DIFFEGY I.

1. előadás (02. 16.)

bmarkovics@hotmail.com (1.111)

hector.elte.hu/~marko

Cél: $y(x)$ meghatározása egy olyan egyenlet alapján, ami összefüggést ad $y(x)$ és deriváltjai között

Közönséges diffegyenlet: Egy fv. egyváltozós függvény és deriváltjai közti összefüggés:

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$

~~A diffegy~~ Az n-edrendű diffegyenlet az a közönséges diffegyenlet, amelyben a legmagasabb derivált n-ed fokú

A parciális diffegyenletek az, ahol a fgv. többváltozós (Ez nem lesz)

Általános megoldás: Olyan $y(x)$ fgv, amely kielégíti a megoldást, és n-edrendű esetén n db tetszőleges konstanstól függ

Partikuláris megoldás: Olyan $y(x)$, amely kielégíti az egyenletet, de legfeljebb n-1 tetszőleges konstanst tartalmaz

Szinguláris megoldás: Olyan $y(x)$ fgv, ami kielégíti az egyenletet, de nem spec esete az általánosnak

A teljes megoldása egy diffegyenletnek az általános és a szinguláris

Pl

$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ 1. rendű lineáris közönséges diffegyenlet

Az $y(x) = x^2 \sin x$ megoldás, mert

$y'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

$2x \sin x + x^2 \cos x - x^2 \cos x = 2x \sin x$ ✓

Ez egy partikuláris megoldás

Az általános megoldás: $y(x) = C \sin x + x^2 \sin x$

Pl 2. $y'' + y = 0$ 2. rendű lepő diff

$y(x) = c_1 \sin x \rightarrow y'(x) = c_1 \cos x \longrightarrow y''(x) = -c_1 \sin x$ Ez megoldás

Két megoldás: $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

Tétel: Ha van egy elsőrendű közönséges diffegyenletem

implicit alak: $F(x, y, y') = 0$

explicit alak: $y' = f(x, y)$

Cauchy-tétel: Ha $f(x,y)$ olyan fgv, ami folytonos, és $\frac{\partial f}{\partial y}$ is folytonos minden $(x,y) \in T$-ben, akkor minden $(x_0, y_0) \in T$ ponton pontosan 1 db megoldás létezik

Lipschitz feltétel: a $\frac{\partial f}{\partial y}$-nak nem kell folytonosnak lennie, elég, ha

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < M |y_2 - y_1|$$

Peano-tétel: Ha $\frac{\partial f}{\partial y}$-ra más feltétel, a megoldás akkor is folytonos

Az explicit alak $y' = f(x,y)$ azt mondja meg, hogy adott $P(x, y)$ pontban milyen a derivált (x, y, y') vonalelem

$\Rightarrow$ Egy egyparaméteres görbesereget hogy tudom találni a diffegyenletét

$y = g(x, c) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\partial g(x,c)}{\partial x}$ A kettőből kiküszöböljük c, amit a másikba behelyettesítve, egy diffegyenletet kapunk

Pl: $y = \frac{c}{x} \longrightarrow c = yx$

$y' = -\frac{c}{x^2} \longrightarrow y' = -\frac{y}{x} \leftarrow$ Ez a diffegyenlet

DIFF EGYENLETEK

2. előadás (02.23.)

Probléma jöhet: ahol az (x, y) pontok, akkor y' konstans

$$y' = \frac{-y}{x} \longrightarrow y(x) = \frac{c}{x}$$ ez alakú lehet megoldásunk görbéje

Ha $y' = K = -\frac{y}{x}$ akkor $y = -Kx$

MI VAN?

<u>Szétválasztható diffegyenletek</u>

$$y' = f(x)\,g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \longrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Egy konstans paraméteren jön be.

Pl.: $y' = \frac{1-x}{y}$, $y(1) = 2$

$$\int y\,dy = \int (1-x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x - \frac{x^2}{2} + C \implies y(x) = \pm\sqrt{2x - x^2 + 2C} = \pm\sqrt{\hat{c} - (x-1)^2}$$

$$y(1) = \pm\sqrt{\hat{c} - 0} \Rightarrow \hat{c} = 4$$

Szétválaszthatóra visszavezethető:

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$z(x) = ax + by + c$$

$$z'(x) = a + by'$$

$$z' = a + bf(z)$$

Pl:

$$y' = y - 5x + 2$$

$$z(x) = -5x + y + 2$$

$$z'(x) = -5 + y'$$

$$z' = -5 + z \longrightarrow \int \frac{dz}{-5+z} = \int dx$$

$$\ln|z-5| = x + \ln K$$

$$|z-5| = Ke^x$$

$$z - 5 = ke^x$$

$$-5x + y + 2 - 5 = ke^x$$

$$y = 5x + ke^x + 3$$

Def: k adrendű homogén a $f(x,y)$: $\forall t \neq 0$: $f(tx, ty) = t^k f(x,y)$

Pl.: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \rightarrow f(tx, ty) = \dfrac{tx\,ty}{t^2x^2 + t^2y^2} = t^0 \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ Ez egy 0. rendű

Def: Homogén diffegyenlet az az $y' = f(x,y)$, ahol $f(x,y)$ 0-adrendű homogén fgv.

Ez alapján $f(x,y) = f\left(\frac{1}{x}\cdot x, \frac{1}{x} y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, tehát ez egy egyváltozós fgv.

