CSOP I II.

1. előadás (02.20.)

G.G. Hall: csoportelmélet
Montvay István: relativisztikus kvantummechanika

Végtelen csoportok: kompakt és nem kompakt

(szumma helyett integrál, paraméteresen H. Alfréd alapján)

a kompaktakra egy csomó tétel alkalmazható

A Poincaré-csoport nem kompakt, de ennek részcsoportja az SO(3)
Kompakt csoportokra megvan az általános leírás (a Poincaré-é is)

A csoportaxiomák az elemszámáról nem szólnak (legalább 1, az egységelem)

Kontinuitás: A folytonos csoport számossága a valós számokéval egyenlő, és értelmezve van a folytonosság fogalma

Ha a folytonos csoportok differenciálhatóak, akkor az Lie-csoport

Klein: transzformációk és invariánsok (szimmetria: olyan tr. amitől nem lesz más)
minden objektumnak vannak ekvivalens állapotai, és ezek közötti tr.-k csoportot alkotnak

(ekvivalencia reláció)

mi számít ekvivalensnek? Euklideszi egybevágóság → hasonlóság
(eltolás, forgatás, tükrözés) (nagyítás)

itt kiterjesztettük az szimmetria csoportot.

Klein szerint az különböző geometriák, mert az attól függ, mi a szimmetria csoport

hasonlóság → projektív geometria (itt lehet egy tetsz. konvex négyszög egy négyzet képe)

→ topológia (itt már vannak nem lineáris transzformációk)
(Egy alakzatot tetszőlegesen lehet gyúrni, csak tartsuk meg a folytonosságot)

A relativisztikus térben már nem segít a szemlélet

Euler karakterisztika: Egy alakzatot feltöltve területekkel: $\boxed{\text{élek} - \text{csúcsok} + \text{lapok} = 2}$

és a szám az alakzatra jellemző: topológiai invariáns

Több karakterisztika is kell ahhoz, hogy egyértelműen be lehessen azonosítani őket

DE 3-nál több D-re lehetetlen általánosan leírni

Kvantumelmélet két irányból jött:

- Az egyik a klasszikus fizika megközelítés

két irány: Schrödinger (diffegyenletek) ⟷ Heisenberg (mátrixok)

A két elmélet egyenrangú az absztrakt struktúra reprezentációi

→ Dirac-féle ket-vektoros jelölés, de ez matematikailag nem korrekt

Neumann: „A kvantummechanika matematikai alapjai" ebben megjavította matematikai alapjait Diracnak

Wigner: Az atommagoknak szimmetriái vannak: gömbszimmetria és permutáció

A permutációs csoportok elmélete már megvolt, viszont a forgatáscsoport már folytonos, de amikor az általános még nem volt meg, ezért Wigner és Neumann dolgozta ki először a forgatáscsoportokat a Poincaré-csoportra

Számosság:

Mit jelent az, hogy két halmaz u.a. elemből áll?
kölcsönösen egyértelmű leképezés áll fenn köztük

A természetes számok számossága: végtelen   DE ez nem szám
← megszámlálható

Ha valami leképezhető egymásnak, akkor egyforma számosság

DE egy végtelen halmaz egyenlő számosságú, mint egy valódi részhalmaza (ellentmondás?)

Az $|N \times N|$ is leképezhető N-re: $|N \times N| = |N|$

DE $|R| > |N|$

Bizonyítás: TFH létezik $R \to N$

1 − 0,1372 ...
2 − 0,218 ...
3 − 0,176 ...
⋮

Ekkor létezniük kellene:

Az n. számjegy olyan, ami különbözik az n. szám n. számjegyétől.

Tehát nincs ilyen leképezés → megszámlálhatatlan végtelen: kontinuum végtelen

Ha $B = 2^A$ akkor $|B| > |A|$ ⇒ végtelen sok végtelen van.

Van-e olyan végtelen, ami a megszámlálható és a megszámlálhatatlan végtelen között?
Nincs rá egyértelmű válasz → [illegible] két válasz

„Játék a végtelennel" c. könyv

Mennyi a $\sqrt{2}$?

$1,41 < \quad < 1,5$

$1,414 \quad < 1,42$

$\vdots \qquad \vdots$

monoton nő korlátos ↓ | ↓ monoton csökken korlátos

Ezek Cauchy-konvergensek, de nem a $\mathbb{Q}$-ba tart.

Valós számok: minden sorozat konvergens ⇒ folytonos

Folytonos csoportok: olyan csoportok, amelyek számosságra megegyeznek $\mathbb{R}$-rel

Ezek a véges dim-jú vektortér pontjaiba képezhetők le ⇒ véges sok valós számmal megadhatók

Ha egy csoport véges paraméterrel megadható, és a szorzást leíró függvények differenciálhatók, akkor az Lie-csoport

CSOPI II.

2. előadás (11. 27.)

Folytonosság ~ minden Cauchy-konvergens sorozat konvergens
~ két elem közel van egymáshoz

$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

$\rho(A,B)$: két elem távolsága

- $\rho(A,B) \geq 0$
- $\rho(A,A) = 0$
- $\rho(A,B) = \rho(B,A)$
- $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$

Tetszőleges ilyen függv. távolságfüggv.

Ha X leképezhető $\mathbb{R}^n$-re, akkor az elemek vektorokkal jellemezhetők és a $\sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ egy távolságrelació

A nem 0 detű négyzetes mátrixok folytonos csoportot alkotnak: $GL(n, \mathbb{R})$
általános lineáris csoport

Az 1 detű mátrixok ezek részcsoportja: $SL(n, \mathbb{R})$ S: speciális

Az ortogonálisak is: $O(n)$ (determinánsa lehet ± 1)

Ami SL és O is, az $SO(n)$

Vegyünk egy $G = \tilde{G}$ metrikus csoportot (ami $G^2 = 1$)

az $A G \tilde{A} = G$ -t kielégítő A mátrixok is csoportot alkotnak

Ha $\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ akkor $\underline{\underline{A}}$ a specrel

Ha $\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ akkor $\underline{\underline{A}}$ a szimplektikus mechanika (Newton formulációi elve)

A fizikát ma a lin. tér írja le, amin az operátorok hatnak, és a mátrixok a fizikai téren végzett műveleteket írják le.

Hogy adunk meg egy mátrix-csoportot? Megadjuk a mátrix elemeit.

Bizonyos típusú mátrixok ennél kevesebb paraméterrel megadhatók, mint ahány eleme van.

Mi van, ha egyparaméteres a mátrix: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ valós számok

A görbéket lehet a valós számokkal paraméterezni

$G \ni g(\alpha)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Legyen létezik $f: \mathbb{R} \to G$

Ha α_1 és α_2 közel van, $g(\alpha_1)$ és $g(\alpha_2)$ is. (Ez mit jelent?)
később tudjuk

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & M \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \to & A(\alpha) \end{array}$$

Akkor ez csoport, ha

$A(\alpha)A(\beta) = A(\gamma)$ $\gamma = f(\alpha,\beta)$

Legegyszerűbb eset: $\gamma = \alpha + \beta$

Ilyenkor $A(\alpha)\,A(\beta) = A(\alpha+\beta)$

Ekkor $\underline{A}(\alpha) = e^{\alpha \underline{B}}$

Ez tetszőleges $\underline{B}$ mátrixra csoport, tehát végtelen sok 1 paraméteres csoport van.

Egyszerű eset

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{B}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\underline{1} \qquad \underline{B}^3 = -\underline{B} \qquad \underline{B}^4 = \underline{1}$$

$$\underline{A}(\alpha) = e^{\alpha B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n B^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!}(-1)^n\right)\underline{1} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^{2n}\right)\underline{B} = \cos\alpha\,\underline{1} + \sin\alpha\,\underline{B} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2D-s elforgatások. Ha $|\alpha| \ll 1$ $e^{\alpha\underline{B}} = \underline{1} + \alpha\underline{B}$

Ha nem $e^{\alpha B} = e^{n\alpha \frac{B}{n}} = \left(\underline{1} + \frac{\alpha}{n}\underline{B}\right)^n \to e^{\underline{B}\alpha}$

ugyan az eredeti $\underline{B}$ kicsi, de kijön belőle az egész csoport,
infinitezimális generátor.

másik:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{1}}$$

$$e^{\alpha \underline{\underline{B}}} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots\right)\underline{\underline{1}} - \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots\right)\underline{\underline{B}} = \operatorname{ch}\alpha \cdot \underline{\underline{1}} - \operatorname{sh}\alpha\, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha \\ -\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$$

haladunk:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{0}}$$

$$e^{\alpha \underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{1}} + \alpha \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alkalmazva az idő téren: $\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha t \\ t' = t \end{pmatrix}$ galilei-transzf.

Egy mátrix két sajátvektorral: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{P}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} \sum d P = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{A}(\alpha) = e^{\alpha \underline{\underline{B}}} = \begin{pmatrix} e^{\alpha d_1} & \\ & e^{\alpha d_2} \end{pmatrix}$$

Ha $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = A(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{d_1 t} x_0 \\ y(t) &= e^{d_2 t} y_0 \end{aligned}\right\} \underline{r}(t)$$ egy pont mozgása (pályája)

A pálya egyenlete: $\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{d_1} = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{d_2}$

Ha $d_1, d_2 > 0$: hatványgörbe (parabola)

Ha $d_1, d_2 < 0$: szintén, de az időben visszafelé a csomópontba

Ha csak az egyik negatív: ellipszis

(lehet valamelyik 0, amikor egyenesek)

Egy olyan egyenletrendszer írja le nagyjából a kis g fejlődését:

$$x = f(x_0, y_0, t)$$
$$y = g(x_0, y_0, t)$$

A tér minden pontja irányban van egy spagetti, így a spagettik felosztásában és sűrűségük változásában (sok D-ben: káosz-elmélet) Ha x_0, y_0 fix pont

$$x'(0+\tau) = \underbrace{f(x_0+\varepsilon, y_0+\eta, \tau)}_{x_0} \approx \underbrace{f(x_0, y_0, \tau)}_{x_0} + \frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial y}\eta \quad \text{és}$$

$$y'(0+\tau) = f(x_0+\varepsilon, y_0+\eta, \tau) \approx \underbrace{g(x_0, y_0, \tau)}_{y_0} + \frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial g}{\partial y}\eta$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon(t) &= x' - x_0 \\ \eta(t) &= y' - y_0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$

A fix pont körüli viselkedés

Ha $\underline{\underline{B}}$ mátrix sajátértékei komplexek a sajátvektorok is

$$\underline{\underline{B}} = \sum_k \lambda_k s^k \circ s^{k+} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \; -i) + (-i) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \; i) =$$

$$= i \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-i) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekkor $\underline{A}(t) = e^{t \underline{B}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ forgatás mátrix

az orbitok körök (általában ellipszis)

Ha képzetes helyett komplex, akkor spirál:

$\Rightarrow$ A fázisportré u. a. mint a [illegible]

csomópont amik vannak
centrum amik elérhetők
fókusz, ami a spirál közepe

Ezek a fix pontok fordulhatnak elő a síkon.

Általában, 2 szabadsági fokú rendszer bonyolult, de a fixpontok körül csak fordulhatnak elő

A hiperbolikus fixpontok száma :

Közel lévő állapotok nagyon különbözőek lehetnek.

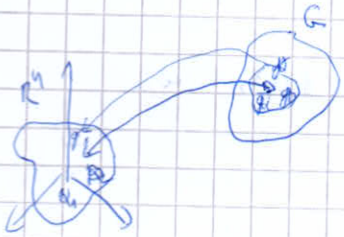
CSOPI II.

3. előadás (03.06.)

