DIFFEGYENLETEK II.

1. előadás (09.13)

2 ZH: X.25
XII.13.

Magasabb rendű diffegyenletek:

közönséges eset: $F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots y', y, x\right) = 0$

explicit alak: $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, \dots y', y, x\right)$

k komponensű vektor esetén: $\underline{y}(x)$

$\underline{F}(\underline{y}', \underline{y}, x) = 0$ elsőrendű, k egyenletből álló diffegyenlet rendszer

Magasabb rendű egyenletek kezelése:

$y(x) = y_1(x)$

$y'(x) = y_2(x)$

$\vdots$

$y^{(n-1)}(x) = y_n(x)$ $\Rightarrow$ n-edrendű diffegyenlet visszavezethető egy n komponensű elsőrendű diffegyenletre

másodrendű esetben:

$y'' = f(y', y, x)$ $\qquad \underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$

$y_2' = f(y_2, y_1, x)$

$y_1' = y_2$

partikuláris mo. 2-odrendű esetben
2 paraméter van az ált mo-nak

① kezdeti feltételből találjuk ki: pl.: $y(x_0) = y_0$
$y'(x_0) = v_0$

② peremfeltétel $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$

Másodrendű közönséges diffegyenletek

Hiányos diffegyenlet $y'' = f(y', y, x)$

① $f(y', y)$ ② $f(y', x)$

①

$y'' = f(y', y)$

Legyen $g(y) = y'$ $\rightarrow$ $y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} g(y) = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx} = g' g = \frac{1}{2}\frac{d(g^2)}{dy}$

$\frac{1}{2}\frac{dg^2}{dy} = f(g, y) \Rightarrow g(y, c_1)$

mivel $y' = g(y, c_1)$ ez szétválasztható

$$\int \frac{dy}{g(y, c_1)} = \int dx$$

②

$y'' = f(y', x)$

Legyen $v(x) = y'(x)$

$v' = f(v, x)$ ez elsőfokú, szétválasztható

Pl.: $y' = \sqrt{1 + y'^2}$

① $g(y) = y'$ $\frac{1}{2}\frac{dg^2}{dy} = \sqrt{g^2 + 1}$ legyen $u(y) = g^2(y)$

$\frac{1}{2}\frac{du}{dy} = \sqrt{u+1}$

$\int \frac{du}{2\sqrt{u+1}} = \int dy$

$\sqrt{1+u} = y + c_1 \Rightarrow u = (y+c_1)^2 - 1 = y'^2$

$y' = \sqrt{(y+c_1)^2 - 1} \Rightarrow \text{arch}(y + c_1) = x + c_2$

$y(x) = \text{ch}(x + c_2) - c_1$

② $v(x) = y'(x)$ $v' = \sqrt{1 + v^2}$

$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int dx \Rightarrow \text{arsh}(v) = x + c_1$

$y' = v = \text{sh}(x + c_1)$

$y = \int \text{sh}(x+c_1)\,dx = \text{ch}(x+c_1) + c_2$

Peremfeltétel illesztés: $y(-a) = y(a) = 0$

Ugye $\left.\begin{array}{l} \text{ch}(a+c_1) + c_2 = 0 \\ \text{ch}(-a+c_1) + c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = -\text{ch}(a) \end{array}$

Lineáris diffegyenlet

$a(x)\,y'' + b(x)\,y'(x) + c(x) = d(x)$

$y'' + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y = r(x)$

homogén: $d(x) = r(x) = 0$

TFH $y_1(x)$ megoldás

$y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1 = 0 \quad / \cdot \lambda$

$\lambda y_1'' + p\lambda y_1' + q\,\lambda y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda y_1$ is megoldás

TFH $y_2(x)$ is megoldás

$y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu y_2$ is megoldás

összeadva: $\lambda y_1'' + \mu y_2'' + p(\lambda y_1' + \mu y_2') + q(\lambda y_1 + \mu y_2) = 0$

általános megoldás: $c_1 y_1 + c_2 y_2$

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ ha ez teljesül, akkor y_1 és y_2 alkotja alapmegoldás

a kezdeti feltétel: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{w(x_0)} \begin{pmatrix} y_2'(x_0) & -y_2(x_0) \\ -y_1'(x_0) & y_1(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$

DIFEGY II.

2. videó

2. rendű lineáris homogén diffegyenlet

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$$

Ha y_1 és y_2 független megoldások, akkor $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W \neq 0$

Mi van, ha csak y_1 ismert?

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0$$

Mivel $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ szerint $w' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' =$

$$= y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Mivel y_2 kielégíti az eredeti egyenletet)

$$w' = y_1\left(-p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right) - y_2\left(-p(x)y_1' - q(x)\,y_1\right) =$$

$$= p(x)\left[y_1 y_2' + y_1' y_2\right] = -p(x)\,w$$

Ez elsőrendű szétválasztható w-re.

$$w(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Ezt visszaírva a diffbe:

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = w(x)$$

Ez egy elsőrendű inhomogén y_2-re

homogén rész: $y_{2H} = c_2 y_1$

inhomogén rész: állandó variálás $y_{2i} = c_2(x)\,y_1$

$$y_{2i}' = c_2' y_1 + c_2 y_1'$$

$$(c_2' y_1 + c_2 y_1')\,y_1 - y_1' c_2 y_1 = w$$

$$c_2' y_1^2 = w \implies c_2' = \int \frac{w}{y_1^2}\,dx$$

Az általános megoldás: $y(x) = c_2\,y_1(x) + y_1(x)\int \frac{w}{y_1^2}\,dx =$

$$\underline{= c_2\,y_1(x) + c_1\,y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx}$$

Pl.:

$$y'' + 2xy' + x^2 y = 0$$

ismert: $y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}+x}$

$$y_1' = (1-x)\,e^{-\frac{x^2}{2}+x}$$

$$y_1'' = (1-x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}+x} - e^{-\frac{x^2}{2}+x}$$

visszahelyettesítve: $e^{(\dots)}\left[(1-x)^2 - 1 + 2x(1-x) + x^2\right] = e^{(\dots)}\left(1-2x+x^2-1+2x-2x^2+x^2\right) = 0$

y_1 tényleg megoldás, de mi y_2?