Legyen $u(x) = \dfrac{y}{x}$

$$y = ux$$

$$y' = u + xu' = f(1, u)$$

$$u' = \frac{f(1,u) - u}{x} \qquad \Leftarrow \text{ szétválasztható}$$

Pl:

$$y' = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad u = \frac{y}{x} \qquad y' = u + xu'$$

$$u + xu' = \frac{u}{1+u^2}$$

$$u' = \left(\frac{u}{1+u^2} - u\right)\frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{\frac{u}{1+u^2} - u} = \ln x - \ln c$$

$$x = c \exp\left[\int \frac{du}{\frac{u}{1+u^2} - u}\right] = c \exp\left[\int \frac{du}{-\frac{u^3}{1+u^2}}\right] = C \exp\left[-\int \frac{1+u^2}{u^3}\,du\right] =$$

$$= C \exp\left[-\int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u}\right] = C \exp\left[\frac{1}{2u^2} - \ln|u|\right] = \frac{C}{u} e^{\frac{1}{2u^2}}$$

y nem kifejezhető, de x igen ...

Homogén dimenziójú diffegyenlet

Ha pl. $[y] = \text{egy}^n$ $\quad [x] = \text{egy}$

akkor $\frac{y}{x^n}$ dimenziótlan

Ekkor $y' = f(x,y) = \frac{y}{x} g\left(\frac{y}{x^n}\right)$ csak ilyen alakú lehet

Legyen $\frac{y}{x^n} = u \rightarrow \quad y = u x^n \rightarrow \quad y' = u' x^n + n x^{n-1} u$

vissza: $\quad u' x^n + n x^{n-1} u = u x^{n-1} g(u)$

$$n u + x u' = u g(u)$$

$$u' = \frac{u(g-n)}{x} \quad \leftarrow \text{szétválasztható}$$

$$\int \frac{du}{u(g-n)} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C$$

$$x = C \exp\left[\int \frac{du}{u(g(u)-n)}\right]$$

DIFFEGY.

3. előadás (03. 02.)

Pl: homogén dimenziójú

$$x^{2} y' = \frac{y^3}{14} + \frac{3}{7} x^{3/2}$$

ha $\dim x = 1$

akkor $\dim y = \frac{1}{2}$

Legyen $u = \frac{y}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt{x}\, u$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\, u'$$

$$y' = \frac{y^3}{14x^2} + \frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{y}{x}\left(\frac{y^2}{x} + \frac{3}{7}\frac{\sqrt{x}}{y}\right) = \frac{y}{x}\left(u^2 + \frac{3}{7}\frac{1}{u}\right) = \frac{y}{x} g(u)$$

$$u\left(g(u) - \frac{1}{2}\right) = \frac{u^3}{14} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2}u$$

$$\frac{1}{u\left(g(u) - \frac{1}{2}\right)} = \frac{14}{u^3 + 6 - 7u} = 14\left(-\frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{5(u-2)} + \frac{1}{20(u+3)}\right)$$

Mivel homogén dimenziójú

$$x = C\exp\left[\int \frac{du}{u(g(u)-n)}\right] = C\exp\left[\int du \ldots\right] = \left(-\frac{14}{4}\ln(u-1) + \frac{14}{5}\ln(u-2) + \frac{14}{20}\ln(u+3)\right)$$

$$\ln x + \ln C = -\frac{14}{4}\ln(u-1) + \frac{14}{5}\ln(u-2) + \frac{14}{20}\ln(u+3)$$

$$Cx = \frac{(u-2)^{14/5}(u+3)^{14/20}}{(u-1)^{14/4}} \qquad \Big/ ^{10}$$

$$C x^{10} = \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{x}} - 2\right)^{28}\left(\frac{y}{\sqrt{x}} + 3\right)^{7}}{\left(\frac{y}{\sqrt{x}} - 1\right)^{35}}$$

Következő típus:

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$ alak $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$

Legyen $\xi = x-p$, $\eta = y-q$ úgy, hogy p és q olyan legyen amivel visszavezethető homogénre. mert $\frac{d\eta}{d\xi} = y'$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1+a_1p+b_1q}{a_2\xi+b_2\eta+c_2+a_2p+b_2q}\right)$$

legyen $c_1+a_1p+b_1q=0$

és $c_2+a_2p+b_2q=0$

Ennek feltétele $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

① $D \neq 0$ $\exists\, p, q$:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)$$ ez homogén, így megoldható

② $D = 0$ vagyis $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ Legyen $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$$ legyen $z = a_1x+b_1y$

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1y' \to y' = \frac{z'-a_1}{b_1}$$

$$\frac{z'-a_1}{b_1} = f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right)$$ ez szétválasztható

$$\int dx = \frac{1}{b_1}\int \frac{dz}{f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right)+\frac{a_1}{b_1}}$$

Pl.: 1. $y' = \frac{x+2y-8}{2x-y-1}$ m.o.: $c\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y-3}{x-2}\right)}$

2. $y' = \frac{3x+y-3}{6x+2y+1}$ m.o.: $2y - x + \ln(3x+y) = c$

Elsőrendű lineáris diffegyenlet

Def: ismeretlen fgv és annak deriváltjában lineáris és szorzatot nem tartalmaz:

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)$$ ahol a, b, f folytonos és $a(x) \neq 0$

$$y' + p(x)\,y = r(x)$$

→ ha $r(x) = 0$

$$y' + p(x)\,y = 0$$ homogén, elsőrendű lineáris

→ ha $r(x) \neq 0$ inhomogén

Homogén

$$y' + p(x)\,y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -p(x)$$

$$\ln y = -\int p(x)\,dx + \hat{C}$$

$$y = C\,e^{-\int p(x)\,dx}$$

megjegyzés: a linearitás és a homogenitás miatt, hogy ha y megoldás, akkor λy is

Inhomogén

1) Állandó variálás módszere (Lagrange módszere)

$$y' + p(x)\,y = r(x)$$

$r(x)$-et elhagyva: $y_H' + p(x)\,y_H = 0 \Rightarrow y_H = C\,e^{-\int p(x)\,dx}$

TFH az inhomogén megoldása: $y(x) = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$

visszahelyettesítve kapunk egy feltételt $C(x)$-re

$$C'(x)\,y_H + C(x)\,y_H' + p(x)\,C(x)\,y_H = r$$

$$C'(x)\,y_H + C(x)\,\underbrace{\left(y_H' + p(x)\,y_H\right)}_{0} = r$$

$$C'(x)\,y_H = r(x) \Rightarrow C(x) = \int \frac{r(x)}{y_H(x)}\,dx$$

$$\boxed{y(x) = \left[\int r(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right] e^{-\int p(x)\,dx}}$$

2)

Lineáris trafó

legyen $y(x) = u(x)v(x)$

$$y' = u'v + uv'$$

ebből:

$$u'v + v'u + p(x)uv = r(x)$$ úgy, hogy $p(x)$ jó legyen

$$u'v + u\underbrace{\left(v' + q(x)v\right)}_{\text{legyen } 0} = r(x)$$ akkor $v = e^{-\int p(x)dx}$

$$u'v = r(x)$$

$$u' e^{-\int p(x)dx} = r$$

$$u = \int r(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Pl.:

$$y'\sin x - y\cos x = 3x^2 \sin^2 x$$, kf: $y(0) = 1$

① homogén egyenlet megoldása:

$$y_h' - y_h \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$$ $p(x) = -\operatorname{ctg} x$

$$y_H(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \operatorname{ctg} x\, dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

② inhomogén megoldás

TFH. $y(x) = C(x)\sin x$

$$C(x) = \int \frac{r(x)}{y_H(x)} dx = \int \frac{3x^2 \sin x}{\sin x} dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$$

$$\underline{y(x) = (x^3 + C_1)\sin x}$$

③ k.f.:

$(0 + C_1)0 = 1$ nem jó ☹

$$\nexists C_1 : y(0) = 1$$

DIFFEGY
(4. előadás 03.09.)

Lineáris diffegyenlet

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

Ha $q(x) = 0$ → homogén

Ha nem, akkor a múlt órán látott módszer

Bernoulli – diffegyenlet

$$y' + p(x)\, y = r(x)\, y^n \qquad \text{ahol } n \neq 0, 1$$

Visszavezethető lineárisra: $z(x) = y^{1-n}$ $\qquad z'(x) = (1-n)\, y^{-n} y'$

$$y' = \frac{z'(x)}{(1-n)\, y^{-n}}$$

egyszerűen y^n-nel

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \cdot y^{1-n} = r(x)$$

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)\, z = r(x) \qquad \leftarrow \text{innen oké}$$

$$z' + (1-n)\, p(x)\, z = (1-n)\, r(x)$$

$$z(x) = e^{(n-1)\int p(x)dx}\left(c + (1-n)\int r(x)\, e^{(1-n)\int p(x)dx}\right) = y^{1-n}$$

Pl.:

$$y' + y = x\, y^3 \qquad p(x) = 1 \qquad r(x) = x \qquad n = 3$$

Riccati – diffegyenlet

$$y' = f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x) \iff y' + p(x)\, y = r(x)\, y^2 + h(x)$$

megjegyzés: - ennek lehet úgy gondolni, mint egy általános diffegyenlet $y' = F(x, y)$ Taylor sorának első két tagja

- ha $f(x) = 0$ akkor lineáris, ha $h = 0$ akkor Bernoulli

- általában csak a változócsere önmagában nem

- ha $v(x) = f(x)\, y(x)$ $\qquad y = \frac{v}{f}$ $\qquad y' = \frac{v'}{f} - \frac{v f'}{f^2}$

$$v' = v^2 + \left(g + \frac{f'}{f}\right) v + h f \qquad \text{ha szerencsénk van, az jó lesz}$$

- ha $y = v - \frac{g}{2f}$ $\qquad y' = v' - \frac{g'}{2f} + \frac{g f'}{2f^2}$

$$v' - \frac{g' f - f' g}{2f^2} = f\left(v - \frac{g}{2f}\right)^2 + g\left(v - \frac{g}{2f}\right) + h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v' = f\, v^2 + H(x) \qquad \text{visszavezethető Bernoullira}$$

Mindig visszavezethető 2. rendűre

$$u(x) = e^{-\int y(x)dx} \qquad u' = -y\, e^{-\int y(x)dx} = uy$$

$$u'' = -uy' - yu' = -uy' + uy^2 = u(y^2 - y')$$ ha az előző részben egyszerű alakra hoztuk

$$= -uR$$

$\Rightarrow$ $u'' = -uR$ másodrendű, homogén lineáris diffegyenlet

Ezt sokkal könnyebb megoldani, de mivel $y = \frac{-u'}{u}$ ezért az egyik lépés kiesik