$G \ni \underline{A}(t) = e^{\underline{\underline{B}}t}$ Egyparaméteres csoport: $\mathbb{R} \to G$

Általában nem csak 1 paraméter kell:

$G \ni g(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$



A tér és a csoport elemei közt található izomorfia

De a csoport elemei szorozhatóak

$$G \times G \to G$$

$$(g(\underline{\alpha}), g(\underline{\beta})) \to g(\underline{\gamma}) \Rightarrow \underline{\gamma} = f(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$$

$$f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$$

$$(g(\underline{\alpha}))^{-1} = g(\underline{\alpha}') \Rightarrow \alpha' = h(\alpha) \qquad h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

A csoportaxiómák lefordíthatók fgv-k nyelvére;

- zártság: $\forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}.\ \exists \gamma \in \mathbb{R}^n \quad \underline{\gamma} = f(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$

$$g(\underline{\beta}) g(\underline{\alpha}) = g(\underline{\gamma})$$

- asszociativitás: $\forall \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

$$f(f(\alpha, \beta), \gamma) = f(\alpha, f(\beta, \gamma))$$

- egységelem: $\exists \underline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n\ \forall \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n: \ f(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}) = f(\underline{\alpha}, \underline{\varepsilon}) = \underline{\alpha}$
- inverz: $\forall \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n\ \exists \underline{\alpha}' \in \mathbb{R}^n: \ f(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}') = f(\underline{\alpha}', \underline{\alpha}) = \underline{\varepsilon}$

Pl: Ha a $\underline{\gamma} = \underline{\alpha} + \underline{\beta}$ akkor teljesül

Vagy a Rodrigues-formula: $\underline{\rho} = \underline{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ $\quad \underline{\sigma} = \underline{n} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ $\quad \underline{h} = \frac{\underline{\rho} + \underline{\sigma} + \underline{\rho} \times \underline{\sigma}}{1 - \underline{\rho}\underline{\sigma}}$

A közelséget és a folytonosságot az összeadás műveletén van szükség

Ezeken folytonosságon mint értelmezni, amit függvényi

Egyszerű folytonosság: létezik intervallum és a nyílt intervallum

Környezet: bármely nyílt intervallum őstképe egyben nyílt intervallum
(halmaz)

nyílt halmaz: intervallumok uniója
(intervallum a negyedik értelmezés).

$$\sqrt{\sum_k (x_k - a_k)^2} = |x - a| < \varepsilon$$

Az egész folytonosság a koordináták különbségén épül, de ezt felejtsük el!

Mi a távolság: $M \ni P, Q$

$\rho: M \times M \to \mathbb{R}$

$\rho(P,Q) = d \geq 0$

$\rho(P,P) = 0$

$\rho(P,Q) = \rho(Q,P)$

$\rho(P,Q) + \rho(Q,R) \geq \rho(P,R)$

Vegyünk egy olyan fgv-t, ami teljesíti ezt a tulajdonságot, egy nyílt halmaz képe halmaz egyben az ε sugarú intervallum, erre már épülhet a folytonosság

ρ: Metrika

„egyszerű metrika nélkül":

Legyen $X \supset B$, de néhány kitüntetett halmazban $B_k \in T$

Ha a kitüntetett halmazok a nyílt halmaz

tételek: $X \in T$

$\emptyset \in T$

$\bigcup_k B_k \in T$

$\bigcap_k B_k \in T$ végesre — és a metrikában hasonlóan

DE felejtsük el a metrikát, és induljunk ki ebből.

Vegyünk néhány kitüntetett részhalmazt, amire teljesül a fenti szabály.
Legyenek ezek a nyílt halmazok: „megadunk egy topológiát"

A folytonosság absztrakt defje: Nyílt halmaz őstképe nyílt halmaz, ahol a nyílt halmaz ez ↑

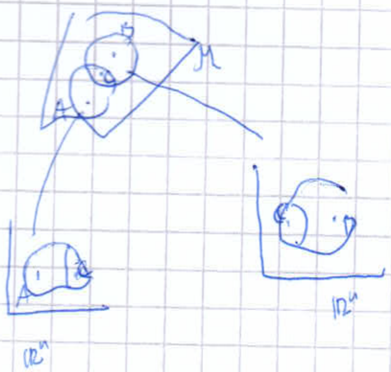
Miért van erre szükség? Most a topológiát nem úgy tekintjük, mint valamilyen elágazást dolgot, hanem általában is értelmezni kell a távolságot.

Hogyan kell egy bizonyos csoportnak topológiát adni? A szabadsági számítás szerint nézzük vagy képezzük el, és visszaképezzük a térre fogjuk

Vegyük a csoportot számhármasokkal képezzük le, amin az értelmezve van.

Ez sokszor a csoport fogalom ezt adja amely még a végén ki:

Másik



Vegyünk olyan függvényt ami $\mathbb{R}^n \to M$, vagy $M \to \mathbb{R}^n$ (C-t a térre, majd a térről a másik térre:) Egymás után $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Több térkép esetén az átképezések kompatibilisek (csoportot alkotnak)

Atlasz Topológiával bíró Atlasz egymásra átszámítható (ekvivalencia osztály)

A különböző ekvivalencia osztályokhoz tartozó kompatibilis atlaszok vagy féle definiál egy családi objektumot: Sokaság

Mi reprezentációkkal dolgozunk, de a repr.-től független tulajdonságait keressük

Ha a reprezentációkban végzett fgv-k diffhatóak, akkor differenciálható sokaságra van szó

Olyan csoportok érdekelnek minket, amelyek egyszerre differenciálható sokaságot alkotnak
a paraméterek, vagy a csoportműveletet leíró ~~...~~ fgv-k egyszerre folytonosak és diffhatóak

LIE-CSOPORT

Lokálisan mit ad n dimenziós tér

CSOPI 11.

4. előadás (03.13.)

Lie csoport: leképezések egy műveletben ugyanolyan dolog jelentene.
rámért csoport

$g(\underline{\alpha})$: $- \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}^n \ \exists \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^n \quad g(\underline{\alpha})\, g(\underline{\beta}) = g(\underline{\gamma})$

- asszociatív
- $\exists\, \underline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n \ \forall \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \ g(\underline{\varepsilon})\, g(\underline{\alpha}) = g(\underline{\alpha})$ és $g(\underline{\alpha})\, g(\underline{\varepsilon}) = g(\underline{\alpha})$
- $\exists\, \alpha' : \ g(\underline{\alpha})\, g(\underline{\alpha}') = g(\underline{\varepsilon})$

Másképp: $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$

- $\underline{\gamma} = f(\underline{\alpha}, \beta)$
- assz.
- $f(\underline{\alpha}, \underline{\varepsilon}) = f(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha})$
- $f(\underline{\alpha}, \alpha') = \underline{\varepsilon}$

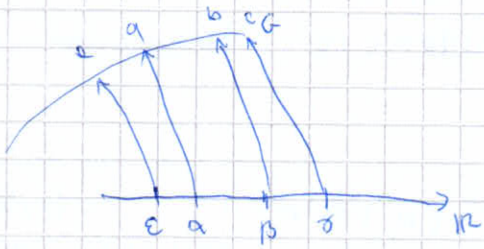
Mi van, ha $n = 1$: Egydimenziós Lie-csoport

$\gamma = f(\alpha, \beta)$

$\alpha' = f(\alpha)$

$\vdots$

Vegyük a ε-t, α-t és β-t



$e = g(\varepsilon)$

$a = g(\alpha)$

$b = g(\beta)$

$c = g(\gamma)$

Ha $c = ab \Rightarrow g(\gamma) = g(\alpha)\, g(\beta) \Rightarrow \gamma = f(\alpha, \beta)$

Rögzített β esetén (ε, α) mit $\to (\beta, \gamma)$-ra képezi β-val való mozgás során

Ha $\alpha = \varepsilon \quad g(\gamma) = g(\alpha)\, g(\beta) = eb = b = g(\beta) \Rightarrow \gamma = \beta$

Ha $|\mu| \ll 1 \quad \gamma \sim \beta + \sigma$

akkor $\alpha = \varepsilon + \mu$

$f(\varepsilon, \beta) = \beta$

$f(\varepsilon + \mu, \beta) = \gamma = \beta + \sigma$

Ha f diffható

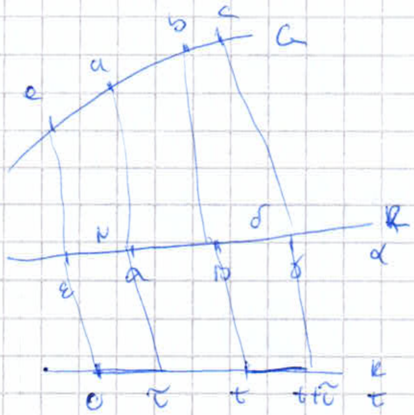
$$f(\varepsilon+\mu,\beta) = \underbrace{f(\varepsilon,\beta)}_{\beta} + \left.\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\varepsilon} \mu = \beta+\delta$$

$$\mu \left.\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\varepsilon} = \delta \qquad \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} \quad \beta\text{-tól függ}$$

$$\mu\, \varphi(\beta) = \delta \qquad \varphi(\beta) \text{ nem } 0, \text{ mert akkor nem lehetne invertálni}$$

b-vel mérjük rövid az (ε,α) int-t leképeni. Ha μ kicsi akkor is kicsi

Ha $\varphi(\beta)=1$, akkor jó lenne, mert a szakaszok mérjen egyezzenek



Ez alapján: t-n a szakaszok mérete T leképezésen

$$t(\alpha) \Leftrightarrow \alpha(t)$$
$$T(\alpha)$$

~~$\Delta t = t'(\alpha)\Delta\alpha \Leftrightarrow \Delta\alpha = \mu$~~

~~$(\tau = \Delta t = t'(\alpha)\Delta\alpha = t'(\alpha)\mu)$~~

Ha
$T(\varepsilon) = 0$
$T(\alpha) = \tau$
$T(\beta) = t$
$T(\gamma) = t+\tau$ Ez szeretném

$T(\varepsilon)$

$$T(\varepsilon+\mu) = \tau = \overset{0}{T(\varepsilon)} + T'(\varepsilon)\mu$$

$$T(\beta) = t$$

$$T(\beta+\delta) = t+\tau = \underset{t}{T(\beta)} + T'(\beta)\delta \Rightarrow \begin{aligned} \tau &= T'(\varepsilon)\mu \\ \tau &= T'(\beta)\delta = T'(\beta)\varphi(\beta)\mu \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T'(\beta)\varphi(\beta)\mu = T'(\varepsilon)\mu = k\mu$$

$$T'(\beta) = \frac{k}{\varphi(\beta)}$$

$$\int dT = k\int \frac{d\beta}{\varphi(\beta)} \qquad \exists \text{ megoldás, így ezt mindig meg lehet csinálni}$$

mégis mindig létezik ilyen $+$ paraméterezés

$e = g(t=0)$
$a = g(\tau)$
$b = g(t)$
$c = g(t+\tau)$

$g(\tau)g(t) = g(t+\tau)$ kanonikus paraméter

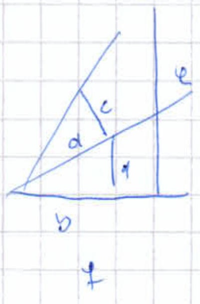
A z egyparaméteres csoportok mindig van kanonikus paramétere

Következmények: - Egy paraméteres csoport mindig kommutatív

- A $g(0)$ az egységelem

- $g(-t)$ a $g(t)$ inverze

Pl.: ha szögek helyett tg-t vesszük



$$\frac{a}{b} = \alpha \qquad \frac{c}{d} = \beta \qquad \frac{e}{f} = \gamma$$

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = f(\alpha, \beta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1(1-\alpha\beta) - (\alpha+\beta)(-\beta)}{(1-\alpha\beta)^2} = \frac{1 - \alpha\beta + \beta(\alpha+\beta)}{(1-\alpha\beta)^2} = \frac{1+\beta^2}{(1-\alpha\beta)^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 1 + \beta^2 = \varphi(\beta)$$

áttérés a kanonikusra:

$$\frac{dT}{d\beta} = \frac{k}{\varphi(\beta)} = \frac{k}{1+\beta^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} dt = \frac{d\beta}{1+\beta^2}$$

$$\frac{1}{k} t = \int \frac{d\beta}{1+\beta^2} = \operatorname{arctg} \beta + c$$

$$t = k \operatorname{arctg} \beta$$

A szög az egyparaméteres hajlásszám kanonikus paraméterezése.

