sor:

Cél: $(1+x)^{\alpha}$-hoz tartozó Taylor sor ~~vizsgálata~~ előállítás és konvergencia vizsgálata

$f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \Rightarrow f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

A Taylor-sor: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \ \underset{\text{SZERINT}}{\overset{\text{DEF}}{=}} \ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$

1. kérdés: milyen x-re konvergens?

hányados kritérium: $\displaystyle\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k} = \underbrace{\frac{\alpha-k}{k+1}}_{\xrightarrow{k\to\infty} -1} x$

$\Rightarrow$ hányados határértéke hányados $-x$, Tehát ha $|x|<1$ konvergens
$|x|>1$ divergens

Állítás
$|x|<1$ esetén a Taylor-sor a függvényt előállítja, azaz:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{ha } |x|<1$$

megjegyzés: az $\alpha=-1$ esetén

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Biz:

Tudjuk, hogy $\left[(1+x)^\alpha\right]' = \frac{\alpha}{1+x}(1+x)^\alpha$, így az $(1+x)$ megoldása a következő differenciálegyenletnek:

$$\left.\begin{aligned} v' &= \frac{\alpha}{1+x} v \\ v(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

A másik oldal: $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^{k-1} = \sum_{e=0}^{\infty} \binom{\alpha}{e+1}(e+1) x^e = \sum_{e=0} \binom{\alpha}{e}(\alpha-e) x^e$

nem számoljuk végig, mert bonyi, de teljesül a feltétel
szerint $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ is megoldása a feladatnak, így a kettő azonos

Taylor-formula általánosan

$f: X \to \mathbb{R}$ típusú fgv

$f(a+h)$-t közelítjük $f(a)$ és a ott vett deriváltak segítségével

Legyen $\phi: [0,1] \to X$ $\phi(s) = a+sh$! Most a $f\circ\phi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ típusú.

ϕ deriváltja: $\phi'(s) = h$ (Ez a $L(\mathbb{R},X)$ eleme, hiszen a h-val való szorzás. Ezt azonosítjuk X-szel)

$(f\circ\phi)'(x) = f'(\phi(x))\cdot\phi'(x) \Rightarrow (f\circ\phi)'(0) = f'(\phi(0))\,\phi'(0) = f'(a)\,h$

$(f\circ\phi)''(x) = \left(f'(\phi(x))\,h\right)' = f''(\phi(x))\,\phi'(x)\,h = \left(f''(\phi(x))\,h\right)h \Rightarrow$

$\Rightarrow (f\circ\phi)''(0) = f''(\phi(0))\,h\,h = \left(f''(a)\,h\right)h$ Ő így jelölte: $f''(a)(h,h)$

Teljes indukcióval: $(f\circ\phi)^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(\underbrace{h,h,\dots h}_{k})$

Ez alapján: $(f\circ\phi)(1) \approx (f\circ\phi)(0) + \frac{(f\circ\phi)'(0)}{1!}1^1 + \dots \frac{(f\circ\phi)^{(k)}(0)\,1^k}{k!}$

amiből: $f(a+h) \approx f(a) + \frac{f'(a)h}{1!} + \frac{f''(a)(h,h)}{2!} + \dots + \frac{f^{(k)}(a)(\overbrace{h,h\dots h}^{k})}{k!}$

$\sum_{i,j\le n} \partial_{ij} f(a)\, h_i h_j$

„Valahol azt dupla szummának írja”

Alkalmazás szé. számítás

$f: X \to \mathbb{R}$ típusú fgv-eket vizsgáljuk.

Def: Azt mondjuk, hogy az $f: X \to \mathbb{R}$ függvénynek az "a" pontban lokális maximuma van, ha $\exists$ olyan U gömb ami a középpontú, hogy $x \in U$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
Szigorú maximum, ha $f(a) > f(x)$

Tétel: TFH $f: X \to \mathbb{R}$ az $a \in X$ pontban deriválható. Ha f-nek a-ban lokális min vagy max van, akkor $f'(a) = 0$

Biz: NMÁ tegyük fel az esetet, hogy maximum van. Azt kell igazolni, hogy minden $h \in X$-re $f'(a)h = 0$

TFH $f'(a)h > 0$. rögzített h-ra Tekintsük ezt az "a" pontban $f(a+\tau h) = f(a) + f'(a)(\tau h) + \eta(\tau h)$

ahol $\tau \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{\tau h \to 0} \frac{\eta(\tau h)}{\|\tau h\|} = 0$

$$\frac{f(a+\tau h) - f(a)}{\|\tau h\|} = \frac{f'(a)(\tau h)}{\|\tau h\|} + \frac{\eta(\tau h)}{\|\tau h\|} \to 0$$

$$\frac{f'(a)(\tau h)}{\|\tau h\|} = \frac{\tau}{|\tau|} f'(a) \frac{h}{\|h\|} > 0 \qquad \text{Ez állandó és } \tau \to 0 \text{ esetén } > 0$$

Tehát ez alapján nem $f(a)$ a legnagyobb, hanem $f(a+\tau h)$ nagyobb

Ha $f'(a)h < 0$, akkor nézzük a $h^* = -h$-t és arra u.a. $\square$

ANALÍZIS I.

13. előadás (12.15.)

