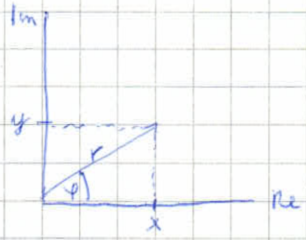
# ELM MECHA
1. gyak (09.15.)

2 ZH

<u>Komplex fgv.-tan</u>

1. Komplex számok




algebrai alak:

$z = x + iy$ ahol $i^2 = -1$

trigonometrikus alak:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ahol $r = |z| = \sqrt{zz^*}$

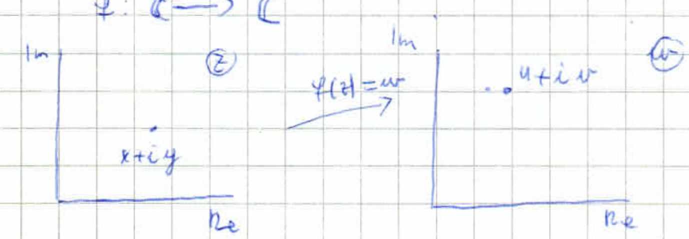
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

Taylor sorral átalakítható: $z = r e^{i\varphi}$ Euler féle alak

ezzel: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$

2. Komplex fgv.-k

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$




$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

a) Határérték:

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$, ha

$\lim\limits_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - w| = 0$

Ez független attól, hogy hogyan tartunk bele

b) Folytonosság:

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

ha ez igaz, akkor folytonos

c) Deriválás:

f deriválható $z_0$-ban, ha $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ létezik.

itt is független attól, hogy hogyan tartunk $z_0$-hoz

d) Cauchy–Riemann-relációk

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ akkor deriválható, ha mindenhonnan tartva ugyanoda tart

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon) + f(x)}{\varepsilon} \quad \underline{\underline{\text{ha } \varepsilon = dx}} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

$$\underline{\underline{\text{ha } \varepsilon = i\,dy}} \quad -i\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

A kettő egyenlő $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\;;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Egymásba helyettesítve: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

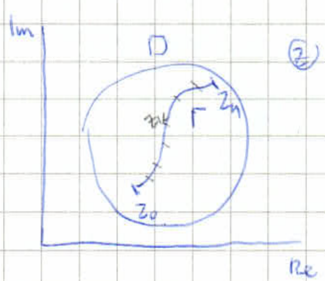
$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ 2D-s Laplace-egyenlet

e) Regularitás

Ha $f(z)$ deriválható $z_0$ pont kis környezetében, akkor $z_0$-ban a fgv reguláris.

Ha $f(z)$ $z_0$-ban deriválható 1-szer, akkor bárhányszor.

f) Komplex fgv-k vonalintegrálja.




$f(z)$ legyen korlátos D-ben!

Mi az integrál értelme Γ-n?

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ $(0 < k \leq n)$

$z_{k-1} < \xi_k < z_k$

$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta z_k$ a felosztást finomítva

$I = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k$ ha ez létezik akkor $f(z)$ integrálható Γ görbén: $I = \int_\Gamma f(z)\,dz$

Kiszámítás: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $dz = dx + i\,dy$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \left(u(x,y)dx - v(x,y)dy\right) + i\int_\Gamma \left(v(x,y)dx + u(x,y)dy\right)$$

Legyenek $\underline{a}(\underline{r}) = [u(x,y), -v(x,y), 0]$ $\underline{b}(\underline{r}) = [v(x,y), u(x,y), 0]$ $d\underline{r} = [dx, dy, dz]$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \underline{a}(\underline{r})\,d\underline{r} + i\int_\Gamma \underline{b}(\underline{r})\,d\underline{r}$$

g) Cauchy-féle integráltétel

Legyen Γ zárt görbe! Stokes-tétel miatt $\oint \underline{a}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int \mathrm{rot}\,\underline{a}(\underline{r})\,d\underline{F}$

$\oint \underline{b}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int \mathrm{rot}\,\underline{b}(\underline{r})\,d\underline{F}$

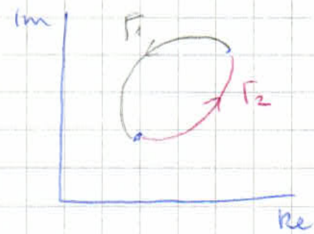
$$\left(\mathrm{rot}\,\underline{a}(\underline{r})\right)_z = \varepsilon_{zjk}\,\partial_j a_k = \partial_x a_y - \partial_y a_x = -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \overset{CR}{=} 0$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\underline{b}(\underline{r})\right)_z = \varepsilon_{zjk}\,\partial_j b_k = \partial_x a_y - \partial_y a_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \overset{CR}{=} 0$$ (a többi komponens is)

Tehát ha D halmazon f reguláris, akkor $\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 0$

⇒ Tetszőleges zárt görbére a vonalintegrál 0, ha a zárt görbe által közrezárt terület reguláris.

Mi van nem zárt görbén?



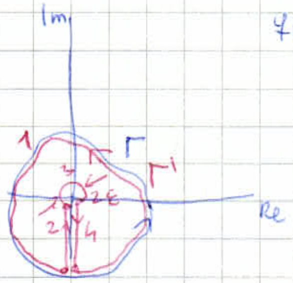

$f(z)$ reguláris

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

A $\ominus$ előjel eltűnik, ha a nyilat az egyiken megváltoztatom, tehát tetszőleges két pont között tetszőleges görbe integrálja egyforma.

b) Residuum-tétel




$f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

itt $z=0$-ban nem reguláris a fgv, tehát nem alkalmazható a Cauchy-tétel

Módosítsuk a görbét úgy, hogy kicsit elkerülje az origót

$\Gamma'$ integrálja már 0 ☺

$$\int_{\Gamma'} \frac{1}{z}\,dz = 0 = \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz + \underbrace{\int_2 \frac{1}{z}\,dz + \int_4 \frac{1}{z}\,dz}_{\approx 0} + \int_3 \frac{1}{z}\,dz$$

$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = -\int_3 \frac{1}{z}\,dz =*$ Paraméterezzük a kis kört: $\varepsilon e^{i\varphi}$ ahol $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}]$

$$* = -\int_{\frac{3}{2}\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\varepsilon e^{i\varphi}}\, i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} i\,d\varphi = \boxed{2\pi i = \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz}$$

Legyen $f$ reguláris a $z=z_0$ környezetében, ahol $a_1$ erősségű pólusa van

(Megj: $f(z) \simeq \frac{a_1}{z-z_0}$ ha $z-z_0 \ll 0$)

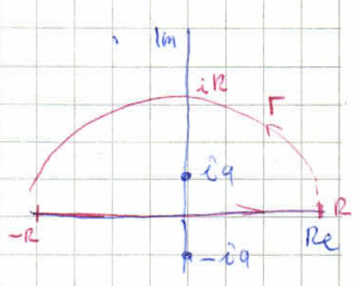
pontosan: $g(z) := f(z) - \frac{a_1}{z-z_0}$ -ban reguláris

Ekkor $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, a_1$ ha $\Gamma$ körbeveszi a pólust. Ekkor $a_1$ az $f$ fgv. $z_0$ helyen vett reziduuma.

Általánosan: $\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{res} f(z_k)}$

Példa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = ?$$




Kiterjesztjük komplexre: $\int \frac{1}{z^2+a^2}\,dz$

A függvény $ia$-ban és $-ia$-ban divergál

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2+a^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2 e^{2i\varphi}+a^2}\, iRe^{i\varphi}\,d\varphi = 2\pi i \operatorname{res} f(ia)$$

$$R \to \infty$$

Mivel $R \to \infty$ a második tag $\to 0$. Így

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{x^2+a^2}(ia)\right)$$

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z-ia)}\,\frac{1}{(z+ia)}$$ azaz $ia$-ban valódi pólus-szerű, és az értéke $\frac{1}{2ia}$

Tehát $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i\,\frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}$$

## 3. Fourier-sorfejtés

Legyen $f(x)$ valós változójú fgv. és $2\pi$ szerint periodikus

Ekkor: $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Mivel $$\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$$

$$\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}$$

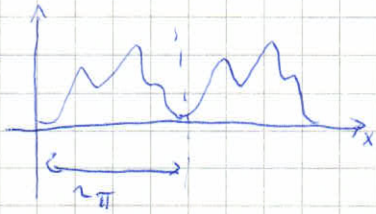
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}\cdot\frac{a_n - ib_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-inx}\,\frac{a_n+ib_n}{2} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$$ Ahol akkor $c_0 = a_0$ $\quad c_n = \frac{a_n+ib_n}{2}$ $\quad c_{-n} = \frac{a_n-ib_n}{2}$

# ELM. MECHA

2. gyak (09. 23.)