Állítás: Minden 1 paraméteres csoport átskálázható (itt a k-i mértékegység, °, vagy rad.)

$\Rightarrow$ ezért minden egyparaméteres csoport izomorf egymással

Ellenpélda:

a) $(\mathbb{R}, +)$ $\qquad \alpha + \beta = \alpha + \beta$ $\qquad$ azonos a paraméterrel

b) $(C_0, \cdot)$ $\qquad e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

DE itt $g(2\pi) = g(0)$ $\Rightarrow$ Több különböző paraméter adja u.a. az elemet

Az 1 paraméteres Lie-csoportok nem egyúttal izomorfak.
Lokálisan ezek is izomorfak.

(a klasszikus fizika egy valamilyen ismeret matematikailag, de nem mindig, hogy a sebesség a kanonikus paraméter - e.)

Ha $g(t_1)\,g(t_2) = g(t_1+t_2)$, akkor exp alakban kell keresni

$$g(t) = e^{tB}$$

Mi egy csoportelem logaritmusa?

$$g(t) = e^{tB} = 1 + tB + \frac{t^2B^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{d}{dt}\,g(t) = B\,e^{tB}$$

$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = B$$

vagyis egy csoportelemet hogy deriválunk?

A csoportot ki kell terjeszteni algebrává: csoportalgebra

Legyenek a csoportelemek bázisvektorok, és ha szorzást találunk, akkor értelem szerint vegyük a szorzatot

A B eleme a csoportalgebrának, de nem a csoportnak. A mátrixoknál ez nem volt gond, mert a mátrixok alapból algebrát alkottak.

B: infinitezimális generátor

kompakt: van véges mértékű tartomány, ami u.a.

nem kompakt.

A kompaktot főleg szeretjük

Több paraméter

Sokaság $\Leftrightarrow$ paraméter szám

A sokaság geometriailag bonyolult, de algebrailag az egységgel helyettesített vonal

Végtelen sok részcsoport van (~~görbék~~) és ezeknek mind köze van az egységhez

Mindegyiknek van egy kanonikus paramétere. A görbék deriváltja a 0-ban a B-k, amik a gép összes vektorát megadják

~~Hipotézis~~: Az egyparaméteres csoportok generátorai lineáris teret alkotnak.

$\Rightarrow$ Miután ... vannak érintők és részcsoportok

Pl. 1 A 3D-s forgatás reprezentációja az x tengely körüli forgatás:

$$F_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\qquad F_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta&&\sin\beta\\&1&\\-\sin\beta&&\cos\beta\end{pmatrix}\qquad F_z(\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0\\\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$e^{\alpha\underline{\underline{B}}^{(1)}}=e^{\alpha\begin{pmatrix}&&\\&&-1\\&1&\end{pmatrix}}\qquad e^{\beta\underline{\underline{B}}^{(2)}}=e^{\begin{pmatrix}&&1\\&&\\-1&&\end{pmatrix}}\qquad e^{\gamma\underline{\underline{B}}^{(3)}}=e^{\begin{pmatrix}&-1&\\1&&\\&&\end{pmatrix}}$$

Tetszőleges elem esetén

$$\underbrace{a_1\underline{\underline{B}}^{(1)}+a_2\underline{\underline{B}}^{(2)}+a_3\underline{\underline{B}}^{(3)}}_{\underline{a}\,\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{M}}}=\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}$$

Mi az $e^{t\underline{\underline{M}}}$ elem. ez egy csoport generátora. Reprezentációja az eredmény?

Ha ez, ennyi igaz:

Legyen $\underline{a}=\underline{n}$ ahol $|\underline{n}|=1$

$$\underline{\underline{M}}=\begin{pmatrix}0&-n_3&n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}$$

$$M_{ke}=-\varepsilon_{kem}n_m$$

$$\underline{\underline{K}}(t)=e^{t\underline{\underline{M}}}=\sum_{e=0}^{\infty}\frac{t^e\underline{\underline{M}}^e}{e!}$$

$$(\underline{\underline{M}}^2)_{ke}=(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}})_{ke}=M_{kp}M_{pe}=(-\varepsilon_{kps}n_s)(-\varepsilon_{pet}n_t)=$$

$$=n_sn_t\varepsilon_{skp}\varepsilon_{pet}=n_sn_t(\delta_{se}\delta_{kt}-\delta_{st}\delta_{ek})=$$

$$=n_en_k-n_sn_s\delta_{ke}=\underbrace{n_kn_e}_{P_{ke}}-\delta_{ke}=-Q_{ke}\quad\text{ahol}\quad\underline{\underline{I}}=\underline{\underline{P}}+\underline{\underline{Q}}$$

$$(\underline{\underline{M}}^3)_{ke}=(\underline{\underline{M}}^2\underline{\underline{M}})_{ke}=(M^2)_{kp}M_{pe}=-Q_{kp}M_{pe}=(n_kn_p-\delta_{kp})(-\varepsilon_{pes}n_s)=$$

$$=\underbrace{-n_kn_pn_s\varepsilon_{pes}}_{0}+\delta_{kp}\varepsilon_{pes}n_s=\varepsilon_{kes}n_s=-M_{ke}$$

$$\underline{\underline{M}}^0=\underline{\underline{I}}$$
$$\underline{\underline{M}}^1=\underline{\underline{M}}$$
$$\underline{\underline{M}}^2=-\underline{\underline{Q}}$$
$$\underline{\underline{M}}^3=-\underline{\underline{M}}$$
$$\underline{\underline{M}}^4=\underline{\underline{Q}}$$
$$\underline{\underline{M}}^5=+\underline{\underline{M}}$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow\quad\underline{\underline{K}}(t)=\frac{t^0\underline{\underline{M}}^0}{0!}+\underline{\underline{M}}\left(\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\dots\right)+Q\left(-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots\right)=$$

$$=\underline{\underline{I}}+\sin t\cdot\underline{\underline{M}}+(\cos t-1)(\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{P}})=$$

$$=\cos t\,\underline{\underline{I}}+(1-\cos t)\,\underline{\underline{P}}+\sin t\,\underline{\underline{M}}$$

$K_{ke}=\cos t\,\delta_{ke}+(1-\cos t)n_kn_e+\sin t\,\varepsilon_{kpe}n_p$ ez az $\underline{n}$ tengely körüli forgatás

CSOPI II.

5. előadás (03. 27.)

Minden 1 paraméteres Lie csoport kommutatív, és számos található

Ami használható az kompakt

$$\underline{B} = \frac{dg^{-1}(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$ Ehhez g-t ki kell terjeszteni algebrává

Több egyparaméteres Lie-csoport generátorai ... is generátor

A: egyparaméteres csoportok általánosítása az egy egyparaméteres csoport

⇒ kiválasztható n darab független generátort, amik ki... meghatározzák az összes generátort: "kifeszítik a teret"

Állítás 1: Legyen $H_1 < G$ és $H_2 < G$

akkor $g = h_2 h_1$ $\quad h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ $\sim$ analóg a vektorok bázisban kifejtésével

(tetszőleges forgatás előáll, ha előbb az x tengely körül forgatunk, majd y, majd z körül)

Állítás: adott elemhez létezik egy, és csak egy egyparaméteres csoport, aminek eleme

Pl.: Egy forgatáshoz meghatározható egy és csak egy tengely, ami körül forog

Mindezek általánosítva, és kiterjesztve függvény bonyolult

$$GA \ni \gamma = \sum_k c_k g_k$$ Csoport algebra

Ebben lehetnek B-k, de ők csak véges dimenziós teret feszítenek ki

DE két generátor szorzata általában nem generátor

antiszimmetrikus mátrixok a forgás csoportra:

$$B^{(k)}_{lm} = -\varepsilon_{klm}$$

$$\underline{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}^{(3)} = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\underline{B}^{(1)} \underline{\underline{B}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ $\underline{B}^{(2)} \underline{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

$[\underline{B}^{(1)}, \underline{B}^{(2)}] = \underline{B}^{(1)} \underline{B}^{(2)} - \underline{B}^{(2)} \underline{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}^{(3)}$

$[\underline{B}^{(k)}, \underline{B}^{(l)}] = \varepsilon_{klm} \underline{\underline{B}}^{(m)}$ Forgáscsoport esetén

Általánosan: $[\underline{B}^{(k)}, \underline{B}^{(l)}] = \sum_m C^{kl}_m B^{(m)}$ ahol C a struktúra állandó

~~Algebra képzés: Ultr~~

Vegyünk egy asszociatív algebrát ($N \times N$-es mátrixok)

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ $(\underline{A} \underline{B}) \underline{C} = \underline{A} (\underline{B} \underline{C})$

Legyen $\underline{A} * \underline{B} = \underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A}$ egy új művelet (ez ugyan a kommutátor)

Állítás: ezzel Lie algebrát alkotnak:

- mert $\underline{A} * \underline{B} = - \underline{B} * \underline{A}$ (triviális)

$\Rightarrow [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] =$

$= [(AB-BA),C] + [(BC-CB),A] + [(CA-AC),B] =$

$= ((AB-BA)C - C(AB-BA)) + ((BC-CB)A - A(BC-CB)) + ((CA-AC)B) =$

$= ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB + CAB - ACB = 0$

Ez tetszőleges asszociatív algebrára igaz!

(Dimenzió-vesztés lép fel pl.: 4 dimes quaternió $\to$ 3 dimes vektorok)

A generátorok által a kommutátorra zárt, így ez Lie-algebrát alkot.

Tétel: A többparaméteres Lie-csoportok generátorai Lie-algebrát alkotnak.

$SO(3) \to SO(3)$

A Lie algebra a csoport csontváza (minimális paraméterek)

Általános esetben: $V \ni \{\underline{e}^{(k)}\}$

$$\underline{a} = \alpha_k \underline{e}^{(k)} \quad ; \quad \underline{b} = \beta_k \underline{e}^{(k)}$$

$$\underline{c} = \underline{a} * \underline{b} = (\alpha_k \underline{e}^{(k)}) * (\beta_l \underline{e}^{(l)}) = \alpha_k \beta_l (\underline{e}^{(k)} * \underline{e}^{(l)}) = \alpha_k \beta_l \left(C^{kl}_m \underline{e}^{(m)} \right) =$$

$$= (C^{kl}_m \alpha_k \beta_l) \underline{e}^{(m)} = \gamma_m \underline{e}^{(m)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\gamma_m = C^{kl}_m \alpha_k \beta_l}$$

Forgásgenerátorok:

$$[\underline{B}^{(k)} B^{(l)}] = \varepsilon_{klm} B^{(m)}$$

$$B^{(k)} B^{(l)} - B^{(l)} B^{(k)} = \varepsilon_{klm} B^{(m)}$$

$$B^{(k)}_{pr} B^{(l)}_{rq} - B^{(l)}_{pr} B^{(k)}_{rq} = \varepsilon_{klm} B^{(m)}_{pq}$$

$$(-\varepsilon_{kpr})(-\varepsilon_{lrq}) - (-\varepsilon_{lpr})(-\varepsilon_{krq}) = \varepsilon_{klm}(-\varepsilon_{mpq})$$

A delta - deltás képletben az az összefüggés érvényesül, vagyis a struktúra állandói nem független a $\underline{B}$-k megadásától

