CSOPORTELM.

1. előadás (09.27.)

Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet)

X Magnus, Grossmann: Csoportok és gráfjaik

1976 nyári iskola

Hall: Alkalmazott csoportelmélet

Martvay: Relativisztikus kvantummechanika

Csoport: Speciális algebrai struktúra : $(G,*)$ $\quad *: G\times G \to G$

↳ Egy halmazos, egy műveletes struktúra

a művelet axiómái:

1) zárt $\forall g_1,g_2\in G\ \exists g_3 : g_1*g_2=g_3$

2) asszociatív: $\forall g_1,g_2,g_3\in G: (g_1*g_2)*g_3=g_1*(g_2*g_3)$

3) van semleges elem $\exists n\in G: \forall g\in G: n*g=g*n=g$

+ esetén nullelem, · esetén egységelem

4) van inverz $\forall g\in G: \exists g'\in G: g*g'=g'*g=n$

Az axiómák között nincs ott a kommutativitás ⇒ léteznek kommutatív és nem kommutatív csop.

Az elemszám sem szerepel az axiómák között. Pl $(\{1\},\cdot)$ - triviális csoport

A legegyszerűbb végtelen csoport a $(Z,+)$ ⇒ vannak véges és végtelen csoport

A csoport elemszám: $|G|$ → a csoport rendje

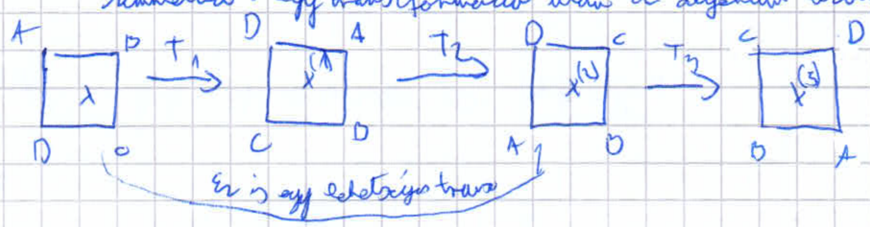
Passzív megfigyelés: fizikai modellek → mat. modellek → különböző körülmények → adatok

az adatok egymás között átkonvertálhatók

Aktív megfigyelés: transzformációkat hajtunk végre az objektumon.

Előfordulhat, hogy az objektum a tr. után nem ua. az objektum lesz.

Szimmetria: egy transzformáció után az objektum bizonyos tul. nem változnak



$x'=T_1x$

$x''=T_2x'=T_2(T_1x)=T_4x$ → Ez x-ektől független

$T_2(T_1x)=T_4x \quad \forall x$

⇓

$T_2T_1=T_4$

$x''' = T_3 x'' = T_3(T_2 x') = T_5 x' \quad \forall x$

$$\underline{T_3 T_2 = T_5}$$

$T_3(T_4 x) = T_3(T_4 x) \quad \forall x \quad \longrightarrow \quad T_3 T_2(T_1 x) = T_3(T_2 T_1 x)$

$$(T_3 T_2) T_1 = T_3 (T_2 T_1)$$

Az egymás utáni transzformációk asszociatívak!

Van semleges transzformáció (ami nem csinál semmit)

$\forall T \; \exists T' : T'T = 1$ (Amivel 2 objektum ki van cél a ekvivalens transzformációkból)

Az objektumon végzett ekvivalencia-transzformációk csoportot alkotnak, ez az objektum szimmetria csoportja

A passzív transzformációk megfeleltethetők aktívnak, de visszafelé nem feltétlen

Pl.: a teret leírhatom csavarodó koordinátákkal, de a fület csavarodni nem lehet csak

Több szimmetria csoportnak vannak lineáris transzformációjuk

Belátható, hogy a összes szimmetria csoportnak vannak lineáris transzformációi, végtelen

Ilyen a összes térbeli eltolás
Ilyen a összes időbeli eltolás (korlátozottan)
Ilyen a elforgatás

Galilei transzformációk $\Rightarrow$ galilei csoport

CSOPORTELM.

2. előadás (10.04.)

Aktív és passzív transzformáció

Passzív: ha a transz. utáni állapot ekv. a kezdetivel => Ezt nem a vektor dönti el, hanem a szaktudomány

invariáns adatok: a transzformációktól független

Ha az adatok meg is változnak, de az összefüggése megmarad -> kovariáns adatok

A szimmetria csoportoknak vannak kézzel részei, az minden csoporthoz, de ezek csak kísérleti tapasztalat

Ilyen: - eltolás: A térnek nincs kitüntetett pontja
=> A tér homogén.
Ebből le lehet vezetni az impulzusmegmaradást

- idő-beli eltolás: nem minden feltétel mellett, de észszerű esetekben igaz
Ebből levezethető az energiamegmaradás
(Mivel az ált. relativitás elm. miatt nincs idő-beli eltolás, az E-megmaradás nem igaz. Általában viszont az.)

- elforgatás: a környezettel együtt átforduló.
Pl.: egy féreg élve a valószínűség másképp lenne
A földön a gravitáció ilyen
A térben viszont nincs kitüntetett irány => a tér izotróp

- inercia rendszerek közti átmenet: Galilei-transzformáció
Ez mechanikában igaz, de az elektrodinamikában nem!!!
=> kell egy kitüntetett rendszer: éter
Einstein ≠ nincs éter

Ezt a négy elemet 2 féle képpen lehet csoportba rendezni. Az egyik a klasszikus fizika, a másik a relat. elm.

Galilei-féle csoport
Poincaré-féle csoport (ő vezette le a Lorentz-transzformációt Maxwellből)

VIGYÁZAT: A tükrözés NEM szimmetria-transzformáció

A XX. sz.-ban 2 átalakítás volt: amikor 6-eset P-ben
amikor kihalták a tükrözést

Csoport: egy műveletes struktúra

$(G, *)$ $\quad *: G \times G \to G$

- zárt: $\forall g_1, g_2 \; \exists g_3 = g_1 * g_2$
- asszociatív: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G: (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
- egységelem: $\exists e \in G, \forall g \in G: e * g = g * e = g$
- inverz: $\forall g \in G \; \exists g' \in G: g * g' = g' * g = e$

ring végzetű: - kommutativitás: $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$

- számosság: $|G| = N < \infty$

Véges csoport megadása: bármely két elem szorzatának megadásával:

G	g_1	g_2	$\dots$	g_N
g_1				
g_2	$\dots$	$\dots$	$g_2 * g_3 \in G$	
$\vdots$				
g_N				

Sejtés: minden sor és minden oszlop a fejléc permutációi

Bizonyítás: TFH: $a \in G$; $b \in G$

$a * x = b \to$ létezik-e pontosan 1db megoldás?

Mivel a-nak van inverze, az legyen a^{-1}.

Mindkét oldalt szorozzuk meg vele (1) miatt szabad: $a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$

asszociativitás miatt: $(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$

(4) miatt: $e * x = a^{-1} * b$

(3) miatt: $\boxed{x = a^{-1} * b}$

TFH két megoldás van:

$a * x = b = a * y \quad / * a^{-1}$

$x = y \to$ nincs 2 megoldás

TFH: Egy sorban többször szerepel u.a.:

	c	d
b	a	a

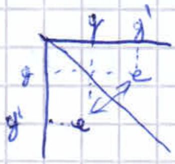
$b * c = a$

$b * d = a$ $\Rightarrow c = d = b^{-1} * a$

QED

A táblázatban az adott elemek úgy szerepelnek, mint a sakktáblán a bástyák.

És a e-re is igaz $\Rightarrow$ az e-k a főátlóra szimmetrikusak



Ha a teljes tábla szimmetrikus a főátlóra, akkor kommutatív

1 elemű csoport:

C_1: triviális csoport $\quad C_1 = (\{e\}, *)$

C_1	e
e	e

2 elemű csoport

Van-e?

C_2	e	a
e	e	a
a	a	e

(az e oszlopa és sora másolja a fejlécet)

(a tábla átlója tele van e)

Csak ez az egyféle létezik

Pl: a) $\hat{I}$ és $\hat{T}$

a művelet az egymás után

	$\hat{I}$	$\hat{T}$
$\hat{I}$	$\hat{I}$	$\hat{T}$
$\hat{T}$	$\hat{T}$	$\hat{I}$

$\rightarrow$ izomorf a C_2-vel (C_2 absztrakt)

b) $(\{-1, 1\}, \cdot)$

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Nem lehet ezzel nem izomorf csoportot csinálni, mert a kitöltés egyértelmű volt

3 elemű csoport

	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	b	e

ellentmondás

C_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$\Rightarrow$ Újra csak egy db csoport van

Pl: a)

Egy háromszög jobbra -, balra rotálása + identitás

$\boxed{r^3 = e}$ $\rightarrow$ reláció: csak az egyik csoportban igaz az összesség

Véges csoportban $\exists\, n \in \mathbb{N}^+ : a^n = e$

n-ek közül a legkisebb r rendje.

$\Rightarrow$ nem kell negatív hatványt használni

	e	r	r^2
e	e	r	r^2
r	r	r^2	e
r^2	r^2	e	r

C_n csoport az, ahol $r^n = e$.

A szabályos n-szög elforgatásainak csoportja

Ciklikus csoport $\Rightarrow$ kommutatív

CSOPORTELM.

7. előadás (10.11.)

Reláció: adott csoportban igaz szabály

Szabályos n-szögek elforgatásainak csoportja a C_n

$r^n = e$

C_n	e	r^1	r^2	r^3	...
e	e	r	r^2	r^3	...
r^1	r^1	r^2	r^3	r^4	
r^2	r^2	r^3	r^4		
r^3	r^3	r^4			

→ ciklikus permutáció

Ciklikus csoportok → végtelen sok véges csoport
kommutatívak

Minden csoport egyes elemeinek hatványai részcsoportot alkotnak (ciklikus csop.).

$H < G$ (H részcsoportja G-nek)

- önmaga mindennek részcsoportja.
- az e-ből álló csoport minden csoport részcsoportja

⇒ A C_1-en kívül minden csoportnak van 2db triviális részcsoportja (mint az oszthatóság)

Tétel: Ha $H < G$ akkor $|H| \mid |G|$ (Ezt Lagrange találta ki 40 évvel a csop.elm. előtt.)