Ha ismerünk egy partikuláris megoldást, akkor a másodrendű írás miatt le tudjuk gyártani az általánost

Pl.: $y' + \frac{y}{x} = \frac{4}{x^2} - y^2 \qquad p(x) = \frac{1}{x} \quad r(x) = -1 \quad h(x) = \frac{4}{x^2}$

① Ez homogén dimenziójú

$$y' = \frac{y}{x}\left(-1 + \frac{4}{xy} - yx\right) \qquad u = xy \qquad g(u) = -1 + \frac{4}{u} - u$$

$$\Rightarrow x = C\, e^{\int \frac{du}{u(g(u)-1)}} = C\, e^{\int \frac{du}{4-u^2}} = C\, e^{\frac{1}{4}\left(\int \frac{du}{u-2} - \int \frac{du}{u+2}\right)} =$$

$$= C\left(\frac{u-2}{u+2}\right)^{1/4} \Rightarrow u = 2\,\frac{\left(\frac{x}{C}\right)^4 + 1}{\left(\frac{x}{C}\right)^4 - 1} = yx$$

$$\underline{y = 2\,\frac{\hat{c}x^4 + 1}{\hat{c}x^5 - x}}$$

② választunk egy partikuláris megoldást $\hat{c} = -\frac{2}{x}$

legyen $z = \frac{1}{y - y_1} \Rightarrow y = \frac{1}{z} + y_1 = \frac{1}{z} - \frac{2}{x}$

$$z' - (p(x) - 2r(x)\,y_1(x))\,z = -r(x)$$

$$z' - \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x}\right)z = 1 \rightarrow z' + \frac{3}{x}z = 1$$ ami lineáris

DIFFEGY

5. előadás [03.16.]

Riccati-féle diffegyenlet

$$y' + p(x)y = r(x)y^2 + h(x)$$

Speciális eset: $p(x) = 0$

$r(x) = -a$

$h(x) = bx^c$

- ha $c = 0$

$$y' = -ay^2 + b \longrightarrow \cancel{\ldots}$$

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\, \cancel{\tanh} \left[\sqrt{ab}\,(x+k)\right]$$

- ha $c = -2$

$$y' = -ay^2 + \frac{b}{x^2} \longrightarrow \text{homogén dimenziójú } n = -1$$

- ha $c = \frac{4n}{2n-1}$ ahol $n \in \mathbb{N}^+$

$$y' = -ay^2 + bx^c \qquad \text{legyen } x = u^{\frac{1}{c+3}} \qquad y = \frac{u^{-\frac{2}{c+3}}}{v} + \frac{u^{-\frac{1}{c+3}}}{a} = \frac{1}{vx^2} + \frac{1}{ax}$$

$$\text{Ekkor } y' = -\frac{1}{v^2x^4}\left(v'x^2 + 2xv\right) - \frac{1}{ax} = -\frac{v'}{v^2x^2} - \frac{2}{vx^3} - \frac{1}{ax^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dv}{du}(c+3)x^{c+2}$$

Emiatt:

$$y' = -\frac{dv}{du}\frac{(c+3)x^{c+2}}{v^2x^2} - \frac{2}{vx^3} - \frac{1}{ax^2} = -(c+3)\frac{dv}{du}\frac{x^c}{v^2} - \frac{2}{vx^3} - \frac{1}{ax^2} = bx^c - ay^2 =$$

$$-(c+3)\frac{dv}{du}\frac{u^{\frac{c}{c+3}}}{v^2} - \frac{2}{v}u^{-\frac{3}{c+3}} - \frac{u^{-\frac{2}{c+3}}}{a} = bu^{\frac{c}{c+3}} - a\left(\frac{u^{-\frac{2}{c+3}}}{v} + \frac{u^{-\frac{1}{c+3}}}{a}\right)^2 =$$

$$= bu^{\frac{c}{c+3}} - a\frac{u^{-\frac{4}{c+3}}}{v^2} - 2\frac{u^{-\frac{3}{c+3}}}{v} - \frac{u^{-\frac{2}{c+3}}}{a}$$

$$-(c+3)\cdot\frac{dv}{du}\frac{u^{\frac{c}{c+3}}}{v^2} = bu^{\frac{c}{c+3}} - a\frac{u^{-\frac{4}{c+3}}}{v^2}$$

$$-(c+3)\frac{dv}{du} = bv^2 - au^{-\frac{c+4}{c+3}}$$

Ez hasonlít a kiindulási alakhoz

$$-a \to -\frac{b}{c+3} \qquad b \to \frac{a}{c+3}$$

$$\text{A kitevő: } -\frac{c+4}{c+3} = \frac{-\frac{4n}{2n-1}+4}{-\frac{4n}{2n-1}+3} = -\frac{8n-4-4n}{6n-3-4n} = \frac{4(n-1)}{2(n-1)-1}$$

ugyanolyen, csak kisebb lett az n, és ahhoz előbb utóbb $c = 0$ lesz

– ha $c = \frac{4n}{2n+1}$ egyenlet visszavezethető

$$y = \frac{1}{u^2 v + \frac{a+1}{b} u}$$

$$\hookrightarrow \frac{dv}{du} - \frac{b}{c+1} v^2 = - \frac{a}{c+1} u^{-\frac{3c+4}{c+1}}$$

