ELD IM

1. gyak (02.15.)

Nagy Marci 0.122
nmarci@elte.hu
+36 30 2992033
2 ZH előadás alatt

Maxwell-egyenletek

• SI mértékrendszer

$\underline{\nabla}\,\underline{B} = 0$

$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$

$\underline{\nabla}\,\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \underline{E}$ $\rightarrow$ $\partial_t \rho + \underline{\nabla}\,\underline{j} = 0$ kontinuitás

töltésre ható erő: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

töltés tere: $\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\underline{n}$

töltések közt ható erő: $\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\underline{n}$

mértékegységek: $[B]: \frac{Vs}{m^2}$ $\quad [E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$

állandók: $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}$ $\quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Ns^2}{C^2}$

$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}$ ← ez mindenképpen igaz.

gyakorlati számolásokhoz kényelmes, de elméleti fizikában praktikátlan

• Heaviside-féle mértékrendszer: $\varepsilon_0 = 1$ és $[E] = [B]$

$\underline{\nabla}\,\underline{B} = 0$

$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \underline{B}$

$\underline{\nabla}\,\underline{E} = \rho$

$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{1}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\partial_t \underline{E}$ $\rightarrow$ $\partial_t \rho + \underline{\nabla}\,\underline{j} = 0$

töltésre ható erő: $\underline{F} = q\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v} \times \underline{B}\right)$

töltés tere: $\underline{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\underline{n}$

töltések közt ható erő: $\underline{F} = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}$

mértékegység: $[q] = \sqrt{\frac{kg\,m^3}{s^2}}$ $\quad [E] = [B] = \sqrt{\frac{kg}{m s^2}}$

• Gauss-mértékrendszer: $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$

$$\nabla \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \underline{B}$$

$$\nabla \underline{E} = 4\pi \rho$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \partial_t \underline{E} \longrightarrow \partial_t \rho + \nabla \underline{j} = 0$$

töltésre ható erő: $\underline{F} = q\left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}\right)$

töltés tere: $\underline{E} = \frac{q}{r^2} \underline{n}$

töltések között ható erő $\underline{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \underline{n}$

régi könyvekben gyakran használt

Sztatika

Elektro

$$\nabla \times \underline{E} = 0$$

$$\nabla \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$\exists \phi$, hogy $\underline{E} = -\nabla \phi$

ϕ: elektromos potenciál

(csak egyszeresen összefüggő tartományban)

$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Laplace-egyenlet)

$$\underline{\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Magneto

$$\nabla \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

$\exists \underline{A}$, hogy $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

$\underline{A}$: vektorpotenciál

(ez is csak egyszeresen összefüggő tartományban)

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \mu_0 \underline{j}$$

$$\nabla(\nabla \underline{A}) - \Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j}$$

Mértékszabadság:

$A \rightarrow A' = A + \nabla \chi$

$\nabla \times \underline{A} = \nabla \times \underline{A}' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ adott $\underline{B}$-hez több $\underline{A}$ tartozhat

Mértékfeltétel:

$\underline{A}$ legyen olyan, hogy $\nabla \underline{A} = 0$!

Ekkor $\underline{B} \rightarrow \underline{A}$ egyértelmű.

Kérdés, hogy ezt megtehetjük-e.

ezt fogjuk látni, hogy igen.

$$\underline{\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}}$$

1. Teljesen üres tér $\rho(\underline{r})$ adott.

Green-függv.: $\Delta_r G(\underline{r},\underline{r}') = \delta^{(3)}(\underline{r}-\underline{r}')$

$$\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\underline{r}')\, G(\underline{r},\underline{r}')\, d^3r'$$

üres térben: $G(\underline{r},\underline{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

ellenőrzés: $\Delta \frac{1}{r} = \partial_r^2 \frac{1}{r} + \frac{2}{r}\partial_r \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega \frac{1}{r}$ ahol $\Delta_\Omega = \partial_\vartheta^2 + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2$

$$= \frac{1}{r}\partial_r^2\left(r\cdot\frac{1}{r}\right) = 0 \checkmark$$

Végeredmény: $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3r'$

1) ponttöltés tere $\quad \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

2) homogén gsz. gömb : $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$

3) homogén töltött szál $\quad \cancel{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3r'}$

elvileg itt nem integrálható ki a Green, de szimmetria feltevéssel

$E(r) = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \phi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$ ezt itt ki kell dumálni

4) homogén ellipszoid

a, b, c a tengelyek x, y és z irányban $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$$\phi_{kint} = \rho_0 \frac{abc}{4\varepsilon_0}\int_\xi^\infty \frac{ds}{R_s}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)$$

$$\phi_{bent} = \rho_0 \frac{abc}{4\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{ds}{R_s}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)$$

ahol $R_s = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}$

$\xi \equiv \xi(x,y,z)$ úgy, hogy $\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1$

9) Multipólus sorfejtés „gyalogosan"

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\underline{r}')\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3\underline{r}'$$

Ha távol megyünk, sorfejtjük:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} - r'_k \partial_k \frac{1}{r} + \frac{1}{2} r'_k r'_l \partial_k \partial_l \frac{1}{r} + \dots = *$$

tudjuk $\partial_k \frac{1}{r} = -\frac{n_k}{r^2}$

$$\partial_k \partial_l \frac{1}{r} = \frac{3 n_k n_l - \delta_{kl}}{r^3}$$

$$* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}\rho(\underline{r}')d^3r' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{n_k}{r^2} r'_k \rho(\underline{r}') d^3r' + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{3n_k n_l - \delta_{kl}}{r^3} r'_k r'_l \rho(\underline{r}') d^3r' + \dots = *$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho(\underline{r}')d^3r'}_{q} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{n_k}{r^2}\underbrace{\int \rho(\underline{r}') r'_k d^3r'}_{d_k} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3} n_k n_l \underbrace{\int \rho(\underline{r}')(3r'_k r'_l - r'^2\delta_{kl}) d^3r'}_{Q_{kl}}$$

q: monopólus (össztöltés)

d_k dipólus vektor

Q_{kl}: quadrupólus momentum tenzor

⋮

multipólusok

Ha $\underline{r}' \to \underline{r}' + \underline{R}$ $\quad \underline{d}' = \underline{d} + q\underline{R}$ $\quad$ Tehát a multipólusok függnek az origótól, kivéve, ha az össztöltés 0

ELDIM

2. gyak (02.20.)

Dipólus

potenciál: $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{d}\,\underline{n}}{r^2}$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\underline{d}\,\underline{n})\underline{n} - \underline{d}}{r^3}$$

mekkora erő hat rá külső erőtérben?

$\phi(\underline{r})$ adott és betesszük egy $\rho(\underline{r})$ töltéseloszlást.

$$(\underline{F})_k = \int \rho(\underline{r}) E_k(\underline{r}) d^3r = \int \rho(\underline{r}) \left(E_k(\underline{0}) + r_e \partial_e E_k(\underline{0}) \right) d^3r =$$

$$= \int \rho(\underline{r}) E_k(0) d^3r + \int \rho(\underline{r}) r_e \partial_e E_k(\underline{0}) d^3r =$$

$$= E_k(0)\, q + d_e \partial_e E_k(0)$$

$$\underline{F} = q\underline{E}(\underline{0}) + (\underline{d}\,\underline{\nabla})\underline{E}(\underline{0})$$

HF: két dipólus egymásra ható ereje.

forgató nyomaték:

$$M_k = \varepsilon_{kem} \int \rho(\underline{r}) r_e E_m(\underline{r}) \approx$$

$$\approx \varepsilon_{kem} E_m(\underline{0}) \int \rho(\underline{r}) r_e = \underline{d} \times \underline{E}(\underline{0})$$ (nagyméretű rendsz. nem érvényes.)

Lyuner nagyméretű mágnesekre.

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r'$$

$$\Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j} \longrightarrow A_k(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_k(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r'$$

Adott $\underline{j}(\underline{r}')$ áramsűrűség. Milyen vektorpotenciál van $\underline{r}$ helyen?

$$A_k(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_k(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r' \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int j_k(\underline{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{n_e r'_e}{r^2} + \dots \right) d^3r' = *$$

mellékfeltétel: $\underline{\nabla}\,\underline{j} = 0$. [illegible]

$f, g, \underline{j}$ mezők.

$$\underline{\nabla}(f g \underline{j}) = \partial_i (f g j_i) = fg\,\underline{\nabla}\,\underline{j} + g(\underline{j}\,\underline{\nabla})f + f(\underline{j}\,\underline{\nabla})g$$

integráljuk térfogatra:

$$\int_V \nabla(fg\underline{j})\,dV = \quad \text{ha } \nabla \underline{j} = 0$$

$$= \int_V \left(g(\underline{j}\nabla)f + f(\underline{j}\nabla)g\right) dV = \oint_{\partial V} (fg\underline{j})\, d\underline{A}$$

lokalizált $\underline{j}$ esetén a felületet felfújjuk: 0 lesz.

$$\int (g\underline{j}\nabla f + f\underline{j}\nabla g)\, dV = 0$$

I. ha $g = 1$ és $f = r_k$ $\Rightarrow \int \underline{j}\, dV = \underline{0}$

II. ha $g = r_k$ és $f = r_e$ $\Rightarrow \int (r_k j_e + r_e j_k)\, dV = 0$

$$A_k(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int j_k(\underline{r}')\, d^3r'}_{\substack{0 \\ \text{(nincs négyzetes tag)}}} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n_e}{r^2}\int r_e' j_k(\underline{r}')\, d^3r' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n_e}{r^2}\int \Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}(r_e' j_k + r_k' j_e)}_{\text{ennek az integrálja } 0} + \tfrac{1}{2}(r_e' j_k - r_k' j_e)\Big] d^3r' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n_e}{r^2}\int \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(r_e' j_k(\underline{r}') - r_k' j_e(\underline{r}')\right)}_{\frac{1}{2}\varepsilon_{ekp}(\underline{r}'\times\underline{j})_p} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{m}\times\underline{n}}{r^2}$$

ahol $\underline{m} = \frac{1}{2}\int \underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}')\, d^3r'$

$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\underline{m}\,\underline{n})\underline{n} - \underline{m}}{r^3}$$

erőre, nyomatékra:

$$\underline{M} = \underline{m}\times\underline{B}$$

$$\underline{F} = (\operatorname{grad}\underline{B})\underline{m} \qquad (F_k = m_e\, \partial_k B_e)$$

levezetés:

$$F_k = \int (\underline{j}(\underline{r})\times\underline{B}(\underline{r}))\, d^3r = \varepsilon_{kem}\int j_e(\underline{r}) B_m(\underline{r})\, d^3r =$$

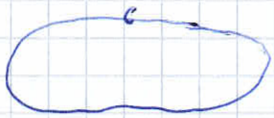
$$= \varepsilon_{kem}\int j_e(\underline{r})\left(B_m(\underline{0}) + r_p\partial_p B_m(\underline{0}) + \dots\right) d^3r =$$

$$= \varepsilon_{kem} B_m(\underline{0})\int j_e(\underline{r})\, d^3r + \partial_p B_m(\underline{0})\,\varepsilon_{kem}\int r_p j_e(\underline{r})\, d^3r =$$

$$= \partial_p B_m\, \varepsilon_{kem}\frac{1}{2}\int (r_p j_e - r_e j_p)\, d^3r = \partial_p B_m\, \varepsilon_{kem} m_q \varepsilon_{peq} =$$

$$= \partial_p B_m\, m_q(\delta_{mq}\delta_{kp} - \delta_{mp}\delta_{kq}) = \partial_k B_q m_q - \underbrace{\partial_p B_p}_{0} m_k = \partial_k B_q m_q$$