Konstruáljunk 4 elemű csoport:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	$\boxed{?}$		
b	b			
c	c			

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	$\boxed{?}$	
c	c	b		

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

⇒ Klein-csoport

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

⇐ C_4

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

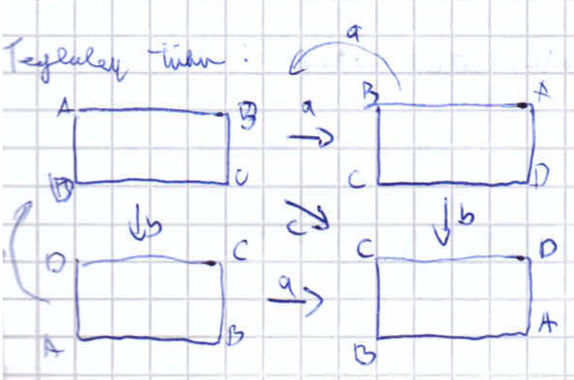
⇒

	e	b^2	b	b^3
e	e	b^2	b	b^3
b^2	b^2	e	b^3	b
b	b	b^3	b^2	e
b^3	b^3	b	e	b^2

⇓

Ez izomorf C_4-gyel

Téglalap tükr.:



⇒ Klein-csoport

Két féle 4 elemű csoport van: Klein-csoport és C_4

De prím elemű csoportból csak 1db van, a C_p ez a Lagrange tételből következik

Lagrange-tétel: Ha $H < G$, akkor $|H| \mid |G|$

Bizonyítás:

$\forall h_1, h_2 \in H: h_1 h_2 \in H$

$\forall h \in H: h^{-1} \in H$

$\boxed{\forall h_1, h_2 \in H: h_1 h_2^{-1} \in H}$

Ha $\nexists g$, ami $g \notin H$, de $g \in G$, akkor $|H| = |G|$ ✓

TFH. $\exists a \in G$, ami $a \notin H$

Vegyjük az összes ah elemet, ahol $h \in H$

$aH = \{ah \mid h \in H\}$ → mellékosztály

H és aH diszjunkt, mert, ha lenne c

$c \in H \cap aH$

$c = h_1$ és $c = ah_2 = h_1 \quad / \cdot h_2^{-1}$

$a = h_1 h_2^{-1}$ → ellentmondás

Vajon létezik-e $b \in G$, ami $b \notin H$ és $b \notin aH$

Ha $\nexists b$, akkor aH és H lefedi G-t és $|G| = 2|H|$ ✓

TFH $\exists b \Rightarrow bH = \{bh \mid h \in H\}$

Előzőek miatt bH és H diszjunkt

aH és bH is diszjunkt, mert ha lenne d

$d = ah_1 = bh_2$

$(ah_1)h_2^{-1} = b$

$a(h_1 h_2^{-1}) = b$

$ah_3 = b \Rightarrow b \in aH$ → Ellentmondás

A teljes csoport lefedhető ilyen diszjunkt osztályokkal, amelyek elemszáma egyforma

Mivel a csoport véges $|H| \mid |G|$

QED

Pikkelyezés:

Ha nem a-t, hanem a'-t választottunk volna

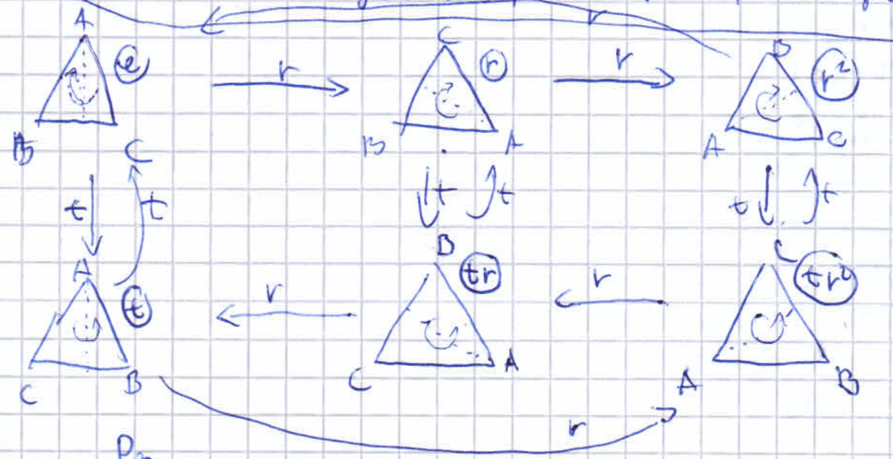
$a'H = aH$.

Legyen $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ → nem feltétlenül u.a.

aH → jobboldali mellékosztály
Ha → bal oldali mellékosztály ⇒ két féle felosztás van (csak nem komm. csoportban)

Ha a csoport kommutatív, $\forall a$: $aN = Na$

Viszont létezik olyan részcsoport: $N \triangleleft G$, ahol igaz a fenti is:



Diéder-csoport
D_n

D_3
↳ a legkisebb nem kommutatív csoport

$$\boxed{\begin{aligned} rt &= tr^2 \\ r^3 &= e \\ t^2 &= e \end{aligned}}$$ → reláció

D_3	e	r	r^2	t	tr	tr^2
e						
r						
r^2						
t						
tr						
tr^2						

$trtr = e$ → ez független?

nem mert $trtr =$)

[illegible]: megkeressük a legjobboldalibb t-t. Ha tőle balra t van, kiesik, ha r, átugrik

$rr\,trrrr\,r\,t\,(\cancel{tt})\,rr$

$(rt)r^2 \quad rr$

$(rt)rrrr \quad rr$

⋮

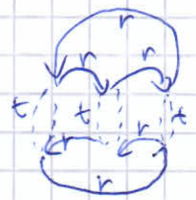
akkor eltűnik a t-k, ha páros db t volt

Ha r osztható 3-mal, meghalnak, lehetnek $3k+1$, vagy $3k-2$-en

r-ből 3 féle maradhat, t-ből 2-féle ⇒ 6 féle elem.

⇒ jelen esetben elég a fenti 3 db definiáló reláció

Δ-k nélkül:



⇒ gráf

csak a transzformációk egymáshoz képesti helyzetét mutatja

Mivel ekvivalens állapotok vannak, minden pontba és pontból ugyanannyi megy

homogén gráf: minden csúcsa gráfja homogén, és fordítva

D_3	e	r	r^2	t	tr	tr^2
e	e	r	r^2	t	tr	tr^2
r	r	r^2	e	tr^2	t	tr
r^2	r^2	e	r	tr	tr^2	t
t	t	tr	tr^2	e	r	r^2
tr	tr	tr^2	t	r^2	e	r
tr^2	tr^2	t	tr	r	r^2	e

Mik a részcsoportjai?

1 elemű: 1 db   6 elemű: 1 db

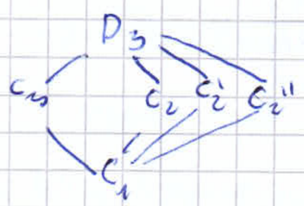
3 elemű: a bal felső sarok: C_3

2 eleműből van 3 is:

	e	t
e	e	t
t	t	e

	e	tr
e	e	tr
tr	tr	e

	e	tr^2
e	e	tr^2
tr^2	tr^2	e



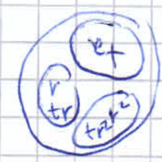
C_2, C_2' és C_2'' izomorfak, de nem azonosak

Bontsuk osztályokra! $G = D_3$ $H = \{e, t\}$

$rH = \{r, tr^2\}$

$r^2H = \{r^2, tr\}$

vagy



$Hr = \{r, tr\}$

$Hr^2 = \{r^2, tr^2\}$

Legyen $G = D_3$ $H = \{e\ r\ r^2\}$

$tH = \{t\ tr\ tr^2\}$

$Ht = \{t\ tr^2\ tr\} = tH$

Ha egy részcsoport az elemek felét tartalmazza, az normál részcsoport

Van-e olyan nem kommutatív csoport, amelynek minden részcsoportja normál? Lesz (kvaterniók)

Van-e olyan nem komm. csoport, aminek nincs normális részcsoportja? Lesz: A_5
(Abel tétele is ezen alapszik)

CSOPORTELM.

4. előadás (10.18.)

Legyen $K \subseteq G$ (komplexus)

K és L komplexus. Ekkor KL is komplexus

$$KL = \{kl \mid k \in K \text{ és } l \in L\}$$

Speciális eset, ha $K = H < G$

$HH = H$; $\{a\}H = aH$ mellékosztály

Homomorfizmus: van két struktúra, és közöttük ϕ leképezés: $\alpha = \phi(a)$

$(G_1, *)$; $(G_2, \circ)$

$a * b = c$ Legyen $\alpha = \phi(a)$ $\beta = \phi(b)$ $\gamma = \phi(c)$

Ha $\forall a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ esetén $\alpha \circ \beta = \gamma$, akkor van homomorfizmus

izomorfizmus, ha visszafelé is igaz

triviális homomorfizmus, ha valamit a triviális csoportba képezünk

Pl: $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ és $(\mathbb{R}, +)$ akkor $\gamma = \lg c$

$c = ab$ $\gamma = \alpha + \beta$ $\alpha = \lg a$

$b = \lg b$

izomorf struktúrák között mindegy melyikkel dolgozunk

Őskép: egy elemnek egy olyan halmaz, amelyek őket képezik

azok az elemek a halmazban, amelyek az egységelemre képződnek, a a homomorfizmus magja

$G_1 \xrightarrow{\phi} G_2$

$\mathrm{Ker}\,\phi \subset G_1 \to \forall k \in \mathrm{ker}\,\phi : \phi(k) = e_2$

Tétel: $\ker \phi$ részhalmaz G_1 normálosztó részcsoportja

Biz $\phi(a) \circ \phi(b) = \phi(a * b)$

$k \in K: \phi(k) = e_2$

Legyen $k_1, k_2 \in K$ $\phi(k_1) = e_2$ $\phi(k_2) = e_2$

$k_3 = k_1 * k_2$ $\phi(k_3) = \phi(k_1) \circ \phi(k_2) = e_2 \circ e_2 = e_2$

$\Rightarrow k_3 \in K$ zártság teljesül

asszociativitás - triviális

egységelem triviális mert $\phi(e_1) = e_2$ mindig

$k \in K$

$e_1 = k * k^{-1}$

$\phi(e_1) = \phi(k * k^{-1}) = \phi(k) \circ \phi(k^{-1}) = e_2 \circ \phi(k^{-1}) = e_2 \Rightarrow \phi(k^{-1}) = e_2$

Tehát K csoport

$aN = \{an \mid n \in N\}$ és $Na = \{na \mid n \in N\}$

$aN = Na$, ha $\forall n \in N \; \exists n' \; an = n'a$

Ha kommutatív, triviális, ha nem, akkor kell.