Jacobi - féle diffegyenletek

$$y' = \frac{(Ax+By)y + \alpha x + \beta y}{(Ax+By)x + ax + by}$$ 5 független paraméter

legyen $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux \longrightarrow y' = xu' + u$

újra:

$$xu' + u = \frac{(Ax+Bxu)xu + \alpha x + \beta xu}{(Ax+Bxu)x + ax + bxu}$$

$$xu' = \frac{(Ax+Bxu)xu + \alpha x + \beta xu - (Ax+Bxu)xu - axu - bxu^2}{(Ax+Bxu)x + ax + bxu} =$$

$$= \frac{\alpha x + (\beta - a)xu - bxu^2}{(Ax+Bxu)x + ax + bxu}$$

Nem $u(x)$-t keressük, hanem $x(u)$-t.

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{du} = \frac{(Ax+Bxu)x + ax + bxu}{\alpha x + (\beta - a)xu - bxu^2} \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{(Ax+Bxu)x + ax + bxu}{\alpha + (\beta - a)u - bu^2} =$$

$$= \frac{A+Bu}{\alpha + (\beta - a)u - bu^2} x^2 + \frac{a + bu}{\alpha + (\beta - a)u - bu^2} x = f(u)x^2 + g(u)x$$ Bernoulli-diffegyenlet

DIFF EGYENLETEK

6. előadás (09. 30.)

Exakt / Teljes diffegyenlet

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0 \qquad \text{akkor} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\exists\ \Psi(x, y(x))\ ;\ \frac{d}{dx}\Psi(x, y(x)) = M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

mert $\frac{d}{dx}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,y'$ és $\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}}$

és Young tétel

Ekkor a megoldás $\Psi(x,y) = C$

Megjegyz.:

Vegyük a $\Psi(x,y) = C$ görbesereget! Deriválva:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,y' = 0 \qquad \text{Ez a hozzá tartozó diffegyenlet}$$

Visszafelé: Mi a feltétele annak, hogy egy ilyen diffegyenletnek a $\Psi(x,y) = c$ görbesereg legyen a megoldása? A Young-tétel

Feladat: Adott M és N-hez megtalálni Ψ-t

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + c(y)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + c'(y)$$

$$\Rightarrow \quad c'(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx$$

itt a bal oldal független x-től, ez ellenőrzési lehetőség

Tehát:

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int\left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx\right]dy$$

Ált megoldás: $\Psi(x,y) = \alpha$

Pl.:

$1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{2y}{x} y' = 0$

① $M(x,y) = 1 + \frac{y^2}{x^2}$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}$

$N(x,y) = -\frac{2y}{x}$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x^2}$ ✓

②

$$\Psi(x,y) = \int M dx + c(y) = \int \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx + c(y) = x - \frac{y^2}{x} + c(y)$$

③ $N = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{2y}{x} + c'(y) = -\frac{2y}{x} \Rightarrow$ $\qquad c'(y) = 0$

$c(y) = 0$

④

$$\Psi(x,y) = \underline{\underline{x - \frac{y^2}{x} = \alpha}}$$

DIFFEGY

7. előadás (04.06.)

Jellemzően egy ált. diffegyenlet nem lehet, hanem exakt. diffegyenlet

<u>Integráló tényező</u>

Rendezzük $M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$ alakra.

Ha $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ akkor nem exakt.

Ötlet: lehet találni olyan $\lambda(x,y)$-t, amivel a

$$\lambda(x,y) M(x,y) + \lambda(x,y) N(x,y)\, y' = 0 \quad \text{már exakt}$$

vagyis $$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} M + \frac{\partial M}{\partial y}\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x}\lambda$$

$$0 = M\frac{\partial \lambda}{\partial y} - N\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

Ez egy elsőrendű lineáris parciális diffegyenlet λ-ra, és általában nem oldható

most csak spec. eseteket nézzük:

① Az egyik parc. deriv. eltűnik: $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$, tehát $\lambda(x)$

Ekkor $$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\lambda} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$ ← ennek függetlennek kell lennie y-tól

ilyenkor $$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

② Hogy csak y-tól függjön

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\lambda} = \frac{-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$ ← Ez legyen x független

③ $\lambda(x,y) = \lambda(xy) = \lambda(z)$ ekkor $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial z} x$ $\quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial z} y$

$\frac{\partial \lambda}{\partial z}$

A feltétel $M\frac{\partial \lambda}{\partial z} x - N\frac{\partial \lambda}{\partial z} y + \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0$

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial z}}{\lambda} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$$ ← Ez csak z-től függjön

④ $\lambda(x,y) = \lambda\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda(z)$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial z}\cdot\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial z}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

a feltétel: $0 = M\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{1}{x} + N\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{y}{x^2} + \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

$$\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial z}}{\lambda} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{1}{x^2}(Mx+Ny)} \leftarrow \text{ez csak } z\text{-től függjön}$$