Áramhurok



Ha a hurok mentén η töltéssűrűség van és a hurok $\underline{r}_0(s)$

$$\rho(\underline{r}) = \eta \int_{s_1}^{s_2} \left|\frac{d\underline{r}_0}{ds}\right| \delta^{(3)}(\underline{r}-\underline{r}_0(s))\, ds$$

ell.: $Q = \int \rho(\underline{r})\, d^3 r = \eta \int_{s_1}^{s_2} \left|\frac{d\underline{r}_0}{ds}\right| ds$ ez rendben jó

Ha áram van benne

$$\underline{j}(\underline{r}) = I \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\underline{r}_0}{ds} \delta^{(3)}(\underline{r}-\underline{r}_0(s))\, ds$$

ell: $\int \underline{j}\, dV = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\underline{r}_0}{ds} ds = \underline{r}_0(s_2) - \underline{r}_0(s_1) = 0$ zárt görbén ✓

+ olyan $\nabla \underline{j} = 0$ $\qquad \underline{r}_0(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s))$

$$\nabla \underline{j} = I \int_{s_1}^{s_2} \Big(\frac{dx_0(s)}{ds} \delta'(x-x_0(s))\delta(y-y_0(s))\delta(z-z_0(s)) + \frac{dy_0(s)}{ds} \delta(x-x_0(s))\delta'(y-y_0(s))\delta(z-z_0(s)) + z\text{-re is} \Big) ds =$$

$$\left[\int f \delta'(x-x_0)\, dx = -f'(x_0) \right]$$

$$= -I \int \frac{d}{ds}\big(\delta(x-x_0(s))\delta(y-y_0(s))\delta(z-z_0(s))\big) ds = 0 \ ✓$$

hurok mágneses momentuma HF

egyszerű síkhurokra : $\underline{m} = I A$

⇒ tetszőleges térgörbénél létezik egy adott irány (ahonnan a max területet látjuk, tőle α szöggel elfordulva $\cos\alpha$-szorosát

Peremfeltételek

Esetek fémekkel.

„fém": bent $E \equiv 0 \Rightarrow \phi = \text{áll}$
⇒ felülete ekvipotenciális
⇒ lesz felületi töltéssűrűség

σ a fém felületén $\sigma = \varepsilon_0 E_\perp$

mágneses analógia: szupravezetők
nincs elektron ellenállás + nincs mágneses tér ⇒ $j = 0$ bent, csak a felületen
$\underline{B}$ érintő, azaz $\parallel$ a felülettel

Három módon ezt:
- töltéstükrözés („töltés kitalálás")
- 2D-s feladatokban: komplex fgv-tan
- ortogonális fgv-rendszerek szerinti kifejtés

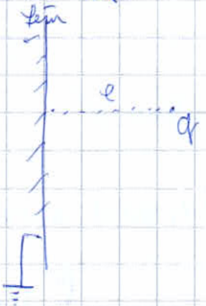
ELDIM

3. gyak (02. 27.)

Tükrözés

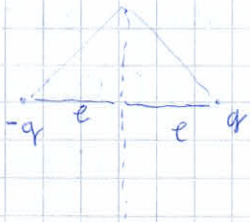
Ha φ-re teljesül: $\Delta\varphi = 0$ és $\varphi|_\infty = 0$, akkor $\varphi = 0$. (ez tétel)

egyszerűbb eset:



Milyen tér alakul ki a térben (ahol nincs fém)?

Ötlet: megoldjuk egy két töltésből álló elrendezésre:

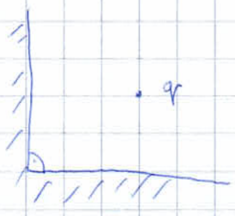


A felező síkban 0 a pot.

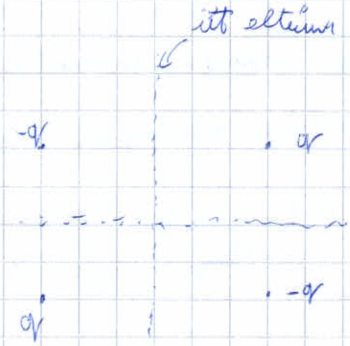
$\Rightarrow$ az eredeti elrendeződésben a kérdéses térben u.a. a tér, mint az képzeletbeli elrendezés jobb oldalán

$\Rightarrow$ mintha a fém oldalán ott lenne ellentétes tükörkép.

Több fémlap:



ezzel ekvi elrend.

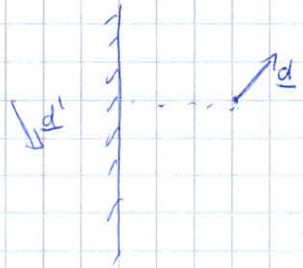


Ezt általában lehet eljátszani, ha a közrefogott szög 2π-nek "egész" része

Akkor van, ha nem az:

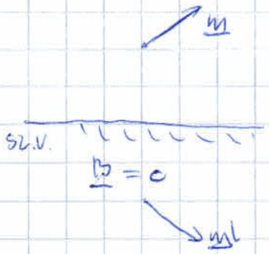
ezt nem lehet így ☹

dipólus:



végiggondolva közeli ponttöltésre, belátható, hogy úgy tükröződik, mint a ~~[illegible]~~ [illegible]

[illegible] mágnessel:

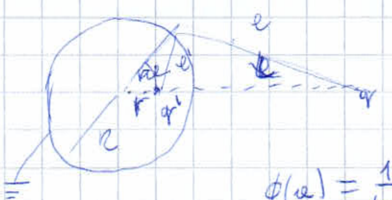


A villamos tükör analógiájára feltételezzük, hogy van mágneses töltés és ~~...~~ ezzel szerkeszthető a mágneses dipólus

Mivel sz.v. felszíne közelében az erővonalak ||, ezért ott a tükörtöltés ugyanolyan előjelű

Tehát a tükrözés [illegible] tükrözés

Gömbi tükörtöltés



R, L, q-t ismerjük, azt keressük, hogy van-e olyan r és q', hogy jó legyen.

$$\phi(\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{e} + \frac{q'}{e'}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q'}{e'} = -\frac{q}{e}$$

$$\Rightarrow q'^2 e^2 = q^2 e'^2$$

$$q'^2 \left(L^2 + R^2 - 2LR\cos\varphi\right) = q^2\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi\right)$$

$$q'^2\left(L^2+R^2\right) - q^2\left(R^2+r^2\right) = 2\cos\varphi\left(q'^2 L R - q^2 r R\right)$$

Hogy ez $\forall \varphi$-re igaz legyen, az kell, hogy
$$\left.\begin{aligned} q'^2\left(L^2+R^2\right) - q^2\left(R^2+r^2\right) &= 0 \\ \underline{q'^2 L R - q^2 r R} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

megoldás:

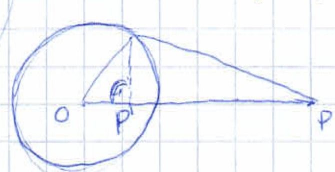
$$r_{1,2} = \frac{L^2+R^2}{2L} \pm \frac{L^2-R^2}{2L} = \begin{cases} L & q'_1 = -q \\ \dfrac{R^2}{L} & q'_2 = -\dfrac{R}{L} q \end{cases}$$

(ez ok, de nem ezt vártuk)

ennek több értelme van.

HF: $\sigma(\varphi) = ?$
$\int \sigma(\varphi)$
teljes gömbre

inverzió, avagy a gömbre tükrözés



ez ugyanaz, amit az előbb csináltunk

tulajdonságai: – körök képe körök (HF: belátni)

– origón átmenő körök képei egyenesek, és viszont

η töltéssűrűség $E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ $\phi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$

Ebben is ezt akarjuk

Célunk: általában az eltérés
$\phi_{\pm}$ de $\eta' = -\eta$

Ekkor $\phi = \frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}$ Ezek lesznek az ekvipot. felületek, ahol

$\frac{r_1}{r_2} = \text{áll.} \Rightarrow$ Apollonius-körök

Komplex - fgv.-kel:

2D-s feladatokra jó

egy komplex fgv. akkor differenciálható, ha a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülnek:

$f(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ ahol $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

Emiatt $\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ U és V szintvonalai $\perp$

Továbbá $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta U = 0$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \Delta V = 0$

Adott ekv-re találni olyan komplex fgv.-t, ami megfelel neki, megadja az eredeti problémát

$\phi(x,y)$: potenciál

$\tilde{\Phi}(z)$: komplex fgv.   konvenció: $\phi(x,y) = \mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}(z)$

$\Psi(x,y) = \mathrm{Im}\,\tilde{\Phi}(z)$

Mi a 2D-s vonaltöltés komplex potenciálja?

Azt tudjuk, hogy $\phi(x,y) = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$ ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$

Komplex ln fgv.:

$e^z = \mathrm{Exp}(z) \overset{\text{definíció}}{=} 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$

Ahol az invertálható: $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

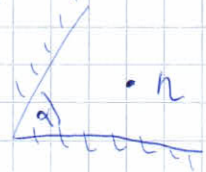
ez a z komplex szám valós tengellyel bezárt szöge.

arg(z) nem diffható és folytonos, mert 2π-ként kéne újraindulni

Általában $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right]$

ez a végtelen hosszú vonaltól vágott tér „[illegible]" ([illegible], pont, mint arg(z))

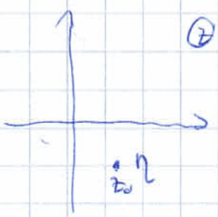
[illegible]



ELDIM

4. gyak. [03.06.]

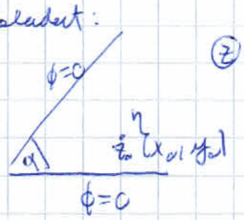
Cél: $\phi(x,y)$ potenciál legyen $\phi(x,y) = \mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}(z)$



Egy pont potenciálja: $\tilde{\Phi}(z) = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln(z-z_0)$

gyártási mechanizmus: $\phi(z) = \tilde{\Phi}_1(g(z))$

Típusfeladat:



Ötlet: milyen jó lenne, ha $\alpha = \pi$ lenne!
Fogalmazzuk át a feladatot úgy, hogy 180° legyen a középponti szög!
Keressünk ezzel a fv-trafót

Legyen $z' = g(z) = z^{\pi/\alpha}$ ez kihajtogatja a dolgokat

Így keressük a $\tilde{\Phi}$ függvényt
Tükörtöltés miatt a töltés alatt, mintha lenne egy tükörkép:

$$\tilde{\Phi}'(z') = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(z'-z_0') - \ln(z'-z_0'^{*})\right]$$

Ez alapján $\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}'(g(z)) = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\right) - \ln\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{*\frac{\pi}{\alpha}}\right)\right]$

amit tudjon:
- differenciálható (tehát megoldja a Laplace-t)
- Pontöltés közelében jól viselkedik
- kielégíti a HF-t

Megjegyzések:
- honnan tudom egy tetszőleges fgv-ről, hogy hol vannak a töltések és azok mekkorák?

Ahol differenciálható, ott nincs, ahol szinguláris ott igen. De mekkora?

egytöltés esetén $\tilde{\Phi}(z) = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln(z-z_0)$

$$\left(-\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln(z-z_0)\right)' = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z-z_0} \Rightarrow \mathrm{Res}(\phi(z_0)) = \frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0}$$

=> Ahol a függvénynek elsőfokú pólusa van, ott van a töltés és a E(t)-től függ, hogy mekkora.