## Fourier - sorfejtés




Egy két 2π periódusú fgv-t felírhatjuk exponenciális összegként:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}}$$

A visszahelyettesítés integráljuk a fenti egyenletet: $\int \cdot\, e^{imx}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{imx}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx}$$

ha $m=n$ akkor $2\pi$

ha $m\neq n$ akkor $n$ és $-n$ szerinti ellentétet kapunk, ami a summa miatt kiesik

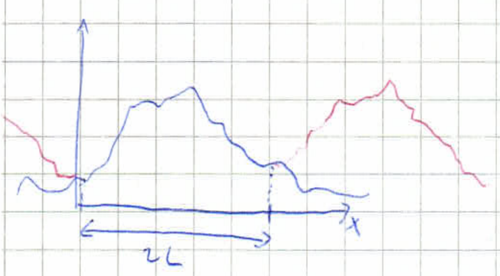
$$\Rightarrow \boxed{c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{imx}\, dx}$$

általánosítás: periódust $2\pi \to 2L$ akkor a képletek módosulnak:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\frac{\pi}{L}x}$$

$$c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{imx}\, dx$$

## Fourier - transzformáció




Kiválasztunk egy 2L hosszú szakaszt, látszólag periódusossá tesszük a fgv-t

Legyen $k = n\frac{\pi}{L}$

$\Delta k = \frac{\pi}{L}$

Így a képletek:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$$

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{ikx}\, dx$$

Ha $f$ jól viselkedik, akkor az integrál véges. Ha $L$-lel a $\infty$-be tartunk, akkor ezek után $c_k = 0$ lesz

Nézzük a $c_k \cdot 2L$-eket! Legyen $\tilde{f}(k) = c_k \cdot 2L$

Ezek után: $f(x)= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}\tilde{f}(k)\, e^{-ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\tilde{f}(k)\, e^{-ikx}\,\Delta k$

$L \to \infty$ után előáll integrál lesz:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, e^{-ikx}\, dk}$$

A visszatranszformálásnál csak át kell szorozni 2π-vel:

$$\boxed{\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ikx}\, dx}$$

## Dirac-delta

Egymásba írva a Fourier-képleteket:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, e^{-ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{ik(x'-x)}\, dx'\, dk$$ átrendezve:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)}\, dk\right]}_{\delta(x'-x)} dx'$$

mi is ez?

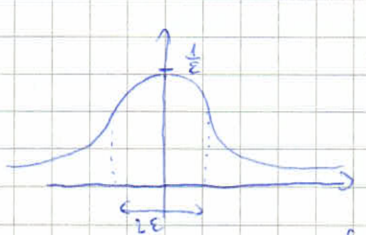
Pongyola definíció:
- $x = 0$ kivételével mindig 0
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

ez nem rendes fgv, de más függvények sorozatának határértékeként előáll (Delta-sor)

a) Téglalap


$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{ha } 0 < x < \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

b) Gauss




$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\, e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Biz. vázl.:

Legyen $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ ! Számítsuk ki $I^2$-t

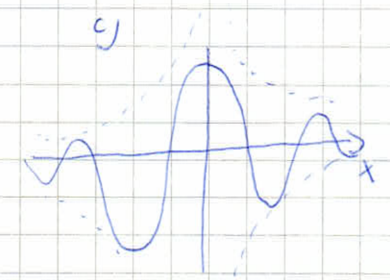
$$I^2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon^2}}\, dy = *$$

Legyen
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$dx\, dy = r\, dr\, d\varphi$
$x^2 + y^2 = r^2$

Mivel $\varphi$ nem szerepel benne, azt kiejti a $2\pi$

HF

c)




$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\pi x}$$

Hamar tudjuk, egy egy adott fgv a Dirac-deltához tart-e:

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{ikx}\,dk = \delta(x)$$ Ez a várt viselkedés  Alakítva

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ikx}}{ix}\right]_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$ jééé!

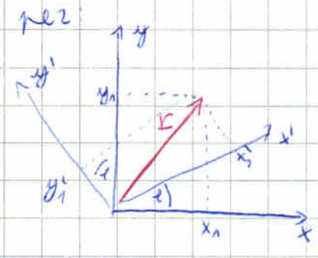
## Egyszerű diffegyenletek

Szeparálható: $\dot{x} = f(x)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

pl. 1 $\dot{x} = \lambda x$  Ekkor: $\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\lambda x} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = x(t_0)\, e^{\lambda(t-t_0)}$

pl. 2




$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \underline{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\underline{r} = \underline{\underline{O}}\,\underline{r}'$$

Két vektor skalárszorzatát a forgatás nem változtatja:

$$\underline{r}_1'\underline{r}_2' = \underline{r}_1\underline{r}_2 = \underline{\underline{O}}\,\underline{r}_1'\,\underline{\underline{O}}\,\underline{r}_2' = \underline{r}_1'\underbrace{\underline{\underline{O}}^T\underline{\underline{O}}}_{\underline{\underline{1}}}\underline{r}_2'$$

Ez alapján $\frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{O}}^T\underline{\underline{O}}\right) = \underline{\underline{\emptyset}}$

$$\dot{\underline{\underline{O}}}^T\underline{\underline{O}} + \underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}} = \underline{\underline{\emptyset}}$$

$$\left(\underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}}\right)^T + \underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}} = \underline{\underline{\emptyset}}$$ Legyen $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}}$

$$\underline{\underline{\Omega}}^T + \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\emptyset}}$$ Vagyis $\Omega$ antiszimmetrikus mátrix

2D-ben: $\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$  $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}}$  $/\underline{\underline{O}}$ balról

$$\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{O}}}$$ (A2 → függelék a füzetben)

Forgásmátrix diffegyenlete, ezt Máté elhagyta a sorrendet

$\underline{\underline{\Omega}}\,\underline{O} = \dot{\underline{O}}$ Ezt kéne megoldani

Próba: $\underline{O}(t) = \underline{O}_0\, e^{\Omega t}$ ez nem jó valamiért

helyette: $\underline{O}(t) = e^{\Omega t}\, \underline{O}_0$ leírom $\underline{\underline{\Omega}}\, e^{\Omega t}\, \underline{O}_0 = \underline{\underline{\Omega}}\, e^{\Omega t}\, \underline{O}$ ✓

mátrixfgv-ek:

Taylor-sorral: $e^{\Omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underline{\underline{\Omega}}^n = \sum_{n=0} \frac{(\omega t)^n}{n!} \underline{\underline{I}}^n$

ahol $\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} & -1 \\ +1 & \end{pmatrix} = \omega \underline{\underline{I}}$

kiszámolható, hogy $\underline{\underline{I}}^2 = -\mathbb{1}$ $\underline{\underline{I}}^3 = -\underline{\underline{I}}$ $\underline{\underline{I}}^4 = \mathbb{1}$

vagyis $\underline{\underline{I}}^{2k} = (-1)^k\, \mathbb{1}$ $\underline{\underline{I}}^{2k+1} = (-1)^k\, \underline{\underline{I}}$

azaz $e^{\Omega t} = \mathbb{1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \right] + \underline{\underline{I}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \right] =$

$= \mathbb{1} \cos(\omega t) + \underline{\underline{I}} \sin(\omega t)$

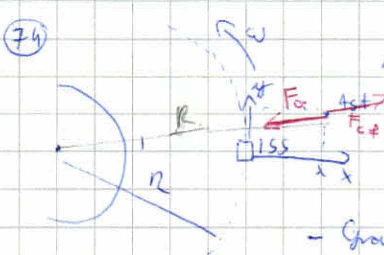
így $e^{\Omega t} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$ TFH. $\underline{O}_0 = \mathbb{1}$

így $\underline{O}_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

---

Feladatok

(74)




Az űrállomásról a rugóhoz képest $1\frac{m}{s}$-mal elrugaszkodik egy űrlakó. Mi történik az űrállomás koordináta rendszerében?
(Mivel $1\frac{m}{s}$ lassú $x, y \ll R$)

Milyen erők hatnak?

- Gravitáció a Föld felé $|\underline{F}_G| = G \frac{\mu M}{(R+x)^2 + y^2}$

$F_{Gx} \approx G \frac{\mu M}{R^2 + 2Rx} (-1) \approx -G \frac{\mu M}{R^2} \left(1 - \frac{2x}{R}\right)$

$F_{Gy} \approx -\frac{y}{R} |\underline{F}_G| = -G \frac{\mu M}{R^2} \frac{y}{R}$

- Centrifugális: $|\underline{F}_{cf}| = \mu\, \omega^2 \sqrt{(R+x)^2 + y^2} \approx \mu\, \omega\, (R+x)$

$F_{cfx} = \mu\, \omega^2 R \left(1 + \frac{x}{R}\right)$ $F_{cfy} = \mu\, \omega^2 R \frac{y}{R}$

- Coriolis-erő: $\underline{F}_{Cor} = 2\mu\, \underline{v} \times \underline{\omega} = 2\mu \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} \dot{y}\, \omega \\ -\dot{x}\, \omega \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mu \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -G \frac{\mu M}{R^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{R} \\ \frac{y}{R} \end{pmatrix} + \mu\, \omega^2 R \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \end{pmatrix} + 2\mu\, \omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}$

mozgásegyenlet

# ELM. MECHA

3. gyakorlat (09.29.)