A Wronskij: $w' = -2x\,w \Rightarrow w(x) = c_1 e^{-\int 2x\,dx} = w(x) = c_1 e^{-x^2}$

azaz, y_2-re:

$$e^{-\frac{x^2}{2}+x} y_2' - (1-x) e^{-\frac{x^2}{2}+x} y_2 = c_1 e^{-x^2}$$

homogén esetben: $y_{2H}(x) = c_2 e^{-\frac{x^2}{2}+x}$

inhomogén esetben: $y_{2IN}(x) = c_2(x) e^{-\frac{x^2}{2}+x}$

ahol $c_2(x) = \int \frac{w}{y_1^2} dx = \int \frac{c_1 e^{-x^2}}{e^{-x^2+2x}} dx = c_1 \int e^{-2x} dx = -c_1 \frac{1}{2} e^{-2x}$

tehát $y_{2IN}(x) = -\frac{1}{2} c_1 e^{-2x} e^{-\frac{x^2}{2}+x} = -\frac{1}{2} c_1 e^{-\frac{x^2}{2}-x}$

Az általános megoldás:

$$y(x) = c_2 e^{-\frac{x^2}{2}+x} + c_1 e^{-\frac{x^2}{2}+x}$$

Inhomogén másodrendű diffegyenletek

~~$y''(x)$~~ $y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x)$

Az általános megoldás: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

ahol y_H a homogén megoldás, y_P pedig partikuláris

A kérdés, hogy hogy kapjuk meg y_P-t y_H-ból?

TFH $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Ekkor létezik olyan $y_P(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$ ami megoldás

$$y_P' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$$

c_1 és c_2 legyen olyan, hogy $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$! $(*)$

$$y_P' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y_P'' = c_1 y_1'' + c_1' y_1' + c_2 y_2'' + c_2' y_2'$$

Ezt visszaírva a diffegyenletbe:

$$c_1 y_1'' + c_1' y_1' + c_2 y_2'' + c_2' y_2' + p(+c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) = r$$

$$c_1 \underbrace{(y_1'' + p y_1 + q y_1)}_{\text{Ez a homogén egyenlet} \Rightarrow 0} + c_2 \underbrace{(y_2'' + p y_2' + q y_2)}_{\text{ez is} \Rightarrow 0} + c_1' y_1' + c_2' y_2' = r$$

$$\left.\begin{aligned} c_1' y_1' + c_2' y_2' &= r \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$(*)$ miatt: (second line above)

Elsőrendű lineáris diffegyenlet rendszer

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

invertálva: $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} c_1' &= -\frac{y_2 r}{w} \\ c_2' &= \frac{y_1 r}{w} \end{aligned}$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= -\int \frac{y_2 r}{w} dx \\ c_2 &= \int \frac{y_1 r}{w} dx \end{aligned}}$$

Pl.: $x y'' + 2y' + x y = x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Ha ezek peremfeltételek és $y(x)$-t csak $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$-n keressük, akkor leoszthatunk x-szel

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 1 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{2}{x}$$

$$q(x) = 1$$

$$r(x) = 1$$

A homogén egyenlet megoldása: $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ (ellenőriztük, jó.)

$$y_1'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$y_2''(x) = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\sin x}{x^3}$$

a wronskij: $w' = -\frac{2}{x} w \Rightarrow w(x) = c_1 e^{-\int \frac{2}{x} dx} = c_1 e^{-2 \ln x} = \frac{c_1}{x^2}$

Így y_2-re az egyenlet: $\frac{\sin x}{x} y_2' + \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right) y_2 = \frac{c_1}{x^2}$

homogénként: $y_{2H}(x) = C_2 \frac{\sin x}{x}$

inhomogénként: $y_{2I}(x) = C_2(x) \frac{\sin x}{x}$

ahol $C_2(x) = \int \frac{\frac{c_1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} dx = c_1 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -c_1 \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Így $y_H(x) = c_2 \frac{\sin x}{x} + c_1 \frac{\cos x}{x}$ a homogén megoldás

Az inhomogén megoldása: $y_p(x) = c_1(x) \frac{\sin x}{x} + c_2(x) \frac{\cos x}{x}$

ahol $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \int \frac{r}{w} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} dx$

$$w = \left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right)\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)\frac{\cos x}{x} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

$$c_1(x) = +\int x^2 \frac{\cos x}{x} dx = \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x$$

$$c_2(x) = -\int x^2 \frac{\sin x}{x} dx = -\int x \sin x \, dx = -\sin x + x \cos x$$

$$y_p(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} + \sin^2 x - \frac{\sin x \cos x}{x} + \cos^2 x = 1$$

Tehát az általános megoldás: $y(x) = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x} + 1$

DIFFEGY II.

3. videó

Green-függvény módszere

Kezdőfeltételek esetén:

$y'' + py' + qy = r$ homogén eset ha $r = 0$.

KF: $y(a) = y_0$

$y'(a) = v_0$

és $a \leq x \leq b$ tartományon akarjuk megoldani

$y(x)_0 = y_h(x) + y_p(x)$ Ha y_H teljesíti KF-t, y_p pedig 0-t ad benne, akkor a tel. jó

azaz: $y_h'' + py_h' + qy_h = 0$ $y_h(a) = y_0$, $y_h(a) = v_0$ $\Rightarrow$ $y_p(a) = 0$, $y_p'(a) = 0$

Mivel $y_h(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ k_1 és k_2-t meghatározhatjuk egy lin. egyenlet megoldásaként

$$y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{ahol } c_1(x) = -\int_a^x \frac{y_2(s) r(s)}{w(s)} ds \qquad c_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(s) r(s)}{w(s)} ds$$

Akkor, hogy y_p kielégítse a KF-t, ahhoz egy konstanssal kell változtatni c_1-t c_2-t.