Nézzük a adott feladatot: z: $\ln(g(z)-g(z_0))$-t keressük, ahol $g(z)$ differenciálható z_0-ban

$$\mathrm{Res}\left(\ln(g(z)-g(z_0))\right)'\Big|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\left(\ln(g(z)-g(z_0))\right)' =$$

$$= \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\,\frac{1}{g(z)-g(z_0)}\,g'(z) = 1$$

Tehát tényleg jó az a függvény átállító tulajdonsága

- Mit is jelent a hatványozás

$a^b := \exp(b \ln a)$ ez valósban ok, de az ln-nek van egy vágása

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

Az arg z vágja általában a negatív valós tengelyt: $\arg z \in \,]-\pi, \pi]$

előny: $\ln(z^*) = (\ln z)^*$

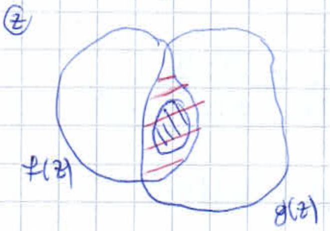
emiatt: $(a^b)^* = (a^*)^{(b^*)}$

DE $\ln a + \ln b \neq \ln(ab)$!!!

$a^c b^c \neq (ab)^c$!!! [mivel, ha csak a valós rész érdekel, akkor jó!]

félsíkos átalakítás: $\Phi(z) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{*\frac{\pi}{\alpha}}}\right)$ HF: ezzel lehet szögre behelyettesíteni

- Analitikus elfolytatás



f az egyik, g a másik halmazon van értelmezve, ezeknek van olyan része, ahol a kettő egyenlő.

Ha van egy nem túl kicsi rész ahol egyenlő, akkor a teljes metszetben egyenlő

pl.: $f(z) = 1+z+z^2+\dots$ értelmezve van ott, ahol $|z|<1$

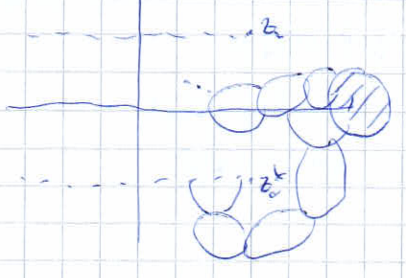
$g(z) = \frac{1}{1-z}$ mindenhol értelmes kivéve $z=1$-en.

Mivel a valósakon megegyeznek, a teljes $|z|<1$ halmazon megegyeznek.

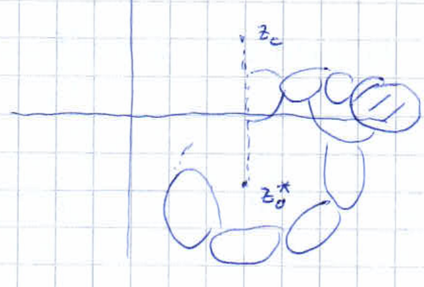
Másképp: Nincs másik differenciálható fgv, ami adott halmazon $f(z)$-vel egyezik.

pl.: az $\ln z$-t akárhogy akarjuk analitikusan elfolytatásnál, azt kapjuk, hogy nem is csak az egyik pont körül (a $z=0$): Elágazási pont

két fgv: $\ln(z-z_0) - \ln(z-z_0^*)$



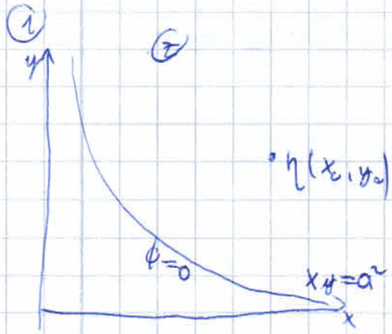
$\ln\frac{z-z_0}{z-z_0^*}$



Egytávoli sávban egyenletében, és ideális egységnyi folytatás amely hele nem érhet egy irányába.

Konkrét feladatok:

(1)



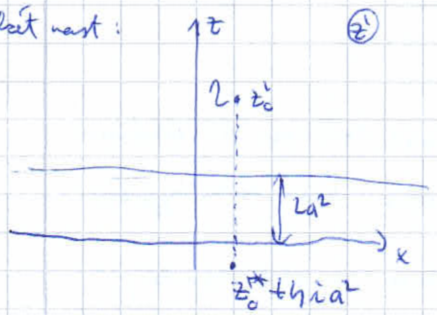
$\phi(x, y) = ?$

Keressünk $\tilde{\Phi}(z)$-t ami egy kiforduló ... egyenesbe.

Válassz: $g(z) = z^2$

Most: $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2i\,xy$ ha $xy = a$ akkor $\mathrm{Im}(z^2) = 2a^2$

Tehát most:



$$\tilde{\Phi}'(z') = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(z' - z_0') - \ln(z' - z_0'^* - 4ia^2)\right]$$

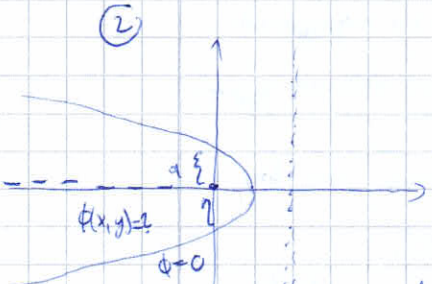
$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}'(z') = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - z_0^{*2} - 4ia^2}$$

A megoldás: $\phi(x, y) = \mathrm{Re}(\phi(z))$

$$\phi(x,y) = \mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}(z) = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - z_0^{*2} - 4ia^2}\right| = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2 + 2i(xy - x_0y_0)}{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2 + 2i(xy + x_0y_0 - 2a^2)}\right| =$$

$$= -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy - x_0y_0)^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy + x_0y_0 - 2a^2)^2}$$

(2)



A parabola egyenlete: $\sqrt{x^2 + y^2} = a - x$

$\Rightarrow\; a^2 - 2ax = y^2$

Vonzunk gyakat!

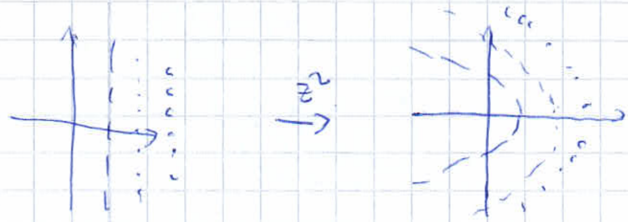
A gyújtópontunk és a negatív valós tengely - irányán, a tükrözést

a bal-felső szöget fejezi. Állítás: a parabolát hibátlan egy egyenesé.

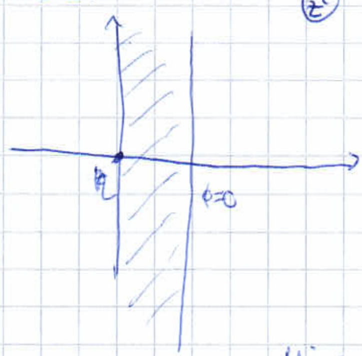
Ha $g(z') = z'^2$ és $z' = \sqrt{\frac{a}{2}} + it$ akkor $z'^2 = \frac{a}{2} - t^2 + i\sqrt{2a}\,t$

$x = \frac{a}{2} - t^2$ $\quad y = \sqrt{2a}\,t$

egyenlet: $x = \frac{a}{2} - \frac{y^2}{2a}$



Tehát



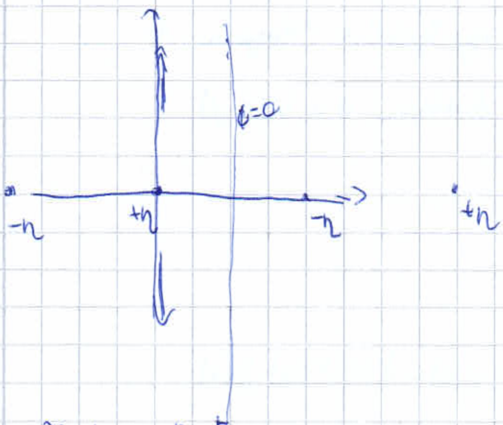
z'

differenciálható fgv., + harmonikus a bevonalkázott részen úgy, hogy a vágásnál is differenciálható legyen

Szimmetriai megfontolásokból van $\underline{E} \parallel x$

És a z' síkon azt jelenti, hogy $\underline{E} \parallel y'$ és $\tilde{\Phi}(y') = \tilde{\Phi}(-y')$

Mivel ez konform leképezés



A változtatással folytatjuk a tükrözgetést és a kiegészítgetést.

$$\tilde{\Phi}(z') = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln z' - \ln(z'-\sqrt{2a}) - \ln(z'+\sqrt{2a}) + \ln(z'-2\sqrt{2a}) + \ln(z'+2\sqrt{2a}) - \dots\right] =$$

$$= -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln z' - \ln(z'^2-2a) + \ln(z'^2-4\cdot 2a) - \ln(z'^2-9\cdot 2a) + \dots\right] =$$

$$= -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(z'\frac{(z'^2-4\cdot 2a)(z'^2-16\cdot 2a)(z'^2-36\cdot 2a)\cdots}{(z'^2-2a)(z'^2-9\cdot 2a)(z'^2-25\cdot 2a)\cdots}\right) =$$

olyan összefüggés jut, hogy

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots$$

$$= -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(z'\frac{\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{z'}{\sqrt{2a}}\right)^2\right]\left[1-\frac{1}{16}\left(\frac{z'}{\sqrt{2a}}\right)^2\right]\cdots\ 2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots}{\left[1-\left(\frac{z'}{\sqrt{2a}}\right)^2\right]\left[1-\frac{1}{9}\left(\frac{z'}{\sqrt{2a}}\right)^2\right]\cdots\ 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots}\right) = *$$

$\hookrightarrow$ és pont $\frac{\pi}{2}$ (ahonnan...)

A mi esetünk:
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}} = \left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\left(1-\frac{1}{16}x^2\right)\cdots$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = (1-x^2)\left(1-\frac{1}{9}x^2\right)\cdots$$

$$* = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\pi z'}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{z'}{\sqrt{2a}}\right)}{\frac{\pi}{2}\frac{z'}{\sqrt{2a}}}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{z'}{\sqrt{2a}}\right)}\right) =$$

innen HF

$$= -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{z'}{\sqrt{2a}}\right)\right) + C$$

EL DIM

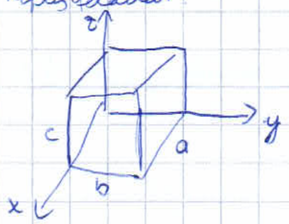
5. gyak (03.13.)

Ortogonális fv.-rendszerek szerinti kifejtés

- Descartes-i kr: Fourier-sorok
- Gömbi kr: Legendre-polinomok
- Henger kr: Fourier-Bessel

Descartes:

Tipikus feladat:



Keressük a potenciált egy téglatest belsejében, ha $\Phi=0$ 5 lapon, a fedlapon $\Phi = V(x,y)$

1) $\Delta\Phi = 0$ átírva.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \qquad \text{TFH: } \Phi(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

$$X''YZ+XY''Z+XYZ''=0$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\alpha^2}+\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\beta^2}+\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\alpha^2+\beta^2}=0$$

A tagok csak x, y vagy z-től függnek, tehát állandónak kell lenniük

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{X}=-\alpha^2 \Rightarrow X(x)=A\sin(\alpha x)+B\cos(\alpha x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y''}{Y}=-\beta^2 \Rightarrow Y(y)=C\sin(\beta y)+D\cos(\beta y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Z''}{Z}=\alpha+\beta \Rightarrow Z(z)=F\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z\right)+G\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z\right)$$

2)

$\Phi(x=0,y,z)\doteq 0 \Rightarrow B=0$

$\Phi(x,y=0,z)\doteq 0 \Rightarrow D=0$

$\Phi(x,y,z\doteq 0)\doteq 0 \Rightarrow G=0$

ez már a egyesített konstans.

az alakja: $\Phi(x,y,z)=A\sin(\alpha x)\sin(\beta y)\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z\right)$

3) $\Phi(x=a,y,z)\doteq 0 \Rightarrow A\sin(\alpha a)\,\underline{\ldots}\doteq 0 \Rightarrow \alpha=\frac{n\pi}{a}$ ahol $n=1,2,3\ldots$

tehát α tisztán valós

$\Phi(x,y=b,z)\doteq 0 \Rightarrow B\sin(\beta b)\,\underline{\ldots}=0 \Rightarrow \beta=\frac{m\pi}{b}$ ahol $m=1,2,3\ldots$

tehát β is tisztán valós

Tehát: $\Phi(x,y,z)=A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\mathrm{sh}(\gamma_{nm}z)$ ahol $\gamma_{nm}=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$

e)

Ez a ϕ így nem tetszőleges, de x és y irányban is működik, és a határon teljesíti a feltételeket $\Rightarrow$ összeadhatók.