Ha mátrixok esetén,

$$[A, B] = AB - BA = C$$

Bázistranszformációban:

$$RABR^{-1} - RBAR^{-1} = RCR^{-1}$$

$$RAR^{-1}RBR^{-1} - RBR^{-1}RAR^{-1} = RCR^{-1}$$

$$A'B' - B'A' = [A', B'] = C'$$ A kommutátor-tulajdonság nem a mátrixok, csak a csoportelem jellemzője, és bázisfüggetlen

Kommutátor - reláció

Pauli mátrixok

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$$

$$[\sigma^{(k)}; \sigma^{(l)}] = 2i \varepsilon_{klm} \sigma^{(m)}$$

$$\left[\frac{\sigma^{(k)}}{2i} ; \frac{\sigma^{(l)}}{2i} \right] = \varepsilon_{klm} \frac{\sigma^{(m)}}{2i} \qquad \text{ahol} \quad z^{(k)} = \frac{1}{2i} \sigma^{(k)}$$

$$[z^{(k)} z^{(l)}] = \varepsilon_{klm} z^{(m)}$$

Tehát ezeknek relációi a $M_3(\mathbb{R})$ és $M_2(\mathbb{C})$ között ugyanaz, ugye B-k és z-k vannak

$$
\begin{tikzcd}
LG \arrow[r, dotted] \arrow[d, dash, "\text{érintés}"'] & RLG \\
LA \arrow[r, "\text{ábrázolás}"] & RLA \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}
$$

Lie csoport ábrázolásakor a Lie-csoportját ábrázoljuk, és azt exponenciálisáljuk

A Lie-algebra ábrázolásai általában vagy olyan reprezentációjára vezethetők vissza

CSOPI II.
6. előadás (04.03)

Minden Lie-csoporthoz tartozik egy Lie-algebra, az infinitezimális generátorok felhasználásával

- Az egységelemből minden irányban van egy részcsoport
- Ezek egy teret alkotnak amely, ahány paraméteres
- Minden elem előáll a bázisok lineáris kombinációjaként
- Minden elemet átvihet egy részcsoport
- A bázisok halmazából nem lépünk ki a kommutátorral ⇒ Lie algebra

Általánosan előbb a Lie-algebrát határozzuk, azt exponencializáljuk, hogy megkapjuk a csoportot.

Ehhez a struktúra állandó kell, ehhez kiszámoljuk majd a kommutátorokat

Válasszuk a Lie-algebrában olyan független elemeket, amik kommutálnak. ⇒ A csoport rangja

pl.: (általánosnál 4, forgatásnál 1)

SO(4) és SU(3)-nál 2.

Forgatás:

$\hat{A} : V_3 \to V_3$

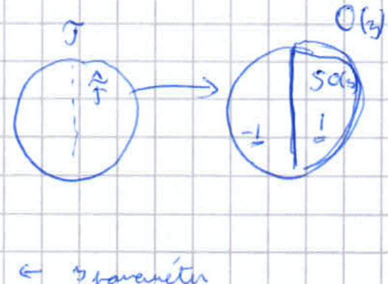
$$\hat{A}\vec{a} = \vec{a}'$$

$$\hat{A}\vec{b} = \vec{b}' \qquad \text{ha} \quad \vec{a}\vec{b} = \vec{a}'\vec{b}' \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3$$

akkor ez forgatás.

Ennek feltétele: $\underline{\underline{A}}\,\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{1}}$ $\quad \underline{\underline{A}}\,\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{1}}$

$$(\det \underline{\underline{A}})^2 = 1 \Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = \pm 1$$



$$F_{ik} = \delta_{ik} \cos\varphi + n_i n_k (1 - \cos\varphi) + \varepsilon_{ikm} n_m \sin\varphi \qquad \leftarrow 3 \text{ paraméter}$$

$$SO(3) \ni \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(\alpha, \beta, \gamma) = F_x(\alpha) F_y(\beta) F_z(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\alpha \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}} \, e^{\beta \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}} \, e^{\gamma \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

Vegyünk 4D-ben!

$$F_{xy}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = e^{\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}$$

$$F_{zu}(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\delta & -\sin\delta \\ & & \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} = e^{\beta \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Vegyünk más méretű mátrixokat:

$\underline{\underline{b}}^{(1)}$ $\underline{\underline{b}}^{(2)}$ $\underline{\underline{b}}^{(3)}$ ebben $b(\underline{\underline{F}}) = e^{\alpha \underline{\underline{b}}^{(1)}} e^{\beta \underline{\underline{b}}^{(2)}} e^{\gamma \underline{\underline{b}}^{(3)}}$

: Mikor ezek a forgatás [illegible] repr-je?

Akkor, ha a Lie-algebrájuk u.a., vagyis, ha a kommutátoruk $[\underline{\underline{b}}^{(i)}, \underline{\underline{b}}^{(j)}] = \varepsilon_{ijk} \underline{\underline{b}}^{(k)}$

(keressük az összes ilyen $\underline{\underline{b}}$!)

↑ Ez a feladat

Így ám, de ha $b^{(i)}$-k jók, akkor tetszőleges $\underline{\underline{U}}$-ra

$$b^{(i)'} = \underline{\underline{U}}\, \underline{\underline{b}}^{(i)} \underline{\underline{U}}^{-1} \text{ is jók lesznek}$$

$$b^{(1)} b^{(2)} - b^{(2)} b^{(1)} = b^{(3)}$$

$$(U b^{(1)} U^{-1})(U b^{(2)} U^{-1}) - (U b^{(2)} U^{-1})(U b^{(1)} U^{-1}) = U b^{(3)} U^{-1}$$

ekvivalens ábrázolás (ezek nem érdekelnek)

Ennek kiküszöbölésére vágjuk a bázist!

Mind nem lehet diagonális, mert azok egymással kommutálnak, de legyen a bázisunk között annyi diagonális, ahány csak lehet (Rang)

Egyet mindenképpen lehet, ha persze megfelelően választjuk, tehát is [illegible] transzf-val

Mivel komplexben vagyunk, és szeretnénk, hogy a skalárszorzat megmaradjon, egységnyi unitér mátrixok

$$\underline{\underline{A}} = e^{\alpha b} = \sum \frac{\alpha^n b^n}{n!} \qquad \underline{\underline{A}}^{+} = \sum \frac{\alpha^n}{n!} (b^{(+)})^n$$

$$A^{-1} = e^{-\alpha b} \quad \leftarrow \text{antihermitikus mátrix}$$

Legyen b antihermitikus $\quad A = ib$

$$S^+ = \widetilde{(ib)}^* = -i\tilde{b}^* = ib = S$$

S önadjungált, ezt szeretnénk, keressük ki alapból őket

$$e^{\alpha \underline{B}} = e^{-i\alpha(i\underline{B})} = e^{-i\alpha \underline{J}}$$

Általánosított feladat: keressük J-ket.

Így a forgásmátrix $\quad F = e^{-i\alpha J^{(1)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}}$

Mivel $B^{(k)}_{\ell m} = -\varepsilon_{k\ell m}$ ezért $J^{(k)}_{\ell m} = -i\varepsilon_{k\ell m}$

Tudjuk $\quad B^{(1)}B^{(2)} - B^{(2)}B^{(1)} = B^{(3)}$

$$(iB^{(1)})(iB^{(2)}) - (iB^{(2)})(iB^{(1)}) = i(iB^{(3)})$$

$$J^{(1)}J^{(2)} - J^{(2)}J^{(1)} = iJ^{(3)}$$

az ábrázolás keresése:

$$\underline{D}(F) = e^{-i\alpha D(J^{1})} e^{-i\beta D(J^{2})} e^{-i\gamma D(J^{3})}$$

Legyen $D(J^{(k)}) = S^{(k)}$ $\qquad S^{(k)}$-k akkor jók, ha

$$[S^{(k)}, S^{(\ell)}] = i\varepsilon_{k\ell m} S^{(m)} \quad \text{és} \quad S^{(k)+} = S^{k}$$

Általában, hogy $S^{(3)}$ legyen a diagonális, és a sajátértékei csökkenjenek

Keressük az összes ilyen $\underline{S}^{(k)}$-t

Ha két mátrix kommutál, akkor „sajátvektoraik azonosak"

Ez analóg ezzel a Schur-lemmával.

Keressünk olyan mátrixot, amely kommutál az $\underline{S}$-ekkel; az olyan az olyan kommutáló az ir. ábr.-val arányos a teljes algebrán.

Casimir-operátor

$$[\underline{C}, \underline{S}^{(k)}] = 0$$

Állítás: annyi független Casimir-operátor van, amennyi a rangja

Állítás: Ez a generátorok kvadratikus kifejezése

$$\underline{C} = \underline{S}^{(1)}\underline{S}^{(1)} + \underline{S}^{(2)}\underline{S}^{(2)} + \underline{S}^{(3)}\underline{S}^{(3)}$$

Második ennek is?

$$[C, S^{(3)}] = CS^{(3)} - S^{3}C = S^{(1)}S^{(1)}S^{(3)} - S^{(3)}S^{(1)}S^{(1)} + S^{(2)}S^{(2)}S^{(3)} - S^{(3)}S^{(2)}S^{(2)} =$$

$$= -S^{(1)}S^{(3)}S^{(1)} + S^{(1)}S^{(3)}S^{(1)} - S^{(2)}S^{(3)}S^{(2)} + S^{(2)}S^{(3)}S^{(2)} =$$

$$= S^{(1)}(S^{(1)}S^{(3)} - S^{3}S^{1}) + (S^{1}S^{3} - S^{3}S^{1})S^{1} + S^{2}(S^{2}S^{3} - S^{3}S^{2}) - (S^{3}S^{2} - S^{2}S^{3})S^{2} =$$

$$= S^{1}(-iS^{2}) + (-iS^{2})S^{1} + S^{2}iS^{1} + iS^{1}S^{2} = 0 \quad \checkmark$$

Módosított feladat: keressük az összes S^1, S^2, S^3, C-t,

teljesül, hogy $[S^k, S^l] = i\,\varepsilon_{klm} S^m$ $\qquad S^{k+} = S^k$

$C = S^{1*}S^1 + S^2S^2 + S^3S^3$ $\qquad C^+ = C$

S^3 diagonál

Legyen $\boxed{\begin{aligned} S_+ &= S^1 + iS^2 \\ S_- &= S^1 - iS^2 \\ S_0 &= S^3 \end{aligned}}$ a bázisváltoztatás miatt $\boxed{\begin{aligned} S^1 &= \frac{S_+ + S_-}{2} \\ S^2 &= \frac{S_+ - S_-}{2i} \\ S^3 &= S_0 \end{aligned}}$

Ha S_+, S_-, S_0-t keressük, az is jó (gömbi bázis)

A gömbi bázis elemeit is számoljuk, ugyanis ott a kommutációs relációt is újra kell értelmezni

$$[S_0, S_+] = [S^3, S^1 + iS^2] = [S^3, S^1] + i[S^3, S^2] = iS^2 + S^1 = S_+$$

$$[S_0, S_-] = [S^3, S^1 - iS^2] = [S^3, S^1] - i[S^3, S^2] = iS^2 - S^1 = -S_-$$

$$[S_+, S_-] = [S^1 + iS^2, S^1 - iS^2] = [S^1, S^1] + i[S^2, S^1] - i[S^1, S^2] + [S^2, S^2] = 2S^3 = 2S_0$$

itt $\boxed{\begin{aligned} S_0^+ &= S_0 \\ S_+^+ &= S_- \\ S_-^+ &= S_+ \end{aligned}}$

$$C = S^1S^1 + S^2S^2 + S^3S^3 = \frac{S_+ + S_-}{2}\frac{S_+ + S_-}{2} + \frac{S_+ - S_-}{2i}\frac{S_+ - S_-}{2i} + S_0S_0 =$$

$$= \frac{S_+S_+ + S_-S_+ + S_+S_- + S_-S_-}{4} + \frac{S_+S_+ - S_-S_+ - S_+S_- + S_-S_-}{-4} + S_0S_0 =$$

$$= \frac{S_-S_+}{2} + \frac{S_+S_-}{2} + S_0S_0 = \frac{S_-S_+}{2} + \frac{S_-S_+ + 2S_0}{2} + S_0S_0 =$$

$$= S_-S_+ + S_0 + S_0^2 = C$$

Végső feladat:

Keressük C, S_0, S_+, S_- mátrixokat ahol $C^\dagger = C$, $S_0^\dagger = S_0$, $S_+^\dagger = S_-$

$$C = S_- S_+ + S_0 + S_0^2$$

$$[S_0, S_+] = S_+$$

$$[S_0, S_-] = -S_-$$

$$[S_+, S_-] = 2S_0$$

$$[C, S] = 0$$ C és S_0 diag.