Ehhez az kell, hogy az integrálás alsó határa a legyen

Tehát:

$$y_p(x) = \int_a^x \left[\frac{y_1(s) y_2(x)}{w(s)} - \frac{y_2(s) y_1(x)}{w(s)} \right] r(s) ds$$

Ez csak a homogén részétől függ, és különböző KF mellett megadja a partikulárist

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_1(s) y_2(x) - y_2(s) y_1(x)}{w(s)} & \text{ha } a < s < x < b \\ 0 & \text{ha } a < x < s < b \end{cases}$$

És $y_p(x) = \int_a^b G(x,s) r(s) ds$

A teljes megoldás: $y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \int_a^b G(x,s) r(s) ds$

Peremfeltétel esetén

Len

$$y'' + py' + qy = r \quad \text{és} \quad y(a) = y(b) = 0$$

$$y_h = k_1 y_1 + k_2 y_2 \longrightarrow \underbrace{h_{11} y_1(x) + h_{12} y_2(x)}_{\alpha_1(x)} + \underbrace{h_{21} y_1(x) + h_{22} y_2(x)}_{\alpha_2(x)}$$

$$\text{és} \quad \alpha_1(a) = \alpha_2(b) = 0$$

+ partikulárisnál még mindig $y_p(x) = c_1(x)\alpha_1(x) + c_2(x)\alpha_2(x)$

$$c_1(x) = -\int_b^x \frac{\alpha_2(\cancel{x})\, r(s)}{w(s)}\, ds \qquad c_2(\cancel{x}) = \int_a^x \frac{\alpha_1(\cancel{x})\, r(s)}{w(s)}\, ds$$

úgy kell $y_p(a) = y_p(b) = 0 \Rightarrow c_1(b) = c_2(a) = 0$

Tehát a parti megoldás: $y_p(x) = \int_x^b \frac{\alpha_2(s)\, \alpha_1(x)\, r(s)}{w(s)}\, ds + \int_a^x \frac{\alpha_1(s)\, \alpha_2(x)\, r(s)}{w(s)}\, ds =$

$$= \int_a^b G(x,s)\, r(s)\, ds \qquad \text{ahol} \quad G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_2(x)\alpha_1(s)}{w(s)} & s < x \\[2mm] \dfrac{\alpha_1(x)\alpha_2(s)}{w(s)} & x < s \end{cases}$$

$$\frac{h_{11}}{h_{12}} = -\frac{y_2(a)}{y_1(a)} \qquad \frac{h_{21}}{h_{22}} = -\frac{y_2(b)}{y_1(b)}$$

Pl.!

$$x^2(x-1)y'' + (x-1)xy' - y = x \qquad y(1/2) = y(1/4) = 0$$

$$y'' + \frac{x+1}{x(x-1)}y' - \frac{1}{x^2(x-1)}y = \frac{1}{x(x-1)} \qquad p(x) = \frac{x+1}{x(x-1)} \qquad q(x) = -\frac{1}{x^2(x-1)} \qquad r(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$y_1(\cancel{x}) = \frac{x}{x-1}$$

Kiszámolható: $w(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} = c_1 e^{-\int \frac{x+1}{(x-1)x}dx} = c_1 \frac{x}{(x-1)^2}$

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{w(x)}{y_1^2(x)}dx = \frac{x}{x-1}\int \frac{1}{x}dx = \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$y_1(1/4) = -\frac{1}{3} \qquad y_1(1/2) = -1 \qquad y_2(1/4) = \frac{\ln 4}{3} \qquad \ln_2(1/2) = \ln 2$$

$$\frac{h_{11}}{h_{12}} = \ln 4 \qquad \frac{h_{21}}{h_{22}} = \ln 2 \qquad \alpha_1(x) = \frac{x}{x-1}\ln(4x) \qquad \alpha_2(x) = \frac{x}{x-1}\ln(2x)$$

$$w_2(\cancel{x}) = \alpha_1(x)\alpha_2'(x) - \alpha_1'(x)\alpha_2(x) = \frac{x\ln(4x)}{x-1}\left(\frac{\ln(2x)}{x-1} - \frac{x\ln(2x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) - \left(\frac{\ln(4x)}{x-1} - \frac{x\ln(4x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right)\frac{x\ln(2x)}{x-1} =$$

$$= \frac{x}{(x-1)^2}\ln 2$$

$$G = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}\left(\ln 2x\, \dfrac{\ln(4s)}{\ln 2}(s-1)\right) & s < x \\[2mm] \dfrac{x}{x-1}\left(\ln(4x)\, \dfrac{\ln(2s)}{\ln 2}(s-1)\right) & x < s \end{cases}$$

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)\, r(s)\, ds = \frac{x \cdot \ln 2x}{x-1} \int_a^x \frac{\ln(4s)}{\ln 2} \frac{1}{s}\, ds + \frac{x \ln(4x)}{x-1} \int_x^b \frac{\ln(2s)}{\ln 2} \frac{1}{s}\, ds =$$

$$= \frac{x}{x-1} \left(\ln(2x) \frac{1}{2 \ln 2} (\ln(4x))^2 - \ln(4x) \frac{1}{2 \ln(2)} (\ln(2x))^2 \right)$$

DIFFEGY II.

4. videó

Ha y_1 és y_2 megoldásai a homogén esetnek, és $y_1(a) = y_2(b) = 0$ akkor

$$G(x, x') = \begin{cases} \dfrac{y_2(x)\, y_1(x')}{w(x')} & \text{ha } a < x' < x \\ \dfrac{y_1(x)\, y_2(x')}{w(x)} & \text{ha } x < x' < b \end{cases}$$

Ekkor $y_p(x) = \int_a^b G(x, x')\, r(x')\, dx'$

és $y_p(a) = y_p(b) = 0$

Mi van G-vel $x' = x$-nél?

$$\lim_{x' \to x} G(x, x') = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0^+} G(x, x+\varepsilon) = \dfrac{y_1(x)\, y_2(x+\varepsilon)}{w(x+\varepsilon)} = \dfrac{y_1(x)\, y_2(x)}{w(x)} \\ \lim_{\varepsilon \to 0^-} G(x, x+\varepsilon) = \dfrac{y_2(x)\, y_1(x+\varepsilon)}{w(x+\varepsilon)} = \dfrac{y_2(x)\, y_1(x)}{w(x)} \end{cases}$$

Tehát G folytonos.

$$\lim_{x' \to x} \frac{\partial G(x, x')}{\partial x} = \lim_{x' \to x} \begin{cases} \dfrac{y_2'(x)\, y_1(x')}{w(x')} & \text{ha } x' < x \\ \dfrac{y_1'(x)\, y_2(x')}{w(x')} & \text{ha } x < x' \end{cases} = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{y_1'(x)\, y_2(x+\varepsilon)}{w(x+\varepsilon)} = \dfrac{y_1'(x)\, y_2(x)}{w(x)} \\ \lim_{\varepsilon \to 0^-} \dfrac{y_2'(x)\, y_1(x+\varepsilon)}{w(x+\varepsilon)} = \dfrac{y_2'(x)\, y_1(x)}{w(x)} \end{cases}$$