Szé számítás

Cél: A szé vizsgálata a második deriválttal

$f: X \to \mathbb{R}$

Taylor-sor másodrendű maradéktaggal:

$$f(a+th) = f(a) + f'(a)(th) + \frac{1}{2} f''(a+\tau h)(th,th) \qquad \text{ahol } 0 \leq \tau \leq t$$

Def: Azt mondjuk, hogy a $B: X \times X \to \mathbb{R}$ bilineáris fgv pozitív szemidefinit / pozitív definit ha minden $h \in X$ esetén $B(h,h) \geq 0$ / $h \neq 0$ esetén $B(h,h) > 0$

Tétel: (szélsőérték jellemzése): Legyen $f: X \to \mathbb{R}$ és f'' folytonos a-ban.

① TFH f-nek a-ban lokális minimuma van! Ekkor $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív szemidefinit

② TFH $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív definit! Ekkor f-nek az a-ban szigorú lokális minimuma van.

Biz:

① Tanultuk, hogy ha a-ban szé van, akkor $f'(a) = 0$. Ekkor:

$$f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2} f''(a+\tau h)(th,th)$$

Ha a-ban lokális minimum van, akkor elég kis th értékre $f(a+th) - f(a) \geq 0$

Az egyenlet mindkét oldalán tekintsük a $t \to 0$ határértékét

$$\lim_{t \to 0} \frac{f''(a+\tau h)}{2} \frac{(th,th)}{\|th\|^2} = \frac{f''(a)}{2} \frac{(th,th)}{\|th\|^2} \geq 0$$

Mivel ez tetszőleges, ezért ez ekvivalens azzal, hogy $f''(a)$ pozitív szemidefinit

②

$f'(a) = 0$ miatt: $\quad f(a+th) - f(a) = \frac{f''(a+\tau h)}{2} (th,th)$

Azt kell bizonyítani, hogy ha $\|th\|$ elég kicsi, akkor a bal oldal pozitív. Ugyanezt kell bizonyítani a jobb oldalra. Ekkor:

$$[f''(a+\tau h) - f''(a)] \frac{(th,th)}{\|th\|^2} + \underbrace{\frac{f''(a)(th,th)}{\|th\|^2}}_{\text{ez } > 0 \text{, mert } f''(a) \text{ poz def és nem függ } t\text{-től}}$$

elég lenne belátni, hogy ez $\to 0$. Ha $\|th\|$ kicsi akkor igaz az f'' folytonossága miatt

□

Implicit és inverz fgv-k

Motiváció: $\phi(x,y)=0$-ból ki akarjuk fejezni valamelyik változót. Mikor lehet ezt megtenni?

Pl.: $x^2+y^2=1 \Rightarrow \phi(x,y)=x^2+y^2-1$

$y=?$

$y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ ha $y\geq 0$

$y=-\sqrt{1-x^2}$ ha $y\leq 0$

De ha $y=0$ akkor ennek környezetében nem lehet y értékét x függvényeként megadni

Tétel (implicitfüggvény-tétel): Legyen $\phi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\partial_2\phi(x_0,y_0)\neq 0$, $\phi(x_0,y_0)=0$

folytonos

Ekkor $\exists\, g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ amelyre $g(x_0)=y_0$, g folytonos x_0-ban és x_0 egy U környezetében: $\{(x,y): \phi(x,y)=0,\ x\in U\}=\{(x,g(x)): x\in U\}$

Ezt a g függvényt (amely (x_0,y_0)-tól és ϕ-től függ) az x_0, y_0 és ϕ által meghatározott implicit fgv-nek nevezzük.

Általánosítás: $\phi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$, $\phi(x_0,y_0)=0$. Feltétel: $\partial_2\phi(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^{k\times k}$ reguláris (azaz invertálható $\Leftrightarrow$ nincs 0 sajátértéke)

Ekkor van olyan $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ függvény amelyre $g(x_0)=y_0$ és x_0 egy U környezetében
$\{(x,y): \phi(x,y)=0,\ x\in U\}=\{(x,g(x)): x\in U\}$

A bizonyítást nem nézzük

Ha tudjuk, hogy g deriválható, akkor a $\phi(x,g(x))$-t deriválva:

$\phi'(x,g(x))\cdot(1,g'(x))=0$

$\partial_1\phi(x,g(x))\cdot 1+\partial_2\phi(x,g(x))g'(x)=0$

$g'(x)=-\partial_2\phi(x,g(x))^{-1}\partial_1\phi(x,g(x))$ ha létezik $\partial_2\phi(x_0,y_0)^{-1}$

Szóval jó, mert ugyan nem is tudjuk g-t, de g'-t csupán ϕ-ből kiszámolhatjuk.

Tétel (inverzfüggvény tétel): Ha $y_0\in\mathbb{R}^n$ olyan, hogy a $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ függvény $\psi'(y_0)$ reguláris akkor ψ-nek y_0 környezetében létezik inverze

Biz: Az implicitfgv-tételt kell így alkalmazni, hogy a $\phi(x,y)=x-\psi(y)$-t nézzük.

Ha $\phi(x,y)=0$ akkor $x=\psi(y)$.

Most $y=g(x)$ létezik (x_0 körül), mert $\partial_2\phi(x_0,y_0)=-\psi'(y_0)$ ami reguláris.

ekkor $g=\psi^{-1}$.

$\square$