74 feladat

az űrhajós mozgásegyenlete:

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = G\frac{mM}{R^3}\begin{pmatrix}-R+2x\\ -y\end{pmatrix} + 2m\begin{pmatrix}\dot{y}\omega\\ -\dot{x}\omega\end{pmatrix} + mR\omega^2\begin{pmatrix}1+\frac{x}{R}\\ \frac{y}{R}\end{pmatrix}$$

Az űrhajót körpályán tartó erő: $G\frac{Mm}{R^2} = mR\omega^2 \Rightarrow \omega = G\sqrt{\frac{M}{R^3}}$

Így a mozgásegyenlet:

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \omega^2\begin{pmatrix}3x\\ 0\end{pmatrix} + 2\omega\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\end{pmatrix}$$

(~~másodrendű~~) lineáris homogén diff

$$\left.\begin{aligned}\ddot{y} &= -2\omega\dot{x} \\ \ddot{x} &= 3\omega^2 x + 2\omega\dot{y}\end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

(1)-ből: $\dot{y} = -2\omega x + C_1$ adott KF miatt $C_1 = 0$

(2)-be beírva $\ddot{x} = 3\omega^2 x + 2\omega(-2\omega x)$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ harmonikus oszcillátor

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ KF: $x(t=0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

$\dot{x}(t=0) = A\omega\cos(\omega t) = v_0 \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0}$

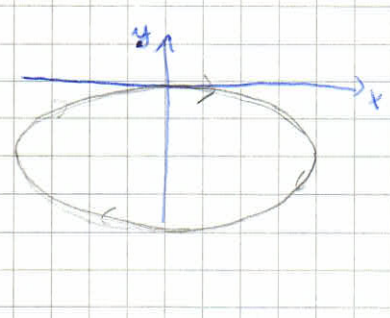
Tehát; $\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) &= 2\frac{v_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)\end{aligned}}$ $\Rightarrow$ $\dot{y} = -2v_0\sin(\omega t)$

$y = -2v_0\int\sin(\omega t)dt = \frac{2v_0}{\omega}\cos(\omega t) + C_2$

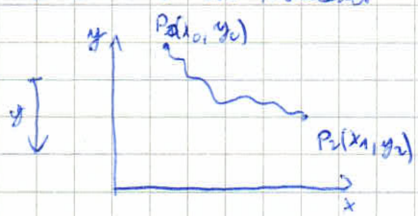
KF: $y(t=0) = 0 \Rightarrow C_2 = -2\frac{v_0}{\omega}$

Milyen alakú a pálya a kompából nézve?

$$\left(\frac{x(t)}{v_0/\omega}\right)^2 + \left(\frac{y + \frac{2v_0}{\omega}}{2\frac{v_0}{\omega}}\right)^2 = 1 \qquad \text{ellipszis}$$



Brachistochron probléma




Milyen legyen a lejtő, hogy a legrövidebb idő alatt érjen?

$y$ magasságon a sebesség:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y) \Rightarrow v = \sqrt{2g(y_0-y)}$$

Kis ívelemen való átcsúszás ideje:

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\,dx$$

A csúszás teljes ideje:

$$T[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}}\,dx$$

$$L(y, y', x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}$$ nem függ $x$-től, tehát a Beltrami megmarad

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot 2y'}{\sqrt{y_0-y}} = \frac{y'}{\sqrt{y_0-y}\sqrt{1+y'^2}}$$

$$E = \frac{y'^2}{\sqrt{y_0-y}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{1+y'^2}{\sqrt{y_0-y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{-1}{\sqrt{y_0-y}\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

$$(y_0-y)(1+y'^2) = \frac{1}{E^2}$$

jelölés: $\frac{1}{E^2} = 2R$

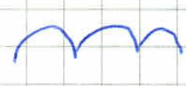
$$y = y_0 - R(1-\cos\varphi)$$

$$dy = -R\sin\varphi\, d\varphi$$

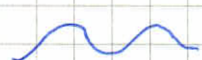
$$y'^2 = \frac{2R}{y_0-y} - 1 = \frac{2R}{R(1-\cos\varphi)} - 1 = \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$$

ciklois pálya: $\left.\begin{aligned} x &= R\varphi - r\sin\varphi \\ y &= R - r\cos\varphi \end{aligned}\right\} r(y)$

spec eset: ha $r = R$ csúcsos ciklois



ha $r < R$ nyújtott ciklois

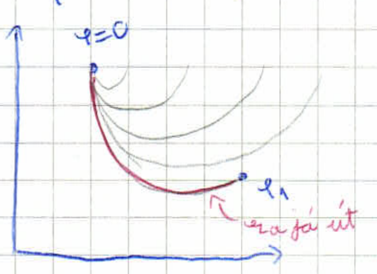


ha $r > R$ hurkolt ciklois

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{1-\cos\varphi} = \pm\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{dy}{dx} = \frac{-R\sin\varphi\, d\varphi}{dx}$$

$$\pm dx = R(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$x(\varphi) = x_0 \pm (R\varphi - R\sin\varphi) = x_0 \pm R(\varphi - \sin\varphi)$$ ez egy ciklois pálya



Nem rögzített határpontok

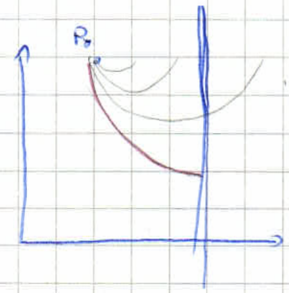
① $x_1$ rögzített $y_1$ változhat

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow p(x_1) = 0$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y_0 - y}\,\sqrt{1+y'^2}} \overset{!}{=} 0$$

$\sqrt{y_0 - y}$: $\neq 0$


$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dy}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}} = \sin\varphi$$




$\Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ a végpontban

az a cikloid kell, ami merőlegesen fut a falba

② $x_1$ változhat, $y_1$ fix

ez triviális, mert nem kell lejtő, csak simán el kell ejteni.

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow E(x_1) = 0$$

$$E = -\frac{1}{\sqrt{y_0 - y}\,\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \cos\varphi_{\text{vég}} = 0$$

$\sqrt{y_0 - y}$: $\geq 0$

$$\frac{1}{E^2} = \frac{1}{0} = \infty = 2R$$

---

Adott $S[y] = \int_{-1}^{1} y^2(x)(1-y'(x))^2\,dx$ peremfeltétel: $y(-1)=0$, $y(1)=1$

$$L(y, y') = y^2(1-y')^2$$

nem függ $x$-től, tehát az energia áll:

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = y^2 \cdot 2(1-y')(-1)$$

$$E = -2y^2(1-y')y' - y^2(1-y')^2 = -y^2(1-y')(2y'+1-y') = -y^2(1-y')(1+y') = -y^2(1-y'^2)$$

(*) $y'^2 = 1 + \frac{E}{y^2} \Rightarrow \int dx = \pm\int \frac{y\,dy}{\sqrt{E+y^2}}$ $\left(\frac{\frac{y}{\sqrt{E}}\,d\left(\frac{y}{\sqrt{E}}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{E}}\right)^2}}\right)$ $u = \frac{y}{\sqrt{E}}$

$$\int dx = \pm\int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$x - x_0 = \pm\sqrt{E}\,\sqrt{1+\frac{y^2}{E}}$$

$$(x-x_0)^2 = E + y^2$$

$$(x-x_0)^2 - y^2 = E^2$$

hiperbola

Ha PF-t megoldjuk $x_0 = -\frac{1}{4}$ $E = \frac{9}{16}$

DE ezzel az intervallumon nincs értelmezve

nem lehet megoldani úgy egy jó egyen

Megoldás:

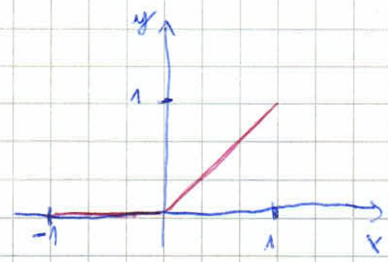
$$S[y]=\int_{-1}^{1} y^2(x)(1-y')^2\,dx$$

az integrandus pozitív, tehát $S \geq 0$, akkor min, ha, ahol $S=0$

$$y^2(1-y')^2=0$$

$y=0$ $\qquad$ $y'(x)=1$

Ez a két lehetőség van, amelyből kell összerakni:



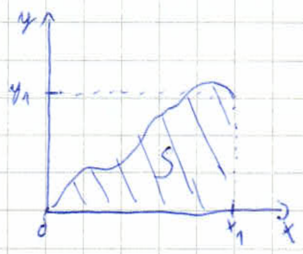

Ez miért nem jött ki?
szerint, mert a (*)-nál leosztottunk
$y$-nal és emiatt az $y=0$ mo. kiesett

ELM. MECHA

4. gyakorlat (10.06.)