A derivált már nem folytonos, az ugrás:

$$\frac{y_1'(x)\, y_2(x)}{w(x)} - \frac{y_2'(x)\, y_1(x)}{w(x)} = \frac{y_1'(x)\, y_2(x) - y_2'(x)\, y_1(x)}{y_2'(x)\, y_1(x) - y_1'(x)\, y_2(x)} = -1$$

A felső tartományban 1-gyel kisebb a derivált

Az eredeti diffegyenlet:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x)$$

Legyen $L_x := \frac{d^2}{dx^2} + p(x) \frac{d}{dx} + q(x)$ differenciáloperátor, így $L_x y_p(x) = r(x)$

Mi van, ha $G(x, x')$-t beírjuk?

ha $x' < x$

$$L_x G(x, x') = \underbrace{L_x y_2(x)}_{0} \frac{y_1(x')}{w(x')} = 0$$

ha $x < x'$

$$L_x G(x, x') = L_x y_1(x) \frac{y_2(x')}{w(x')} = 0$$

ha $x' = x$

$L_x G(x, x') = \infty$ mert az 1. deriváltnak ugrása van, tehát a 2. derivált ∞

Mivel, ha

$$\int_{x = x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} L_x G(x, x')\, dx = \int_{x = x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} \left(\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} + p(x) \frac{d\, G(x, x')}{dx} + q(x)\, G(x, x') \right) dx =$$

$$= \left[\frac{d}{dx} G(x, x') \right]_{x = x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \left[p(x), G(x, x') \right]_{x = x'-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x'+\varepsilon}^{x'-\varepsilon} G(x, x')\, p'(x)\, dx + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x) G(x, x')\, dx =$$

$$= \underset{\uparrow}{1} + \underset{\uparrow}{0} + \underset{\uparrow}{0} + 0 = 1$$

mert folytonosak

Tehát $L_x G(x, x')$ a $\delta(x - x')$

$$\int_a^b G(x,x')r(x')dx' = y_p(x)$$ ezt tudjuk, ez a megoldás

$$L_x \int_a^b G(x,x')r(x')dx' = L_x y_p(x)$$ mivel L_x x szerint deriválás, bevihetjük a dx'-s integrál alá

$$\int_a^b L_x G(x,x')r(x')dx' = r(x)$$ (jéé ez tényleg a $\delta(x-x')$)

$$\boxed{L_x G(x,x') = \delta(x-x')}$$ Egy differenciálegyenlet így írható le legáltalánosabban.

Euler-féle diffegyenlet

$$ax^2 y'' + bx y' + cy = f(x)$$

Keressük a homogén megoldást: $ax^2 y_H'' + bx y_H' + cy = 0$

TFH $y_H = x^\alpha$ $\quad y_H' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad y_H'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$$(a\alpha(\alpha-1) + b\alpha + c)x^\alpha = 0$$ Az $x=0$-n kívül ez egyenlet α-ra

$$a\alpha^2 + (b-a)\alpha + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4ac}}{2a}$$

Ha $(a-b)^2 > 4ac$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y_H = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2}$$

Ha $(a-b)^2 = 4ac$

$\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$ Az x^{α_1} biztos megoldás, de mi a másik alapmegoldás?

$\alpha_1 = \frac{a-b}{2a}$ Számolhatnánk a Wronski-módszert, de most másképp csináljuk.

TFH $\alpha_2 = \alpha_1 + \varepsilon$ így $\frac{x^{\alpha_1+\varepsilon} - x^{\alpha_1}}{\varepsilon}$ is megoldás.

Mivel $\varepsilon \to 0$ esetén: $$x^{\alpha_1} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = x^{\alpha_1} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{\varepsilon \ln x} - 1}{\varepsilon} = x^{\alpha_1} \frac{1 + \varepsilon \ln x - 1}{\varepsilon} =$$

$$= x^{\alpha_1} \ln x$$

$$y_2 = x^{\alpha_1} \ln x \qquad y_2' = \alpha_1 x^{\alpha_1-1} \ln x + x^{\alpha_1-1} = x^{\alpha_1-1}(1 + \alpha_1 \ln x)$$

$$y_2'' = (\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2}(1+\alpha_1 \ln x) + \alpha_1 x^{\alpha_1-2}$$

beírva:

$$x^{\alpha_1}\left[a(\alpha_1-1)(1+\alpha_1 \ln x) + a\alpha_1 + b\alpha_1 \ln x + b + c\ln x\right] =$$

$$x^{\alpha_1}\left[\ln(x)\underbrace{\left(a\alpha_1(\alpha_1-1) + \alpha_1 b + c\right)}_{0\text{, hiszen így kaptuk } \alpha_1\text{-et}} + \underbrace{(2\alpha_1-1)a + b}_{\text{beírva } \alpha_1\text{-et } 0\text{-t kapunk}}\right] = 0 \quad \checkmark$$

isteni sugallat nélkül:

$$x^{\alpha_1+\varepsilon} = x^{\alpha_1} x^{\varepsilon} = x^{\alpha_1} e^{\varepsilon \ln x} = x^{\alpha_1}\left(1+\varepsilon \ln x + \dots\right) = x^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon \ln x)^n}{n!}$$

Ha van olyan n, amire $x^{\alpha_1}(\ln x)^n$ megoldás, akkor az a tag jó. Kiszámolva azt kapjuk, hogy $n = 0$ vagy 1.