$ana^{-1} = n' \Rightarrow \forall a \in G$ és $\forall n \in N \quad ana^{-1} \in N$

Tehát $aNa^{-1} \subseteq N$

Legyen $k \in \ker \phi \qquad k' = a * k * a^{-1}$

$\phi(k') = \phi(a) \circ \phi(k) \circ \phi(a^{-1}) = \phi(a) \circ e_2 \circ \phi(a^{-1}) = \phi(a) \circ \phi(a^{-1}) =$

$= \phi(a * a^{-1}) = \phi(e_1) = e_2 \Rightarrow k' \in \ker \phi$

$K \lhd G \Rightarrow$ homomorfizmus magja normálosztó

QED

Néhány példa:

- $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow$ csoport

  5-tel osztható számok $\rightarrow$ csoport $(H, +)$

$a + H = \{a + h \mid h \in H\}$

$$\left.\begin{aligned} 1 + H &= \{1; 6; 11 \dots\} \\ 2 + H &= \{-8; -3; 2; 7 \dots\} \\ 3 + H &= \{-7, -2; 3; 8 \dots\} \\ 4 + H &= \{-1; 4; 9 \dots\} \end{aligned}\right\} \text{mellékosztályok}$$

$6 \equiv 1 \bmod 5$ A kongruencia összefügg a mellékosztályok elemeivel

Vegyük a $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ halmazt és a modulo 5 +-t.

mod +	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

izomorf a C_5 csoporttal

Ha a mellékosztály tagjait hozzárendeljük a fent. számokhoz, az homomorfizmus

a magja a H csoport, és az normálosztó ☺

- Vektorok halmaza → csoport $(V,+)$

egy egyenesen álló vektorok halmaza → csoport $(H,+)$

$\vec{a}+H=\{\vec{a}+\vec{b} \mid \vec{b}\in H\}$ → azok egymással pl. egyenesen vektorai

⇒ mellékosztályai

Vegyünk egy h-val nem pl. egyenest! és minden vektorhoz hozzárendeljük a vetületét. ⇒ homomorfizmus

---

Vegyük G-t és N normálosztóját

Vegyünk $(aN)(bN)$ elemeket

$(an_1)(bn_2)$ Mivel $bN=Nb$

$=(an_1)(n_3b)=a(n_1n_3)b=an_4b=abn_5\in(ab)N$

Tehát minden normálosztó definiálja a $(aN)(bN)\to(ab)N$ homomorfizmust

$\frac{|G|}{|N|}$ db mellékosztály van, így a G képe a G/N, vagyis G N szerinti faktora

pl: $\mathbb{Z}/\equiv$

Konjugálás

$G\ni g,h$ Legyen $g'=hgh^{-1}$ (g' konjugáltja g-nek, ha létezik h, amire jó a egyenlőség)

ha G kommutatív $g'=g$

$g'\sim g$

Tétel: $\sim$ ekvivalencia reláció

Biz: - vajon $g\sim g$? Igen, mert $ege^{-1}=ege=eg=g$ ✓

- vajon ha $g'\sim g$, akkor $g\sim g'$?

$g'=hgh^{-1}$ Létezik H, hogy $g=Hg'H^{-1}$?

$h^{-1}g'h=h^{-1}(hgh^{-1})h=(h^{-1}h)g(h^{-1}h)=g$ ✓

- vajon ha $g'\sim g$ és $g''\sim g$, akkor $g''\sim g$?

$g'=h_1gh_1^{-1}$ és $g''=h_2g'h_2^{-1}$ ⇒

⇒ $g''=h_2(h_1gh_1^{-1})h_2^{-1}=(h_2h_1)g(h_1^{-1}h_2^{-1})=h_3gh_4$

Mivel $(ab)^{-1}=(ab)(b^{-1}a^{-1})=aea^{-1}=aa^{-1}=e$, ezért $h_3^{-1}=h_4$ ✓

QED

A konjugálás szerinti felosztás nem egyforma elemszámú

Legyen $G = D_3 \ni e, r, r^2, t, tr^2, tr^2$

$e \to eee^{-1}, rer^{-1}, r^2 e (r^2)^{-1}, tet^{-1} \dots$ mindig az e $\{e\}$

$$r \to \underset{r}{ere^{-1}},\ \underset{r}{rrr^{-1}},\ \underset{r}{r^2 r (r^2)^{-1}},\ \underset{r^2}{trt^{-1}},\ \underset{r^2}{(tr) r (tr)^{-1}},\ \underset{r^2}{(tr^2) r (tr^2)^{-1}} \to \{r, r^2\}$$

$$t \to \underset{t}{ete^{-1}},\ \underset{tr}{rtr^{-1}},\ \underset{tr^2}{r^2 t (r^2)^{-1}},\ \underset{t}{ttt^{-1}},\ \underset{tr^2}{(tr) t (tr)^{-1}},\ \underset{tr}{(tr^2) t (tr^2)^{-1}} \quad \{t, tr, tr^2\}$$

$D_3 = \{e\} \cup \{r, r^2\} \cup \{t, tr, tr^2\}$

DGY szerint $D_5 = \{e\} \cup \{r, r^4\} \cup \{r^2, r^3\} \cup \{t, tr, tr^2, tr^3, tr^4\}$

Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, de nem kommutatív, ezért egy adott vizsgált csoport esetén ~~kéne~~ hasznos találni egy homomorfizmust, ami a csoport elemeit a mátrixokhoz rendeli $\Rightarrow$ Ez a csoportok ábrázolása

Állítás: Minden csoportnak van mátrixos ábrázolása, ez triviális ([1])

Ha ez izomorfia a mátrixokra, akkor az hű ábrázolás (sajnos nincs mindig)

CSOPORTELM.

9. előadás (10.25.)

Vegyünk n db elemet, és permutáljuk őket! Ez egy transzformáció

A permutációk ~~csoport~~ csoportot alkotnak, $n!$ elemmel $S(n)$ n-ed rendű szimmetrikus csoport

$|S_n| = n!$

Tétel: Minden véges csoport izomorf egy S_n részcsoporttal

$$\begin{array}{l} \text{elemek} \\ \text{hanyadik helyre} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{matrix}$$

lehet szorozni, invertálni stb.

identikus elem: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Kifejtve: $1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1$ $(1\,2\,5\,4)(3)$

$3 \to 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)(4\,5)$$

mert $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ A permutációk ciklusokra van bontva

$(1)(2)(3)(4)(5)$

$(1\,2)(3)(4)(5)$

$(1\,2)(3\,4)(5)$

$(1\,2\,3)(4\,5)$

$(1\,2\,3)(4)(5)$

Még másik felbontás: $(1\,2\,3) = (2\,1\,3)(1\,3\,2)$

transzpozíció: csak a szomszédos cserélődnek $\Rightarrow$ minden előállítható

$|A_n| = \frac{n!}{2}$ $A_n \triangleleft S_n$ alternáló csoport

$D_3 = \{e; r; r^2; t; tr; tr^2\}$ írhattam volna 6 különböző betűt, de ezt mutatja felírás: az összes elemet r és t határozzák

ezek a generátor elemek

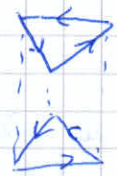
itt $\boxed{r^3 = e;\ t^2 = e;\ rt = tr^2}$ } definiáló relációk

Dmásikra így: D_4: $r^4 = e; t^2 = e;\ rt = tr^4$

ezek a gráfban egy utat definiál

A homomorfizmus során mindegy, hogy az egyes elemek hova mennek

pl.: $D_3/C_3 = C_2$



Mi van, ha ezt nem normálosztóval teszük?

pl: $D_3/D_2 \cong C_1$

A nem normálosztós homomorfizmus, az az egy elemű csoport

Vegyünk 2 db csoport! $(G_1, *)$ és $(G_2, \circ)$

$e, a, b \dots$ $\qquad \varepsilon, \alpha, \beta$

$G = G_1 \otimes G_2 \rightarrow$ direkt szorzat

$G \ni (a, \alpha)$ ahol $a \in G_1$ és $\alpha \in G_2$

Legyen $G \times G \to G$

$(a, \alpha)(b, \beta) = (a * b)(\alpha \circ \beta)$

$(e, \varepsilon)(a, \alpha) = (a, \alpha)$ egység elem

$(a, \alpha)^{-1} = (a^{-1}, \alpha^{-1})$ inverz

Nézzük G elemeit:

	G_1		
(e, ε)	(a, ε)	(b, ε)	...
(e, α)	(a, α)	(b, α)	...
(e, β)	⋮	⋮	
⋮			
H_2			

(G_2)

Elsőleg H_2 részcsoport, sőt normálosztó, ahol a mellékosztályok az oszlopok

Ugyanez sorokkal

H_2 izomorf G_2-vel $\quad H_1$ G_1-gyel

Olyan, mint a diadikus szorzás

Tehát $(G_1 \otimes G_2) \triangleright H_1 \approx G_1$

$(G_1 \otimes G_2) \triangleright H_2 \approx G_2$

$G/H_1 \approx G_2$

$G/H_2 \approx G_1$

$(e,\beta)(a,\varepsilon) = (e * a, \beta \circ \varepsilon) = (a,\beta) = (a,\varepsilon)(e,\beta)$

ez kommutál (pedig az elemei rovat nem

Egy csoport az alapján felbontható $G = G_1 \times G_2$ alakban ahol

$$G \triangleright H_1 \cong G_1 \quad \text{és} \quad G/H_1 \cong G_2$$
$$G \triangleright H_2 \cong G_2 \qquad\quad G/H_2 \cong G_1$$

Ha egy csoport nem bontható fel így, az egyszerű csoport

Így

Ez a $C_4 \otimes C_2$ mert $C_4 \otimes C_2 / C_2 = C_4$ és fordítva

Csoportok ábrázolása

Olyan homomorfizmust kell találni ahol a célcsoport – mátrixok csoportja

$GL(n,\mathbb{R}) \rightarrow$ nem 0 detű négyzetes mátrixok csoportja ($n\times n$-es valósakkal)

Az egységmátrixot rendelve mindenhez, az jó

$$G \ni g \longrightarrow \hat{D}(g) : V_n \to V_n$$

$$\hat{D}(g_1 \cdot g_2) = \hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2)$$
$$\downarrow$$
$$\underline{\underline{D}}(g_1 g_2) = \underline{\underline{D}}(g_1)\,\underline{\underline{D}}(g_2)$$

A cél, hogy a lehető legkisebb mátrixokkal való izomorfizmus megtalálása: hű ábrázolás

DE nem mindig van rá szükség

Tétel: Ha van egy ábrázolás, akkor tudunk csinálni másikat

Biz: $\underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{C}}^{-1}$ Ha $D(g)$ teljesíti a szabályt $D'(g)$ is teljesíti mert

$$\underline{\underline{D}}'(g_1)\,\underline{\underline{D}}'(g_2) = (\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g_1)\,\underline{\underline{C}}^{-1})(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g_2)\,\underline{\underline{C}}^{-1}) = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g_1)\,\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{C}}\,D(g_2)\,C^{-1} =$$
$$= \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g_1)\,\underline{\underline{D}}(g_2)\,\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g_1 g_2)\,\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{D}}'(g_1 g_2)$$

bázistranszformáció

az ekvivalencia transzformáció, mégpedig, hogy konkrétan nem valójában használjuk

Két mátrixból eldönteni, hogy ekv.-e nehéz, de belátható, hogy elég a spurt vizsgálni

CSOPORTELM.