Variációszámítás

① Didó királynő




$$S[y(x)] = \int_{P_0}^{P_1} y(x)\,dx$$ mellékfeltétel: $$\int_{P_0}^{P_1} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_{P_0}^{P_1}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \ell_0$$

Mivel a feltétel globális:

$$S_\lambda[y(x)] = S[y(x)] + \lambda\left(\int_{P_0}^{P_1}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx - \ell_0\right) =$$

Ez az catenariánál nem számít

$$L_\lambda = y(x) + \lambda\sqrt{1+y'^2(x)}$$ nem függ x-től, ezért az energia megmarad

$$E = p\,y' - L = *$$ $$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \lambda\frac{-2y'(x)}{2\sqrt{1+y'^2(y)}} = -\lambda\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$$

$$* = -\lambda\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2(x)}} - y - \lambda\frac{1+y'^2}{\sqrt{1-y'^2(x)}} = -y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{áll}$$

átrendezve: $$y' = \sqrt{\frac{\lambda^2}{(E+y)^2} - 1}$$ szétválasztható

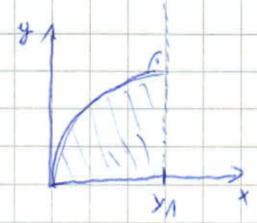
$$\int dx = \int\frac{(E+y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(E+y)^2}} \rightsquigarrow$$

$$x - x_c = -\sqrt{\lambda^2-(E+y)^2}$$

$$\boxed{(x-x_c)^2 + (y+E)^2 = \lambda^2}$$ Ez egy $|\lambda|$ sugarú $(x_c, -E)$ középpontú kör egyenlete

a)

Ha $x_1$ rögzített, és $y_1$ változhat




$$\frac{\partial S[\cdot]}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = p(x_1) \doteq 0$$

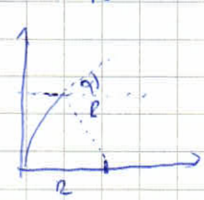
$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Rightarrow y' = 0$$

b) Ha $x_1$ változhat, de $y_1$ fix

$$\frac{\partial S[\cdot]}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -E(x_1) = 0$$

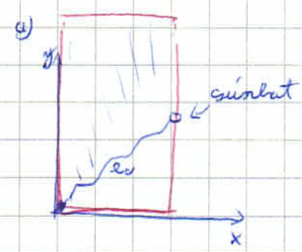
de a energia konstans: $$E = -y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$ $-E$ a középpont y koordinátája, tehát a x tengelyen van

$\Rightarrow$ emiatt $y'(0) = \infty$ $\quad d|y_1| = R\cos\varphi$ ha $\varphi$ a nyílásszög bármi



más szemlélet:

a)

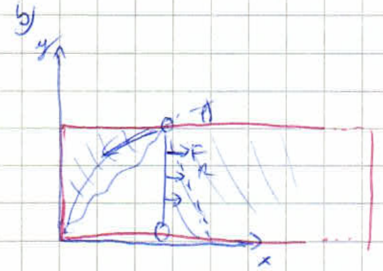



milyen lesz a szappanhártya alakja?

biztos a formája miatt vastagsága u.a. [illegible], ezért a görbületi sugár is konstans => kör

szerint fut le [illegible], hogy a felületen ne legyen y irányú komponense

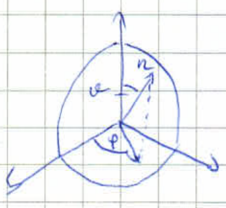
b)




$y_1 \cdot 2\sigma = F\cos\varphi \qquad F = 2\sigma y_2$

$y_1 = R\cos\varphi$ => [illegible]

(2) Gömbfelület geodetikusai




$$(ds)^2 = (R\sin\vartheta\, d\varphi)^2 + (R\, d\vartheta)^2$$

$$ds = R\sqrt{\sin^2\vartheta\, \varphi'^2(\vartheta) + 1}\, d\vartheta$$

$$S[\varphi(\vartheta)] = \int R\sqrt{\sin^2\vartheta\, \varphi'^2(\vartheta) + 1}\, d\vartheta$$

$$L(\varphi, \varphi', \vartheta) = \sqrt{\sin^2\vartheta\, \varphi'^2 + 1} \qquad \varphi\text{-től nem függ}$$

$$F = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \implies p = \text{áll} = \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = \frac{\sin^2\vartheta\, \varphi'}{\sqrt{\sin^2\vartheta\, \varphi'^2 + 1}} = C$$

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \pm \frac{C}{\sin\vartheta\sqrt{\sin^2\vartheta - C^2}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \arcsin\left[\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\, \mathrm{ctg}\,\vartheta\right]$$

$$\underline{\sin(\varphi - \varphi_0) = B\,\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}$$ ← ezek majd főkörök?

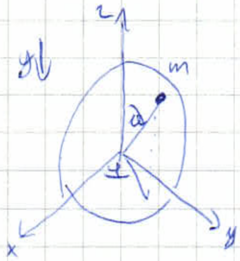
$$R\sin\vartheta\sin(\varphi - \varphi_0) = B R\cos\vartheta$$

$$R\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi_0 - R\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi_0 \mp B R\cos\vartheta = 0 \qquad \underline{R} = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\underline{R}\,\underline{n} = 0 \qquad \text{ahol } \underline{n} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ \mp B \end{pmatrix}$$

tehát a gömb olyan vonalai lesznek, amit elmetszünk egy $\underline{n}$ normálisú síkkal. Ezek főkörök lesznek, és $\underline{n}$ nyilván olyan, hogy $P_1$ és $P_2$ rajta legyen.

## Gömbi inga




kényszer: $x^2+y^2+z^2 = \text{áll}$ $\Rightarrow$ csak 2 db általános koord. van

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R^2\frac{d\sigma^2}{dt^2} = R^2\frac{\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + d\vartheta^2}{dt^2} = R^2(\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2)$$

$$L(\varphi, \dot\varphi, \vartheta, \dot\vartheta, t) = K - V = \frac{m}{2}R^2(\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2) - R\cos\vartheta\, mg$$

L nem függ $\varphi$-től és $t$-től. $\Rightarrow E = \text{áll}$ és $p_\varphi = \text{áll}$

$$m R^2 \sin^2\vartheta\,\dot\varphi = N_z \quad (1)$$

$$\frac{m}{2}(R^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi + \dot\vartheta^2) + R\cos\vartheta\, mg = E \quad (2)$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = mR^2\dot\vartheta$$

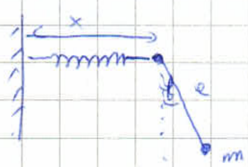
$$E = \sum_k p_k \dot q_k - L =$$

$$= mR^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi\cdot\dot\varphi + mR^2\dot\vartheta\dot\vartheta - \frac{m}{2}R^2(\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2) + R\cos\vartheta\, mg$$

$$= \frac{m}{2}R^2(\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2) + R\cos\vartheta\, mg =$$

$$=$$

## Elm. fiz. példatárból




2 szab. fok: $x, \varphi$

$$v_x = (x + l\sin\varphi)^\cdot = \dot x + l\cos\varphi\,\dot\varphi$$

$$v_y = (-l\cos\varphi)^\cdot = l\sin\varphi\,\dot\varphi$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot x + l\dot\varphi\cos\varphi)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot\varphi\sin\varphi)^2 - \frac{1}{2}D(x-x_0)^2 + mgl\cos\varphi =$$

$$= \frac{m}{2}\left[\dot x^2 + l^2\dot\varphi^2 + 2\dot x l\dot\varphi\cos\varphi\right] - \frac{1}{2}D(x-x_0)^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -D(x-x_0) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\ddot x + (ml\dot\varphi\cos\varphi)^\cdot$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi = ml^2\ddot\varphi + m(\dot x l\cos\varphi)^\cdot$$

$$\left.\begin{aligned} -D(x-x_0) &= m\ddot x + ml\ddot\varphi\cos\varphi - ml\dot\varphi^2\sin\varphi \quad (1)\\ -mgl\sin\varphi &= ml\ddot\varphi + m\ddot x l\cos\varphi - m\dot x l\dot\varphi\sin\varphi \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

kis rezgésnél $\sin\varphi \approx \varphi$ $\quad \cos\varphi \approx 1$

$$\left.\begin{aligned} (1')\quad -D(x-x_0) &= m\ddot x + ml\ddot\varphi\\ (2')\quad -mg\cancel{l}\varphi &= m\cancel{l}l\ddot\varphi + m\ddot x\cancel{l}\end{aligned}\right\} \Rightarrow -D(x-x_0) = -mg\varphi \Rightarrow D\ddot x = mg\ddot\varphi$$

visszaírva: $-mg\varphi = ml\ddot\varphi + m\frac{mg}{D}\ddot\varphi$

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{l + \frac{mg}{D}}\varphi$$

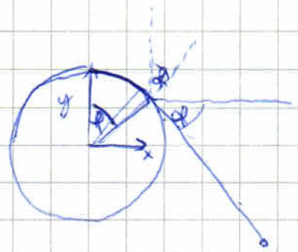
harmonikus oszcillátor: $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{m}{D}}}$