Ha $(a-b)^2 < 4ac$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ $\quad \alpha_1 = \alpha_2^*$ $\quad \alpha_{1,2} = \alpha_r \pm i \alpha_i$

azt várnánk, hogy $\tilde{y}_1 = x^{\alpha_r} x^{i\alpha_i}$ és $\tilde{y}_2 = x^{\alpha_r} x^{-i\alpha_i}$

nem szeretjük a komplexeket, de szerencsére összegük és különbségük valós

$$y_1 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = x^{\alpha_r}\left(x^{i\alpha_i} + x^{-i\alpha_i}\right) = x^{\alpha_r}\left(e^{i\alpha_i \ln x} + e^{-i\alpha_i \ln x}\right) = 2x^{\alpha_r}\cos(\alpha_i \ln x)$$

$$y_2 = i(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = -x^{\alpha_r} i \left(x^{i\alpha_i} - x^{-i\alpha_i}\right) = -x^{\alpha_r} i \left(e^{i\alpha_i \ln x} - e^{-i\alpha_i \ln x}\right) = 2x^{\alpha_r} \sin(\alpha_i \ln x)$$

Pl.:

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 4$$

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 3$

$$\alpha_{12} = \frac{a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$y(x) = k_1 x^3 + k_2 x$ $\qquad \left.\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 2 \\ 3k_1 + k_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$ $\qquad k_1 = 1, \; k_2 = 1$

$$\underline{y(x) = x^3 + x}$$

Sorfejtéses módszer

$a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) = d(x)$ ahol a, b, c valós együtthatós polinomok

A homogén megoldást keressük $y_H(x) = x^q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ alakban $\quad 0 < q < 1$

$y_H'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ és $y_H''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)x^{n-2} c_n + c_n n x^{n-1} + c_n x^n\right] + c_0 + c_1 x + c_1 = 0$$

Ez polinom, ami minden x-re 0

tehát minden EH-s tag 0, de 2 EH-ra nem jutott együttható, ami szintén jó

DIFFEGY II.

5. videó

Sorfejtéses módszer

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ ahol a, b, c valós polinomok

y Taylor-sora: $y(x) = x^q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ahol $|q|^2 < 1$

Σ algebrai egyenletet ad majd c_n-ekre

Pl1: $4x^2y'' + 4xy' + (x^2-1)y = 0$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+q)c_n x^{n+q-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+q)(n+q-1)c_n x^{n+q-2}$$

visszaírva:

$$4\sum_{n=0}^{\infty} (n+q)(n+q-1)c_n x^{n+q} + 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+q)c_n x^{n+q} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(x^{n+q+2} - x^{n+q}\right) = 0$$

$4(n+q)(n+q-1)c_n + 4(n+q)c_n - c_n + c_{n-2} = 0$ de $n=0$-ra és 1-re ez nem jó

$\left(4(n+q)^2 - 1\right)c_n + c_{n-2} = 0$ Ha $c_{-1} = c_{-2} = 0$-nak vesszük

$$\left.\begin{array}{l}(4q^2-1)c_0 = 0\\ (4(1+q)^2-1)c_1 = 0\end{array}\right\}$$ feltéve, hogy c_0 és c_1 nem 0, akkor $q = -\frac{1}{2}$

így c_0 és c_1 meghatározatlan, de úgyis kell 2 szabad paraméter

páros esetben

$$c_{2k} = \frac{c_{2k-2}}{1-4\left(2k-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{c_{2k-2}}{-16k^2+8k} = \frac{c_{2k-2}}{8k(1-2k)} = \frac{c_{n-2}}{4n(1-n)} = \frac{-c_{n-2}}{4n(n-1)} = \frac{(-1)^k c_0}{4^k(2k)!}$$

páratlan esetben

$$c_{2k+1} = \frac{-c_{2k-1}}{4\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2-1} = \frac{-c_{2k-1}}{16k^2+8k} = \frac{-c_{2k-1}}{4\cdot 2k(2k+1)} = \frac{-c_n}{4n(n-1)} = \frac{(-1)^k c_1}{4^k(2k+1)!}$$

$$y(x) = x^q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^q \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + x^q \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} = c_0 x^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{x}{2} + \hat{c}_1 x^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{x}{2}$$

Pl. 2.:

$$(x^2-x-1)y''+(1-2x)y'+2y=0$$

Keressük a hatványsort:

$$x^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+q)(n+q-1)c_n(x^n-x^{n-1}-x^{n-2}) + x^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+q)c_n(x^{n-1}-2x^n) + x^q\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^n = 0$$

Ahhoz, hogy minden tag 0 legyen, minden egyh.-nak 0 kell lennie:

$$(n+q)(n+q-1)c_n-(n+1+q)(n+q)c_{n+1}-(n+2+q)(n+q+1)c_{n+2}+(n+1+q)c_{n+1}-$$
$$-2(n+q)c_n+2c_n=0$$

$$[(n+q)(n+q-3)+2]c_n-[(n+q)^2-1]c_{n+1}-(n+q+1)(n+q+2)c_{n+2}=0$$

$n=0$-ra:

$$(q-1)(q-2)c_0-(q^2-1)c_1-(q+1)(q+2)c_2=0$$

$n=1$-re:

$$q(q-1)c_1-((1+q)^2-1)c_2-(q+2)(q+3)c_3=0$$

Ez nem határozza meg egyértelműen q értékét, de ha $q=0$, akkor

$$\left.\begin{aligned}2c_0+c_1-2c_2&=0 \quad (1)\\ -6c_3&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow c_3=0$$

ami alapján $n=2$-re:

$$-3c_3-12c_4=0 \quad \text{azaz} \quad c_4=0$$

Tehát $n>3$ esetén minden $c_n=0$, csak az 1.-3 tag számít, amire pedig ott van az (1) összefüggés

$$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2=\underline{c_0+c_1x+\frac{2c_0+c_1}{2}x^2}$$

Pl. 3: Bessel-féle diffegyenlet:

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

TFH: $y(x)=x^p u(x)$

$$y'(x)=px^{p-1}u(x)+x^p u'(x)$$

$$y''(x)=p(p-1)x^{p-2}u(x)+2px^{p-1}u'(x)+x^p u''(x)$$

$$x^{p+2}u''+(2p+1)x^{p+1}u'+\left[\left(\underbrace{p(p-1)+p-p^2}_{0}\right)x^p+x^{p+2}\right]u=0$$

$$xu''+(2p+1)u'+xu=0$$

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \qquad u'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^{n-1} \qquad u''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$xu''=\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mx^{m-1}$$

$$xu=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m-1}x^m$$

$$(2p+1)u'=(2p+1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^m=(2p+1)c_1+(2p+1)\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^m$$

Beírva:

$$(2p+1)c_1+\sum_{m=1}^{\infty}x^m\left(m(m+1)c_{m+1}+(2p+1)(m+1)c_{m+1}+c_{m-1}\right)=0$$

Két alapmegoldás: - amikor c_1 0 és csak páros c_{2k} marad (elsőfajú)

- ha $c_1\neq 0$, akkor marad páros is páratlan ⇒ (másodfajú)

elsőfajú:

$$(2p+m+1)(m+1)c_{m+1}+c_{m-1}=0$$

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{(2p+n)n} \qquad \text{ahol } n \text{ páros}$$

ellenőrzés:

$$c_2=\frac{-c_0}{2(2+2p)} \Rightarrow p\neq-1$$

$$c_4=+\frac{c_0}{2(2+2p)4(4+2p)} \Rightarrow p\neq-2$$

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k c_0}{2^{2k}k!(1+p)(2+p)\cdots(k+p)}$$

p nem lehet negatív egész

Ha c_0-nak $=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ akkor

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+p}k!\underbrace{\Gamma(p+1)(1+p)\cdots(k+p)}_{\Gamma(p+k+1)}}$$

így

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} \Rightarrow y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\,\Gamma(p+k+1)}=J_p(x)$$

p indexű elsőfajú Bessel-fgv.