Legyen $\hat{C}|km\rangle = k|km\rangle$ — tudjuk, hogy $k \in \mathbb{R}$

$\hat{S}_0|km\rangle = m|km\rangle$ tudjuk, hogy $m \in \mathbb{R}$

mivel $\hat{C}$ kommutál van $\hat{S}_0$-val közös sajátvektor

Normáljuk őket: $\langle k'm'|km\rangle = \delta_{kk'}\delta_{mm'}$

Belátjuk, hogy $k \geq 0$

$$k = k \cdot 1 = k \cdot \langle km|km\rangle = \langle km|k|km\rangle = \langle km|\hat{C}|km\rangle =$$

$$= \langle km|\sum_{e=1}^{3} S^e S^e|km\rangle = \sum_e \langle km|S^e S^e|km\rangle = \sum_e \langle km|S^{e\dagger} S^e|km\rangle = *$$

Legyen $|\psi_e\rangle = S^e|km\rangle$ akkor $\langle \psi_e| = \langle km|S^{e\dagger}$

$$* = \sum_e \langle \psi_e|\psi_e\rangle = \sum_e |\psi_e|^2 \geq 0$$

CSOPI II.

7. előadás (04.10.)

$$F \supset F_t \simeq SO(3) \ni \underline{\underline{F}}(\alpha,\beta,\gamma) = \underline{\underline{F}}_x(\alpha)\,\underline{\underline{F}}_y(\beta)\,\underline{\underline{F}}_z(\gamma) = e^{\alpha \underline{\underline{B}}^{(1)}} e^{\beta \underline{\underline{B}}^{(2)}} e^{\gamma \underline{\underline{B}}^{(3)}} = e^{-i\alpha \underline{\underline{J}}^{(1)}} e^{-i\beta \underline{\underline{J}}^{(2)}} e^{-i\gamma \underline{\underline{J}}^{(3)}}$$

ahol $J^{(k)}_{\ell m} = -i\,\varepsilon_{k\ell m}$ $\quad [J^{(k)}, J^{(\ell)}] = i\,\varepsilon_{k\ell n} J^{(n)}$ $\quad \underline{\underline{J}}^{(k)+} = J^{(k)}$

$$O(F(\alpha,\beta,\gamma)) = e^{-i\alpha \underline{\underline{S}}^{(1)}} e^{-i\beta \underline{\underline{S}}^{(2)}} e^{-i\gamma \underline{\underline{S}}^{(3)}}$$

ahol $[S^{(k)}, S^{(\ell)}] = i\,\varepsilon_{k\ell m} \underline{\underline{S}}^{(m)}$ és $\quad \underline{\underline{S}}^{(k)+} = S^{(k)}$

Keressük az összes ilyen $\underline{\underline{S}}$-t

$$\underline{\underline{C}} = \sum_k \underline{\underline{S}}^{(k)} \underline{\underline{S}}^{(k)} \qquad [\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{S}}^{(k)}] = 0$$

Ez a Lie-algebra...s teljesítése

Áttérünk új bázisra:

$$\underline{S}_\pm = S^{(1)} \pm i S^{(2)} \qquad \underline{\underline{S}}_0 = \underline{\underline{S}}^{(3)}$$

így

$$\left.\begin{aligned}
&[\underline{S}_0, \underline{\underline{S}}_+] = S_+ \\
&[\underline{\underline{S}}_0, \underline{\underline{S}}_-] = -S_- \\
&[\underline{\underline{S}}_+, \underline{\underline{S}}_-] = 2\,\underline{S}_0 \\
&\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{S}}_- \underline{S}_+ + \underline{\underline{S}}_0 + \underline{\underline{S}}_0^2 = \underline{\underline{C}}^+
\end{aligned}\right\}$$

Ezekből ezeknek, amik azokkal kielégíti

Megoldás:

$$\hat{C}\,|km\rangle = k\,|km\rangle$$

$$\hat{S}_0\,|km\rangle = m\,|km\rangle$$

$$\langle km\,|\,k'm'\rangle = \delta_{kk'}\,\delta_{mm'}$$

$$k = k\langle km|km\rangle = \langle km|\,k\,|km\rangle = \langle km|\,\hat{C}\,|km\rangle = \langle km|\sum_\ell S^{(\ell)} S^{(\ell)}|km\rangle =$$

$$= \sum_\ell \langle km|\,S^{(\ell)+} S^{(\ell)}\,|km\rangle = \sum_\ell \langle z^{\ell}|z^{(\ell)}\rangle = \sum |z^{(\ell)}|^2 \geq 0 \qquad \text{tehát}$$

$$k \geq 0$$

Legyen $\quad |u\rangle = S_+\,|km\rangle \quad$ és $\quad |w\rangle = S_-\,|km\rangle \quad$ sajá $\hat{C}$ sajátjai

$$\hat{C}\,|u\rangle = \hat{C}\,\hat{S}_+\,|km\rangle = \hat{S}_+\,\hat{C}\,|km\rangle = \hat{S}_+\,k\,|km\rangle = k\,\hat{S}_+|km\rangle = k\,|u\rangle$$

ugyanígy $\quad \hat{C}\,|w\rangle = k\,|w\rangle$

kommutátor relációk miatt

$$\hat S_0 |u\rangle = \hat S_0 \hat S_+ |km\rangle = (\hat S_+ \hat S_0 + \hat S_+)|km\rangle = S_+(S_0|km\rangle) + S_+|km\rangle =$$

$$= S_+(m|km\rangle) + S_+|km\rangle = (m+1)(\hat S_+|km\rangle) = (m+1)|u\rangle$$

ha a $\hat S_0$-nak a m a sajátértéke, akkor m+1-e is

$$\hat S_0|v\rangle = \hat S_0 \hat S_-|km\rangle = (\hat S_- \hat S_0 - \hat S_-)|km\rangle = \hat S_-(\hat S_0|km\rangle) - S_-|km\rangle = \hat S_-(m|km\rangle) - S_-|km\rangle =$$

$$= (m-1)\hat S_-|km\rangle = (m-1)|v\rangle$$

ha $\hat S_0$-nak a m sajátért. a m-1 is.

Tehát $|u\rangle = S_+|km\rangle = \alpha_{km}|k,m+1\rangle$

$|v\rangle = S_-|km\rangle = \beta_{km}|k,m-1\rangle$

Mennyi k, m, α, β?

$$\alpha_{km} = \alpha_{km}\langle k,m+1|k,m+1\rangle = \langle k,m+1|\alpha_{km}|k,m+1\rangle = \langle k,m+1|\hat S_+|k,m\rangle$$

$$\alpha^*_{km} = (\langle k,m+1|\hat S_+|k,m\rangle)^* = \langle km|\hat S_+^*|k,m+1\rangle = \langle km|\hat S_-|k,m+1\rangle =$$

$$= \langle km|\beta_{k,m+1}|km\rangle = \beta_{k,m+1}\langle km|km\rangle = \beta_{k,m+1}$$

$$k = \dots = \langle km|\hat C|km\rangle = \langle km|\hat S_-\hat S_+ + \hat S_0 + \hat S_0^2|km\rangle =$$

$$= \langle km|\hat S_-\hat S_+|km\rangle + \langle km|\hat S_0|km\rangle + \langle km|\hat S_0^2|km\rangle =$$

$$= \langle u|u\rangle + m\langle km|km\rangle + m^2\langle km|km\rangle = \langle u|u\rangle + m + m^2 =$$

$$= \langle km|\alpha^*_{km}\alpha_{km}|km\rangle + m + m^2 = |\alpha_{km}|^2 + m + m^2$$

$$\boxed{|\alpha_{km}|^2 = k - m - m^2}$$

Abszolútértékének négyzete nem lehet negatív, így van egy m_{min} és m_{max}

A létra megszakad, mert a határokon a sajátvektor a 0-vektor

Így ott $\hat S_+|kj\rangle = \underline{0} \Rightarrow \alpha_{kj} = 0$

$\hat S_-|kk\rangle = \underline{0}$ $\quad \beta_{kk} = 0$

$\beta_{kk} = \alpha^*_{k,k-1}$ és $|\alpha_{kj}|^2 = k - j - j^2 \Rightarrow k = j + j^2 = j(j+1)$

$|\beta_{kk}|^2 = |\alpha_{k,k-1}|^2 = k - (k-1) - (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = (k-1) + (k-1)^2 = k(k-1)$

$\Rightarrow \quad k(k-1) = j(j+1)$

$k^2 - k - j^2 - j = 0$

$k = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4j^2+4j}}{2} = \dfrac{1 \pm (2j+1)}{2} = \begin{cases} j+1 \\ -j \end{cases}$ Mivel k a legkisebb érték nem lehet $k > j$

tehát $k = -j$

$m_{min} = -j \quad m_{max} = j \quad \Delta m = 2j$

Mivel a $2j$-t egészekkel kaptuk meg, j is egész $\quad j \in \frac{\mathbb{N}}{2} = \{0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \dots\}$

$K = j(j+1) \in \{0; \frac{3}{4}; 2; \frac{15}{4}; \dots\}$

m-ek lehetséges számára legyen $2j+1 = d$ db

Mivel j-t egyszerűbb megjegyezni, mint k-t $\quad |km\rangle \to |jm\rangle$

$j \in \{0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \dots\}$

Ekkor $d = 2j+1$ féle m tartozhat $\quad m \in \{-j; -j+1; \dots; j-1; j\}$

$\hat{C}|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle \quad$ és $\quad \hat{S}_0|jm\rangle = m|jm\rangle$

Mivel $|\alpha_{km}|^2 = k - m - m^2 = j(j+1) - m(m+1) \qquad \hat{S}_+|jm\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,|j, m+1\rangle$

$\hat{S}_-|jm\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,|j, m-1\rangle$

Most megadjuk, hogy az operátorok hogyan hatnak a bázisra. Ennek adódnak az operátorok

$\langle j'm'|\hat{C}|jm\rangle = \langle j'm'|j(j+1)|jm\rangle = j(j+1)\delta_{jj'}\delta_{mm'}$

$\langle j'm'|\hat{S}_0|jm\rangle = \langle j'm'|m|jm\rangle = m\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}$

$\langle j'm'|\hat{S}_+|jm\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\langle j'm'|j, m+1\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\delta_{jj'}\delta_{m', m+1}$

$\langle j'm'|\hat{S}_-|jm\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\langle j'm'|j, m-1\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\delta_{jj'}\delta_{m', m-1}$

Ezek az operátorok mátrixelemei, hiszen $A_{kl} = \vec{e}^{(k)}\hat{A}\,\vec{e}^{(l)}$

Különböző j-kben tartozó elemek 0-k a $\delta_{j'j}$ miatt $\Rightarrow$ itt blokkdiagonális lesz a operátor

Végtelen j-kben tartozó nagy mátrix ($2j+1 \times 2j+1$-es) van megszorítható és egy irreducibilis ábrázolás, d amely a dimenziója