# ELM. MECHA

9. gyak (10. 13.)

constraint

(1)



$$x = (e - R\varphi)\cos\varphi + R\sin\varphi$$

$$y = -(e - R\varphi)\sin\varphi + R\cos\varphi$$

$$\dot{x} = R\cos\varphi\,\dot\varphi - (e - R\varphi)\sin\varphi - R\cos\varphi\,\dot\varphi = (R\varphi - e)\sin\varphi$$

$$\dot{y} = -R\sin\varphi\,\dot\varphi - (e - R\varphi)\cos\varphi + R\sin\varphi\,\dot\varphi = (R\varphi - e)\cos\varphi$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg\,y = \frac{1}{2}m\left[(R\varphi - e)^2\sin^2\varphi + (R\varphi - e)^2\cos^2\varphi\right] - mg\left(R\cos\varphi - (e - R\varphi)\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\,(R\varphi - e)^2\dot\varphi^2 - mg\left[R\cos\varphi + (R\varphi - e)\sin\varphi\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = m(R\varphi - e)(-R\dot\varphi^2) + mg\left(R\sin\varphi - \cancel{R\sin\varphi} + (e - R\varphi)\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m(R\varphi - e)^2\dot\varphi \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = 2m(R\varphi - e)R\dot\varphi^2 + m(R\varphi - e)^2\ddot\varphi$$

EL-egyenlet:

$$m(R\varphi - e)(-R\dot\varphi^2) + mg\,(e - R\varphi)\cos\varphi = 2m(R\varphi - e)R\dot\varphi^2 + m(R\varphi - e)^2\ddot\varphi$$

$$-R\dot\varphi^2 - g\cos\varphi = 2R\dot\varphi^2 + (R\varphi - e)\ddot\varphi$$

$$R\dot\varphi^2 + g\cos\varphi\;(e - R\varphi)\ddot\varphi$$

Egyensúlyi helyzetben: $\dot\varphi = 0 \quad \ddot\varphi = 0$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Elsőrendű kis kitérésben: $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$

$$R\dot\varepsilon^2 + g(-\varepsilon) = \left(e - R(\tfrac{\pi}{2} - R\varepsilon\right)\ddot\varepsilon$$

kicsi a négyzete ⇒ hulla

a nagyobb mellett hulla

$$\Rightarrow \ddot\varepsilon = -\frac{g}{e - R\frac{\pi}{2}}\,\varepsilon$$

$$\omega^2 = \frac{g}{e - R\frac{\pi}{2}}$$

## Tehetetlenségi erők Lagrange-ból

inerciarendszerben a Lagrange: $L=\frac{m}{2}(\dot{\underline{r}}+\underline{\omega}\times\underline{r})^2$ (ahol $\underline{r}$ a forgó rendszerben lévő vektor) $\underline{\omega}$ pedig a forgó rendszer szögsebessége az inerciarendszerhez képest

$$\cancel{\frac{\partial L}{\partial r}} \; \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2+2\dot{r}(\underline{\omega}\times\underline{r})+(\underline{\omega}\times\underline{r})^2\right]=L$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{\underline{r}}+m(\underline{\omega}\times\underline{r}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}}=m\ddot{\underline{r}}+m(\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r})+m(\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{r}}\right)_k=\frac{\partial}{\partial r_k}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+2\dot{r}_\ell\,\varepsilon_{\ell mp}\,\omega_m r_p+\varepsilon_{\ell mp}\varepsilon_{\ell q r}\dots\right)\right]= \text{majd számold ki negyedikre} =$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{r}}=m\dot{\underline{r}}\times\underline{\omega}+m\left(\omega^2\underline{r}-\underline{\omega}(\underline{\omega}\,\underline{r})\right)=m\dot{\underline{r}}\times\underline{\omega}+m\,\underline{\omega}\times(\underline{r}\times\underline{\omega})$$

EL-egyenlet:

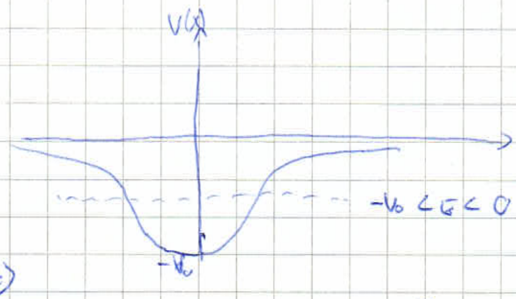
$$m\dot{\underline{r}}\times\underline{\omega}+m\,\underline{\omega}\times(\underline{r}\times\underline{\omega})=m\ddot{\underline{r}}+m(\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r})+m(\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}})$$

$$\ddot{\underline{r}}=\underbrace{2(\dot{\underline{r}}\times\underline{\omega})}_{\text{Coriolis-gyorsulás}}-\underbrace{\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})}_{\text{centrifugális-gyorsulás}}+\underbrace{(\underline{r}\times\dot{\underline{\omega}})}_{\text{Euler-gyorsulás}}$$

## 1D-s konzervatív rendszer

8.4

$$V(x)=-\frac{V_0}{ch^2(\alpha x)}$$




periódusidő: ?

fordulópont: $E=-\frac{V_0}{ch^2(\alpha x_0)} \Rightarrow$

$$x_0=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arch}\sqrt{-\frac{V_0}{E}} \qquad v=\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-V(x)}$$

$$T=2\int_{-x_0}^{x_0}\frac{dx}{v}=2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{-x_0}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}=4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}=\sqrt{8m}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{E+\frac{V_0}{ch^2(\alpha x)}}}= \qquad \alpha x=y, \quad y_0=\alpha x_0$$

$$=\sqrt{\frac{8m}{V_0}}\int_0^{y_0}\frac{\frac{1}{\alpha}\,dy}{\sqrt{\frac{E}{V_0}+\frac{1}{ch^2(y)}}} \quad \frac{z=ch\,y}{dz=sh\,y\,dy=\sqrt{z^2-1}\,dy} \quad \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{8m}{V_0}}\int_1^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}}}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{8m}{V_0}}\int_1^{z_0}\frac{z z_0\,dz}{\sqrt{z^2-1}\sqrt{z_0^2-z^2}}=$$

$$\frac{E}{V_0}=-\frac{1}{ch^2 y_0} \qquad z_0=ch\,y_0 \qquad z^2=u, \quad du=2z\,dz$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{8m}{V_0}}\int_1^{z_0^2}\frac{1}{2}\frac{z_0\,du}{\sqrt{u-1}\sqrt{z_0^2-u}}=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{8m}{V_0}}\int_0^{w_0^2}\frac{z_0\,dw}{\sqrt{w}\sqrt{w_0^2-w}}=\frac{z_0}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\int_0^{w_0}\frac{2\,ds}{\sqrt{w_0^2-s^2}}=*$$

$$u-1=w \qquad z_0^2-1=w_0^2 \qquad \sqrt{w}=s \qquad ds=\frac{1}{2\sqrt{w}}\,dw$$

$$z_0 = ch\, y_0 = ch(\alpha x_0) = \sqrt{-\frac{V_0}{E}}$$

$$* = \sqrt{\frac{8m}{|E|}}\frac{1}{\alpha}\int_0^{w_0}\frac{dz}{\sqrt{w_0^2 - z^2}} = \sqrt{\frac{8m}{|E|}}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{8m}{|E|}}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}$$

$$\frac{z}{w_0} = \sin\varphi$$

trükkösebb megoldás:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{V_0}{ch^2(\alpha x)}$$

Legyen $y = sh(\alpha x)$

$$dy = \alpha\, ch(\alpha x)\, dx$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha\, ch(\alpha x)}\frac{dy}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2}m\frac{1}{\alpha^2 ch^2(\alpha x)}\dot{y}^2 - \frac{V_0}{ch^2(\alpha x)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{m}{\alpha^2}\dot{y}^2 - V_0 = E\,\underbrace{ch^2(\alpha x)}_{1+sh^2(\alpha x)\,=\,1+y^2}$$

$$\frac{m}{2\alpha^2}\dot{y}^2 + |E|y^2 = V_0 - |E|$$

$$\frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{D}{2}y^2 = \text{const} \qquad D = 2\alpha^2|E|$$

harmonikus oszcillátor

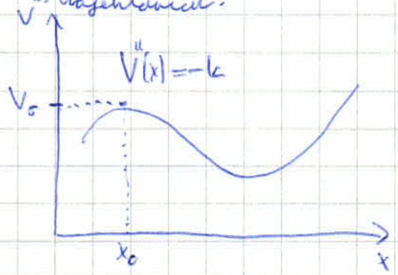
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2\alpha^2|E|}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}$$

# ELM. MECHA

6. gyak. (10.20.)