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\mathrm{sh}(\gamma_{nm} z)$$

Ha van egy Hilbert-tér: $\mathcal{H} \ni \varphi$ ($\mathcal{L}^2$-re leírás)

$\mathcal{L}^2 \supset \{\varphi_i\}$ az egy teljes ortonormált rendszer, ha $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \int \varphi_i^* \varphi_j = \delta_{ij}$

akkor $\forall \psi$: $\psi = \sum_i a_i \varphi_i$

itt most

$$\sum_{n,m} \underbrace{A_{nm}\,\mathrm{sh}(\gamma_{nm} c)}_{\tilde{A}_{nm}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \overset{!}{=} V(x,y)$$

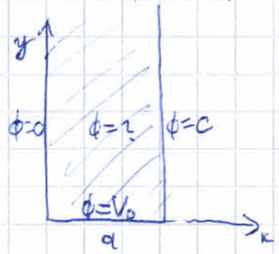
a TONR most $\psi_{n,m}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$

$$A_{n,m}\,\mathrm{sh}(\gamma_{n,m} c) = \frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} V(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy\,dx$$

ezt kiintegrálva, meghatározzuk a együtthatókat, és ezt behelyettesítve a $\phi(x,y,z)$-be.

Konkrét feladat (itt most csak alakban végigszámolva):

2D-s feladat



$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

1) TFH: $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$

ekkor $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow$ mindkét tagnak konstansnak kell lennie.

legyen $\frac{X''}{X} = -\alpha^2$ $\quad \frac{Y''}{Y} = \alpha^2$

$\Rightarrow X(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x)$

$Y(y) = C e^{\alpha y} + D e^{-\alpha y}$

2) $\phi(x=0,y) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B = 0$

$\phi(x, y\to\infty) = ?$ erre nincs kikötés, de fizikailag tudjuk, hogy $\phi(x, y\to\infty) \not\to \infty$

$\Rightarrow C = 0$

3) $\phi(x=a,y) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$ ahol $n = 1,2,3\ldots$

Tehát $\phi(x,y) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$

4) $\phi(x,y) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$

$y=0$ esetén: $\sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = V_0$

TONK miatt;

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^{a_n} V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \frac{2V_0}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{4V_0}{\pi}\frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

5) Felösszegzés:

$$\phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{\substack{\text{páratlan}\\ n\text{-ekre}}} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y} = \frac{4V_0}{\pi}\,\mathrm{Im}\sum_{n\,\text{ptlan}}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}e^{i\frac{n\pi}{a}x} =$$

$$= \frac{4V_0}{\pi}\,\mathrm{Im}\sum_{n\,\text{ptlan}}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{\pi}{a}(ix-y)}\right)^n = *$$

$$1+z+z^2+\dots = \frac{1}{1-z}$$

$$z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots = -\ln(1-z)$$

$$z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots = \frac{1}{2}\left[-\ln(1-z)+\ln(1+z)\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = \mathrm{arth}\,z$$

$$* = \frac{2V_0}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\frac{1+e^{\frac{\pi}{a}(ix-y)}}{1-e^{\frac{\pi}{a}(ix-y)}} = \frac{2V_0}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\frac{e^{\frac{\pi}{a}y}+e^{\frac{i\pi}{a}x}}{e^{\frac{\pi}{a}y}-e^{\frac{i\pi}{a}x}} =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\frac{\left(e^{\frac{\pi}{a}y}+e^{\frac{i\pi}{a}x}\right)\left(e^{\frac{\pi}{a}y}-e^{-\frac{i\pi}{a}x}\right)}{(\dots)^2} = \frac{2V_0}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\frac{e^{\frac{2\pi}{a}y}-1+e^{\frac{\pi}{a}y}2i\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{(\dots)^2} =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi}\,\mathrm{arctg}\frac{2e^{\frac{\pi}{a}y}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{e^{\frac{2\pi}{a}y}-1} = \underline{\frac{2V_0}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)}\right)}$$

Ellenőrizzük a HF-et:

ha $x=0$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 0\right)=0 \quad \mathrm{arctg}\,0 \Rightarrow \phi=0$

ha $x=a$ $\quad \sin(\pi)=0 \Rightarrow \mathrm{arctg}\,0 \Rightarrow \phi=0$

ha $y=0$ $\quad \mathrm{sh}(0)=0 \Rightarrow \mathrm{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi=V_0$ ✓

Dirichlet-hf: $\quad \Delta\phi=0$ bent, $\phi|_{\text{határon}}$ adott

olyan értelmezésben kezdett van megoldás

Neumann-hf: $\quad \Delta\phi=0$ bent, $\partial_n\phi|_{\text{határon}}$ adott

pl.: négyzetes teret leírni szuperpozícióval.

ez is elvileg működik mindig

ELDIM

6 gyak (03.20.)

Gömbfüggvények

Mi van gömbi koordinátarendszer esetén?

$\Delta\phi = 0$ azaz $\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right] = 0$

keressük a megoldást $\phi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)T(\vartheta)F(\varphi)$ alakban!

$$R''TF + \frac{2}{r}R'TF + \frac{1}{r}\left[RT''F + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}RT'F + \frac{1}{\sin^2\vartheta}RTF''\right] = 0 \qquad /\cdot\frac{1}{RTF}$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{T''}{T} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{T'}{T} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{F''}{F}\right] = 0$$

Az $\frac{F''}{F}$ nem függhet φ-től (korábbiak miatt) $\Rightarrow$ állandó

$\frac{F''}{F} := -m^2$ (mert periodikus megoldást várunk, és így lesz minus a negyzeten)

$\Rightarrow \quad F(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$

A thetás is állandó: $\frac{T''}{T} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{T'}{T} - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta} = -\ell(\ell+1)$ (1)

A maradék: $\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} = 0$ (2)

Először a (2)-t oldjuk meg:

$$(rR)'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}(rR) = 0 \Rightarrow rR = \begin{cases} r^{\ell+1} \\ r^{-\ell} \end{cases} \Rightarrow R(r) = Ar^{\ell} + Br^{-(\ell+1)}$$

1. hengerszimmetrikus elrendezésen:

$m = 0$

$\frac{d^2T}{d\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{dT}{d\vartheta} + \ell(\ell+1)T = 0$ $\qquad \cos\vartheta := y \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} = -\sqrt{1-y^2}\frac{d}{dy}$

$\frac{d^2}{d\vartheta^2} = (1-y^2)\frac{d^2}{dy^2} - y\frac{d}{dy}$

$$\underline{(1-y^2)\frac{d^2T}{dy^2} - 2y\frac{dT}{dy} + \ell(\ell+1)T = 0}$$

Legendre-féle diffegyenlet

Minden ℓ esetén van 2 db független megoldás, de az egyik a északi, a másik a déli Sarkon egészségtelen

Ha ℓ egész, akkor az egyik megoldás polinom, így van egészséges

Ez a Legendre-polinom: $P_\ell(y) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dy}\right)^\ell (y^2-1)^\ell$

tehát a potenciál: $\phi(r,\varphi,\vartheta) = \left(Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\vartheta)$

ismerkedjünk a P_ℓ-ekkel!

① P_ℓ ℓ-adfokú polinom: triviális

② P_ℓ paritása $=$ ℓ paritásával

③ $P_\ell(+1) = 1$ mert az (y^2-1) tényezőn mindegyikre jut egy deriválás $2y = 2$ $\Rightarrow \ell!\,2^\ell$
ha nem így, akkor az egy y^2-1 0-t ad.

④ $P_0(y) = 1$

$P_1(y) = y$

$P_2(y) = \frac{1}{2}(3y^2-1)$

$P_3(y) = \frac{1}{2}(5y^3-3y)$

⑤ ortogonális rendszert alkotnak: $\int_{-1}^{1} P_\ell(y)\, P_{\ell'}(y)\, dy = 0$ ha $\ell \neq \ell'$

emlékeztető az önadjungált operátorok sajátvektoraival:

$\hat{A}\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1$ $\quad \langle v_1|\hat{A}v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1|v_2\rangle$

$\hat{A}\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2$ $\quad \langle \hat{A}v_1|v_2\rangle = \lambda_1\langle v_1|v_2\rangle$ ha $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle v_1|v_2\rangle = 0$

itt

$$\int_{-1}^{1}\Bigg\{\underbrace{(1-y^2)\frac{d^2P_\ell(y)}{dy^2} - 2y\frac{dP_\ell(y)}{dy}}_{\frac{d}{dy}\left((1-y^2)\frac{dP_\ell(y)}{dy}\right)} + \ell(\ell+1)P_\ell(y)\Bigg\}P_{\ell'}(y)\,dy = 0$$ mert a kapcsos zárójel 0.

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dy}\left((1-y^2)\frac{dP_\ell(y)}{dy^2}\right)P_{\ell'}(y)\,d\ell + \ell(\ell+1)\int_{-1}^{1}P_\ell(y)P_{\ell'}(y)\,dy = 0$$

$$\underbrace{(1-y^2)\frac{dP_\ell(y)}{dy}P_{\ell'}(y)\Big|_{-1}^{+1}}_{=0} - \underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{dP_\ell(y)}{dy}\frac{dP_{\ell'}(y)}{dy}\,(1-y^2)\,d\ell}_{\substack{\ell \text{ és } \ell' \text{ felcserélve} \\ =0}} = -\ell(\ell+1)\int_{-1}^{1}P_\ell(y)P_{\ell'}(y)\,dy$$

ennek muszáj 0-nak lennie, hogy az egyenlőség teljesüljön

⑥ $$\int_{-1}^{1}P_\ell(y)P_\ell(y)\,dy = \frac{2}{2\ell+1}$$

ui.:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^\ell\ell!}\right)^2\left(\frac{d}{dy}\right)^\ell(y^2-1)^\ell\cdot\left(\frac{d}{dy}\right)^\ell(y^2-1)^\ell dy = \left(\frac{1}{2^\ell\ell!}\right)^2\left(\frac{d}{dy}\right)^{\ell-1}(y^2-1)^\ell\left(\frac{d}{dy}\right)^\ell(y^2-1)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\left(\frac{1}{2^\ell\ell!}\right)^2\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dy}\right)^{\ell-1}(y^2-1)^\ell\cdot\left(\frac{d}{dy}\right)^{\ell+1}(y^2-1)^\ell\,dy = \dots$$

ezek lesznek az oszlopon mindig 0.