DIFFEGY II.

6. videó

Bessel-féle diffegyenlet : $x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$

megoldás : $J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\,\Gamma(k+p+1)}$ p indexű elsőfajú Bessel-fgv.

ha $p = -n$ akkor $n \geq 0$ egész $\frac{1}{\Gamma(k+p+1)} = \frac{1}{\Gamma(k+1-n)} = 0$ ha $k < n$

így $$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k-n+1)} \underset{m=k-n}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n-n} \frac{1}{(m+n)!\,\Gamma(m+1)} =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!\,\Gamma(m+n+1)} = (-1)^n J_n(x)$$

$J_p(x)$ folytatható $p \in \mathbb{C}$-re.

Ha $p \notin \mathbb{Z}$ akkor a fenti dolog nem igaz

$\Rightarrow$ így $J_p(x)$ és $J_{-p}(x)$ függetlenek ezért alaprendszert alkotnak.

Generátor függvény:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) z^n$$

Egyéb tulajdonságok:

$e^{ix\cos\varphi}$ $J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\, i^n \cos(n\varphi)$ ez nem tom ki van véve

Ha $J_p(x)$ $p = n + \frac{1}{2}$ akkor felírható elemi fgv-kkel:

pl.: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

másodfajú Bessel: $N_p(x)$ v. $Y_p(x)$

$$N_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$$

ha $p \in \mathbb{Z}$, akkor ez $\frac{0}{0}$-t ad, ezért ennek a határértékét

L'Hopital szabállyal: $N_p(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p(x)}{\partial p} - (-1)^n \frac{\partial J_{-p}(x)}{\partial p}\right]$

itt is $N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$

$J_n(x)$ és $N_n(x)$ alaprendszert alkot

n-edrendű diffegyenletek

$F(x, y^{(n)}, \dots y', y) = 0$ általánosságban ezzel semmit nem tudunk csinálni

Állandó együtthatós lineáris homogén eset:

$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + P_1 y' + P_0 y = 0$ [Akkor használós, ha $P_n \neq 0$. Ezzel leosztva]

$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$

általános megoldás: $\sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i(x)$ ahol $\{y_i(x)\}$ alaprendszer

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$ Ez a függetlenség feltétele

ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ $y^{(i)}(x) = \lambda^i e^{\lambda x}$

$\lambda^n e^{\lambda n} + \lambda^{n-1} \alpha_{n-\alpha} e^{\lambda x} + \dots a_0 e^{\lambda \lambda} = 0$ leosztva $e^{\lambda x}$-nel

$$\boxed{\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0}$$ karakterisztikus polinom
n db megoldás

1) λ_i-k valósak és különbözőek:

$y_i(x) = e^{\lambda_i x} \longrightarrow y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\lambda_i x}$

2) ha van komplex λ_i akkor λ_i^* is van ekkor
$y_i(x) + y_j(x)$ és $i(y_i(x) - y_j(x))$ is valós

3) $i < n$ db gyök egyezik
ekkor $e^{\lambda_i x}$, $x e^{\lambda_i x}$, $x^2 e^{\lambda_i x}$ … $x^i e^{\lambda_i x}$ megoldások

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Ha van egy állandó együtthatós lineáris homogén egyenletünk akkor átírható

$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}$ alakra

Megkeressük $\underline{\underline{R}}$-t amire $\underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{R}}$ diagonális $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

Ezek innentől triviálisak $\frac{dz}{dx} = \lambda_i z \rightarrow z(x) = e^{\lambda_i z}$

$$\underline{z}(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{y}(x) = \underline{\underline{R}}\, z(x)$$

DIFFEGYENLETEK II.

8. videó

Elsőrendű parciális diffegyenlet

$u(x,y)$ -t keressük

$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u\right) = 0$ azt így nem nagyon tudjuk megoldani

A kezdeti feltétel nem triviális, hanem egy $y(x)$ mentén kell ismernünk a kezdeti felt.

kvázilineáris eset: F lineárisan függ x-től, y-tól, $\frac{\partial u}{\partial x}$-tól és $\frac{\partial u}{\partial y}$-tól

karakterisztikák módszere: legyen $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y$

$\alpha u_x + \beta u_y - \gamma = 0$ ahol α, β, γ ismert fgv.-k

$\underline{a}\underline{b} = 0$ ahol $\underline{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$

itt $\underline{b}$ az $f = u(x,y) - z = 0$ felület normálisa: $\underline{b} = \underline{\nabla} f$

Mivel $\underline{a} \perp \underline{b}$ ezért $\underline{a}$ minden pontban benne van a felületben

A diffegyenlet azt mondja, hogy a f felület normálisa $\underline{a}$-val szorozva 0, tehát a megoldás f.

A konkrét alakot akkor tudjuk, hogy a KF-ből elindulva $\underline{a}$-k mentén kirajzolódik a felület

ha a KF: $u(x(s), y(s)) = I(s)$

akkor $(x(s), y(s), I(s))$-ből indulva, kiértékeljük $\underline{a}$-t és Δr-t ellépünk.