⑤ $\lambda(x,y) = \lambda(\omega(x,y))$

egyenlőre: $\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}$

$$0 = \frac{\partial\lambda}{\partial\omega}\left(M\frac{\partial\omega}{\partial y} - N\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial\omega}}{\lambda} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial\omega}{\partial y} - N\frac{\partial\omega}{\partial x}} \leftarrow \text{ez csak } \omega\text{-tól függjön}$$

$$\rightarrow \lambda(x,y) = e^{\int f(\omega)d\omega}$$

⑥ $\lambda(x,y) = m(x)\cdot n(y)$ $\qquad \frac{dm}{dx} = m' \qquad \frac{dn}{dy} = n'$

Feltétel: $\frac{\partial(\lambda N)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda M)}{\partial x}$

$$mn\frac{\partial M}{\partial y} + mMn' = nn\frac{\partial N}{\partial x} + m'nN$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = M\underbrace{\frac{n'}{n}}_{\text{csak } y \text{ függő}} + N\underbrace{\frac{m'}{m}}_{\text{csak } x \text{ függő}}$$

Tehát a feltétel: $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = M f_1(y) + N f_2(x)$

megoldás: $\lambda(x,y) = e^{\int f_1(y)dy}\, e^{\int f_2(x)dx}$

megjegyzés:

Ⓐ Ha van $M + Ny' = 0$ nem egzakt diffegy, és annak λ_1 és λ_2 is integráló tényezője, valamint $\begin{vmatrix}\partial_x\lambda_1 & \partial_y\lambda_1\\ \partial_x\lambda_2 & \partial_y\lambda_2\end{vmatrix} \neq 0$

akkor az ált. megoldás: $\frac{\lambda_1(x,y)}{\lambda_2(x,y)} = C$

(B)

ha $M + Ny' = 0$ nem egzakt egyenletnek λ integráló tényezője

és $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \lambda M$, $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = \lambda N$

akkor $\lambda F(\Psi)$ is integráló tényező tetszőleges (rendes) F függvényre

Példák

(1)

$$y(1+xy) - xy' = 0$$

$\boxed{\text{I.}}$ $M = y(1+xy)$; $N = -x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + xy + yx = 1 + 2xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

nem egzakt

$\boxed{\text{II.}}$ A

$$0 = M\frac{\partial \lambda}{\partial y} - N\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) =$$

$$= y(1+xy)\frac{\partial \lambda}{\partial y} + x\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda(2 + 2xy)$$ egyenletet kell megoldani

$\exists$ csak y-tól függő integráló tényező, ekkor

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\lambda} = -\frac{2 + 2xy}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$

így $\lambda(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$

$\boxed{\text{III.}}$ Tényleg integráló tényező-e a

$$\frac{y(1+xy)}{y^2} - \frac{xy'}{y^2} = 0$$ egyenletre?

$$\tilde{M} = \frac{1+xy}{y} \qquad \tilde{N} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

IGEN!

$\boxed{\text{IV.}}$ Oldjuk meg egzaktként

$$\Psi(x,y) = \int \frac{1+xy}{y} dx + C(y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + C'(y) \stackrel{!}{=} -\frac{x}{y^2} \Rightarrow C'(y) = 0$$

Tehát a megoldás: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = C$

DIFFEGY

8. előadás (04.20.)

Sorfejtéses módszer

$y' = f(x, y)$ ha f x polinomja

Lehet, hogy nem zárt alakot kapunk, hanem Taylor sorát kapjuk az együtthatókra ha meg tudjuk határozni

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

~~y(x)~~ Legyen $g(x) = y' - f(x, y) = 0$ ilyenkor g sorfejtésében minden e.h. 0

tehát $\sum_n n c_n (x-x_0)^n - f(x, y) = 0$ Mivel f x polinomja ez a c_n-ekre algebrai egyenlet.

Lehetőségek:

- rekurzióval megoldható c_n-re
- algebrai úton megoldható
- fel összegezhető (zárt alakban írható)

Általában csak az első garantált

Példa 1

$y' = x y$ Legyen $x_0 = 0$

Keressük a m.o.-t $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ alakban

ebből $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$

visszaírva $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$

Legyen $m = n-1$ B.O. $\sum_{m=-1}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m = c_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m$

J.O.-n legyen $m = n+1$ $\sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} x^m$

Most a két oldal egyenlő: $c_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m+1) c_{m+1} - c_{m-1}\right] x^m = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{c_1 = 0}$ és $(m+1) c_{m+1} = c_{m-1}$ $\Rightarrow$ $\underline{c_{n+2} = \frac{c_n}{n+2}}$

Ez maga a rekurzió, amit meg kell oldani.

Mivel 2-esével lépked, páratlan n-re mind 0.

$$c_{2k+1} = 0$$

$$c_{2k} = \frac{c_0}{2^k k!}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_0 x^{2k}}{2^k k!} = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \frac{1}{k!} = c_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