$$= \frac{1}{(2^\ell\ell!)^2}(-1)^\ell\int_{-1}^{1}(y^2-1)^\ell\left(\frac{d}{d\ell}\right)^{2\ell}(y^2-1)^\ell\,dy = \frac{(2\ell)!}{(2^\ell\ell!)^2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^\ell\,dy = *$$

ami a legmagasabb fokú tagból éli túl a deriválást

Béta integrál:

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \qquad \text{ahol } \mathrm{Re}\,\alpha>0 \text{ és } \mathrm{Re}\,\beta>0$$

$$= \text{ezt elhiszi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}\varphi\,\cos^{2\beta-1}\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

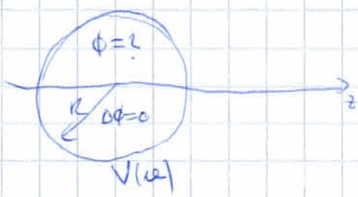
$$* = \frac{(2\ell)!}{(2^\ell \ell!)^2}\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2\ell+1}d\varphi = \frac{(2\ell)!}{(2^\ell \ell!)^2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+1+\frac{1}{2})} = \frac{(2\ell)!}{(2^\ell \ell!)^2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\ell!}{\sqrt{\pi}\,\frac{(2\ell+2)!}{2^{2\ell+2}(\ell+1)!}} =$$

$$= \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\,\frac{2^{2\ell+2}(\ell+1)!\,\ell!}{(2\ell+2)!} = \frac{2}{2\ell+1}$$

7

HF: $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(y) = \frac{1}{\sqrt{1-2ty+t^2}}$

Feladat



hengerszimmetria

$V(\vartheta)$ adott, milyen potenciál van a gömb belsejében

$\Delta\phi = 0$

$\phi(r,\vartheta) = (A r^\ell + B r^{-(\ell+1)})P_\ell(\cos\vartheta)$ lineáris

$\phi(r,\vartheta) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)})P_\ell(\cos\vartheta)$

és $r=0$-ban ϕ véges $\Rightarrow \forall\ell$-re $B_\ell = 0$

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\vartheta)$$

ott ismerjük, így

$\phi(r=R,\vartheta) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\vartheta) \stackrel{!}{=} V(\vartheta)$

tudjuk, hogy $\displaystyle\int_0^\pi P_\ell(\cos\vartheta)P_{\ell'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$ amit azt még kell mutatni:

$$\int_0^\pi P_{\ell'}(\cos\vartheta)\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \int_0^\pi V(\vartheta)P_{\ell'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell R^\ell\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} = \int_0^\pi V(\vartheta)P_{\ell'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$A_{\ell'} = \frac{2\ell'+1}{R^{\ell'}\cdot 2}\int_0^\pi V(\vartheta)P_{\ell'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta$$

Feladat

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

A r' sugarú gömbön belül a ϕ kielégíti a $\Delta\phi=0$-t

Tehát itt $\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{r<r'}$

HA a gömbön kívül vagyunk, ott is $\Delta\phi=0$

Tehát $\sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\vartheta) = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{r>r'}$

Mivel egyenlőek A_ℓ-ek és B_ℓ-ek?

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{r<r'} = \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\vartheta) \qquad \text{a z tengelyen: } \frac{1}{r'-r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell$$

$$= \frac{1}{r'-r} \qquad \Rightarrow A_\ell = r'^{-(\ell+1)}$$

ha kívül:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{r>r'} = \sum_\ell B_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\vartheta)$$

$$\frac{1}{r-r'} = \sum_\ell B_\ell r^{-(\ell+1)} \quad \Rightarrow \quad B_\ell = r'^{\ell}$$

Egy tömörebb alakban:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos\vartheta)\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}$$

Pl.:

ha $r'<r$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos\vartheta)\frac{(r')^\ell}{r^{\ell+1}}$$

$$\hookrightarrow = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2ty}} = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos\vartheta)\, t^\ell$$

$$t=\frac{r'}{r} \qquad y=\cos\vartheta$$

most be is láttuk a HF-t az előző oldalról ☺

ELDIM
7. gyak (04.27.)

Dielektrikumok

$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$ szuszceptibilitás

Feltesszük, hogy $\underline{P} = \varepsilon_0 \chi \underline{E}$

ezzel: $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$ ahol $\varepsilon = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r}$

$\underline{\nabla} \underline{D} = \rho_{valódi}$ határfeltételek: $D_{n1} = D_{n2}$

$E_{t1} = E_{t2}$

$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}(\underline{B} - \underline{M})$ mágneses szuszceptibilitás

feltesszük, hogy $\underline{M} = \chi \underline{H}$

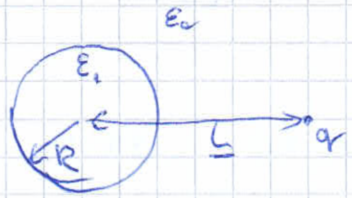
$\underline{B} = \mu \underline{H}$ ahol $\mu = \mu_0(1+\chi)$

$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{j}_{valódi}$

határfeltételek: $B_{n1} = B_{n2}$

$H_{t1} = H_{t2}$

Gömbfüggvényes alapfeladat:



Határozzuk meg a potenciált kint és bent.

A mit tudunk: $D_{n\,bent} = D_{n\,kint}$

$E_{t\,bent} = E_{t\,kint}$

$\underline{\nabla}\,\underline{D} = 0$ ahol nincs töltés

Homogén közegben: $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$

$\Delta \phi = 0$ ahol nincs töltés

bent a pot.-ot sorbafejthetjük:

$$\phi_{bent}(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta)$$

$$\phi_{kint}(\underline{r}) = \phi_{töltés}(\underline{r}) + \phi_{gömb\text{-}kint}(\underline{r})$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{L}|} + \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + G_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta)$$

Mivel gömbön belül a pot. véges $B_l = 0$ $\forall l$-re

Mivel a végtelenben is 0, ezért $C_l = 0$ $\forall l$-re

Tehát a keresett függvények:

$$\phi_{bent}(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta)$$

$$\phi_{kint}(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} G_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\vartheta) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{L}|}$$

Azt akarjuk, hogy összeillesszük:

$D_{n\,bent} = D_{n\,kint}$ ha $r=R$ $\qquad \underline{D} = \varepsilon \underline{E} = -\varepsilon \nabla \phi$

$$D_n = -\varepsilon\, \partial_r \phi$$

Mivel most $r<L$: $\dfrac{1}{|\underline{r}-\underline{L}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{r^l}{L^{l+1}} P_l(\cos\vartheta)$

ezzel $\phi_{kint}(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(G_l r^{-(l+1)} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{r^l}{L^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta)$

Az $E_{t,K} = E_{t,B}$ feltétel azon nyugszik, hogy $\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$, de emiatt vezettük be ϕ-t, tehát ezzel ekvi, hogy $\phi_{Bent}(R) = \phi_{kint}(R)$ (1)

A $D_{nK} = D_{nB} \Rightarrow -\varepsilon_1 \partial_r \phi_{Bent}|_{r=R} = -\varepsilon_0 \partial_r \phi_{kint}|_{r=R}$ (2)

(1): $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l R^l - G_l R^{-(l+1)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{L^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta) = 0$ $\quad \forall\vartheta$-ra

(2) $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left(-\varepsilon_1 A_l l R^{l-1} + \varepsilon_0 G_l \frac{-(l+1)}{R^{l+2}} + \frac{q}{4\pi} \frac{l R^{l-1}}{L^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta) = 0$ $\quad \forall\vartheta$-ra

$\Rightarrow$ az $P_l(\cos\vartheta)$-k eh.-i 0-k $\Rightarrow$ $\forall l$-re kapunk 2 db egyenletet, amiből A_l és G_l kitalálható.

(1): $A_l R^l - G_l R^{-(l+1)} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{R^l}{L^{l+1}} = 0$ $\quad \forall l$-re

(2): $-\varepsilon_1 A_l l R^{l-1} + \varepsilon_0 G_l \dfrac{-(l+1)}{R^{l+2}} + \dfrac{q}{4\pi} \dfrac{l R^{l-1}}{L^{l+1}} = 0$ $\quad \forall l$-re.

inhomogén lineáris egyenletrendszer $\Rightarrow$ A_l, G_l egyértelműen kiszámolható.

invertálni fárasztó, de most megoldjuk:

Legyenek $A_l = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{R^{l+1}} a_l$

$G_l = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} R^l g_l$ $\qquad$ így a_l és g_l dimenziótlanok

$\lambda = \dfrac{L}{R} \qquad \varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$

(1): $a_l - g_l = \lambda^{-(l+1)}$ $\quad \forall l$-re

(2) $+\varepsilon l a_l + (l+1) g_l = + l \lambda^{-(l+1)}$ $\quad \forall l$-re

$$(1):\quad a_\ell - g_\ell = \lambda^{-(\ell+1)}$$
$$(2):\quad \frac{\varepsilon \ell a_\ell}{\ell+1} + g_\ell = \frac{\ell}{\ell+1}\lambda^{-(\ell+1)}$$
$$\Rightarrow \left(1+\frac{\varepsilon \ell}{\ell+1}\right) a_\ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1}\lambda^{-(\ell+1)}$$

$$\Rightarrow a_\ell = \frac{2\ell+1}{(1+\varepsilon)\ell+1}\lambda^{-(\ell+1)}$$

$$g_\ell = \frac{(1-\varepsilon)\ell}{(1+\varepsilon)\ell+1}\lambda^{-(\ell+1)}$$

ellenőrzés: ha $\varepsilon = 1$, akkor $g_\ell = 0$ ami jó, mert a gömb [illegible] nagyon [illegible] lesz

és $a_\ell = \lambda^{-(\ell+1)}$

HF: ez tényleg a ponttöltés tere a múlt órai sorfejtéssel.

Vmi újabb feladat:

$V(\vartheta) = \alpha + \beta\cos\vartheta + \gamma\cos^2\vartheta + \lambda\cos^3\vartheta$

$R_2 < R_1$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_\ell \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}\right) P_\ell(\cos\vartheta)$$

határfeltételek:

$- \ \phi(r=R_2) = 0$

$$\sum_\ell \left(A_\ell R_2^\ell + B_\ell R_2^{-(\ell+1)}\right) P_\ell(\cos\vartheta) = 0 \quad \forall\vartheta\text{-ra}$$

$$\Rightarrow A_\ell R_2^\ell + B_\ell R_2^{-(\ell+1)} = 0 \quad \forall\ell\text{-re}$$

$$\Rightarrow B_\ell = -A_\ell R_2^{2\ell+1}$$

tehát $\phi(\underline{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(r^\ell - R_2^{2\ell+1} r^{-(\ell+1)}\right) A_\ell P_\ell(\cos\vartheta)$

$- \ \phi(r=R_1) = V(\vartheta)$

$$\sum_\ell \underbrace{A_\ell\left(R_1^\ell - \frac{R_2^{2\ell+1}}{R_1^{\ell+1}}\right)}_{a_\ell} P_\ell(\cos\vartheta) = \alpha + \beta\cos\vartheta + \gamma\cos^2\vartheta + \lambda\cos^3\vartheta \qquad y := \cos\vartheta$$

$$a_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} P_\ell(y)\left(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \lambda y^3\right) dy$$

ötlet: a szögfüggést [illegible] fel lehet írni mint P_0, P_1, P_2, P_3 lin kombinációt, így elég csak az ℓ. tagot számolni, mert P_ℓ-ek ortogonálisak.