$S_0 = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & -j+1 & \\ & & & -j \end{pmatrix} \quad S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\ } & & \\ & 0 & \sqrt{\ } & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \sqrt{\ } & 0 & & \\ & \sqrt{\ } & \ddots & \\ & & \sqrt{\ } & 0 \end{pmatrix}$ Ezekből adódnak $S^{(1)}\ S^{(2)}\ S^{(3)}$

Megnézzük néhány j-re:

$j=0$ $d=1$ $m=0$ (1 db) 1 db sajátvektor: $|00\rangle$

$C|00\rangle = 0|00\rangle$ $\hat{S}_0|00\rangle = 0|00\rangle$ $\hat{S}_+|00\rangle = \underline{0}$ $\hat{S}_-|00\rangle = \underline{0}$

$S^{(1)} S^{(2)}$ és $S^{(3)}$ mátrix Ezek mind a 1×1-es 0 mátrix

$e^{-i\alpha S^{(1)}} = \boxed{1}$ $D(F(\alpha,\beta,\gamma)) = \boxed{1}$ triviális ábrázolás

Ami ennek transzformálódik az a skalár

$j=1$ $d=3$ $m=1,0,-1$ 3 sajátvektor: $|11\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $|10\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $|1\,-1\rangle \to \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$k = j(j+1) = 2$

$$C = \begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix} \qquad S_0 = \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$S_+|11\rangle = \sqrt{1(1+1)-1(1+1)} = \underline{0}$

$S_+|10\rangle = \sqrt{1(1+1)-0\cdot(0+1)}\,|11\rangle = \sqrt{2}\,|11\rangle$

$S_+|1\,-1\rangle = \sqrt{1(1+1)-(-1)(-1+1)}\,|10\rangle = \sqrt{2}\,|10\rangle$

$$S_+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \qquad S_+\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix} \qquad S_+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \qquad S_+ = \begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S_- = S_+^* = \begin{pmatrix}0&0&0\\\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}&1&\\1&&1\\&1&\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S}}^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}&-1&\\1&&-1\\&1&\end{pmatrix} \qquad S^{(3)} = \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \qquad J^{(2)} = \begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix} \qquad J^{(3)} = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

A $J^{(3)}$ főtengely transzformációja $S^{(3)}$-t adja $\exists U$: $U J^{(3)} U^{-1} = S^{(3)}$

Ezzel a U-val $U J^{(2)} U = S^{(2)}$

$U J^{(1)} U = S^{(1)}$

Ez ekvivalens az eredeti csoporttal: ábrázolás

Azok a csoportok, amik mátrixok lehetnek ábrázolások.

Amit az ábrázolásra transzformálódik az a vektor

CSOPI II.

8. előadás (04. 24.)

$SO(3) \ni F(\alpha,\beta,\gamma) = F_z(\alpha) F_y(\beta) F_z(\gamma) = e^{-i\alpha J^{(3)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}}$

ahol $J^{(k)+} = J^{(k)}$ $\quad [J^{(k)}, J^{(l)}] = i\,\varepsilon_{klm} J^{(m)}$

ugyan $D(F(\alpha,\beta,\gamma)) = e^{-i\alpha S^{(3)}} e^{-i\beta S^{(2)}} e^{-i\gamma S^{(3)}}$ és S-re is teljesülne ← erek

bázis változtatás:

$S_\pm = S^{(1)} \pm S^{(2)}$ $\qquad S_+^+ = S_-$

$S_0 = S^{(3)}$ $\qquad S_0^+ = S_0$

legyen $[C, S^{(k)}] = 0$

$C = \sum_k S^{(k)} S^{(k)} = S_- S_+ + S_0 + S_0^2$

$\hat{C}\,|j\,m\rangle = f(j)\,|j\,m\rangle$

$S_0 |j\,m\rangle = m\,|j\,m\rangle$ előző óra alapján

$j \in \{0; \frac{1}{2}; 1; \dots\}$

$d = 2j+1$ dimenzió

$m \in \{-j; -j+1 \dots j-1; j\}$

pl. $j = 0$ $\quad d = 1$ $\quad S = \boxed{0}$ $\quad D(g) = 1$ triviális ábrázolás

ami így skalároknak, a skalár

pl. $j = 1$ $\quad d = 3$ $\quad$ ez az ismert vektor volt

ami így transzformálódik, mint a vektor.

pl. $j = 2$ $\quad d = 5$

$m \in \{2; 1; 0; -1; -2\}$ $\quad$ bázis: $|2\,2\rangle$, $|2\,1\rangle$, $|2\,0\rangle$, $|2\,-1\rangle$, $|2\,-2\rangle$

Mivel $j(j+1) = 6$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & & & & \\ & 6 & & & \\ & & 6 & & \\ & & & 6 & \\ & & & & 6 \end{pmatrix} \qquad S_0 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$S_+|2\,2\rangle = \sqrt{2(2+1)-2(2+1)}\,|\rangle = 0$

$S_+|2\,1\rangle = \sqrt{2(2+1)-1(1+1)}\,|2\,2\rangle = 2\,|2\,2\rangle$

$S_+|2\,0\rangle = \sqrt{2(2+1)-0(0+1)}\,|2\,1\rangle = \sqrt{6}\,|2\,1\rangle$

$S_+|2\,-1\rangle = \sqrt{2(2+1)-(-1)(-1+1)}\,|2\,0\rangle = \sqrt{6}\,|2\,0\rangle$

$S_+|2\,-2\rangle = \sqrt{2(2+1)-(-2)(-2+1)}\,|2\,-1\rangle = 2\,|2\,-1\rangle$

Ha $|2\,2\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad |2\,1\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \dots$ akkor

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & \\ & 0 & \sqrt{6} & & \\ & & 0 & \sqrt{6} & \\ & & & 0 & 2 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^{+} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 2 & 0 & & & \\ & \sqrt{6} & 0 & & \\ & & \sqrt{6} & 0 & \\ & & & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_0 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

Ekkor:

$$S_1 = S^{(1)} = \frac{S_+ + S_-}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \sqrt{3/2} & & \\ & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3/2} & \\ & & \sqrt{3/2} & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{(2)} = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -\sqrt{3/2} & & \\ & \sqrt{3/2} & 0 & -\sqrt{3/2} & \\ & & \sqrt{3/2} & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} i \qquad S^{(3)} = S_0$$

$$D(F_x(\alpha)) = e^{-i\alpha S^{(1)}} \qquad D(F_y(\beta)) = e^{-i\beta S^{(2)}} \qquad D(F_z(\gamma)) = e^{-i\gamma S^{(3)}} = \begin{pmatrix} e^{-2i\gamma} & & & & \\ & e^{-i\gamma} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & e^{i\gamma} & \\ & & & & e^{2i\gamma} \end{pmatrix}$$

Mi az a fizikai mennyiség, ami 5 komponensű és így transzformálódik?

tenzor: Ami úgy transzformálódik, mint a vektorkomponensek szorzata

$u_k' = F_{kl}\,u_l \qquad v_l' = F_{lm}\,v_m$

$(u_k v_l)' = u_k' v_l' = F_{kp}\,u_p\,F_{lq}\,v_q = F_{kp}F_{lq}\,u_p v_q$

$\quad t_{kl}' = F_{kp}F_{lq}\,t_{pq} \qquad$ u.e. többi D-re is.

Lineáris terek direkt szorzata:

$$V^1 \ni \vec{v} = \sum_k^n \alpha_k \vec{e}^{(k)} \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \underline{v}$$

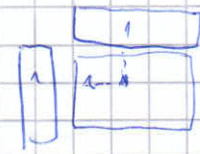
$$V^2 \ni \vec{u} = \sum_l^m \beta_l \vec{f}^{(l)} \longrightarrow \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix} = \underline{u}$$

Két művelet!

Direkt összeg:

$$V = V^1 \oplus V^2 \ni \sum^n \alpha_k \vec{e}^{k} + \sum_l^m \beta_l \vec{f}^{(l)} \longrightarrow \left.\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_n\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}\right\} n+m \text{ dim}$$

$$W = V^1 \otimes V^2 = \sum_k^n \sum_l^m \gamma_{kl} \vec{e}^{k} \otimes \vec{f}^{l}$$



$n \cdot m$ dimenziós

Ha $\gamma_{kl} = \alpha_k \beta_l$ akkor ez a diadikus szorzat, de általában NEM az, a szorzattér tartalmazza a vektorok szorzatát, és ha jól értettem, akkor előállítható vektorszorzatok lin. kombinációjaként

Egy G csoportot $\to V^1$ $\quad D^{(1)}(g): V^1 \to V^1$

$\to V^2$ $\quad D^{(2)}(g): V^2 \to V^2$

Legyen új ábrázolás: $D = D^1 \otimes D^2 : W \to W$

$$D(g)\Big(\sum_k \sum_l \gamma_{kl} \vec{e}^{(k)} \otimes \vec{f}^{(l)}\Big) = \sum_k \sum_l \gamma_{kl} \big(D^{(1)}(g)\, \vec{e}^{(k)}\big) \otimes \big(D^{(2)}(g)\, \vec{f}^{(l)}\big) = *$$

$$D^{(1)}(g)\, \vec{e}^{(k)} \to \sum_p D^{(1)}_{pk}(g)\, \vec{e}^{(p)} \qquad D^{(2)}(g)\, \vec{f}^{(l)} \to \sum_q D^{(2)}_{ql}(g)\, \vec{f}^{(q)}$$

$$A_{kl} = \vec{e}^{(k)} (\hat{A}\, \vec{e}^{(l)})$$

$$\hat{A}\, \vec{e}^{(l)} = \sum_k A_{kl}\, \vec{e}^{(k)}$$

$$* = \sum_p \sum_q \Big(\sum_k \sum_l D^{(1)}_{pk} D^{(2)}_{ql} \gamma_{kl}\Big) \vec{e}^{(p)} \otimes \vec{f}^{(q)} = \sum_p \sum_q \gamma'_{pq}\, \vec{e}^{p} \otimes \vec{f}^{q}$$

Tehát $\gamma'_{pq} = \sum_k \sum_l D^{(1)}(g)_{pk}\, D^{(2)}(g)_{ql}\, \gamma_{kl}$

A tenzorok azok, amik az ábrázolás direktszorzata szerint transzformálódnak ...

Szimmetrikus mátrixok a forgási transzformációk inv. alteret alkotnak

Pl.: ~~A~~ 9 dimes mátrixok bázisa: $\begin{pmatrix}1&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&1&\\&&\\&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&&1\\&&\\&&\end{pmatrix}$ ...

Az antiszimm. esetén a bázis: $\begin{pmatrix}&-1&\\1&&\\&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&&-1\\&&\\+1&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&&\\&&-1\\&1&\end{pmatrix}$ 3 dim

A szimm. esetén: $\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&&1\\&&\\1&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&&\\&1&\\&&\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&1\end{pmatrix}$ 6 dim

$6+3=9$

A szimm: $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}&&1\\&&\\1&&\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$

1 dim 5 dim

A 9 dimes tenzorok felbontás: 3 dimes, 1 dimes és 5 dimes $\underbrace{\text{altérre}}_{\text{inv}}$ ↑

látható, hogy ezek nem bonthatók tovább

A szorzás: a tenzor felbontható egy antiszimm., egy egység, és egy spurtalan szim mátrix összegének összegére(?)

$$\boxed{D^{(j=1)} \otimes D^{(j=1)} = D^{(j=2)} \oplus D^{(j=1)} + D^{(j=2)}}$$

A $j=2$-es ábrázolás elbírja a 2 dimes tenzorokat, csak a fizikusok jobban szeretnek vektor-szorzattal (tenzorral) dolgozni, mint direktszorzattal

ugyanaz a szorzatokra j-kre

Ezek még csak az egész j-k voltak.

Pl.