6. előadás (11.08.)

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend left, "T_3"] & \boxed{x'} \arrow[r, "T_2"] & \boxed{x''} \end{tikzcd}$$

$x' = T_1 x$

$x'' = T_2 x' = T_2(T_1 x) = T_3$

$$T_3 = T_2 T_1$$

A fizikai mérések végén, a mérési eredmény nem számhalmaz

$x.$

$\varphi(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix} \to$ vektor

Ha T_1 passzív transzform.

x'

$\varphi(x') = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ \vdots \end{bmatrix}$

$\varphi(x)$ és $\varphi(x')$ nem egyforma, de ugyanazt az infót hordozza

Akkor x'-t csupán x alapján meg tudom mondani

$\varphi(x') = S(T_1)\,\varphi(x)$

$\varphi(x'') = S(T_2)\,\varphi(x') = S(T_3)\,\varphi(x) \Longrightarrow S(T_3) = S(T_2)S(T_1)$

$= S(T_2)\,S(T_1)\varphi(x)$

$S(T_2 T_1) = S(T_2)\,S(T_1)$

Így a $T \to S(T)$ egy homomorfizmus

Ábrázoláselmélet alaptétele: A rendszer szimmetria csoportja ábrázolódik a rendszerhez hozzárendelt lineáris téren.

$G \ni g \to \hat{D}(g) : V_n \to V_n$

$\hat{D}(g_1 g_2) = \hat{D}(g_1)\,\hat{D}(g_2)$

$\underline{\underline{D}}(g_1 g_2) = \underline{\underline{D}}(g_1)\,\underline{\underline{D}}(g_2)$

Minden ekvivalens létezik $\underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{\Omega}}^{-1}$

Itt elég a spúrt megvizsgálni, mert itt a spúr a mátrix karaktere

$\eta(g) = Sp\,\underline{\underline{D}}(g)$

Ha létezik két ábrázolásra ilyen $\underline{\underline{\Omega}}$, akkor $D' \sim D$

Ismerjük az összes nem ekvivalens D-t.

TFH találtunk különbözőket, egy 2×2-t és egy 3×3-t

Képezhető belőle 5×5-ös.  → blokk-diagonális

Ha én azt beszorzom R-rel: R  R^{-1}, ennél már nem látszik

hogy blokkdiagonális

Egy mátrix ha ily módon blokkokra bontható, redukálható (reducibilis)

ellentéte (irreducibilis)

angolul: irrep (irreducibilis representation)

Felbontásához ezeket az irrepeket kell megtalálni

Állítás: Véges csoportokhoz véges sok irrep létezik.

(karaktertáblázat; spúrokból)

Összetett mátrixok spúrjai az elemi mátrixok spúrjainak lin komb-ja, így fel lehet ismerni az összetettet

Lineáris terek direkt összege: $V_1 \oplus V_2 = V$ (dim V = dim V_1 + dim V_2)

$\underline{e}^{(i)}$ $\underline{f}^{(i)}$

V_1 $\underline{e}^{(i)}$-k lin kombja V_2 $\underline{f}^{(i)}$-k lin kombja

pl: $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ pl: $\begin{bmatrix}\delta\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \varepsilon\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Úgy képzeljük, hogy ezek alapból 5 D-sek, csak nem írjuk

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \delta\\ \varepsilon\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

innentől ugyanúgy összeadni

Ha V_1-en hatott egy 3×3-as mátrix, akkor az 5D-ben: 

Tehát V_1 az V altere

Minden $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \varepsilon\end{pmatrix}$ vektor felbontható $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \delta\\ \varepsilon\end{pmatrix}$ altérvektorainak összegére

invariáns altérek: a transzformáció során nem változnak

Ez esetben felbontható V két invariáns altérre

Invertálható-e a direkt összeadás? Nem, mert V_1-ben ∞ V_2 van

DE van értelmezett, mi ortogonális, viszont ehhez kell a sk. szorzás

ortokomplementer

Legyen: $V > U$ $\qquad U^{\perp} \to$ az U ortokomplementere

Ez alapján $V = U \oplus U^{\perp}$, ahol $\forall \underline{u} \in U$ és $\forall \underline{w} \in U^{\perp}$: $\underline{u} \perp \underline{w}$

Így minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen felbontható: $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

Az előző példában $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

A szétszedhetőség azt jelenti, hogy tér kifejezhető két ortokompl. d. összegeként

$$\left.\begin{array}{l} G \ni g \to \hat{D}(g): V \to V \\ V > U \\ \forall g \quad \forall \vec{u} \in U \quad \hat{D}(g)\vec{u} = U \end{array}\right\} \text{ invariáns altér}$$

Minden tér önmagára invariáns altere. Az egységelem is. $\Rightarrow$ triviális esetek

Ha van nem triviá invariáns altér, akkor reducibilis, ha nincs akkor irrep

Teljesen reducibilis: a másik altérre is invariáns

Tétel: minden reducibilis egyben teljesen reducibilis, ha a csoport véges

CSOPORTELM

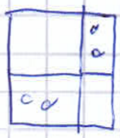
7. előadás (11. 15)

$G \ni g \rightarrow \hat{D}(g) : V \rightarrow V$

$\downarrow$

$\underline{D}(g)$

$V > W \ni \underline{w}$ Ha $\forall g \in G$ $\forall \underline{w} \in W$: $\underline{D}(g)\underline{w} \in W$ akkor W invariáns altér

Pl.:  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ az ilyen alakú 3D-s vektorok az 5D-s térben az ilyen operátorra invariáns altere

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ \varphi \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ az ilyen alakú vektorok tere is invariáns

Mivel a két altér direktösszege kiadja a teret, ezek egymás kiegészítő alterei

Az ábrázolás felbontható, ha ~~létezik~~ a kiegészítő alterei invariánsak

Aminek csak önmaga és az üreshalmaz az altere, az irrep.

kiegészítő altér: W altér kiegészítője U, ha $\forall \underline{v} \in V : \underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$ ahol $\underline{w} \in W$, $\underline{u} \in V$

végtelen sok van.

Vegyünk egy általános szorzást, és egy bázist

$V \ni \underline{e}^{(k)}$ $\quad \underline{a} = \sum_k a_k \underline{e}^{(k)}$ $\quad \underline{b} = \sum_\ell b_\ell \underline{e}^{(\ell)}$ $\quad \underline{a}\,\underline{b} = \sum_k \sum_\ell a_k b_\ell \underline{e}^{(k)} \underline{e}^{(\ell)} =$

$= \sum_k \sum_\ell a_k b_\ell g_{k\ell}$

$g_{k\ell}$ önkényes $\rightarrow$ $\underline{G}$ mátrix (metrikus tenzor)

ettől függ az ortogonalitás

kiegészítő altér választása esetén Legyen U olyan, hogy $\forall u \in U$ és $\forall w \in W$ $\underline{u}\,\underline{w} = 0$

$U = W^\perp$

Komplexekre a sk. szorzást nem lehet mindig + így módosítjuk a def.-t!

adjungálás: $\underline{\underline{A}}^+ = \tilde{\underline{\underline{A}}}^* = \widetilde{A^*}$

vektorokra: $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}^+ = (1^+ \ i^+) = (1 \ -i)$

skaláris szorzás: $\underline{a}^+ \underline{b}$ (ezt Hermit találta ki)

így $\underline{a}^+ \underline{a} = \sum_k a_k^* a_k = \sum |a_k|^2 \geq 0$

legyen $\underline{\underline{R}}$ ortogonális mátrix $\tilde{\underline{\underline{R}}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$

$\underline{a}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{a}$ és $\underline{b}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{b}$

$\hookrightarrow$ $\tilde{a}' = \tilde{\underline{a}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}}$

$\tilde{\underline{a}}'\,\underline{b}' = (\tilde{\underline{a}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}})(\underline{\underline{R}}\,\underline{b}) = \tilde{a}\,(\tilde{\underline{\underline{R}}}\,\underline{\underline{R}})\underline{b} = \tilde{\underline{a}}\,\underline{b}$

Az elforgatás megtartja a skaláris szorzatot

visszafelé legyen $\vec{a}' = \hat{A}\vec{a}$ és $\vec{b}' = \hat{A}\vec{b}$

Mi a feltétele, hogy $\vec{a}'\,\vec{b}' = \vec{a}\,\vec{b}$

$\underline{a}'\,\underline{b}' = \sum_k a_k' b_k' = \sum_k \left(\sum_e A_{ke} a_e\right)\left(\sum_m A_{km} b_m\right) = \sum_k \sum_e \sum_m A_{ke} A_{km}\, a_e b_m$

$\underline{a}\,\underline{b} = \sum_e a_e b_e = \sum_e a_e \sum_m \delta_{me} b_m = \sum_e \sum_m \delta_{em} a_e b_m$

a feltétel: $\sum_e \sum_m \left(\sum_k A_{ke} A_{km} - \delta_{em}\right) a_e b_m = 0$

$\sum_k A_{ke} A_{km} - \delta_{em} = 0$

$\sum_k \tilde{A}_{ek} A_{km} = \delta_{em}$

$\tilde{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$

Vajon mi az a mátrix, ami megtartja a komplex skalárszorzatot?