$P_0 = 1$

$P_1 = y$

$P_2 = \frac{1}{2}(3y^2 - 1)$

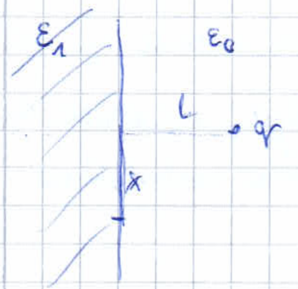
$P_3 = \frac{1}{2}(5y^3 - 3y)$

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \lambda y^3 = \underbrace{\frac{2}{5}\lambda}_{a_3} P_3(y) + \underbrace{\frac{2}{3}\gamma}_{a_2} P_2(y) + \underbrace{\left(\beta + \frac{3}{5}\lambda\right)}_{a_1} P_1(y) + \underbrace{\left(\alpha + \frac{1}{3}\gamma\right)}_{a_0} P_0(y)$$

a többi $a_l = 0$

innentől favágás.

Az előző feladat [illegible] esete:



ez megoldható tükrözéssel

HF: ellenőrizzük, hogy az előző megoldás jó-e.

Feltesszük, hogy a vizsgált térben az eredeti és a tükör töltés szuperpozíciója.
A másik térrészben pedig az eredeti helyén csak q'' van.

$$E_{t0}(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

$$D_{n0}(x) = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{L^2+x^2}\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}} - \frac{q'}{4\pi}\frac{1}{L^2+x^2}\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

$$E_{t1}(x) = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_1}\frac{1}{L^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

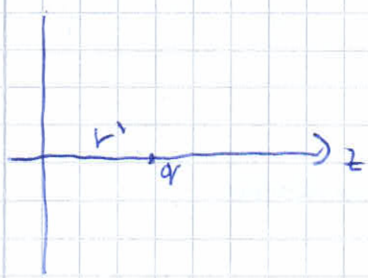
$$D_{n1}(x) = \frac{q''}{4\pi}\frac{1}{L^2+x^2}\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

feltételek:

$$\left.\begin{aligned} E_{t0}(x) = E_{t1}(x) &\Longrightarrow \frac{q+q'}{\varepsilon_0} = \frac{q''}{\varepsilon_1} \\ D_{n0}(x) = D_{n1}(x) &\Longrightarrow q - q' = q'' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad q' = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} q, \qquad q'' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} q$$

ELDIN

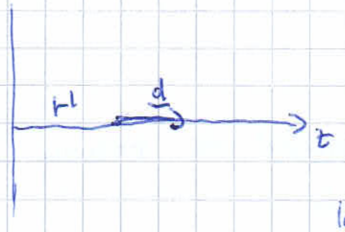
8. gyak (04.10.)



ha $r<r'$ $\quad \frac{1}{|r-r'|}=\sum_l \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos\theta)$

ha $r>r'$ $\quad \frac{1}{|r-r'|}=\sum_l \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$

Mi van, ha dipólust rakunk oda:



ha $|r|<|r'|$

két töltés közelítésben:

$$\phi(r)=-\frac{1}{\Delta}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_l \frac{r^l}{r'^{l+1}}P_l(\cos\theta)+\frac{d}{\Delta}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_l \frac{r^l}{(r'+\Delta)^{l+1}}P_l(\cos\theta)=$$

$$=\frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\sum_l r^l P_l(\cos\theta)\left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{(r'+\Delta)^{l+1}}-\frac{1}{r'^{l+1}}\right)\right]$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\phi(r)=\frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\sum_l \frac{r^l}{r'^{l+2}}\cdot(-l-1)P_l(\cos\theta)$$

ha $|r|>|r'|$ $\longrightarrow$ HF

Henger koordináták

r, φ, z

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

$$\phi(r,\varphi,z)=R(r)F(\varphi)Z(z)$$

$$0=R''FZ+\frac{1}{r}R'FZ+\frac{1}{r^2}RF''Z+RFZ''$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{F''}{F}+\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\pm k^2}=0$$

itt van többféle megoldás exp + sin, mert több előjelesség is van

$$\frac{F''}{F}=-\nu^2 \Rightarrow F(\varphi)=A\cos(\nu\varphi)+B\sin(\nu\varphi)$$

I.) $\frac{Z''}{Z}=k^2 \Rightarrow Z''-k^2Z=0$

$Z(z)=Ce^{kz}+Ge^{-kz}$

$R''+\frac{1}{r}R'+\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R=0 \qquad x:=kr$

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0 \qquad \text{Bessel-egyenlet}$$

a megoldásai a Bessel-függvények

$$R(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha} \qquad \text{ahol } \alpha=\pm\nu$$

a_j-k pedig rekurzívan számolhatók

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

$$J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

Gamma-fv: ha $\mathrm{Re}\, z>0$ $\quad \Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$

ha $\mathrm{Re}\, z<0$ akkor analitikusan elfolytatható, de pólusai vannak a 0 és a negatív egészek helyén.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \qquad \leftarrow \text{a Gamma-fv reflexiós összefüggése}$$

ha $\mathrm{Re}\, z<0$ akkor ez a def: $\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\frac{1}{\Gamma(1-z)}$

+ gamma fv-nek nincs zérushelye

Ha $\nu\notin\mathbb{Z}$ akkor J_+ és J_- lin. független

Ha $\nu\in\mathbb{Z}$ $\quad \nu=m,\ m=0,1,2\ldots \qquad J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$

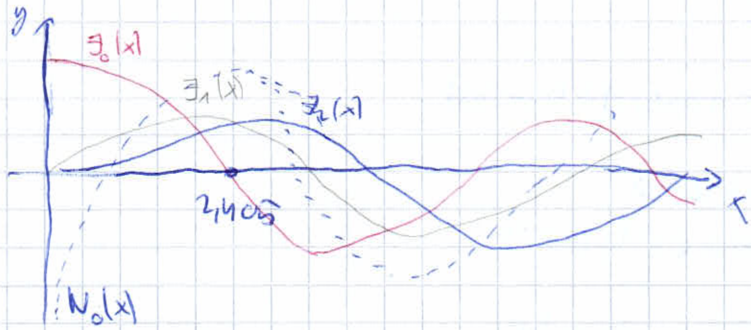
$$J_{-m}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+m}}{(j+m)!\,\Gamma(j+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+2m}=\left(\frac{x}{2}\right)^{m}(-1)^m\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}=J_m(x)(-1)^m$$

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \qquad \nu\notin\mathbb{Z}$$

Ha $\nu\notin\mathbb{Z}$, akkor ez függ a két másiktól.

Ha $\nu\in\mathbb{Z}$, akkor ez lesz a másik független, amitől már függetlenek lesznek a dolgok.



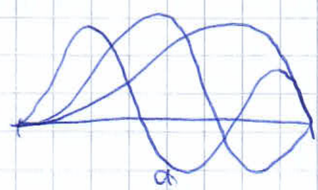
A megoldás: $\Phi(r,\varphi,z) = R(r)F(\varphi)Z(z) =$

$$= \left[A\cos(\nu\varphi)+B\sin(\nu\varphi)\right]\left[Ce^{kz}+Ge^{-kz}\right]\left[MJ_\nu(kr)+PN_\nu(kr)\right] \quad (*)$$

Fel kéne ismernünk egy TONR-t a Besselekkel.

Legyen a $J_\nu(x)$ n. zérushelye $x_{\nu n}$!

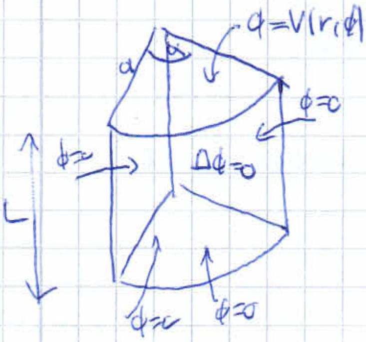
Egy a hosszúságú szakaszon konstruálunk ötlet:



$$\varphi_n(x) := J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)$$

$$\int_0^a x J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n'}}{a}x\right)dx = \delta_{nn'}\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n})\right]^2$$

Feladat



Milyen tér alakul ki?

a (*) képletet írjuk be, de már szűrten:

$$\Phi(r,\varphi,z) = \ldots \sin(\nu_m\varphi)\,\mathrm{sh}(kz)\,J_{\nu_m}(kr)$$

ahol $\nu_m = \frac{m\pi}{\alpha}$ $\quad m=1,2,3\ldots$

$ka = x_{\nu_m n}$ $\quad n=1,2,3\ldots$

így $\Phi(r,\varphi,z) = \sum_{n,m} A_{nm}\sin(\nu_m\varphi)\,\mathrm{sh}(k_{nm}z)\,J_{\nu_m}(k_{nm}r)$

feltétel: ha $z=L$, akkor $\sum_{n,m} A_{nm}\sin(\nu_m\varphi)\,\mathrm{sh}(k_{nm}L)\,J_{\nu_m}(k_{nm}r) \overset{!}{=} V(r,\varphi)$

Hogyan tudjuk A_{nm}-t? vetítgessünk:

$$\int_{\varphi=0}^{\alpha}\int_{r'=0}^{a} r' V(r',\varphi)\sin(\nu_{m'}\varphi)\,J_{\nu_{m'}}(k_{n'm'}r')\,dr' =$$

$$= \sum_{nm} A_{nm}\,\mathrm{sh}(k_{nm}L)\underbrace{\int_{\varphi=0}^{\alpha}\sin(\nu_m\varphi)\sin(\nu_{m'}\varphi)d\varphi}_{\delta_{mm'}\frac{\alpha}{2}}\underbrace{\int_{r'=0}^{a} r' J_{\nu_{m'}}(k_{n'm'}r')\,J_{\nu_m}(k_{nm}r')\,dr'} = *$$

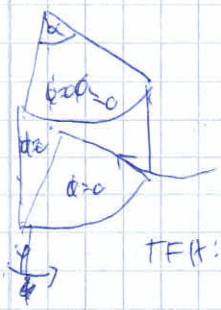
$$\int_{r'=0}^{a} r' J_{\nu_{m'}}\left(\frac{x_{\nu_{m'}n'}}{a}r'\right) J_{\nu_{m'}}\left(\frac{x_{\nu_{m'}n}}{a}r'\right) = \delta_{nn'}\frac{a^2}{2}\left(J_{\nu_{m'}+1}(x_{\nu_{m'}n})\right)^2$$

$$* = \frac{\alpha}{2}A_{n'm'}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x_{\nu_{m'}n'}}{a}L\right)\cdot\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu_{m'}+1}(x_{\nu_{m'}n'})\right]^2$$ → ebből meghatároztuk $A_{n'm'}$-eket.

ELDIN

9. gyak (04.17.)