$j=\frac{1}{2}$ eset $\qquad |\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle \qquad |\uparrow\rangle$

$d=2 \qquad |\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle \qquad |\downarrow\rangle$

$$j(j+1)=\frac{3}{4} \qquad C=\begin{pmatrix} 3/4 & \\ & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad S_0=\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_+|\uparrow\rangle = S_+|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = 0$$

$$S_+|\downarrow\rangle = S_+|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)}\ |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle$$ (léptető operátor)

$S \qquad |\uparrow\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

így $\quad S_+=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$S_1^{(1)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \qquad S^{(2)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \qquad S^{(3)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^{(k)}=\frac{1}{2}\sigma^{(k)} \qquad \sigma^{(k)}\sigma^{(\ell)}=\delta_{k\ell}\underline{\underline{1}}+i\varepsilon_{k\ell m}\sigma^{(m)}$$

Pl.
$$\sigma^{(\ell)}\sigma^{(k)}=\delta_{\ell k}\underline{\underline{1}}+i\varepsilon_{\ell k m}\sigma^{(m)}$$

$$\left[\sigma^{(k)},\sigma^{(\ell)}\right]=2i\,\varepsilon_{k\ell m}\sigma^{(m)} \qquad \Big|\cdot\frac{1}{4}$$

$$\left[\frac{\sigma^{(k)}}{2},\frac{\sigma^{(\ell)}}{2}\right]=i\,\varepsilon_{k\ell m}\frac{\sigma^{(m)}}{2}$$ Ez úgy kommutál, mint a korábbi mátrix

$$D^{1/2}(F_x(\alpha))=e^{-i\alpha S^1}=e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma^{(1)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^n\left(\sigma^{(1)}\right)^n}{n!}=\left(\sum_{n\text{ páros}}\frac{\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^n}{n!}\right)\underline{\underline{1}}+\left(\sum_{n\text{ páratlan}}\frac{\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^n}{n!}\right)\sigma^{(1)}=$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{1}}+\sin\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2}\\ -i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

Ugyanígy a többire

$$D^{1/2}(F_y(\beta))=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

$$D^{1/2}(F_z(\gamma))=\begin{pmatrix}e^{-\frac{i\gamma}{2}} & \\ & e^{i\gamma/2}\end{pmatrix}$$

itt a 2π szögű forgatásra a $-\underline{\underline{1}}$ mátrixszal

Ez nem jó?

$$\begin{tikzcd} iG \arrow[d, "\text{homom.}"'] & RLG \\ LA \arrow[r, "R"] & RLA \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

A probléma, hogy m. a. a Lie-algebra több csoport ábrázolata

$$\begin{tikzcd}
LG_1 \arrow[ddr] & LG_2 \arrow[dd] & LG_0 \arrow[ddl] \arrow[rr] & & RLG_0 \\
& & CG_2 \arrow[dll] & & \\
& LA \arrow[rrr] & & & RLA \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Az ábrázolás mindig a fedő csoport ábrázolása, ami lokálisan azonos a többi csoportéval, de globálisan topológiai különbség van.

CSOPI II.

9. előadás (05.08.)

Vannak olyan csoportok, amelyek Lie-algebrája u.a., így a lokális ábrázolásai

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{a} = a_k \vec{e}^{(k)} \Longleftrightarrow a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = \underline{\underline{H}}(\underline{a})$ vagy $\underline{a}\,\underline{\sigma}$ Ez a vektorok új repr.-ja

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{H}}(\underline{a}) < M$ ezek valós vektorteret alkotnak

hermitikus mátrixok és spúrtalan

Vegyünk egy hermitikus és spúrtalan mátrixot! Csak ilyen $\underline{\underline{H}}(\underline{a})$-t tudunk venni

Mivel $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{klm}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a})\underline{\underline{H}}(\underline{b}) = (a_k\underline{\underline{\sigma}}^{(k)})(b_l\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}) = a_k b_l(\delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{klm}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}) = (a_k b_k)\underline{\underline{1}} + i(\varepsilon_{klm} a_k b_l)\underline{\underline{\sigma}}^{(m)} =$$

$$= (\underline{a}\,\underline{b})\underline{\underline{1}} + i\underline{\underline{H}}(\underline{a}\times\underline{b})$$

Ebben benne van a sk. és a vekt. szorzat is

$$\underline{a}\,\underline{b} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a})\underline{\underline{H}}(\underline{b})\right)$$

$$H(\underline{a}\times\underline{b}) = \frac{[\underline{\underline{H}}(\underline{a}), \underline{\underline{H}}(\underline{b})]}{2i}$$

Komponensek kiválasztása:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a})\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(a_l\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right) = \frac{a_l}{2}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right) = \frac{a_l}{2}\mathrm{Sp}\left(\delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{klm}\sigma^{(m)}\right) =$$

$$= \frac{a_l}{2}\delta_{kl}\cdot 2 + \frac{a}{2}i\varepsilon_{klm}\underbrace{\mathrm{Sp}(\underline{\underline{\sigma}}^{(m)})}_{0} = \underline{\underline{a_k}}$$

transzformáljuk $\underline{\underline{H}}$-t $\underline{\underline{U}}$-val $\quad \underline{\underline{U}} \in SU(2)$ azaz $U^+ = U^{-1}$; $\det U = 1$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \longrightarrow \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{H}}'(\underline{a})$$

$$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{H}}'(\underline{a})) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})) = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})$$

$(H')^+ = (UHU^{-1})^+ = (U^{-1})^+ H^+ U^+ = UHU^{-1} = H'$ Tehát $H' \in M$ is.

$\underline{\underline{H}}'(\underline{a}) = \underline{\underline{H}}(\underline{a}') \longleftrightarrow \underline{a}' \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \ni \underline{a} = a_k \underline{e}^{(k)} \longleftrightarrow a_k \underset{\wedge}{\underline{\sigma}}^{(k)} = \underline{H}(\underline{a}) \longrightarrow U H U^{-1} = H'(\underline{a}) = H(\underline{a}') \longleftrightarrow \underline{a}' \in \mathbb{R}^3$$

$$\underline{a}' = \underline{\underline{F}}\, \underline{a}$$

Ha két szer

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "U_1"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] & a' \arrow[r, "U_2"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & a'' \end{tikzcd}$$

$$H(a'') = U_2 H(a') U_2^{-1} = U_2 (U_1 H(a) U_1^{-1}) U_2^{-1} = (U_2 U_1) H(a) (U_1^{-1} U_2^{-1}) = U_3 H(a) U_3^{-1}$$

$$a'' = F_2 a' = F_2 F_1 a = F_3 a$$

U-ból F-be homomorfizmus van, de nem izomorfizmus

mert U-hoz és $-U$-hoz is F rendelődik

Ui a magja: $\ker \varphi = \{1, -1\} = C_2$

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H(a) = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \qquad \det H = -z^2 - (x+iy)(x-iy) = -a^2$$

$$|a'|^2 = -\det H(a') = -\det(U H(a) U^{-1}) = -\det H(a) = |a|^2 \qquad \text{tehát } |a'| = |a|$$

$$a'b' = \tfrac{1}{2} Sp\left(H(a') H(b')\right) = \tfrac{1}{2} Sp\left(U H(a) U^{-1} U H(b) U^{-1}\right) = \tfrac{1}{2} Sp\{H(a) H(b)\} = ab$$

tehát F invariánsan hagyja a sk. szorzatot, tehát $F \in SO(3)$

$$a_k' = \tfrac{1}{2} Sp\left(H(a') \sigma^{(k)}\right) = \tfrac{1}{2} Sp\left(U H(a) U^{-1} \sigma^{(k)}\right) = \tfrac{1}{2} Sp\left(\sigma^{(k)} U H(a) U^{-1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} Sp\left(\sigma^{k} U a_e \sigma^{e} U^{-1}\right) = a_e \underbrace{\tfrac{1}{2} Sp\left(\sigma^{k} U \sigma^{e} U^{-1}\right)}_{F_{ke}}$$

$$a_k' = F_{ke} a_e$$

Legáltalánosabb U mátrixot keressük $\quad U^+ = U^{-1}$; $\det U = 1$

$$U = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

$$u^{-1} = \frac{1}{\det u}\begin{pmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_3 & z_1\end{pmatrix} \qquad u^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^*\end{pmatrix}$$

Mivel a kettő egyenlő

$$z_4 = z_1^*$$
$$-z_2 = z_3^*$$
$$-z_3 = z_2^*$$
$$z_1 = z_4^*$$

tehát $u = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^*\end{pmatrix}$

ahol $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ $\qquad u = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib\end{pmatrix}$

tehát ahol $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

$$u = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}i & \\ & -i\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} + ci\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} + id\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = a\mathbb{1} + i(d\sigma^1 + c\sigma^2 + b\sigma^3) =$$

$$= a\underline{1} - i(-d\sigma^{(1)} - c\sigma^{(2)} - b\sigma^{(3)}) \qquad \text{legyen } \underline{v} = \begin{pmatrix}-d \\ -c \\ -b\end{pmatrix}$$

$$u = a\mathbb{1} - iH(\underline{v}) = a\underline{1} - i\underline{v}\underline{\sigma}$$

$$|\underline{v}|^2 = d^2+c^2+b^2 = 1-a^2 \Rightarrow a^2 + |\underline{v}|^2 = 1 \qquad \text{legyen } a = \cos\frac{\varphi}{2}, \quad |\underline{v}| = \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$u = \cos\frac{\varphi}{2}\underline{1} - i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma}) \in SU(2)$$ Ez a legáltalánosabb SU(2)

$$= e^{i\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})}$$

ezt korábban tuti kiszámoltuk, ugyanis le se írnám csak úgy valamit, hogy ne nézzen hülyének

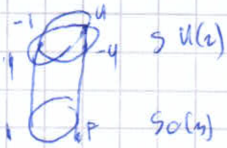
rögzített $\underline{n}$ esetén u-k φ-re egyparaméteres Lie-csoport

Hagyj nagyjából $\underline{F}$-t :

$$F_{k\ell} = \frac{1}{2} Sp\left(\sigma^{(k)} u \sigma^{(\ell)} u^{-1}\right) = \frac{1}{2} Sp\left[\sigma^{(k)}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{1} - i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right)\sigma^{\ell}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{1} + i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\, Sp\left(\sigma^{(k)}\sigma^{(\ell)}\right) + \frac{1}{2} i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\, Sp\left(\sigma^{(k)}\sigma^{(\ell)}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) - \frac{1}{2} i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\, Sp\left(\sigma^{(k)}(\underline{n}\underline{\sigma})\sigma^{(\ell)}\right) + \frac{1}{2} Sp\left(\sigma^{(k)}(\underline{n}\underline{\sigma})\sigma^{(\ell)}(\underline{n}\underline{\sigma})\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$= \cos\varphi\,\delta_{k\ell} + (1-\cos\varphi)n_k n_\ell + i\varepsilon_{k\ell m} n_m \sin\varphi$$ ezt tavaly kiszámoltuk.



"Fedés" Az SU(2) fedi az SO(3)-t

Ha az R^+-t feltekerjük magára, és kicsit...

$(R^+) \longrightarrow U(1)$

Az egész számok a homomorf magja, azok a mellékosztályok, amelyek tört része azonos

topológiailag különbözőek

Jelentősebb a fent érintett - osztani a topológiában
- ekvivalencia osztályokra bontva, és a faktorcsoportot nézzük, nem magát a csoportot
- homeomorfizmus; homotópia → tereket jellemző, van több

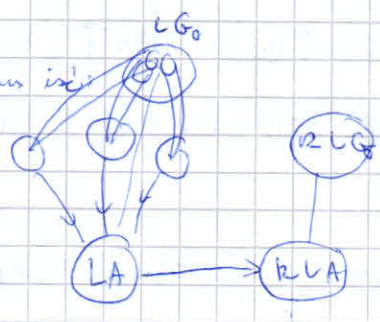
A homotópia csoportja a szabadságnak

A forgatásnak π megfelelő gömböt ... akkor a ... a ..., a ..., vagy a ....