$\underline{a}' = \underline{\underline{U}}\,\underline{a}$ $\underline{b}' = \underline{\underline{U}}\,\underline{b}$ $\underline{a}^+ \underline{b} = \sum_k a_k^+ b_k$

$a_k' = \sum_k U_{ke} a_e$ $b_k' = \sum_m U_{km} b_m$

$a_k'^* = \sum_e U_{ke}^* a_e^*$

↺

$$\underline{a}'\underline{b}' = \sum_k a_k'^* b_k' = \sum_k \left(\sum_e U_{ke}^* a_e^*\right)\left(\sum_m U_{km} b_m\right) = \sum_k \sum_e \sum_m U_{ke}^* U_{km} a_e^* b_m$$

$$\underline{a}\,\underline{b} = \sum_e a_e^* b_e = \sum_e a_e^* \sum_m \delta_{em} b_m = \sum_e \sum_m \delta_{em} a_e^* b_m \doteq$$

Feltét: $\sum_k \sum_e \left(\sum_k U_{ke}^* U_{km} - \delta_{em}\right) a_e^* b_m = 0$

$$\sum_k U_{ke}^* U_{km} = \delta_{em}$$

$$\underline{\underline{U}}^+ \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{1}} \quad \longrightarrow \text{unitér mátrix}$$

Jelölés $\boxed{a} \rightarrow |a\rangle$ ket

$\hookrightarrow \boxed{} \rightarrow \langle a| \rightarrow$ bra

sk. szorz.: $\langle a|b\rangle$

dia. szorz.: $|a\rangle\langle b|$ mert $(\underline{a}\circ\underline{b})\underline{c} = \underline{a}(\underline{b}\underline{c})$

$$\big(|a\rangle\langle b|\big)|c\rangle = |a\rangle\big(\langle b|c\rangle\big)$$

$$\langle c|b\rangle = \langle b|c\rangle^*$$

Szendvics $\langle b|\hat{A}|a\rangle$

$\alpha = \langle b|A|a\rangle$

$$|u\rangle = \hat{A}|a\rangle \qquad u_k = \sum_e A_{ke} a_e$$

$$\alpha = \langle b|u\rangle = \sum_k b_k^* u_k = \sum_k \sum_e b_k^* A_{ke} a_e = \sum_k \sum_e A_{ke} b_k^* a_e \doteq$$

$$\alpha^* = \sum_k \sum_e A_{ke}^* b_k a_e^* = \sum_e \sum_k a_e^* (\hat{A})_{ek}^* b_k = \sum_e a_e^* \left(\sum_k A_{ek}^+ b_k\right) = \langle a|A^+|b\rangle$$

Tehát $\langle b|A|a\rangle^* = \langle a|A^+|b\rangle$ szendvics - szabály

Ha van egy ábrázolás, és annak egy inv. altere és annak a kiegészítő altere is inv, akkor az tovább bontható

TÉTEL

Legyen $G \ni g \to \hat{D}(g) : V \to V$

$$\hat{D}(g_1 \cdot g_2) = \hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2)$$

$$\hat{D}(e) = \hat{1}$$

$$\hat{D}(g^{-1}) = \hat{D}(g)^{-1}$$

TFH: $\forall g \; \hat{D}(g)^{-1} = \hat{D}(g)^{+} \to \underline{\underline{D}}(g)^{-1} = \underline{\underline{D}}(g)^{+}$ (unitér ábrázolás)

ebből: $\underline{\underline{D}}(g^{-1}) = D(g)^{+}$

Legyen $W < V$ inv altér és $U = W^{\perp}$

ekkor $\forall g \in G$ és $\forall w \in W$ $\underline{\underline{D}}(g)\underline{w} \in W$

Mivel $\forall \underline{w} \in W$ és $\forall \underline{u} \in U$ $\underline{w}\,\underline{u} = 0$ ezért $\forall g \in G$ $\forall w \in W, \forall u \in U$ $\underline{u}(\underline{\underline{D}}(g)\underline{w}) = 0$

oraz $\langle u | D(g) | w \rangle = 0 \Rightarrow \langle w | D^{+}(g) | u \rangle \, 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle w | D(g^{-1}) | u \rangle = 0 \Rightarrow D(g^{-1}) | u \rangle \in U$$

Vagyis egy inv. altér kiegészítője is inv. altér az unitér ábrázolásokra

Állítás: Minden $\underline{\underline{D}}(g)$-re van olyan $\underline{\underline{C}}$, hogy $\underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{C}}^{-1}$ úgy, hogy $\underline{\underline{D}}'(g)$ unitér

Biz: $G \ni g \to D(g) : V \to V$ $\quad \langle | \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

definiáljunk egy új sk. szorzatot $(|) : V \times V \to \mathbb{C}$

$$(u|v) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \langle D(g)u | D(g) v \rangle$$

→ ez nem igaz az összegre, mert az összeg nem biztos h. létezik.

belátható, hogy teljesíti a sk. szorz. szabályait

Legyen $h \in G$

$$(D(h)u | D(h)v) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \langle D(g)D(h)u | D(g)D(h)v \rangle =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \langle D(gh)u | D(gh)v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g' \in G} \langle D(g')u | D(g')v \rangle = (u|v)$$

tehát $D(h)$ az új szorzásra nézve unitér

TFH $e^{(k)}$ bázis $\langle \underline{e}^{(k)} | \underline{e}^{(l)} \rangle = \delta_{kl}$

és $f^{(k)}$ bázis $(\underline{f}^{(k)} | \underline{f}^{(l)}) = \delta_{kl}$

$\exists \hat{C} : \hat{C} \underline{e}^{(k)} = \underline{f}^{(k)}$ és $\exists \hat{C}^{-1} \underline{f}^{(k)} = \underline{e}^{(k)}$

$\underline{a} = \sum a_k \underline{e}^{(k)}$ $\quad \underline{b} = \sum_l b_l \underline{e}^{(l)}$

$\langle a | b \rangle = \sum_k \sum_l a_k b_l \langle \underline{e}^{(k)} | \underline{e}^{(l)} \rangle = \sum_k \sum_l a_k b_l \delta_{kl} = \sum_k a_k b_k$

$\underline{a}' = \underline{\underline{C}}\,\underline{a} = \underline{\underline{C}} \sum_k a_k \underline{e}^{(k)} = \sum_k a_k C \underline{e}^{(k)} = \sum_k a_k \underline{f}^{(k)}$

$b' = \sum_l b_l \underline{f}^{(l)}$

$(a' | b') = \sum_k \sum_l a_k b_l (f^{(k)} | f^{(l)}) = \sum_k a_k b_k$

vagyis $\langle a | b \rangle = (a' | b') \Rightarrow$ $\quad (C\underline{a} | C\underline{b}) = \langle a | b \rangle$

$\quad (a | b) = \langle C^{-1} a | C^{-1} b \rangle$

Legyen $\underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{D}}(g) \underline{\underline{C}}$

$\langle \underline{\underline{D}}'(g) \underline{u} | \underline{\underline{D}}'(g) \underline{v} \rangle = \langle C^{-1} D(g) C u | C^{-1} D(g) C v \rangle = \big(D(g) C \underline{u} \,|\, D(g) C \underline{v} \big) =$

$= (C \underline{u} | C \underline{v}) = \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle$ $\quad$ ezt a $D'(g)$-t kerestük

QED

CSOPORTELM.

8. előadás [11.22.]

Minden csoporthoz keressük az összes irrepjét

Állítás: minden véges csoportnak véges sok irrepje van.

Schur-lemmák

S-1.

$$G \ni g \to D(g) : V \to V$$

$$\hat{D}(g_1 g_2) = \hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2) \quad \text{TFH - ez egy irrep}$$

Legyen $\hat{A} : V \to V$, ami $\hat{D}(g)\hat{A} = \hat{A}\hat{D}(g)$ ($\hat{A} = \hat{\mathbb{1}}$ és $\hat{A} = \hat{0}$ mindig jó)

Állítás: $\hat{A} = \lambda \hat{I}$

Bizonyítás: Segédtétel: Ha $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A}$, akkor a sajátvektorai közösek csak az állítás

TFH. létezik egy ilyen: $\hat{A}$. Ekkor létezik legalább 1db $\vec{v}$ sajátvektora

$\hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\quad \vec{v}$ egy invariáns altér eleme

$\vec{u}' = \hat{D}(g)\vec{u}$ $\quad$ Mutassuk meg, hogy $\hat{A}\vec{u}' = \hat{A}\hat{D}(g)\vec{u} = \hat{D}(g)(\hat{A}\vec{u}) =$

$$= \hat{D}(g)\lambda\vec{u} = \lambda(\hat{D}(g)\vec{u}) = \lambda\vec{u}'$$

Ezeken $\vec{u}$-k is invariáns alteret alkotnak

Mivel $\hat{D}(g)$ irrep, ezért V vagy a nulltér ~~MIVAN~~???

vagy a teljes tér, így $\hat{A}$ az $\hat{I}$ többszöröse QED

S-2.

$$G \ni g \to \hat{D}^{(1)}(g) : V_1 \to V_1 \quad \text{irrep}$$

$$ \to \hat{D}^{(2)}(g) : V_2 \to V_2 \quad \text{irrep}$$

Vegyünk egy $\hat{A}$-t, ami $\hat{A} : V_1 \to V_2$ (téglalapmátrix)

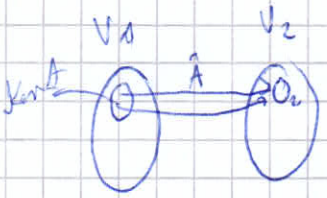
ami $\hat{A}\hat{D}^{(1)}(g) = \hat{D}^{(2)}(g)\hat{A}$ (a nullmátrix ilyen)

Állítás: $\hat{A}$ vagy a nullmátrix, vagy $\exists \hat{A}^{-1}$

Biz: - Ha $\exists \hat{A}^{-1}$, akkor $\hat{D}^{(2)}\hat{A} = \hat{A}\hat{D}^{(1)}$

$$\hat{D}^{(2)} = \hat{A}\hat{D}^{(1)}\hat{A}^{-1} \Rightarrow D^{(1)} \text{ és } D^{(2)} \text{ ekvivalens}$$

-



Ker $\underline{\hat A}$ a leképezés magja

Biz be, hogy Ker $\underline{\hat A} < V_1$

$$\hat A \vec a = \vec 0_2 \qquad \hat A \vec b = \vec 0_2$$

$$\hat A(\alpha \vec a + \beta \vec b) = \alpha \hat A \vec a + \beta \hat A \vec b = \vec 0_2 \quad \checkmark$$

Biz be, hogy $\vec a \in$ Ker $\underline{\hat A} \Rightarrow \hat D^{(1)}(g)\vec a = \vec a' \in$ Ker $\underline{\hat A}$ tehát inv altér

$\hat A \vec a' = \hat A \hat D^{(1)}(g)\vec a = \hat D^{(2)}(\hat A \vec a) = \hat D^{(2)}(g)\vec 0_2 = 0_2 \Rightarrow$ tehát inv altér ✓

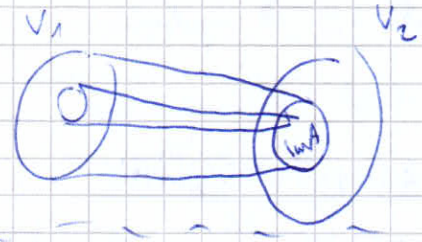
Innentől Ker $\underline{\hat A}$ vagy $\{\vec 0_1\}$ vagy V_1 QED

Im $\underline{\hat A} \in V_2$ ez a V_1 képe, más írom le, hogy ez altér

ha $c \in$ Im$\underline{\hat A}$ akkor $\exists\, \vec a \in V_1$ $\hat A \vec a = \vec c$