## Mozgás hiperbolikus fixpont körül

1. trajektóriák:



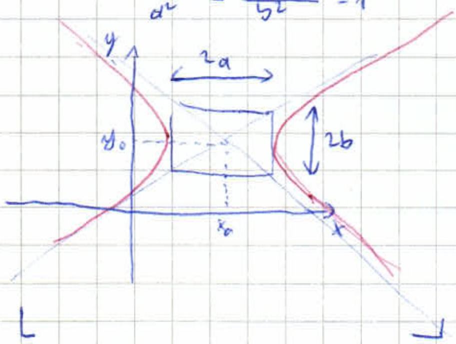

Energiamegmaradás:

$$E = V(x) + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$$

$$V(x) \simeq V_0 - \frac{k}{2}(x - x_0)^2 \Rightarrow E - V_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

Hiperbola kanonikus egyenlete:

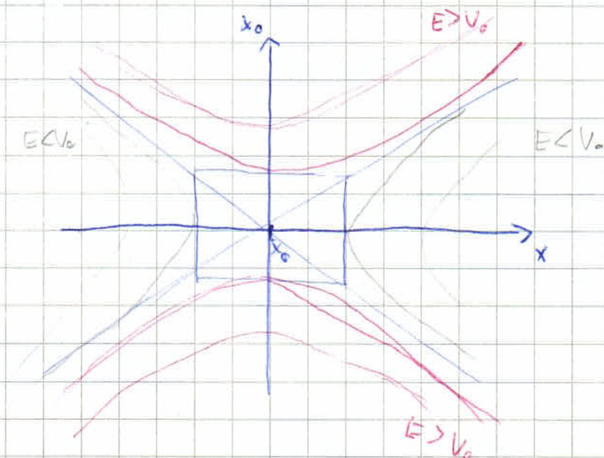
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$




$$1 = \frac{\dot{x}^2}{\frac{2}{m}(E - V_0)} - \frac{(x-x_0)^2}{\frac{2}{k}(E - V_0)}$$

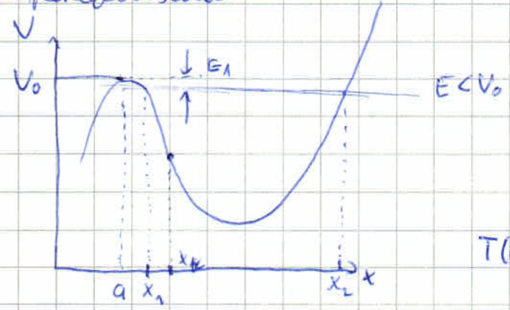
$$a = \sqrt{\frac{2}{k}(E - V_0)}$$

$$b = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}$$




aszimptotika: $\dot{x} \simeq \pm\sqrt{\frac{k}{m}}(x - x_0)$

## II. periódusidő




$$V_0 - E = E_1 \to 0$$

$$T(E_1) = ?$$

$$T(E_1) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$ (múlt órában)

$$V(x) = V_0 - \frac{k}{2}(x - a)^2$$ $x_1$ ebben a tartományban van (TFH)

$$x_1 = a + \sqrt{\frac{2}{k} E_1}$$

TFH a kvadratikus közelítés $x_k$-ban válik el és a T nem függ $x_k$-tól.

$$T(E_1) = \underbrace{\sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}}_{T_1} + \underbrace{\int_{x_k}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \sqrt{2m}}_{T_2}$$

$T_2$ ← nem divergens

Legyen $x' = x-a$ , $x'_k = x_k - a$ , $x'_1 = x_1' - a = \sqrt{\frac{2E_1}{k}}$ !

$$T_1 = \sqrt{2m}\int_{x_1'}^{x_k'} \frac{dx'}{\sqrt{E-V_0+\frac{k}{2}x'^2}} = \sqrt{\frac{4m}{k}}\int_{x_1'}^{x_k'} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2-\underbrace{2\frac{E_1}{k}}_{x_1'^2}}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\operatorname{arch}\left(\frac{x'}{x_1'}\right)\right]_{x_1'}^{x_k'} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\ln\left(x'+\sqrt{x'^2-x_1'^2}\right)\right]_{x_1'}^{x_k'} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\underbrace{\ln\left(x_k'+\sqrt{x_k'^2-x_1'^2}\right)}_{\to\ \mathrm{const}} - \underbrace{\ln x_1'}_{\to -\infty}\right] \Rightarrow \text{csak ez a tag számít}$$

$$T_1 \sim -2\sqrt{\frac{m}{k}}\ln x_1' = -2\sqrt{\frac{m}{k}}\ln\sqrt{\frac{2E_1}{k}} \sim -\ln\frac{E_1}{k}$$

## Gerjesztett rezgések

1. csillapítatlan eset:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad \left( \text{F. trafóban: } x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_\omega e^{i\omega t}\, d\omega \right.$$

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)}_{L} x = f(t) \qquad \left. x_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right)$$

Green-fv-es megoldás: $L\,G(t) = \delta(t)$    A Green fgv-t sokkal egyszerűbb megtalálni, ha F. trafóban

A Green-fgv ismeretében
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\, f(t')\, dt'$$

Az eredeti egyenletet transzformálva:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_\omega\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$(-\omega^2+\omega_0^2)x_\omega - f_\omega = 0$$

$$(*)\quad x_\omega = \frac{f_\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \quad\rightarrow\quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_\omega}{\omega_0^2-\omega^2}e^{i\omega t}\, d\omega$$

Egyébként ugyanez (*)-ból:
$$G_\omega = \frac{\delta_\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad e^{-i\omega 0} = 1$$

Green-fgv időfüggése:
$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\omega e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2}\, d\omega$$


nem jó mert a pólus az integrálási útvonalon vannak, ..

vizsgáljuk a csillapított esetet, ezáltal toljuk el a pólusokat

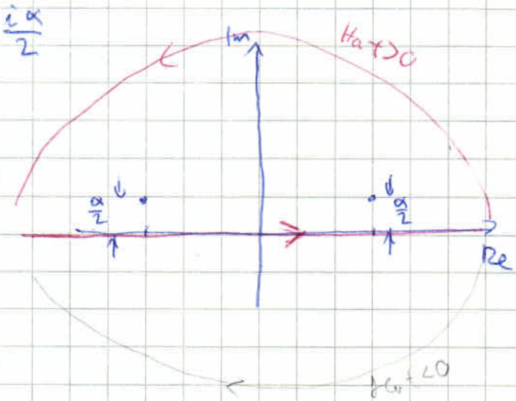
$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 x_\omega + \alpha (i\omega) x_\omega + \omega_0^2 x_\omega = 1$$

$$G_\omega = \frac{1}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \omega_0^2}$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \omega_0^2} \, d\omega$$

a nevező ott divergál, ahol $-\omega^2 + i\alpha\omega + \omega_0^2 = 0$

$$\omega_{1,2} = \mp\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} + \frac{i\alpha}{2}$$




Hol zárjuk le az egyenest?