Ugyanez másik pont körül $x_0 = 1$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n = (x-1+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) C_{n+1} - c_{n-1} - c_n\right] (x-1)^n = 0$$

$$\underline{c_n = (n+1) c_{n+1} - c_{n-1}}$$ ← Ez a rekurzió

Ehhez 2 szabad paraméter kell, de

a $n=0$-ra ~~az~~ önmagában is egy egyenlet, $C_1 = C_{-1} - C_0$

Mivel n 0-tól megy $c_{-1} = 0$, így ~~c_0 és c_1 egy~~

c_0 szabad paraméter

$c_1 = -c_0$

+ rekurzió

Belátható, hogy ez tényleg a fenti izé Taylor sora

Mi van, ha nem ~~racionális~~ egyszerű függvény a tolinál eh.-ja

Példa 2

$$3xy' = y\frac{2+x}{1-x}$$

$$(3x-3x^2)y' = (2+x)y$$

Legyen $y = x^q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ alakú

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+q)c_n x^{n+q-1}$$

$$3\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+q)c_n x^{n+q} - (n+q)c_n x^{n+q+1}\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+q} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+q+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[3(n+q)c_n - 3(n+q-1)c_{n-1} - 2c_n - c_{n-1}\right]x^{n+q} = 0$$

$$(3n+3q-2)c_n - (3n+3q-2)c_{n-1} = 0$$

$n=0$: $(3q-2)c_0-(3q-2)c_{-1}=0$ hiszen $c_{-1}=0$

$(3q-2)c_0=0$ mivel c_0 tetszőleges, ezért ~~nem~~ $3q-2=0$

$\Rightarrow q=\frac{2}{3}$

$n\neq 0$ -ra: $c_n = c_{n-1} = c_0$

tehát $y(x) = c_0\dfrac{x^{2/3}}{1-x}$

DIFF EGY

9. előadás (04.27.)

Burkoló görbék

Legyen $G(x,y,c)=0$ egyparaméteres görbesereg

Ennek burkolója olyan (ha van)

- minden görbét érinti a burkoló
- a burkoló minden pontja az egyik görbe egy pontja

Legyen $B(x,y)$ a burkoló

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial G}{\partial c}(x,y,c)=0\\ G(x,y,c)=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$ kiküszöbölve c-t kapjuk $E(x,y)=0$-t

$E(x,y)$ tartalmazhatja a burkolót, vagy mást tartalmaz

PÉLDA

1) $(x-c)^2+y^2-1=0$

$$\frac{\partial G}{\partial c} = -2(x-c)=0 \Rightarrow x=c$$

$$y_b^2=1 \Rightarrow y_b=\pm 1$$

2)

$$(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}(x-c)^{3/2}+c$$

$$\frac{\partial G}{\partial c}=-2(y-c)-2(x-c)^2=0$$ beírva:

$$(x-c)^4-\frac{2}{3}(x-c)^3=0$$

$$(x-c)^3\left(x-c-\frac{2}{3}\right)=0$$

$\nearrow x=c \Rightarrow y=x$

$\searrow x-c-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow$

Diffegyenletek szinguláris megoldásai

- A burkoló minden pontján átmegy egy megoldás
- a burkoló y' értéke megegyezik a m.o.-ének ahol $G(x,y,c)$, ahol $B(x,y)$ ért

Állítás: Az $F(x,y,y')$-ből következőképpen kapjuk a burkolót:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')=0$$ kiküszöbölve y'-t $\rightarrow E(x,y)$

$E(x,y)$ tartalmazza a burkolót

Példa:

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1$$ görbesereg diffegy? burkoló? mi?

a)

$$\frac{d}{dx}\left((x-c)^2+(y-c)^2-1\right) = 2(x-c)+2(y-c)y' = 0$$

$$\Rightarrow x-c+yy'-cy'=0 \Rightarrow \frac{x+yy'}{1+y'} = c$$

$$\left(x-\frac{x+yy'}{1+y'}\right)^2+\left(y-\frac{x+yy'}{1+y'}\right)^2 = 1$$

$$\underline{(x-y)^2y'^2+(x-y)^2=(1+y')^2}$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial c}: \quad -2(x-c)-2(y-c)=0$$

$$-x-y+2c=0$$

$$c=\frac{x+y}{2}$$

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2}\right)^2=1$$

$$\frac{(x-y)^2}{2}=1$$

$$x-y=\pm\sqrt{2} \Rightarrow y=x\pm\sqrt{2}$$

c)

$$(x-y)^2(y'^2+1)=(1+y')^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}: \quad 2(x-y)^2y'=2(1+y')$$

$$y'=\frac{1}{(x-y)^2-1}$$

$$(x-y)^2\left[1+\frac{1}{[(x-y)^2-1]^2}\right]=\left(1+\frac{1}{(x-y)^2-1}\right)^2$$

$$(x-y)^2 = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$$

A 2-es megadja a burkolót

Lagrange-féle diffegyenlet

általános alak:

$$y = x\,\phi(y') + f(y')$$

ahol ϕ, f ismert, nem-lin. fgv.-k

deriváljuk x szerint:

$$y' = \phi(y') + \left(\frac{d\phi}{dy'}x + \frac{df}{dy'}\right)y''$$

Ez y'-re elsőrendű

$$p = \phi(p) + \left(x\frac{d\phi}{dp} + \frac{df}{dp}\right)p'$$

az inverzre elvileg szét. megoldható

$$p' = \frac{p - \phi(p)}{x\frac{d\phi}{dp} + \frac{df}{dp}} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = x\frac{\frac{d\phi}{dp}}{p - \phi(p)} + \frac{\frac{df}{dp}}{p - \phi(p)}$$

Ez $x(p)$-re elsőrendű inhomogén lineáris diffegyenlet

Megj.: feltétel, hogy $p - \phi(p) \neq 0$

Ha $\exists p_0 : p_0 - \phi(p_0) = 0$ akkor $y = p_0 x + c$

$c = f(p_0)$

DIFFEGX.

10. előadás (05.04.)