... A gömb szemközti pontjai ekvivalensek ⇒ ... topológiailag a 3D-s projektív sík (tér)

A gömbfelületnek a SU(2) felel meg, ... és a D-be ..., majd újra az SO(3) ... a ... csak 1D-vel feljebb

Általános következtetés: Ha két csoport lokálisan azonos, de globálisan nem, akkor a fedő csoportból előállítható a ... ... vagy a fedés ... ...



Másik általános is:

A főnök a legegyszerűbb csoport, és utána az ő fedettjei

főnök → fedő
összefüggő → fedett

Minden a főnöknek alcsoportja, de ha az alcsoport magja közös az egyik fedés magjával, akkor az alcsoport a fedett csoport alcsoportja is

CSOPI II.

10. előadás (05.15.)

Kepler-probléma

Többféle erőtérben kiszámolva, más megoldás jön ki $\Rightarrow$ Az $\frac{1}{r^2}$ erőtérnek van valami furcsa tulajdonsága

Fock írta le, és Gyürgyi Géza matematizálta (Fizikai Szemle cikkben)

Tudjuk, hogy síkmozgás:

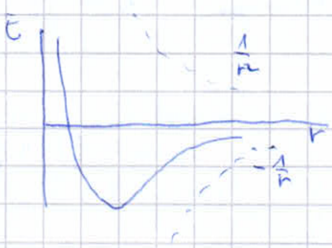
$$E = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) \qquad V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \alpha = G\,M\,m$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}e^2$$

$$J = m r^2 \dot\varphi = \text{konst}$$

$$\dot\varphi = \frac{J}{m r^2}$$

$$E = \frac{m}{2}\dot r^2 + \underbrace{\frac{J^2}{2mr^2} + V(r)}_{U(r)}$$



Szokásos diszkusszió: ha $E < 0$ akkor két r értékre van határolva.
Ha $E > 0$ akkor csak egy r_{min}, attól tetszőlegesen eltávolodhat

Általában nem ellipszis, hanem
A φ szög ismétlődési rozetta

Két esetben záródnak mindig: $V(r) = kr^2$ és $V(r) = \frac{1}{r}$

Kepler III. szerint: $T^2 \sim a^3$, de mivel $E = -\frac{\alpha}{2a}$ szerint T, a, E meghatározzák egymást. $\Rightarrow$ Az E csak a nagytengelytől függ

Ezért itt az ütközési mozgáson az irodalomban $\Rightarrow$ szimmetria van.

Itt van egy plusz megmaradó mennyiség! Runge-Lenz-vektor

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{r}\underline{r} - \frac{1}{m\alpha}\underline{p}\times\underline{J}$$

vont $\underline{p} = m\dot{\underline{r}} \rightarrow \dot{\underline{r}} = \frac{1}{m}\underline{p}$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

$$\underline{J} = m\underline{r}\times\dot{\underline{r}} = \underline{r}\times\underline{p}$$

mozgásegyenlet:

$$\dot{\underline{p}} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$$

$$\dot{\underline{r}} = \frac{1}{m}\underline{p}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(\underline{r}(t), \underline{p}(t)) = \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\alpha + \frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = \text{hosszú számolás után} = 0$$

Ez csak a két spec esetben jön ki

Tavaly óta: $r(\varphi) = \dfrac{\frac{b^2}{a}}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $\qquad \frac{b^2}{a} = p$ (paraméter $\neq \underline{p}$)

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}$$

A Runge-Lenz négyzete

$$(\underline{\varepsilon})^2 = \left(\frac{\underline{r}}{r}\right)^2 - \frac{2}{mr}\frac{\underline{r}(\underline{p}\times\underline{J})}{m\alpha} + \frac{1}{m\alpha^2}(\underline{p}\times\underline{J})^2 = *$$

$$\underline{r}(\underline{p}\times\underline{J}) = (\underline{r}\,\underline{p}\,\underline{J}) = \underline{J}(\underline{r}\times\underline{p}) = \underline{J}\,\underline{J} = J^2$$

$$(\underline{p}\times\underline{J})^2 = p^2J^2$$

$$* = 1 - 2\frac{J^2}{m\alpha r} + \frac{p^2J^2}{m^2\alpha^2} = *$$

mivel $E = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \dots$

$$* = 1 - 2\frac{J}{m^2\alpha^2}\left(\frac{p^2}{2m} - E\right) + \frac{p^2J^2}{m^2\alpha^2} = 1 + 2\frac{EJ^2}{m\alpha^2}$$

Jééé! a RL-vektor négyzete az excentricitás négyzete

Az a $\underline{\varepsilon}$ vektor az a vektor, ami az ellipszis ~~közép~~ fókuszától az ellipszis középpontjába mutat. Az RL. állandósága az ellipszispálya állandóságát mutatja

Mivel $E<0$ $\quad E = -\frac{p_0^2}{2m} = -\frac{\alpha}{2a}$ -val is jelölhetjük (mi tudjuk, hogy a a nagytengely)

$$a p_0^2 = m\alpha$$

Legyen $\underline{k} = a p_0 \underline{\varepsilon}$! $\quad k^2 = a^2 p_0^2 + 2 a^2 p_0^2 \frac{E J^2}{m\alpha^2} = a^2 p_0^2 - 2a^2 p_0^2 \frac{\alpha}{2a}\frac{J^2}{m\alpha^2} =$

$$= a p_0^2 - J^2$$

$$\Rightarrow k^2 + J^2 = a p_0^2 = a m\alpha = \frac{m\alpha a}{2|E|}$$

$$\Rightarrow \underline{E = -\frac{m\alpha^2}{2}\frac{1}{k^2+J^2}} \qquad \underline{k}\,\underline{J} = 0 \quad \text{(ezt tudjuk)}$$

Itt $k^2 + J^2 = a$ olyan, mint egy 6D-s vektor, ami a forgatásra inv (alkalmazva)

de az elforgatás után $\underline{k}$ és $\underline{J}$ nem orto.

DE!!!

Vegyük
$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & J_3 & -J_2 & k_1 \\ -J_3 & 0 & J_1 & k_2 \\ J_2 & -J_1 & 0 & k_3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} = 2(J^2+k^2)$ $\quad$ Ez skalár O E mert 4D-be vagyunk

$M'_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta}M_{\gamma\delta}$ $\quad$ ahol $F \in SO(4)$

Tehát $M' = F M \tilde F$ $\qquad \tilde M' = F \tilde M \tilde F$

$M'\tilde M' = F M \tilde F F \tilde M \tilde F = F M \tilde M \tilde F$ $\quad$ ez tényleg skalár!

Hodge-duális:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta} = -N_{\beta\alpha}$$

$$N_{12} = \frac{1}{2}\varepsilon_{12\gamma\delta}M_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{1234}M_{34} + \varepsilon_{1243}M_{43}\right) = \frac{1}{2}(M_{34} - M_{43}) = k_3$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & k_3 & -k_2 & J_1 \\ & 0 & k_1 & J_2 \\ & & 0 & J_3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$ a többi m.i.

A N az M-hez képest, olyan, mintha tükrözéstől volna

$M_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta} = 4\underline{J}\,\underline{k}$

$Sp(M\tilde N)$ $\quad \Rightarrow \quad \underline{J}\,\underline{k} = \frac{1}{4}Sp(M\tilde N)$

$$J^2 + k^2 = \frac{1}{2}Sp(M\tilde M)$$

Ha a $\underline{J}$ és $\underline{k}$ önkényesen merőleges, akkor a rendszernek nem csak SO(3) szimmetriája van, hanem SO(4) is: rejtett szimmetria

$$\rho_\alpha = \begin{pmatrix} \underline{r} - a\underline{\varepsilon} \\ \frac{1}{p_0}\,\underline{p}\,\underline{r} \end{pmatrix}$$ az egy négyes vektor

$$\pi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{r}{a}\,\underline{p} \\ p_0\left(1 - \frac{rp^2}{a p_0^2}\right) \end{pmatrix}$$ is

$$\rho^2 = \rho_\alpha \rho^\alpha = (\underline{r} - a\underline{\varepsilon})^2 + \frac{1}{p_0^2}(\underline{p}\,\underline{r})^2 = \ldots = a^2$$ Ez állandó

$$\pi^2 = \pi_\alpha \pi^\alpha = \frac{r^2}{a^2}p^2 + p_0^2\left(1 - \frac{rp^2}{a p_0^2}\right)^2 = \quad '' \quad = p_0^2$$ is

$$\rho_\alpha \pi_\alpha = (\underline{r} - a\underline{\varepsilon})\,\underline{p}\,\frac{r}{a} + \underline{p}\,\underline{r}\left(1 - \frac{rp^2}{a p_0^2}\right) = \quad '' \quad = 0$$

ρ és π egymásra merőleges és abs. értékük állandó (mint a körmozgás)

$$\rho_\alpha \pi_\beta - \rho_\beta \pi_\alpha = M_{\alpha\beta}$$ az impulzus momentum megfelelője

$$E = \frac{m\alpha^2}{2}\,\frac{1}{k^2 + J^2} = \frac{-m\alpha}{s_0(M\tilde{M})}$$ pörgettyűnél $E = \frac{\Theta}{2}\omega^2 = \frac{J^2}{2\Theta}$

Ez hasonlít a pörgettyűhöz

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} = \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial r_k}\dot{r}_k = \frac{1}{m}\pi_\alpha \frac{a}{r}$$

$$\frac{d\pi_\alpha}{dt} = -\frac{a}{r}m\left(\frac{p_0}{ma}\right)^2 \rho_\alpha$$ ugyanis $\omega = \frac{p_0}{ma} = \frac{\sqrt{-2mE}}{-\frac{\alpha}{2E}} \sim E^{3/2}$

Tehát: $\frac{d\rho_\alpha}{dt} = \frac{a}{r}\frac{\pi_\alpha}{m}$ és $\frac{d\pi_\alpha}{dt} = -m\omega^2\rho_\alpha\frac{a}{r}$ az $\frac{a}{r}$ tényező zavaró

$$\frac{d\rho_\alpha}{\frac{a}{r}dt} = \frac{\pi_\alpha}{m} \qquad \frac{d\pi_\alpha}{\frac{a}{r}dt} = -m\omega^2\rho_\alpha$$

Bevezetjük, hogy $\int \frac{a}{r(t)}dt = d\tau$

Tehát $$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\rho_\alpha}{d\tau} &= \frac{\pi_\alpha}{m} \\ \frac{d\pi_\alpha}{d\tau} &= -m\omega^2\rho_\alpha \end{aligned}}$$

$$\frac{d^2\rho_\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{m}\frac{d\pi_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{m}(-m\omega^2\rho_\alpha) = -\omega^2\rho_\alpha$$

$\Rightarrow$ Visszavezettük a 4D-s harmonikus oszcillátorra

Vegyünk egy 4D-s gömböt és A_α B_α vektort

úgy, hogy $A_\alpha A_\alpha = B_\alpha B_\alpha = a^2$

$$A_\alpha B_\alpha = 0$$

ρ_α az A_α és B_α lin kombja: $\rho_\alpha(t) = A_\alpha \cos\omega t + B_\alpha \sin\omega t$

$$\Pi_\alpha = m\omega\left(-A_\alpha \sin\omega\tau + B_\alpha \cos\omega\tau\right)$$

$$\omega t = \omega\tau - \varepsilon \sin\omega\tau$$

$$\rho_\alpha \Pi_\beta - \Pi_\beta \rho_\alpha = m\omega\left(A_\alpha B_\beta - B_\alpha A_\beta\right) = \text{áll}$$

Elforgatva a 4D-s gömböt a 2D-s vetület egy ellipszis, ez a bolygó valódi pályája, és ezért ezen kistérben szerint a pálya