$\vec c, \vec d \in$ ImA $\Rightarrow \hat A \vec b = \vec d$

$\vec v = \alpha \vec c + \beta \vec d = \alpha \hat A \vec a + \beta \hat A \vec b = \hat A(\alpha \vec a + \beta \vec b) = \hat A \vec w$ ✓



TFH: $c \in$ Im $\underline{\hat A}$ $\qquad \vec c = \hat A \vec a \quad \vec a \in V_1$

$\Rightarrow \vec c' = D^{(2)}(g)\vec c = \hat D^{(2)}(g)\hat A \vec c = \hat A(D^{(1)}(g)\vec c) = \hat A \vec b \Rightarrow b \in V_1$

Im $\underline{\hat A}$ is inv. altér, de mivel $D^{(2)}(g)$ irred. szerint

Im $\underline{\hat A}$ vagy $\{\vec 0_2\}$ vagy V_2

4 eset:

$\underline{\alpha\gamma}$ Ker $\underline{\hat A} = \{\vec 0_1\}$ Im $\underline{\hat A} = \{\vec 0_2\}$ — csak a $\vec 0_1$ képződik $\vec 0_2$-re, de csak a $\vec 0_1$-re képződhet

$\Rightarrow V_1 = \{\vec 0_1\} \rightarrow$ uncsi

$\underline{\alpha\delta}$ Ker $\underline{\hat A} = \{\vec 0_1\}$ Im $\underline{\hat A} = \{\vec 0_2\}$ — csak a $\vec 0_1$ képződik $\vec 0_2$-re, és a teljes V_2-re képződnek. $\Rightarrow$ létezik $\hat A^{-1}$, mert kölcsönösen egyértelmű

$\underline{\beta\gamma}$ Ker $\underline{\hat A} = V_1$ Im $\underline{\hat A} = \{\vec 0_2\}$ — V_1 minden tagja a $\vec 0_2$-be képződik $\hat A = \hat 0$

$\underline{\beta\delta}$ Ker $\underline{\hat A} = V_1$ Im $\underline{\hat A} = \{V_2\}$ — Mindenki $\{\vec 0_2\}$-be képződik, mi nagyon a V_2

↯ ELL — UNCSI

$\hat{B}$ egyszer leképezés $V_1 \to V_2$! Vegyünk egy $D^{(1)}(g)$-t és $D^{(2)}(g)$

$$\hat{D}^{(2)}(g^{-1})\,\hat{B}\,\hat{D}^{(1)}(g) \text{ is olyan, ami } V_1 \to V_2$$

Legyen $\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} \hat{D}^{(2)}(g^{-1})\,\hat{B}\,\hat{D}^{(1)}(g)$! Állítás: az tudja az S-Z-t.

Biz.: S-Z feltétele miatt: $D^{(2)}(g)^{-1} A\, D^{(1)}(g) = A$

Nézzük: $\hat{D}^{(2)}(h^{-1})\hat{A}\,D^{(1)}(h) = \hat{D}^{(2)}(h^{-1})\left(\frac{1}{N}\sum_{g\in G} \hat{D}^{(2)}(g^{-1})\,\hat{B}\,\hat{D}^{(1)}(g)\right)\hat{D}^{(1)}(h) =$

$$= \frac{1}{N}\sum_g D^{(2)}(h^{-1})\,D^{(2)}(g^{-1})\,\hat{B}\,\hat{D}^{(1)}(g)\,D^{(1)}(h) = \frac{1}{N}\sum_g D^{(2)}(h^{-1}g^{-1})\,\hat{B}\,D^{(1)}(gh) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k\in G} D^{(2)}(k^{-1})\,\hat{B}\,\hat{D}^{(1)}(k) = \hat{A} \to$$ ez vagy a $\hat{0}$, vagy van inverze

QED

Mivel $\hat{B}$ önkényes, ez minden $\hat{B}$-re igaz

Ha ugyanaz a rep., $D^{(1)}(g)$ és $D^{(2)}(g)$ ekvi., akkor mindig $\hat{A} = \lambda\hat{I}$

ellenkező esetben $\hat{A} = \hat{0}$.

Mennyi lehet λ?

$$\mathrm{Sp}\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix} = n\lambda, \text{ ahol } n \text{ az ábrázolás dimenziója}$$

ez csak akkor igaz, ha D^1 és D^2 ekvi

$$\mathrm{Sp}\,\underline{\hat{A}} = \frac{1}{N}\sum_g \mathrm{Sp}\left(\hat{D}(g^{-1})\,B\,D^{(1)}(g)\right) = \frac{1}{N}\sum_g \mathrm{Sp}\left(\hat{D}^{(1)}(g)\,D^{(1)}(g^{-1})B\right) = \frac{1}{N}\sum_g \mathrm{Sp}\left(D(e)B\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_g \mathrm{Sp}\,B = \mathrm{Sp}\,\hat{B}$$

Mivel $\mathrm{Sp}\,\underline{A} = \lambda n$ ezért $\lambda = \frac{1}{n}\mathrm{Sp}\,\hat{B}$

Tehát lambda $\frac{1}{n}\mathrm{Sp}\,B$, ha $D^{(1)}\ D^{(2)}$ ekvi, vagy 0.

Vegyük az összes $D^1, D^2 \dots D^n$ irrepet

$D^{(\mu)}(g)$ és $D^{(\nu)}(g)$ esetén

$$\boxed{\underline{A} = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{n_\mu}\,\mathrm{Sp}\,\underline{B}\;\hat{I}_{n_\mu}}$$ ahol $\underline{B}$ leképezés

Mivel $\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g^{-1})\,\hat{B}\,D^{(\nu)}(g)$ $\quad\hat{B}$ leképezése megszabja D-ket

$$A_{kl} = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\sum_p\sum_q D^{(\mu)}(g^{-1})_{kp} B_{pq} D^{(\nu)}(g)_{ql} = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{n_\mu}\left(\sum_p\sum_q B_{pp}\delta_{pq}\right)\delta_{kl}$$

$$\sum_p\sum_q\left[\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g^{-1})_{kp} D^{(\nu)}(g)_{ql} - \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{kl}\right]B_{pq} = 0$$

~~p és q~~ Olyan $\underline{B}$-re amelyikben csak egyetlen elem nem 0, az [ ] rész adott elemének 0-val kell lennie ⇒ mivel $\forall$ p és q jó ezért $[\ ] = \hat{0}$

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g^{-1})_{kp} D^{(\nu)}(g)_{ql} = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{kl}$$

Adott ábrázolásnál, ha kiválasztunk kl és pq-t, és a $D^{(\mu)}$ és D^{ν} adott helyeinél kivett összes (g) elemhez tartozó vektorok skaláris szorzata ezek 0 a fenti alapján. Ezek általában 0-tól eltérő oldal miatt (Rotációk új bázisfelület)

$\sum_\mu n_\mu^2$ db vektor van, de csak N db mozgásos vektor így $\sum_\mu n_\mu^2 \leq N$

⇒ VÉGES számú irrep van.

Az, hogy ott egyenlőség van BURNSIDE bizonyította

- -

Legyenek D-k unitérek

$$D^{(\mu)}(g)^{+} = D^{(\mu)}(g)^{-1} = D^{(\mu)}(g^{-1})$$

$$D^{(\mu)}(g^{-1})_{kp} = D^{(\mu)+}(g)_{kp} = \left[D^{(\mu)}(g)_{pk}\right]^{*}$$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g)^{*}_{pk} D^{(\nu)}(g)_{ql} = \frac{1}{n_\mu}\cdot\delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{kl}}$$

⇓

ez fent a komplex vektorok skaláris szorzata

$\sum_m e_m^{(k)*} e_n^{(l)} = \delta_{kl}$ ← ortogonalitási reláció

A fenti képletben m helyett g van, k és l helyett vannak 3-3 indexek pl. $\mu\nu$; pq; kl.

Az összes ilyen vektor ortogonális sémát alkotnak

Teljességi reláció : $\forall \underline{v}\ \exists c_k : \underline{v} = \sum_k c_k \underline{e}^{(k)}$

$$\underline{e}^{(l)} \underline{v} = \sum_k c_k \underline{e}^{(k)} \underline{e}^{(l)} = c_l \quad \text{és} \quad \underline{e}^{(k)} \underline{v} = \sum_m e_m^{(k)*} v_m = c_k$$

$$\underline{v} = \sum_k \left(\sum_m e_m^{(k)*} v_m \right) \underline{e}^{(k)}$$

$$v_l = \sum_k \sum_m e_m^{(k)*} v_m e_l^{(k)} = \sum_m \delta_{lm} v_m$$

$$\sum_m \left(\delta_{lm} - \sum_k e_m^{(k)*} e_l^{(k)} \right) v_m = 0 \Rightarrow \sum_m e_m^{(l)*} e_m^{(k)} = \delta_{kl} \quad \text{ortogonalitás (skalár)}$$

$$\hookrightarrow \sum_k e_l^{(k)} e_m^{(k)*} = \delta_{lm} \quad \text{teljesség} \quad \text{(diagonális)}$$

A ... irrepekre

$$\sum_\mu \sum_p \sum_k D^{(\mu)}(g)_{pk} D^{(\mu)}(h)_{pk} = (\cdot\cdot)\, \delta_{gh} \quad \text{ez a teljesség az irrepekre}$$

$$D'(g) = C D(g) C^{-1}$$

$$\eta(g) = S_p D(g) \rightarrow \chi^{(\mu)}(g) = S_p \underline{\underline{D}}^{(\mu)}(g)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)}(g)^* \chi^{(\nu)}(g) = \frac{1}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \cdot n_\mu = \delta_{\mu\nu}$$

Mi is a χ $\quad f: G \rightarrow \mathbb{C}$

$g \rightarrow f(g)$ ez lineáris

$$\langle f | h \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f(g)^* h(g) \Rightarrow \langle \chi^{(\mu)} | \chi^{(\nu)} \rangle = \delta_{\mu\nu}$$

Az irrepek ortonormáltak

CSOPORTELM.

9. előadás (11.29.)

$G \ni g \to f_1(g),\ f_2(g)$ $\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f_1(g)^* f_2(g)$

$[\underline{\underline{D}}^{\mu}(g)]_{kl}$ $\langle D^{\mu}_{kl} | D^{\nu}_{pq} \rangle = \frac{1}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{kp} \delta_{lq}$

$\chi^{\mu}(g) = Sp(\underline{\underline{D}}^{\mu}(g))$ $\langle \chi^{\mu} | \chi^{\nu} \rangle = \delta_{\mu\nu}$

Állítás

Két irrep akkor és csak akkor ekvi, ha χ megegyeznek

Ha ekvi, akkor a Sp megegyezik, így $\langle \chi | \chi \rangle = 1 \Rightarrow \mu = \nu$

Ha nem, ~~akkor Sp~~ egyenlő a Sp, akkor $\langle \chi | \chi \rangle = 0 \Rightarrow \mu \neq \nu$

Állítás: két redukt. ábrázolás.