így a megoldás egy $\underline{V} = (x(r,s), y(r,s), u(r,s))$ lesz amelynek r sz. deriváltja minden pontban $\underline{a}$; tehát:

$$\frac{dx(r,s)}{dr} = \alpha(x,y,u)$$

$$\frac{dy(r,s)}{dr} = \beta(x,y,u)$$

$$\frac{du(r,s)}{dr} = \gamma(x,y,u)$$

ez már 3 közönséges diffegyenlet

Megoldás: $\left.\begin{array}{l} x(r, c_1, c_2, c_3) \\ y(r, c_1, c_2, c_3) \\ u(r, c_1, c_2, c_3) \end{array}\right\}$ ahol c_1, c_2, c_3 s függő

Általában ennél tovább nem tudunk jutni

Példa

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u\ln u \quad , \quad \text{KF}: u(x,1)=e^{x^2-1}$$

itt $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = 2u\ln u$

az új diffegyenletek:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dr}&=x \quad , & x(0,s)&=s\\ \frac{dy}{dr}&=y \quad , & y(0,s)&=1\\ \frac{du}{dr}&=2u\ln u \, , & u(0,s)&=e^{s^2-1}\end{aligned}\right\}$$

ezek megoldásai: $x(r,s)= s\,e^{r}$

$y(r,s)= e^{r}$

$u(r,s)=e^{(s^2-1)e^{r}}$

Mivel r és s kifejezhető x-szel és y-nal (nem mindig), ezért

$$s=\frac{x}{y} \qquad e^{r}=y \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{u(x,y)=e^{\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)y}}$$

Mi van, ha nincs kezdeti feltétel?

akkor a közönséges diffegyenlet megoldása: $x(r,c_1,c_2,c_3)$

$y(r,c_1,c_2,c_3)$

$u(r,c_1,c_2,c_3)$

mivel a diffegyenlet autonóm, az egyik c kifejezhető r eltolásaként: $c_1 \to r-c_1$

A x-ből kifejezzük $r-c_1$-t:

$$\begin{aligned}&y(x,c_2,c_3)\\&u(x,c_2,c_3)\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned}c_2&=\varphi_1(x,y,u)\\ c_3&=\varphi_2(x,y,u)\end{aligned}$$

φ_1 és φ_2 a megoldás felületi konstansai. Ezek a "mintintegrálok" a karakterisztikák.

Ha $\Psi(\varphi_1,\varphi_2)=0$, akkor $\Psi(\varphi_1(x,y,u),\varphi_2(x,y,u))$ megoldása az egyenletnek

Példa

$$(x^2+1)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2xy}{x^2+1}\frac{\partial u}{\partial y}=2xu \qquad \text{KF}: u(0,y)=\ln y$$

$\alpha = x^2+1$; $\beta=\frac{2xy}{x^2+1}$; $\gamma = 2xu$ A diffegyenlet

$$\frac{\partial x}{\partial r}=x^2+1 \quad , \quad x(r=0,s)=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{2xy}{x^2+1} \quad , \quad y(r=0,s)=s$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=2xu \quad , \quad u(r=0,s)=\ln s$$

megoldásai: $x(r,s)=\operatorname{tg} r$

$y(r,s)=s\,e^{\frac{1}{2}(1-\cos 2r)}$

$u(r,s)=\ln s\cdot\cos^2 r$

DIFFEGY II.

9. videó

Másodrendű parciális diffegyenlet

① Legegyszerűbb eset:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = c(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \underbrace{\int c(y)\, dy}_{c_2(y)} + c_1(x)$$

Általános megoldás: $u(x,y) = c_1(x) + c_2(y)$

Ha két feltétel: $u(x,0) = \sin x$, $u(0,y) = y^2$

akkor $c_1(x) + c_2(0) = \sin x$

$c_1(0) + c_2(y) = y^2$

$c_1(0) + c_2(0) = 0$

$\Rightarrow c_1(x) = \sin x$

$c_2(\cancel{y}) = y^2$

② $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad ; \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = x^2$$

$$u(0,y) = \cos y$$

Legyen $\frac{\partial u}{\partial y} = v_y(x)$ egy fix y-ra:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} + 2x\, v_x = 0 \quad \leftarrow \text{lineáris} \quad \Rightarrow \quad v_y(x) = c_1(y)\, e^{-x^2 c} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u(x,y) = e^{-x^2}\int c_1(y)\, dy + c_2(x) = \underline{c_3(y)\, e^{-x^2} + c_2(x)}$$

HF: $c_3\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-x^2} + c_2(x) = x^2$

$c_3(y) + c_2(0) = \cos y$

Szeparábilis diffegyenletek

(Általában ez csak arra, ami vagy működik, vagy nem)

$u(t,x) = X(x) \cdot T(t)$

Pl.: $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ feltéve, hogy szép:

$T'X + cX'T = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{cu}$

$\frac{1}{c}\frac{T'}{T} + \frac{X'}{X} = 0 \longrightarrow \frac{1}{c}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{X'(x)}{X(x)}$

csak akkor teljesülhet t-re és x-re, ha $\frac{T'(t)}{T}$ és $\frac{X'(t)}{X}$ konstansok $= \lambda$

↗

Innentől két diffegyenlet:

$$\frac{T'}{T}=\lambda \quad \text{és} \quad \frac{X'}{X}=-\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} T(t)&=c_1e^{\lambda c t}\\ X(x)&=c_2e^{\lambda x}\end{aligned}$$

$$u(t,x)=c_1c_2e^{\lambda(ct-x)} \quad \text{vagyis} \quad u(t,x)=\sum_i k_i e^{\lambda_i(ct-x)}$$

sőt bármilyen $f(ct-x)$ alakú függvény megoldás

Pl 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\gamma\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \qquad \text{TFH: } u(t,x)=T(t)X(x)$$

$$T'X=\gamma X''T \Rightarrow \frac{1}{\gamma}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}$$ a két oldal megint konstans: λ

$$T(t)=c_1e^{\gamma\lambda t}$$

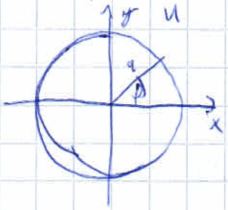
$$X(x)=c_2\cos(\sqrt{-\lambda}x)+c_3\sin(\sqrt{-\lambda}x) \quad \text{ha } \lambda\leq 0$$
$$c_2e^{\sqrt{\lambda}x}+c_3e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{ha } \lambda\geq 0$$

fizikailag általában az oszcillálók a jók nekünk

Laplace-egyenlet:

$$\Delta u(x,y)=0=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$ szeparálható, de nem mindegy milyen a HF