Tartomány 2:



$\phi = V(z,\varphi)$ a tetején σ

TFH: $\Phi(r,\varphi,z) = R(r)F(\varphi)Z(z)$

előző: $\frac{F''}{F} = -\nu^2$

$\frac{Z''}{Z} = -k^2$ mert mindkét helyen [illegible]

$\Rightarrow F(\varphi) = A\sin(\nu\varphi) + B\cos(\nu\varphi)$

$Z(z) = C\sin(kz) + D\cos(kz)$

HF-ek: $B=0$, $D=0$, $\nu = \frac{m\pi}{\alpha}$ $m\in\mathbb{N}^+$, $k = \frac{n\pi}{L}$ $n\in\mathbb{N}^+$

A r irányban:

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0$$

Módosított Bessel-egyenlet

$x := kr$
$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$$

megoldásai a módosított Bessel-fv-k: I_ν, $I_{-\nu}$

ahol
$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$
$$I_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,\Gamma(j-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

Általában a Besselnél:

Bessel:
$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sqrt{x}\,R(x)\right] + \left[1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]\left(\sqrt{x}\,R(x)\right) = 0$$

módosított
$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sqrt{x}\,R(x)\right] - \left(1 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)\left(\sqrt{x}\,R(x)\right) = 0$$

Ha $\nu \notin \mathbb{Z}$ akkor I_ν és $I_{-\nu}$ független. Egyébként $I_\nu = I_{-\nu}$

erre a megoldás: $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}$ MacDonald-fv

$I_\nu(x)$ és $K_\nu(x)$ már független egész ν-kre is.

nagy x-ekre: $I_\nu(x\to\infty) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x$

$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$

Visszatérve a tartályra:

$$\phi(r,\varphi,z) = A \sin(\nu_n\varphi)\sin(k_n z)\left[G I_{\nu_m}(k_m r) + M K_{\nu_m}(k_m r)\right]$$

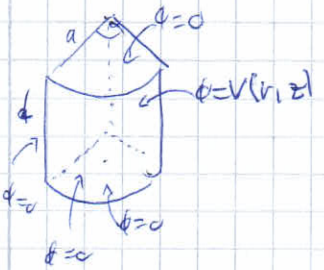
Mivel $K_{\nu_m}(x\to 0)\to\infty$, ez nem lehet, ezért $M=0$

$$\phi(r,\varphi,z) = \sum_n \sum_m A_{nm} \sin(\nu_m \varphi)\sin(k_n z) I_{\nu_m}(k_m r) \qquad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \nu_m = \frac{m\pi}{\alpha}$$

HF: $\phi(r=a,\varphi,z) = \sum_{n,m} A_{nm} I_{\nu_m}(k_n a)\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \doteq V(\varphi,z)$

$$\Rightarrow A_{nm} \doteq \frac{1}{I_{\nu_m}}\frac{2}{\alpha}\frac{2}{L}\int_{\varphi=0}^{\alpha}\int_{z=0}^{L} V(\varphi,z)\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)dz\,d\varphi$$

Fortuszelet 3.



$$\phi(r,\varphi,z) = R(r)F(\varphi)Z(z)$$

$$\frac{Z''}{Z} = -k^2 \quad \Rightarrow \quad Z = A\sin(kz)$$

$$\frac{F''}{F} = \nu^2 \Leftarrow$$ mert az kell, hogy oldalt ne tűnjön el.

$$F = sh(\nu\varphi)$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \left(k - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0$$

ez az egyenlet nem különleges, legalábbis nem olyan ismert, mint a Bessel

Kiegészítés:

- $$\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{x}R) + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)(\sqrt{x}R) = 0$$

  ha $\nu = +1/2$ $\quad \frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{x}R) + (\sqrt{x}R) = 0 \Rightarrow R(x) = C\frac{\sin x + B\cos x}{\sqrt{x}} = J_{1/2}(x)$

  Ellenőrizhető összehasonlító, hogy $B=0$, $C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

  A többi feles indexű fv is kifejezhető elemiekkel.

- Rekurzió: $J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$

  $$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J_\nu'(x)$$

Írjuk le a másodikat.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} - \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!\,\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-2} - \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} =$$

hogy 0 tól, ~~kezd~~ a ott úgyis 0, lehet kezdeni

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\left[(-1)j - (j+\nu)\right] =$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)} \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu-1}(2j+\nu)}_{2\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}} = -2\frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu} =$$

$$= -2J_\nu'(x)$$

A két képletet összeadva: $J_{\nu+1}(x) = -J_\nu'(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x)$

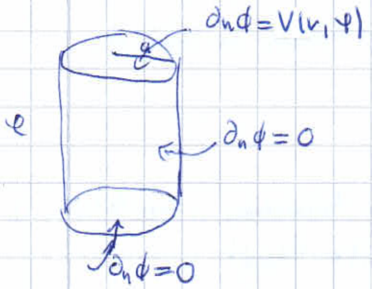
$$\Rightarrow \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}} = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)$$

Az előzőek alapján: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ amiből a rekurzió továbbgondolásával:

$$J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^\ell x^{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\ell\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

A Neumann-fv-re u.a. igaz: $N_{\nu+1} + N_{\nu-1} = \frac{2\nu}{x}N_\nu$

Neumann-típusú probléma hengerben:



$$\phi = R(r)F(\varphi)Z(z)$$

$$\frac{F''}{F} = -m^2 \Rightarrow F(\varphi) = A_m\sin(m\varphi) + B_m\cos(m\varphi)$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\frac{Z''}{Z} = k^2 \Rightarrow Z(z) = C\,\mathrm{ch}(kz)$$ (Az sh nem jó a $z=0$ HF miatt)

sugár irányban: $R(r) = G J_m(kr) + L N_m(kr)$

mivel ϕ reguláris, $L = 0$.

$$\phi(r,\varphi,z) = \sum_{n,m}\mathrm{ch}(kz)J_m(kr)\left[A_{nm}\sin(m\varphi) + B_{nm}\cos(m\varphi)\right]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \sum_{n,m}\mathrm{ch}(kz)\,k\,J_m'(kr)\left[\dots\right]\Big|_{r=a} \stackrel{!}{=} 0$$

Legyen a Bessel zérushelyei: $y_{\nu n}$

Tehát a feltétel: $ka \stackrel{!}{=} y_{mn}$ ahol y az előbb definiált

$$\phi(r,\varphi,z) = \sum_{n,m}\left(A_{nm}\sin(m\varphi) + B_{nm}\cos(m\varphi)\right)\mathrm{ch}(k_{mn}z)J_m(k_{mn}r)$$ ahol $k_{mn} = \frac{y_{mn}}{a}$

ELDIM
10. gyak (04. 23.)

$\partial_n \phi = B(r,\varphi)$

$\partial_n \phi = 0$

$\partial_n \phi = 0$

$$\phi(r,\varphi,z) = \sum_{n,m} \left(A_{nm} \sin(m\varphi) + B_{nm}\cos(m\varphi)\right) \mathrm{ch}(k_{nm} z)\, J_m(k_{nm} r)$$

ahol $k_{nm} = \frac{y_{mn}}{a}$

$$\partial_z \phi(r,\varphi, z=L) \stackrel{!}{=} B(r,\varphi)$$

Állítás: A Bessel-fv-t beszorítalom a zé-ig, TONR-t alkotnak $J_\nu\left(\frac{y_{\nu n}}{a} x\right)$ ahol $y_{\nu n}$ a J_ν n. zé-ja.

$$\int_0^a x J_\nu\left(\frac{y_{\nu n}}{a} x\right) J_\nu\left(\frac{y_{\nu n'}}{a} x\right) x\,dx = \delta_{nn'} \frac{a^2}{2}\left(y_{\nu n}^2 - \nu^2\right)\left[J_\nu(y_{\nu n})\right]^2 \qquad (1)$$

$$\sum_{n'm'} k_{n'm'}\, \mathrm{sh}(k_{n'm'} L)\, J_{m'}(k_{n'm'} r)\left[A_{n'm'} \sin(m'\varphi) + B_{n'm'}\cos(m'\varphi)\right] \stackrel{!}{=} B(r,\varphi)$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r \sin(m\varphi)\, J_m(k_{nm} r)\, B(r,\varphi)\, dr\, d\varphi = \sum_{n'm'} A_{n'm'} k_{n'm'}\, \mathrm{sh}(k_{n'm'}L) \cdot \overbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(m\varphi)\sin(m'\varphi)\,d\varphi}^{\delta_{mm'}\pi} \int_{r=0}^{a} r J_{m'}(k_{n'm'} r) J_m(k_{nm} r)\, dr$$

+ a cos-os tag, de az úgyis 0.

$$* = \sum_{n'} k_{nm}\, \mathrm{sh}(k_{n'm} L)\, A_{n'm}\, \pi \underbrace{\int_{r=0}^{a} r J_m(k_{n'm} r) J_m(k_{nm} r)\, dr}$$

Ez az (1) képlet fele alakúra egyenlő.

$$* = k_{nm}\, \mathrm{sh}(k_{nm} L)\, A_{nm}\, \pi \frac{a^2}{2}\left(y_{mn}^2 - m^2\right)\left[J_m(y_{mn})\right]^2$$

$$\Rightarrow A_{nm} = \left(\pi \frac{a^2}{2} k_{nm}\, \mathrm{sh}(k_{nm}L)\left(y_{mn}^2 - m^2\right)\left[J_m(y_{mn})\right]^2\right)^{-1} \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r \sin(m\varphi)\, J_m(k_{nm} r)\, B(r,\varphi)\, dr\, d\varphi$$

A B_{nm} ugyanígy kifejezhető, csak a cos-szal kell integrálni

Mágneses gömbfüggvény kiegészítés

$$Y_{lm}(\underline{n}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi} \qquad \leftarrow \text{gömbfüggvények}$$

ezek $\displaystyle\int_{\text{teljes tér}} Y_{lm}^*(\underline{n})\, Y_{l'm'}(\underline{n})\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

továbbá $\displaystyle P_l(\cos\vartheta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\underline{n}')\, Y_{lm}(\underline{n})$

Feladat $\underline{B} = \mu_0(\underline{H} + \underline{M})$, $\nabla\underline{B} = 0$, $\nabla\times\underline{H} = \underline{j}$ valódi

$\underline{M}$ adott, határozzuk meg $\underline{B}$-t meg $\underline{H}$-t.

$\underline{B} = ?$

$H = ?$

kint és bent.

$$\underline{M} = \begin{cases} M_0 \underline{e}_z & \text{ha } r < a \\ 0 & \text{ha } r > a \end{cases}$$

$\nabla \times \underline{H} = 0 \Rightarrow \underline{H} = -\nabla \phi_M$

$\nabla \underline{B} = 0 \Rightarrow \nabla \underline{H} = -\nabla \underline{M} \Rightarrow \Delta \phi_M = \nabla \underline{M}$

$$\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(\nabla \underline{M})(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' = *$$

∇M csak a gömb felületén nem 0, hiszen tölben hatzen konst.

$$\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\text{gömbf.}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}(-M_0)\cos\vartheta' dA' =$$

Mivel $\int_V (\nabla \underline{M}) dV = \oint_{\partial V} \underline{M}\, dA$

$\oint \underline{M} dA = dA \cdot M_0(\cos\vartheta)$

$$= \frac{M_0 a^2}{4\pi} \int_{\text{teljes térszög}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\cos\vartheta' d\Omega' =$$

$$= \frac{M_0 a^2}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}(\underline{n})\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\int_{\text{Teljes térszög}} Y^*_{\ell m}(\underline{n}')\cos\vartheta' d\Omega' = *$$

Mivel $P_1(y) = y$ és $Y_{10}(\underline{n}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$ miatt $\cos\vartheta' = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\underline{n}')$

$$* = \frac{M_0 a^2}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}(\underline{n})\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\underbrace{\int_{\text{teljes tsz.}} Y^*_{\ell m}(\underline{n}')\, Y_{10}(\underline{n}')\, d\Omega'}_{\delta_{\ell 1}\delta_{m0}}\cdot\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$$

$$= \frac{M_0 a^2}{4\pi}\frac{4\pi}{3} Y_{10}(\underline{n})\frac{r_<}{r_>^2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} = \frac{M_0 a^2}{3}\cdot\frac{r_<}{r_>^2}\cos\vartheta$$

Gömbön belül: $r_< = r \quad r_> = a \qquad \phi_M = \frac{M_0}{3}\underbrace{r\cos\vartheta}_{z}$ ← ennek gradiens konstans

Gömbön kívül: $r_< = a \quad r_> = r \qquad \phi_M = \frac{M_0 a^3}{3}\frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{3}a^3\pi M\right)\frac{\cos\vartheta}{r^2}$ ← dipólus sűrűség