$\eta(g) = \sum_\mu m_\mu \chi^{(\mu)}(g)$ ha a μ irrep m_μ-szor szerepel

$$\langle \eta | \eta \rangle = \langle \sum_\mu m_\mu \chi^{\mu} | \sum_\nu m_\nu \chi^{\nu} \rangle = \sum_\mu \sum_\nu m_\mu m_\nu \underbrace{\langle \chi^{\mu} | \chi^{\nu} \rangle}_{\delta_{\mu\nu}} = \sum_\mu m_\mu^2$$

Ha $\langle \eta | \eta \rangle$, akkor az ábrázolás irrep

$$\langle \chi^{\mu} | \eta \rangle = \langle \chi^{\mu} | \sum_\nu m_\nu \chi^{\nu} \rangle = \sum_\nu m_\nu \underbrace{\langle \chi^{\mu} | \chi^{\nu} \rangle}_{\delta_{\mu\nu}} = m_\mu$$

Egy tetszőleges redukt. egyértelműen megadható a összeállítás-elemei: $D = \bigoplus_\mu m_\mu D^{(\mu)}$

$g' \sim g$ ha $g' = h g h^{-1}$

$\underline{\underline{D}}(g') = \underline{\underline{D}}(h g h^{-1}) = \underline{\underline{D}}(h) \underline{\underline{D}}(g) \underline{\underline{D}}(h)^{-1}$ $\eta(g') = Sp\, D(g') = Sp\, D(g) = \eta(g)$

konjugált elemosztályon tagjaiban η-je egyenlő

C_k $f(g) = f(g')$ ha $g \sim g'$ f: centrális függvény

konjugált elemosztály, a.k. $k \in [1, r]$

A centrális fgv-ek tere r dimenziós

Állítás: A karakterek a centrális fgv-ek terében ortonormált bázist alkotnak

Burnside tétele ⇒ Annyi db karakter van, ahány konjugált elemosztály

továbbá $\sum_{\mu=1}^{r} n_\mu^2 = N$

Ha $r = N$, az komm. csoport és ekkor $n_\mu = 1$ $\forall \mu$-re.

⇒ kommutatív csoportok ábrázolásai 1 dimenziósak (számok)

D_3 csoport esetén $N=6$ $r=3$ $6 = 1^2+2^2+1^2$

2 db 1 dimes ábrázolás és 1 db 2 dimes

D_5 csoport esetén $N=10$ $r=4$ $10 = 1^2+1^2+2^2+2^2$

Egy adott csoport karaktertáblázata

G	C_1	C_2 ...	C_n
$\chi^{(1)}$			
$\chi^{(2)}$		...	
⋮			
$\chi^{(r)}$			

Az elemosztályok jele: az egység ~~csoport~~ tag nagy betűvel és a tagszám

$D_3 = \{e\} \cup \{r; r^2\} \cup \{t; tr; tr^2\}$: $1E; 2R; 3T$

$D_5 = \{e\} \cup \{r; r^4\} \cup \{r^2; r^3\} \cup \{t; tr; tr^2; tr^3; tr^4\}$: $1E; 2R; 2R^2; 5T$

$s_k = |C_k| \Rightarrow \sum_k s_k = N$

Mi alapján töltjük ki?

a karakterek ortogon. $\langle \chi^\mu | \chi^\nu \rangle = \frac{1}{N} \sum_g \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) =$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{r} s_k \chi^\mu(C_k)^* \chi^\nu(C_k) = \delta_{\mu\nu}$$

Minden csoportnak létezik a triviális ábrázolás ⇒ az első sor csupa egyes 1.

Az első oszlop az adott ábrázolás dim-je (egységelem)

Sorok ortogonalitása szerint: $\boxed{\sum_k n_k \chi^\mu(C_k)^* \chi^\nu(C_k) = N\delta_{\mu\nu}}$

oszlopok —— " —— : $\boxed{\sum_\mu \chi^\mu(C_k)^* \chi^\mu(C_l) = \frac{N}{n_k}\delta_{kl}}$

TELJESSÉGI REL.

D_3	1E	2R	3T
A_1	1	1	1
A_2	1	α 1	β −1
B	2	−1	0

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot 1^2 + 2|\alpha|^2 + 3|\beta|^2 = 6 \\ 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot\alpha + 3\cdot 1\cdot\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha = 1\\ \beta = -1\end{array}$$

A_1 és A_2 triviális

B-nél már mátrixok vannak.

Mivel a forgatómátrix: $\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ és itt 120°-os forgatásunk van

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{R}} = -1 \qquad \underline{\underline{R}}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{\tilde{R}}} \quad \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{R}}^2 = -1 \checkmark$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Sp} = 0 \checkmark$$ innen mától triviális

Csoportján alapú $\underline{\underline{D}}$ ábrázolást: $A_1 \oplus 2A_2 \oplus 4B = D$

D dimenziója 11

	1E	2R	3T
D	11	−1	−1

vagy számítsuk ki, hogy mennyi

$$m_\mu = \langle \chi^\mu | \eta \rangle = \frac{1}{N}\sum_g \chi^\mu(g)^* \eta(g) = \frac{1}{N}\sum_k n_k \chi^\mu(C_k)^* \eta(C_k)$$

$$m_{A_1} = \frac{1}{6}\left(1\cdot 1\cdot 11 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot(+1)(-1)\right) = 1$$

$$m_{A_2} = \frac{1}{6}\left(1\cdot 1\cdot 11 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1)(-1)\right) = 2$$

$$m_B = \frac{1}{6}\left(1\cdot 1\cdot 11 + 2\cdot(-1)(-1) + 3\cdot 0\cdot(-1)\right) = \frac{1}{4}$$

Ez az ábrázolás kiredukálva

Adott D reduk. ábrázolás

$$\underline{\underline{P}}^{(\mu)} = \frac{1}{N} \sum_g \chi^{(\mu)}(g)^* \underline{\underline{D}}(g)$$

$\underline{\underline{P}}^{(\mu)}$ levetít a μ. altérbe, vagy valami ilyesmibe

ami $m_\mu \cdot \dim_\mu$ dimenziós

CSOPORTELM

10. előadás (12. 06.)

Kvaterniók szorzótáblája:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ $\quad ij = k \quad ji = -k$

$jk = i$

$ki = j \quad kj = -i$

$ik = -j$

8 elemű csoport $(1; i; j; k; -1; -i; -j; -k)$ hiszen

- asszociatív
- van inverz
- van egység
- zárt

Mivel inverz $-i = i^3$

$-j = j^3$

$-k = k^3$

+ használt egyik jel $k = ij$; $k^3 = ji$

$1 \to e \qquad -1 \to a^2$

$i \to a \qquad -i \to a^3$

$j \to b \qquad -j \to b^3$

$k \to ab \qquad -k \to ba$

Q	e	a	a^2	a^3	b	b^3	ab	ba
e	e	a	a^2	a^3	b	b^3	ab	ba
a	a	a^2	a^3	e	ab	ba	b^3	b
a^2	a^2	a^3	e	a	b^3	b	ba	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	ba	ab	b	b^3
b	b	ba	b^3	ab	a^2	e	a	a^3
b^3	b^3	ab	b	ba	e	a^2	a^3	a
ab	ab	b	ba	b^3	a^3	a	a^2	e
ba	ba	b^3	ab	b	a	a^3	e	a^2

Részcsoportok: $C_2(e; a^2) = H_1$

$C_4(e; a; a^2; a^3) = H_2$ (a hatványai)

$(e; b; a^2; b^3) = H_3$ (b hatványai)

$(e; ab; a^2; ba) = H_4$ (ab hatványai)

Mivel a^2 mindenkivel kommutál, ezért H_1 normál-részcsoport.

Minden részcsoportja normális.

konjugált osztályok: $\{e\} = C_1$

$C_2 = \{a^2\}$ mert kommutál

$hah^{-1} \Rightarrow \quad eae^{-1} = a \cdot a$

$a a a^{-1} = a$

$a^2 a a^{-2} = a$

$a^3 a a^{-3} = a$

$b a b^{-1} = b a b^3 = a^3$

$C_3 = \{a; a^3\}$

hasonló módon: $C_4 = \{b; b^3\}$

$C_5 = \{ab; ba\}$

$r = 5 \qquad N = 8$

Burnside miatt $\underbrace{1+1+1+1+2^2 = 8}$

az irreduc. dimjei: $n_1 = 1 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = 1 \quad n_4 = 1 \quad n_5 = 2$

Karaktertábla

Q	1E	1 A^2	2 A	2 B	2 AB
A_0	1	1	1	1	1
A_1	1	1	1	−1	−1
A_2	1	1	−1	1	−1
A_3	1	1	−1	−1	1
B	2	−2	0	0	0

A 3 1 dimes ábrázolás olyan, mintha multiplik. szorzat reprezentáció.

$A_2 A_1$; $A_2 A_4$-ben $i \to 1$ $j \to 1$ $k \to 1$ 1-gyel reprezentálva

Az utolsó sor az ortogonalitás alapján

Pauli mátrixok $-i$-szerese: $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$D = 3A_1 + 2A_2 + 2B$

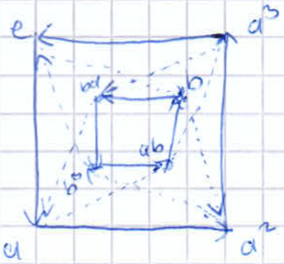
D	9	1	1	−5	−1

$D = \sum_\mu m_\mu D^{(\mu)} \qquad \eta = \sum m_\mu \chi^{(\mu)} \qquad m_\mu = \langle \chi^{(\mu)} | \eta \rangle$

$m_0 = 0 \qquad m_1 = 3 \ldots$

generátorok: $a^4=e$; $b^4=e$; $a^2=b^2$; $(ab)^2=a^2$

gráf:



rezgés leírása: $\ddot{u}_k(t)=\sum_e A_{ke} u_e$

$$\underline{\ddot{u}}(t)=\underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t)$$

legyen TFH: $\underline{u}(t)=\underline{a}\,e^{i\omega t}$ $\qquad \underline{\ddot{u}}(t)=-\omega^2\underline{a}\,e^{i\omega t}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{a}=-\omega^2\underline{a}$$

Ahány megoldás van, akkány sajátértéke a mátrix, és a valódi megoldás a sajátvektorok lineáris kombinációja

Ha a molekulában a rácsban van, az egyenlet nem lineáris, de linearizálja

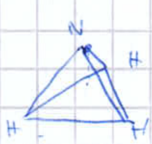
Itt több zérus módus van. pl.

ez 3 test 2 irányú 6 dimenziós

Ebből 2 eltolás + 1 forgatás = 3 zérus módus

így 3db rezgés van

NH_3 molekulánál 12 dimenziós, ebből 6 zérus módus van.