1) körlap



polárkoord. $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

$$\frac{\partial^2u(r,\varphi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

TFH $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$

$$R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0 \qquad \Big| \, r^2\frac{1}{u}$$

$$\underbrace{r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}}_{\sim r}+\underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\sim\varphi}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r^2R''+rR'-\lambda R&=0\\ \Phi''&=-\lambda\Phi\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ kell legyen tehát $\lambda>a$, különben Φ nem oszcilláló

Legyen $\lambda=a^2$ $\quad \Phi(\varphi)=c_1\sin(a\varphi)+c_2\cos(a\varphi)$

a [illegible] kell, hogy $a\in\mathbb{Z}$ $\quad \Phi(\varphi)=C\sin(n\varphi)+D\cos(n\varphi)$

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0$$ Euler-féle diffegyenlet

$R(r)=r^\alpha$ ahol $\alpha=\pm n$

ha $n\neq0$ $R(r)=Ar^n+Br^{-n}$

ha $n=0$ $R(r)=A+B\ln r$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n\neq0}(A_nr^n+B_nr^{-n})\left[C_n\sin(n\varphi)+D_n\cos(n\varphi)\right]+A_0+B_0\ln r$$

Határfeltételek esetén $r \to 0$ legyen véges

legyen $n \geq 0$, ekkor az összes $B = 0$

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n>0} \left(C_n \sin(n\varphi) + D_n \cos(n\varphi)\right) r^n$$

ha $u(a,\varphi) = f(\varphi)$

akkor ezt Fourier-T.-re:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi$$

$$C_n = \frac{\pi}{a^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi)\, d\varphi$$

$$D_n = \frac{\pi}{a^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi$$

*

DIFFEGY II.

10. videó

Laplace-egyenlet téglalapon

$\Delta u = 0$

Peremfeltétel
$u(0,y) = g_1(y)$
$u(x,0) = f_1(x)$
$u(L_1,y) = g_2(y)$
$u(x,L_2) = f_2(x)$

Bontsuk fel négy alap esetre, ami a egyik PF-t teljesíti, a többi 0.
A megoldás ezek összege

$u_1(x,y)$: $\Delta u_1 = 0$
$u_1(0,y) = g_1(y)$, $u_1(x,0) = u_1(L_1,y) = u_1(x,L_2) = 0$

stb...

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y)$$

TFH

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

Az egyenlet: $X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y}$ ez akkor jó, ha $\frac{X''}{X} = \lambda$
$-\frac{Y''}{Y} = \lambda$

u_1-re: $X(0)\,Y(y) = g_1(y)$
$X(x)\,Y(0) = X(L_1)\,Y(y) = X(x)\,Y(L_2) = 0 \Rightarrow Y(0) = Y(L_2) = X(L_1) = 0$

Y-ra: $Y'' = -\lambda Y$ ez két helyen is 0, tehát csak úgy lehet, ha oszcillál
$\Rightarrow \lambda > 0$ és diszkrét értékek: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 \Rightarrow Y(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right)$

$X'' = \lambda X$ mivel $\lambda > 0$ ezért ez exp lesz:

$$X = C\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n}{L_2} x\right) + D\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n}{L_2} x\right)$$
$$= \tilde{C}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n (x - L_1)}{L_2}\right) + \tilde{D}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n (x - L_1)}{L_2}\right) \Rightarrow \tilde{D} = 0$$

tehát $X(x) = \tilde{C}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n (x - L_1)}{L_2}\right)$

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n (x - L_1)}{L_2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right)$$

Mivel ez Fourier, ezért a PF miatt $c_n = -\frac{2}{L_2}\frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n L_1}{L_2}\right)} \int_0^{L_2} g_1(y) \sin\left(\frac{\pi n y}{L_2}\right) dy$

1+1 dimenziós hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Legyen $\xi = x - ct$ és $\eta = x + ct$

Mivel $\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = -c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

szerint $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) - 2c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$ és $\frac{\partial}{\partial x}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$

Ezzel az egyenlet: $c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right]$

$$4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta$$

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

egy jobbra és egy balra haladó hullám összege

másik megoldás diszperziós relációkra

TFH: $u(t,x) = A e^{-i\omega t \pm ikx}$

az ilyen ~~egyed~~ fgv akkor megoldás ha $k = \frac{\omega}{c}$

Ált megoldás ezek után: $\int A_k e^{-i(\omega t + kx)} dk + \int A_k e^{-i(\omega t - kx)} dk$

ezt kaptuk fent is

Másodrendű lineáris homogén állandó együtthatós parciális differenciálegyenletek

$$L\, u(x,y) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

Legyen $\xi = -\alpha_1 x + y$, $\eta = -\alpha_2 x + y$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\alpha_1\frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

ezzel: $A\left[\alpha_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \alpha_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] + 2B\left[-\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - (\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] + C\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] +$

$$+ D\left[-\alpha_1\frac{\partial u}{\partial \xi} - \alpha_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] + E\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right] + Fu + G = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(A_1^2-2B\alpha_1+C\right]+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(A\alpha_2^2-2B\alpha_2+C\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\left(A\alpha_1\alpha_2-B(\alpha_1+\alpha_2)+C\right)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(E-D\alpha_1\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(E-D\alpha_2\right)+Fu+G=0$$

Az $\alpha_{1,2}$ legyenek a $A\alpha^2-2B\alpha+C=0$ egyenlet megoldásai

$$\alpha_{1,2}=\frac{2B\pm\sqrt{4B^2-4AC}}{2A}=\frac{B}{A}\pm\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}$$

3 osztálya a diffegyenleteknek

1) Két különböző valós gyök : $B^2-AC>0$

hiperbolikus diffegyenlet

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ és $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ eltűnik és $2(A\alpha_1\alpha_2-B(\alpha_1+\alpha_2)+C)=2(A\frac{C}{A}-B\frac{2B}{A}+C)=\frac{4}{A}(-B^2+AC)$

$$=-\frac{4}{A}(B^2-AC)<0$$

Ezzel osztva kapjuk a kanonikus alakot

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+k_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+k_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+k_3u+k_4=0$$

áttérhető másik kanonikus alakra: $\sigma=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $\tau=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+k_1\frac{\partial u}{\partial \sigma}+k_2\frac{\partial u}{\partial \tau}+k_3u+k_4=0$$

nem látni, hogy a hullámegyenlet