Ha $t > 0$ $e^{i\omega t}$ akkor $\to 0$, ha $\mathrm{Im}\,\omega > 0$

Ha $t < 0$ $e^{i\omega t}$ akkor $\to 0$ ha $\mathrm{Im}\,\omega < 0$

$$\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2} = \frac{e^{i\omega t}}{-(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$

| pólus | reziduum |
|---|---|
| $\omega_1$ | $-e^{i\omega_1 t}/(\omega_1 - \omega_2)$ |
| $\omega_2$ | $-e^{i\omega_2 t}/(\omega_2 - \omega_1)$ |

Ha $t < 0$

lefelé kerülöm, ott nincs reziduum $\Rightarrow G(t) = 0$

Ha $t > 0$

felfelé kerülöm: $G(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \left( \frac{-e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{e^{i\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} \right) \overset{\alpha \to 0}{=} i \frac{-e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{\omega_0 - (-\omega_0)} = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i\,\omega_0}$

tehát $G(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

$$\boxed{G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

$\boxed{10.14.}$ c)

$$f(t) = \frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ f_0 e^{-\alpha t} & \text{ha } t>0 \end{cases}$$

KF: $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 0$

1. megoldás

$$x(t) = \int G(t-t') f(t')dt' = \frac{1}{\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') \sin[\omega_0(t-t')] f(t')dt' =$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\int_{-\infty}^{t} \sin[\omega_0(t-t')] f(t')dt' = \frac{f_0}{\omega_0}\int_0^t \sin[\omega_0(t-t')] e^{-at'}dt' =$$

$$= \frac{f_0}{\omega_0}\left[\int_0^t \frac{e^{i\omega_0 t} e^{-(i\omega_0+a)t'}}{2i} dt' - \int_0^t \frac{e^{-i\omega_0 t} e^{-(i\omega_0-a)t'}}{2i} dt'\right] =$$

$$= \frac{f_0}{\omega_0}\frac{e^{i\omega_0 t}}{2i}\left(\frac{e^{-(i\omega_0+a)t}-1}{-(i\omega_0+a)}\right) - \frac{f_0}{\omega_0}\frac{e^{i\omega_0 t}}{2i}\left(\frac{e^{(i\omega_0-a)t}-1}{i\omega_0-a}\right) =$$

$$= \frac{f_0}{\omega_0}\frac{1}{2i}\frac{(e^{-at}-e^{i\omega_0 t})(i\omega_0-a) + (e^{-at}-e^{i\omega_0 t})(i\omega_0+a)}{\omega_0^2+a^2} =$$

$$= \cancel{\frac{f_0}{\omega_0}} \frac{f_0}{\omega_0^2+a^2} e^{-at} - \frac{f_0}{\omega_0}\frac{1}{2i}\underbrace{\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{\omega_0^2+a^2}}_{\cos(\omega_0 t)} i\omega_0 + \frac{f_0}{\omega_0}\frac{1}{\omega_0^2+a^2}\underbrace{\frac{(e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t})a}{2i}}_{\sin(\omega_0 t)} =$$

$$= \underline{\frac{f_0}{\omega_0^2+a^2}\left(e^{-at} - \cos(\omega_0 t) + \frac{a}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)}$$

$\boxed{10.11.}$

<u>II. megoldás</u>

$$f(t)=\frac{F(t)}{m}=\begin{cases}0 & \text{ha } t<0\\ f_0 e^{-at} & \text{ha } t>0\end{cases}$$

KF: $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$

Oldjuk meg a frekvenciatérben

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=f(t)\qquad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x_\omega e^{i\omega t}\,d\omega\ ,\quad x_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

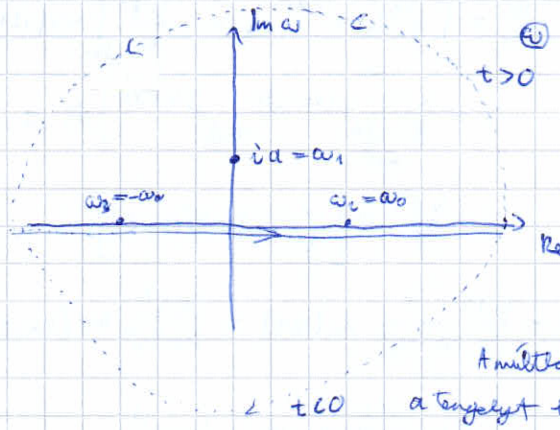
$$(-i\omega)^2 x_\omega+\omega_0^2 x_\omega=f_\omega \;\rightarrow\; x_\omega=\frac{f_\omega}{\omega_0^2-\omega^2}=f_\omega G_\omega\ ,\quad G_\omega=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$$

1. lépés: $f_\omega$ meghatározása:

$$f_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(t)f_0 e^{-at}e^{-i\omega t}dt=\int_0^{\infty}f_0 e^{-(a+i\omega)t}dt=$$

$$=f_0\left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\right]_0^{\infty}=\frac{f_0}{a+i\omega}$$

Ekkor: $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_0}{a+i\omega}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}e^{i\omega t}d\omega=\frac{-f_0}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-ia)(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}d\omega$$




| Pólusok | reziduumok |
|---|---|
| $\omega_1=ia$ | $\frac{e^{-at}}{-(a^2+\omega_0^2)}$ |
| $\omega_2=\omega_0$ | $\frac{e^{i\omega_0 t}}{(\omega_0-ia)(2\omega_0)}$ |
| $\omega_3=-\omega_0$ | $\frac{e^{-i\omega_0 t}}{-(\omega_0+ia)(-2\omega_0)}$ |

A múltkor a pólusokat tettük feljebb, most a tengelyt húzzuk kicsit lejjebb, így minden egy helyen

Mivel alul nincs pólus: $x(t<0)=0$

$$x(t>0)=-\frac{f_0}{2\pi i}\cdot 2\pi i\sum_{j=1}^{3}\mathrm{Res}(\omega_j)=\frac{f_0}{a^2+\omega_0^2}e^{-at}-\frac{f_0}{a^2+\omega_0^2}\left(\frac{1}{2\omega_0}(\omega_0+ia)e^{i\omega_0 t}\right)-\frac{f_0}{\omega_0^2+a^2}(\omega_0-ia)\frac{1}{2\omega_0}e^{-i\omega_0 t}=$$

$$=\underline{\frac{f_0}{a^2+\omega_0^2}\left[e^{-at}-\cos(\omega_0 t)+\frac{a}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right]}$$

## Oszcillátor negyedfokú perturbációval

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{\varepsilon b'}{4}x^4 \qquad F(x) = -\frac{dV}{dx} = -kx - \varepsilon b' x^3$$

Mozgásegyenlet: $m\ddot{x} = -kx - \varepsilon b' x^3$ Legyen $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $b = \frac{b'}{m}$

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \varepsilon b x^3}$$

Keressük a megoldást: $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ ahol $x_0(t) = A\cos(\omega_0 t)$

Beírva: $\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_0 - \omega_0^2 \varepsilon x_1 - \varepsilon b x_0^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -b x_0^3$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -bA^3\cos^3(\omega_0 t) \quad (*)$$

$$\cos^3(\omega_0 t) = \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\omega_0 t} + 3e^{i\omega_0 t} + 3e^{-i\omega_0 t} + e^{-3i\omega_0 t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos(\underbrace{3\omega_0}_{\Omega = 3\omega_0} t) + \frac{3}{4}\cos(\omega_0 t)$$

↖ rezonáns gerjesztés

$(*)$:

$x_1(t) = x_1^{NR}(t) + x_1^{R}(t)$ az eredő az egy rezonáns és egy nem rezonáns tag összege

$$x_1^{NR}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega^{NR}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega \;,\quad f_\omega^{NR} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{NR}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = -\frac{bA^3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\Omega t)\,e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= -\frac{bA^3}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t}\right)dt =$$

$$= -\frac{bA^3}{8}2\pi\left[\delta(\Omega-\omega) + \delta(\Omega+\omega)\right]$$

$$x_1^{NR}(t) = -\frac{bA^3}{8}\left[\frac{e^{i\Omega t}}{\omega_0^2-\Omega^2} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\omega_0^2-\Omega^2}\right] = -\frac{bA^3}{4}\frac{1}{\omega_0^2-\Omega^2}\cos(\Omega t) = \frac{bA^3}{32\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t)$$

$$x_1^{R}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{R}(t')\,G(t-t')\,dt' \qquad \text{ahol } G(t-t') = \frac{\Theta(t-t')}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-t'))$$

$$f^{R}(t') = -\frac{3bA^3}{4}\cos(\omega_0 t')\,\Theta(t')$$

$$x_1^{R}(t) = -\frac{3bA^3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Theta(t-t')}{\omega_0}\underbrace{\sin[\omega_0(t-t')]}_{\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t') - \sin(\omega_0 t')\cos(\omega_0 t)}\Theta(t')\cos(\omega_0 t')\,dt' =$$

$$= -\frac{3bA^3}{4\omega_0}\int_0^t\Big[\sin(\omega_0 t)\underbrace{\cos^2(\omega_0 t')}_{\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega_0 t'))} - \cos(\omega_0 t)\underbrace{\sin(\omega_0 t')\cos(\omega_0 t')}_{\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t')}\Big]dt' =$$

$$= -\frac{3bA^3}{8\omega_0}t\sin(\omega_0 t) - \frac{3bA^3}{8\omega_0}\int_0^t \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 t')\,dt' = *$$

$$\int_t^{-t}\sin(\omega_0 u)\left(-\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\sin(\omega_0 u)\,du = \frac{1}{2}\left[\cos(\omega_0 u)\cdot\frac{1}{\omega_0}\right]_{-t}^{t} = 0$$

így $*$: $x_1^{R}(t) = -\frac{3bA^3}{8\omega_0}t\sin(\omega_0 t)$

A perturbált időfüggés tehát:

$$x_1(t) = \frac{bA^3}{32\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t) - \frac{3bA^3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