Lagrange-f.

$$y = x\,\phi(y') + f(y')$$

megoldás menete: $p = y'$

$$y = x\phi(p) + f(p) \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$p = \phi(p) + \frac{dp}{dx}\left(x\frac{d\phi}{dp} + \frac{df}{dp}\right)$$

Ha a $p - \phi(p)$ nem 0, akkor $x(p)$-re megoldható

Ha igen, akkor p konst (??)

① $p - \phi(p) \neq 0$

$$\frac{dx}{dp} = x\,\frac{\frac{d\phi}{dp}}{p-\phi} + \frac{\frac{df}{dp}}{p-\phi}$$

lineáris egyenlet

$x(p) \Rightarrow y(p,c) = x(p,c)\,\phi(p) + f(p)$

ha p kiküszöbölhető $\Rightarrow F(x,y,c) = 0$

② $p_0 - \phi(p_0) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow y = x\phi(p_0) + f(p_0)$

alesetként: Clairaut-f: ha $\phi(y') = y'$

$$y = xy' + f(y')$$

ilyenkor $p - \phi(p) = 0 \;\forall p$

$$y = xp + f(p) \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} p = p + \left(x + \frac{df}{dp}\right)\frac{dp}{dx}$$

vagy

$$x = -\frac{df}{dp} = x(p)$$

és $\Rightarrow y(p) = x(p)\cdot p + f(p)$

e kettő együtt

ha $\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{df}{dp}\right) = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0$, $p = c$

$y = cx + f(c)$

általános mo.

Állítás: ez pont az általános mo. burkolója, bizonyítható, de kérdéses??

PÉLDA 1

$$y = xy' + y'^2 \qquad \left(\begin{array}{ll} \text{ált}: & y = cx + c^2 \\ \text{szing}: & y = -\frac{x^2}{4} \end{array}\right)$$

Hogyan?: $\quad p = c \,,\quad y = cx + c^2$

szing $\quad x = -\frac{df}{dp} = -2p$

$$y = x(p)\cdot p + f(p) = -2p^2 + p^2 = -p^2 = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \checkmark$$

PÉLDA 2

$$y = xy' + \frac{a}{y'} \qquad\qquad y' = p$$

$$y = xp + \frac{a}{p} \quad \rightarrow \quad \text{ált}: \quad p = c \Rightarrow y(x) = cx + \frac{a}{c}$$

szing: $\quad x = -\frac{df}{dp} = \frac{a}{p^2} \quad \rightarrow \quad p = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}$

$$y = \frac{a}{p^2}p + \frac{a}{p} = \frac{2a}{p} \quad \rightarrow \quad y(x) = 2\sqrt{ax}$$

PÉLDA 3

$$4yy'^2 - 2xy' + y = 0$$

$$y(1+4y'^2) = 2xy'$$

$$y = x\frac{2y'}{1+4y'}$$ ez Lagrange-f. ahol $\phi(y') = \frac{2y'}{1+4y'}$ $\qquad f(y') = 0$

1

$p - \phi(p) \neq 0$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p-\phi(p)}{x\frac{d\phi}{dp} + \frac{df}{dp}} = \frac{p - \frac{2p}{1+4p^2}}{x\left(\frac{2}{1+4p^2} - \frac{2p\,4p\cdot 2}{(1+4p^2)^2}\right)} = \frac{p\,\frac{4p^2-1}{1+4p^2}}{2x\left(\frac{1-4p^2}{(1+4p^2)^2}\right)} = -\frac{1+4p^2}{2x}p$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1+4p^2}{2x}p \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p(1+4p^2)} = -\int\frac{dx}{2x}$$

$$\ln(p) - \frac{1}{2}\ln(1+4p^2) = -\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(c)$$

$$\frac{p^2}{1+4p^2} = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad x(p) = c\,\frac{1+4p^2}{p^2}$$

$$y = \frac{c(1+4p^2)}{p^2}\cdot\frac{2p}{1+4p^2} = \frac{2c}{p} \quad \Rightarrow$$ ∃ kettőhöz különböző p

$$p^2 = \frac{c}{x-4c} \quad \to \quad p = \pm\sqrt{\frac{c}{x-4c}}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \pm \frac{2c}{\sqrt{\frac{c}{x-4c}}} = \pm 2\sqrt{c(x-4c)}$$ Ez az ált megoldás

③ akkor van szinguláris m.o., ha a $p_0 - \phi(p) = 0$ - nak van m.o. -ja

$$p_0 - \frac{2p_0}{1+4p_0^2} = 0$$

$$\frac{(4p_0^2-1)p_0}{1+4p_0^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad p_{01} = 0 \qquad p_{02} = \frac{1}{2} \qquad p_{03} = -\frac{1}{2}$$

$y_1 = 0$

ez csak a $c=0$ ~~[illegible]~~ pont m.o.

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \frac{x}{2} \\ y_3 &= -\frac{x}{2} \end{aligned}\right\}$$ Ezek a sing megoldások

Pék; HF: $\quad y = x y'^2 + y'^2$

ennek mo.-ja: $\quad y(x) = \left(C + \sqrt{x+1}\right)^2 \quad$ ált

sing: $\quad y = 0$

$\qquad y = \sqrt{x+1}$

ÖF:
- Egzakt diffegyenletek
- Integráló tényező
- Szeparálás módszer
- Clairaut
- Lagrange - Clairaut