6 rezgés van, de léteznek szimmetriák

r: elforgatható a csúcs körül $\quad r^3=e$

t: lehet tükrözni $\quad t^2=e$

Izomorf a D_3 csoporttal

A tükrözés azt jelenti, ha egy a kezdőfeltételeket fordítva állítva, az ugyanolyan lehetséges rezgését kapjuk, és az eredeti rezgés fordítottja

$$\underline{\ddot{u}}(t)=\underline{\underline{A}}\,\underline{u} \rightarrow \underline{\ddot{u}}'(t)=\underline{\underline{A}}\,\underline{u}'$$

$$T\underline{\ddot{u}}=\underline{\underline{A}}\,T\underline{u}$$

$$T\underline{\underline{A}}\,\underline{u}=\underline{\underline{A}}\,T\underline{u} \Rightarrow TA=AT$$

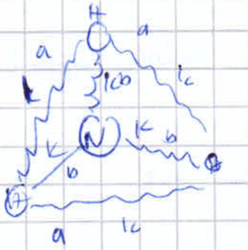
$\underline{\underline{A}}$ kommutál az szimmetriák ábrázolási mátrixaival

A szimmetria operátorokat a rendszer fizikájából tudjuk, és a spinjük alapján felbonthatók irrepekre

CSOPORTELM

14. előadás (12.13.)

Ammónia



paraméterek: $M;\ m;\ a;\ b;\ K;\ k$

Minden atomhoz válasszunk saját bázist!

$$\ddot{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t) \quad \leftarrow \text{12 dimenziós}$$

feltesszük, hogy $\underline{u} = \underline{a}\, e^{i\omega t}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = -\omega^2 \underline{u} \quad \leftarrow \text{sajátérték probléma}$$

Ha $\underline{u}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{u}$ akkor u'-re is igaz, hogy $\ddot{u}' = \underline{\underline{A}}\, u'$

$$(T u)^{\cdot\cdot} = A(Tu)$$

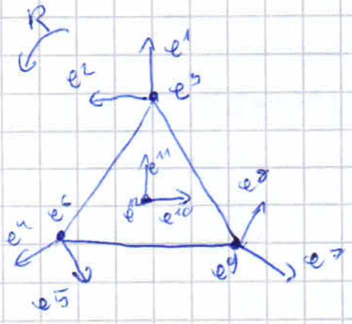
$$T \underline{\underline{A}}\, \underline{u} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}}\, u$$

$$TA = AT$$

Tehát $\underline{\underline{A}}$ kommutál mind a 6 db $\underline{\underline{T}}$-vel ami a különböző bázisokba visz át.

<u>Állítás</u>: Ha két mátrix kommutál, akkor az egyik sajátvektorai benne vannak a másik saját altereiben

Meg kell keresni T-k altereit, és az $\underline{\underline{A}}$-t felosztani invariáns alterekre; ezáltal a felírandó $\underline{\underline{A}}$ alakja blokkdiagonális lesz



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{12} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots\ u_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alapesetben $e^{(1)}$ nem merőleges $e^{(4)}$-re, de a 12 dimes térben igen!

Az elrendezés szimmetriái a D_3-nak megfelelő.

A D_3 transzformációi a változókat egymásba viszik

$$R e^1 = e^4 \qquad R e^7 = e^1$$
$$R e^2 = e^5 \qquad R e^8 = e^2$$
$$R e^3 = e^6 \qquad R e^9 = e^3$$
$$R e^4 = e^7 \qquad R e^{10} = -\frac{1}{2} e^{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{11}$$
$$R e^5 = e^8 \qquad R e^{11} = -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{10} - \frac{1}{2} e^{11}$$
$$R e^6 = e^9 \qquad R e^{12} = e^{12}$$

Mert $A_{kl} = \vec{e}^k \hat{A} \vec{e}^l$

Tehát: $e^4 R e^1 = 1$

$e^5 R e^2 = 1$

$\vdots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \begin{smallmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 \\ \begin{smallmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A tükrözés

$T e^1 = e^1$ $\quad T e^7 = e^4$

$T e^2 = -e^2$ $\quad T e^8 = -e^5$

$T e^3 = e^3$ $\quad T e^9 = e^6$

$T e^4 = e^7$ $\quad T e^{10} = -e^{10}$

$T e^5 = -e^8$ $\quad T e^{11} = e^{11}$

$T e^6 = e^9$ $\quad T e^{12} = e^{12}$

Aw

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{smallmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{R}}$ és $\underline{\underline{T}}$ a D_3 ~~ra~~ reducibilis ábrázolása

D_3	$1E$	$2R$	$3T$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0
η	12	0	2

Jelen ábrázolás spurjai:

$\eta(e) = 12$

$\eta(r) = Sp\,\underline{\underline{R}} = 0$

$\eta(t) = Sp\,\underline{\underline{T}} = 2$

$\eta = \sum m_\mu \chi^{(\mu)}$ $\qquad m_\mu = \langle \chi^\mu | \eta \rangle$

$m_{A_1} = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 3$

$m_{A_2} = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3(-1) \cdot 2) = 1$

$m_B = \frac{1}{6}(1 \cdot \cancel{1} 12 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 2) = 4 \Rightarrow \boxed{\eta = 3A_1 \oplus A_2 \oplus 4B}$

$\underline{\underline{R}}$ és $\underline{\underline{T}}$ felbontható blokkdiagonálisra a fenti módon egy transzformációval.

Ugyanez a transzformáció $\underline{\underline{A}}$ mátrixot is felbontja blokkdiagonálisra

Az alterek ennyelitű projektorok képlete: $P^{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{g} \chi^{\mu}(g)^{*} D(g)$

$$P^{A_1} = \frac{1}{6}\left(E + R + R^2 + TR + TR^2 + T\right)$$

$$P^{A_2} = \frac{1}{6}\left(E + R + R^2 - T - TR - TR^2\right)$$

$$P^{B} = \frac{1}{6}\left(2E - R - R^2\right)$$

e^1 vetülete a 3D-s altérre: $P^{A_1} e^1 = \frac{1}{6}\left(E e^1 + R e^1 + R^2 e^1 + TR e^1 + TR^2 e^1 + T e^1\right) =$

$$= \frac{1}{3}\left(e^1 + e^4 + e^7\right)$$

A_1-hez tartozó vektorok: $s^1 = e^1 + e^4 + e^7$

$s^2 = e^3 + e^6 + e^9$

$s^3 = e^{12}$

$$P^{A_1} e^2 = \frac{1}{6}\left(e^2 + e^5 + e^8 - e^2 - e^5 - e^8\right) = 0$$

$$P^{A_1} e^3 = \text{kiszámolva} = \frac{1}{3}\left(e^3 + e^6 + e^9\right)$$

$P^{A_1} e^4 = P^{A_1} e^1 \quad P^{A_1} e^5 = P^{A_1} e^2 \ldots$ e^9-ig

$P^{A_1} e^{10} =$ kiszámolva 0

$P^{A_1} e^{11} =$ kiszámolva $= 0$

$P^{A_1} e^{12}$ ~ kiszámolva $= e^{12}$

a vetületei az 1D-s altérre mind 0, kivéve

$$P^{A_2} e^2 = \frac{1}{6}\left(e^2 + e^5 + e^8 - (-e^2) - (-e^5) - (-e^8)\right) = \frac{1}{3}\left(e^2 + e^5 + e^8\right) = s^4$$

e vetületei a 8D-s altérre

$$P^{B} e^1 = \frac{1}{6}\left(2E - R - R^2\right) e^1 = \frac{1}{6}\left(2e^1 - e^4 - e^7\right)$$

$$P^{B} e^4 = \frac{1}{6}\left(2e^4 - e^7 - e^1\right)$$

$$P^{B} e^7 = \frac{1}{6}\left(2e^7 - e^1 - e^4\right)$$

3-ból csak 2 független

$$P^{B} e^2 = \frac{1}{6}\left(2e^2 - e^5 - e^8\right)$$

$$P^{B} e^5 = \frac{1}{6}\left(2e^5 - e^8 - e^2\right)$$

$$P^{B} e^8 = \frac{1}{6}\left(2e^8 - e^2 - e^5\right)$$

3-ból csak 2 független

$$P^{B} e^3 = \frac{1}{6}\left(2e^3 - e^6 - e^9\right)$$

$$P^{B} e^6 = \frac{1}{6}\left(2e^6 - e^9 - e^3\right)$$

$$P^{B} e^9 = \frac{1}{6}\left(2e^9 - e^3 - e^6\right)$$

szintén

$$P^{B} e^{10} = e^{10}$$

$$P^{B} e^{11} = e^{11}$$

$$P^{B} e^{12} = 0$$

Az elemek alreprezentációban átvihetők blokkdiagonálissá tehető, amiben legalább egy teljesen diagonalizálható, a főátló elemei a sajátértékek

T sajátértékei 1 és -1.

Nézzük, hogy a tükrözés mit csinál a bázissal:

$TP^{13}e^1 = \frac{1}{6}(2e^1 - e^7 - e^4)$

$TP^{13}e^4 \leftrightarrow TP^{13}e^7$

e^7-től e^9-ig szintén

$TP^{3}e^{10} = -e^{10}$ $\quad TP^{13}e^{11} = e^{11}$

Ebből a 8-ból 4 dim a +1-hez 4 dim a -1-hez tartozik

ezek 4D-s altérre: B_+: $s^5 = 2e^1 - e^7 - e^4$ $\quad B_-$: $s^9 = e^4 - e^7$

$s^6 = e^5 - e^8$ $\quad s^{10} = 2e^2 - e^5 - e^8$

$s^7 = 2e^3 - e^6 - e^9$ $\quad s^{11} = e^6 - e^9$

$s^8 = e^{11}$ $\quad s^{12} = e^{10}$

Most már $\underline{A}$ mátrix olyan blokkdiagonális, ami 1×3 dim $\oplus$ 1×1 dim $\oplus$ 2×4 dim

$\underline{A}$ mátrix imént sajátvektorai a következők

z irányú transzláció: $Tr_z = e^3 + e^6 + e^9 + e^{12} = s^2 + s^3$

elmozdulás

$Tr_x = -e^2 + \overset{1}{(\ )}e^5 - \overset{\sqrt{3}}{(\ )}e^4 + (\ )e^2 + (\ )e^8$ $\quad$ $(\ )$: trigonometrikus szám

$Tr_y = e^1 + \underset{\frac{1}{2}}{(\ )}e^4 + \underset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\ )}e^9 + (\ )e^7 + (\ )e^8$