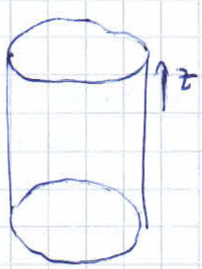
Hullámegyenletek

- üregrezonátor (mikró, részecskegyorsító)
- hullámvezetők (mindenhol vannak)

μ, ε a közeg tulajdonságai, $\underline{D} = \varepsilon\underline{E} \quad \underline{B} = \mu\underline{H}$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\underline{B} = 0\\ &\nabla\times\underline{E} = -\partial_t\underline{B}\\ &\nabla\underline{D} = 0\\ &\nabla\times\underline{H} = \partial_t\underline{D}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left.\begin{aligned}&\nabla\underline{B} = 0\\ &\nabla\underline{E} = 0\\ &\nabla\times\underline{E} = -\partial_t\underline{B}\\ &\nabla\times\underline{B} = \varepsilon\mu\,\partial_t\underline{E}\end{aligned}\right\}\ \text{ha nincs forrás}$$

ε és μ függhet a helytől



$$\nabla\times(\nabla\times\underline{E}) = -\varepsilon\mu\,\partial_t^2\underline{E}$$

$$\underbrace{\nabla(\nabla\underline{E})}_{0} - \Delta\underline{E} = -\varepsilon\mu\,\partial_t^2\underline{E}$$

$$(\varepsilon\mu\,\partial_t^2 - \Delta)\underline{E} = 0$$

$c_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ végtelen nagy térben

Feltevések:

1) $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$

$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow$

$\nabla \underline{E} = 0$

$\nabla \underline{B} = 0$

$\nabla \times \underline{E} = i\omega \underline{B}$

$\nabla \times \underline{B} = -i\omega \varepsilon\mu \underline{E}$

hullámegyenlet:

$(\Delta + \varepsilon\mu\omega^2)\underline{E} = 0$

$(\Delta + \varepsilon\mu\omega^2)\underline{B} = 0$

EL DIN

11. gyak (05.08.)

Előző órai folytatás

$\underline{E}(r,t) = \underline{E}(r)\, e^{-i\omega t}$

$\underline{B}(r,t) = \underline{B}(r)\, e^{-i\omega t}$

$\underline{E}(r) := \left(\begin{matrix} E_x \\ E_y \end{matrix} \right\} \underline{E}_T,\ E_z \Big)$

$\underline{B}(r) := (\underline{B}_T, B_z)$

az egyenletek:

$\nabla \underline{B} = 0$

$\nabla \underline{E} = 0$

$\nabla \times \underline{E} = \partial_t \underline{B}$ ahol $\nabla = (\nabla_T, \partial_z)$

$\nabla \times \underline{B} = \varepsilon\mu\, \partial_t \underline{E}$

átírva:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_T \underline{B}_T + \partial_z B_z = 0 \\
&\nabla_T \underline{E}_T + \partial_z E_z = 0 \\
&\hat{z}(\nabla_T \times \underline{E}_T) = i\omega B_z \\
&\hat{z}(\nabla_T \times \underline{B}_T) = -i\varepsilon\mu\omega E_z \\
&\partial_z \underline{E}_T - \nabla_T E_z = -i\omega\, \hat{z} \times \underline{B}_T \\
&\partial_z \underline{B}_T - \nabla_T B_z = i\omega\varepsilon\mu\, \hat{z} \times \underline{E}_T
\end{aligned}\right\}$$

TFH az z irányban haladó hullám e^{ikz}-vel függ: $\underline{B}(r) = B(x,y)e^{ikz}$

$\underline{E}(r) = E(x,y)\, e^{ikz}$

kapunk:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_T \underline{B}_T + ik B_z = 0 \\
&\nabla_T \underline{E}_T + ik E_z = 0 \\
&\text{u. a.} \\
&\text{u. a.} \\
&ik\underline{E}_T - \nabla_T E_z = -i\omega\, \hat{z} \times B_T \quad (5) \\
&ik\underline{B}_T - \nabla_T B_z = i\omega\varepsilon\mu\, \hat{z} \times \underline{E}_T \quad (6)
\end{aligned}\right\}$$

hullámegyenlet

$(\varepsilon\mu\partial_t^2 - \Delta)\underline{E} = 0$

$(\varepsilon\mu\partial_t - \Delta)\underline{B} = 0$

átírva:

$[\Delta_T + (\varepsilon\mu\omega^2 - k^2)]\underline{E} = 0$

$[\Delta_T + (\varepsilon\mu\omega^2 - k^2)]\underline{B} = 0$

(5)-t keresztszorzom $\hat{z}$-vel, és behelyettesítve (6)-t ki tudom kombinálni $\underline{E}_T$ a z-sekkel

$$\underline{E}_T = \frac{i}{\varepsilon\mu\omega^2 - k^2}\left(k\nabla_T E_z - \omega\, \hat{z} \times \nabla_T B\right)$$

$$\underline{B}_T = \frac{i}{\varepsilon\mu\omega^2 - k^2}\left(k\nabla_T B_z + \omega\varepsilon\mu\, \hat{z} \times \nabla E_z\right)$$

így már csak az E_z és B_z x,y függése kell a megmaradt egyenletek:

$$(\Delta_T + \gamma^2) E_z = 0$$
$$(\Delta_T + \gamma^2) B_z = 0 \qquad \text{ahol } \gamma^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - k^2$$

két esetre bontható szét: TM: amikor $B_z \equiv 0$, $E_z = ?$

TE: amikor $E_z \equiv 0$, $B_z = ?$

a teljes megoldás a kettő lin. kombj.

határfeltételek: a terek z irányú komponense a falain 0.

ok: végtelen jó vezetésnél a skin-mélység 0.

egyébként $\vec{E}$-re az $\vec{n}$ irányú, a normál tűnik el.

TM-nél: $E_z|_{\text{határ}} = 0$

TE-nél: $\nabla_T B_z \parallel \text{fal} \Rightarrow \partial_n B_z = 0$

(ez a (6) egyenlet tagjaival az irányulás olvasható ki.)

Téglalap keresztmetszetű hullámvezető:

TM = ?

$$(\Delta_T + \gamma^2) E_z = 0 \qquad E(x,y) = ?$$
$$E_z(x,y)|_{\text{határ}} = 0$$

+FH. $E_z(x,y) = X(x)Y(y)$ beírva: $X''Y + Y''X + \gamma^2 XY = 0$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \gamma^2 = 0 \qquad \text{mindkettő állandó}$$

a megoldás: $X(x) = \sin(\alpha x)$ ahol $\alpha = \frac{n\pi}{a}$

$Y(y) = \sin(\beta y)$ ahol $\beta = \frac{m\pi}{b}$ $\qquad n, m \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \gamma_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

$$E_z(x,y) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

TE = ?

Marci nem akarja ezzel húzni az időt.

$$B_z(x,y) = \sum_{n,m} A'_{nm} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \qquad \gamma_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

$n, m \in \mathbb{N}$ (lehet itt 0 is, mert $\cos(0)$ 1, és az lehet)

Mi van a γ-val? $\gamma^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - k^2$. γ-t a h.v. alakja szabja meg, ω-t a rákapcsolt jel.

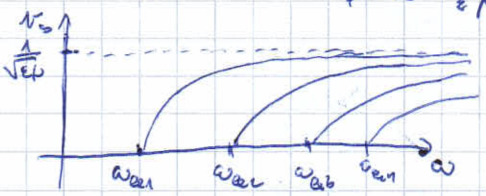
$\Rightarrow k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - \gamma^2$ $\quad$ ha $k^2 > 0$ akkor van két irányban terjedő hullám

ha $k^2 < 0$ akkor aluláteresztő elnyeli a hullámot

$\omega_{\text{vágási}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ez alatti frekvenciával nem tud terjedni a hullám.

visszahelyettesítve: $k(\omega)=\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\omega^2-\omega_{c}^2}$

ebből belátható h: $v_f \, v_{cs} = \frac{1}{\varepsilon\mu}$



Feladat: tortaszelet

TM: $(\Delta_T+\gamma^2)E_z=0$

hengerkoord.: $\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+\gamma^2 E_z=0$

TFH: $E_z(r,\varphi)=R(r)F(\varphi)$

beírva: $\frac{1}{R}\left(R''+\frac{1}{r}R'\right)+\frac{1}{r^2}\frac{F''}{F}+\gamma^2=0$

$\frac{F''}{F}=-\nu^2 \Rightarrow F(\varphi)=\sin(\nu\varphi)$ ahol $\nu=\frac{m\pi}{\alpha}$

$R''+\frac{1}{r}R'+\left(\gamma^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R=0$ $\qquad x:=\gamma r$

$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0 \Rightarrow R(r)=AJ_\nu(\gamma r)+BN_\nu(\gamma r)$

ez az 0-ban ∞-be tart $\Rightarrow B=0$

HF: $R(r=a)=0 \Rightarrow \gamma a = x_{\nu n}$ ahol $x_{\nu n}$ a J_ν n. zérushelye

$$\gamma_{nm}=\frac{x_{\nu_m n}}{a} \qquad \nu_m=\frac{m\pi}{\alpha}.$$

Üregrezonátor

itt is van TE és TM

HF-ek: TE: $B_z=?$ $\partial_n B_z|_{oldalt}=0$ $B_z|_{végén}=0$

TM $E_z=?$ $E_z|_{oldalt}=0$ $\partial_n E_z|_{végén}=0$

eddig azt mondtuk, hogy $e^{\pm ikz}$ ahol k sajátt
ez most nem lesz jó, mert a két végén el kell tűnjön.
viszont a lin. kombjuk jó

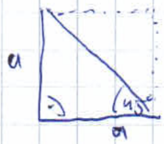
TM: $\partial_z E_z|_{z=0,\, z=L}=0 \Rightarrow E_z=E_z(x,y)\cos(kz)$ ahol $k=\frac{p\pi}{L}$ $p=0,1\dots$

TE: $B_z|_{z=0,\, z=L}=0 \Rightarrow B_z=B_z(x,y)\sin(kz)$ $k=\frac{p\pi}{L}$ $p=1,2\dots$

Viszont mivel $\gamma^2=\varepsilon\mu\omega^2-k^2$ és γ mint k is be van szabályozva, ω is be van határozva. $\omega_{nmp}^2=\frac{1}{\varepsilon\mu}\left(\gamma_{nm}^2+\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right)$

ezek az üregrezonátor sajátfrekijei

Feladat: egyenlőszárú ⊾ △



Egészítsük ki □-té

A négyzet módusai: $E_{z\,n,m}(x,y) = A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$

$$\gamma_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2}\left(n^2+m^2\right)$$

ha van egy megoldás △-ben, akkor azzal tükrözéssel a □-en is jó, Tehát a △ módusai között azok a jók, amik az átlón eltűnnek

A négyzetben szimmetriája miatt n és m felcserélhető (degeneráció)

Próbálkozás: a degenerált párokat próbáljuk úgy össze lineárkombinálni, hogy az átlón eltűnjenek.

TFH: $E_z = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) + \alpha\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

akkor, hogy az átlón eltűnjön: $y = a - x$ esetén el kell tűnni $\forall x$-re.

$$\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(m\pi - \frac{m\pi}{a}x\right) + \alpha\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{a}x\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\left[(-1)^{m+1} + \alpha(-1)^{n+1}\right] = 0 \quad \forall x\text{-re}$$

$$\Rightarrow \alpha = (-1)^{n-m+1}$$

ha $n, m \leq 1$ akkor az E_z-k eltűnnek.

de ha egyenlőek az egyik egyenlő 2 akkor az nem stimmel

Ennek a TE párja lesz a ZH-n