És így:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) - \frac{3\varepsilon b A^3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t) + \frac{\varepsilon b A^3}{32\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\text{csak ha } \frac{3\varepsilon b A^2}{8\omega_0} \ll 1$$

Kérdés: mi lesz a körfrekvencia perturbációja

$$\text{Ha } A\cos(\omega_0 t) \to A\cos[(\omega_0 + \varepsilon\omega_1)t] = A\cos(\omega_0 t)\underbrace{\cos[\varepsilon\omega_1 t]}_{\approx 1} - A\sin(\omega_0 t)\underbrace{\sin(\varepsilon\omega_1 t)}_{\approx \varepsilon\omega_1 t}$$

$$= A\cos(\omega_0 t) + \varepsilon\omega_1 A t \sin(\omega_0 t)$$

most: $\omega_1 = \frac{3bA^2}{8\omega_0}$

Ennek ismeretében $x(t)$ átírható $t$-ben nem divergálóvá:

$$x(t) = A\cos[(\omega_0 + \varepsilon\omega_1)t] + \frac{\varepsilon b A^3}{32\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t) \quad \text{ez akkor jó, ha } \frac{\varepsilon\omega_1}{\omega_0} \ll 1$$

## Disszipatív rendszerek

Ha $\underline{F}_s = -\gamma\underline{v}$ és $R(\underline{v}) = \frac{1}{2}\gamma v^2$ akkor $\underline{F}_s = -\frac{\partial R}{\partial \underline{v}}$

Így a mozgásegyenlet:

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial R}{\partial \dot{x}}$$

Feladat:


$$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}D\left(\sqrt{x^2+d^2} - \ell_0\right)^2$$

csillapítás: $R = \frac{1}{2}\eta(\dot{\ell})^2 \qquad \ell = \sqrt{x^2+d^2}$

$$F = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2}D\cdot 2\left(\sqrt{x^2+d^2} - \ell_0\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{dp}{dt} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}\eta\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\eta\frac{2x^2\dot{x}}{x^2+d^2} = \frac{\eta x^2\dot{x}}{x^2+d^2}$$

mozgásegyenlet:

$$\boxed{-Dx\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+d^2}}\right) - m\ddot{x} = \frac{\eta x^2\dot{x}}{x^2+d^2}}$$

TFH: $e_0 < d \Rightarrow$ a egyensúlyi helyzet $x_0 = 0$

Fejtsük sorba 0 körül:

$$-Dx\left(1-\frac{e_0}{d}\right) - m\ddot{x} = \eta\frac{x^2\dot{x}}{d^2}$$ ez is lesz

így ismét visszakapjuk a csillapítatlan esetet.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D\left(1-\frac{e_0}{d}\right)}{m}}$$ első rendben ezzel vissz, de mégis azt várnánk, egy valahogy lecseng.

$$\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{\eta}{md^2}x^2\right)}_{\alpha}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ ha $\alpha$ konstans lenne akkor $x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos(\omega t)$ lenne

de nem konstans, hanem csökken az idővel

$\Rightarrow$ még az exp-nél is lassabban cseng le.

Vizsgáljuk meg a $x(t) = At^{-\beta}\cos(\omega t)$ esetet:

Beírva: $\cancel{-At^{-\beta}\omega^2\cos(\omega t) - 2A\omega t^{-\beta-1}\sin(\omega t) + At^{-\beta-2}\cos(\omega t) + \frac{\eta}{md^2}A^3t^{-3}}$

$$-At^{-\beta}\omega^2\cos(\omega t) + \beta 2A\omega t^{-\beta-1}\sin(\omega t) + A\beta(\beta+1)t^{-\beta-2}\cos(\omega t)$$
$$+\frac{\eta}{md^2}A^3t^{-2\beta}(-\beta)t^{-\beta-1}\cos^3(\omega t) - \frac{\eta}{md^2}A^3t^{-3\beta}\sin(\omega t)\omega + \omega^2 At^{-\beta}\cos(\omega t) = 0$$

Tehát ~~$\beta^{3\beta}$ $At^{-3\beta}$ és $t^{-3\beta-1}$ -es tagok lassan lecsengenek~~

$$\dots t^{-\beta-1} + \dots t^{-\beta-2} = \dots t^{-3\beta-1} + \dots t^{-3\beta}$$

ez lassabban mint ez ez lassabban mint az

akkor, hogy egyenlő legyen: $-\beta-1 = -3\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$ hosszú távon

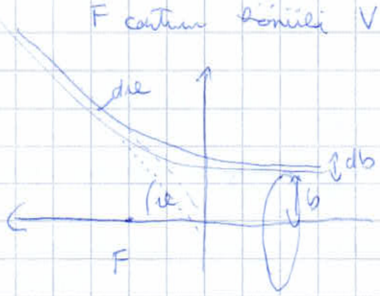
tehát $x(t) = \frac{A}{\sqrt{t}}\cos(\omega t)$

# ELM MECHA

8. gyak (11. 17.)

## Szórásszámítás

F centrum körüli $V(r)$ potenciál hogy befolyásolja a részecskék pályáját




Elméletben $\vartheta(b)$ egyértelműen meghatározott, és ebből lehet következtetni a potenciálra

De sajnos az impakt paramétert nehéz befolyásolni, szóval inkább megvilágítjuk homogén nyalábbal

Azt akarjuk tudni, hogy a b és db közötti részecskék milyen $\vartheta$ és $d\vartheta$ között szóródnak

$j_0 2\pi b\,db = dn$ Mivel $j_0$ esetleges, a szög szerinti sűrűség, ami minket érdekel

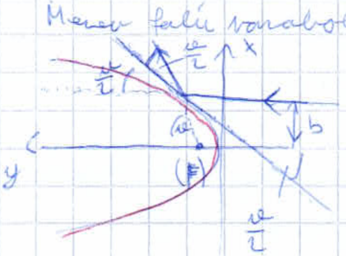
$$\frac{dn}{j_0 d\Omega} = \sigma_{diff} \qquad \left(\text{tudjuk, hogy } d\Omega = 2\pi\sin\vartheta\,|d\vartheta|\right)$$

$$\sigma_{diff} = \frac{b\,db}{\sin\vartheta\,d\vartheta} = \underline{\frac{b}{\sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right|}$$

ha ismerjük $\vartheta(b)$-t kifejezzük $b(\vartheta)$-t és ebből $\sigma_{diff}$ kiszámolható, és az mérhető

### Példa 1

Merev falú paraboloid



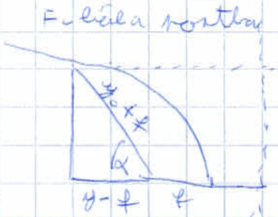

Be fogjuk látni, hogy a sugár meghosszabbítása a fókuszba.

Legyen a egyenlete: $y = \frac{x^2}{4f}$ ahol f a fókusztávolság

$$x = 2\sqrt{yf}$$

$$\frac{dx}{dy} = \tan\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{f}{y}}$$

F-ből a pontba mutató egyenes szögére akarjuk belátni, hogy $\vartheta$.




$$\cos\alpha = \frac{y-f}{y+f}$$

Tudjuk, hogy $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\frac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} - 1$

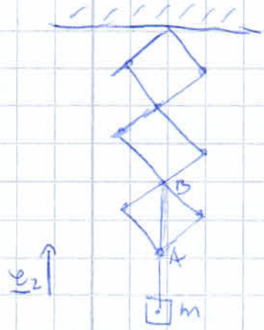
Behelyettesítve $\cos\vartheta = 2\frac{1}{1+\frac{f}{y}} - 1 = \frac{2y}{y+f} - 1 = \frac{y-f}{y+f}$

Tehát valóban $\vartheta = \alpha$.

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{dx}{dy}\Big|_{y=y_0} = \sqrt{\frac{f}{y_0}} = \sqrt{\frac{f}{b^2}\cdot 4f} = \frac{2f}{b} \Rightarrow b(\vartheta) = \frac{2f}{\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$\sigma_{diff} = \frac{b}{\sin\vartheta}\,2f\,\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\,\frac{1}{2} = \frac{2f}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$ -nek hasonló kifejezés

## Példa 2



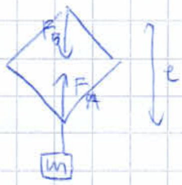

AB pontot összehúzzuk, mekkora erő feszíti a fonalat?

Ha $\underline{r}_k$ helyen lévő testekre $\underline{F}_k$ szabaderők hatnak, akkor statikus helyzetben

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{F}_k \delta \underline{r}_k = 0$$

ahol $\delta \underline{r}_k$ olyan virtuális elmozdulás, hogy a kényszer teljesülve marad

TFH elvágjuk a fonalat és a kényszererőkkel egyenlő szabaderőkre cseréljük




ℓ a négyzetéle


Az A pont elmozdulása: $\delta \underline{r}_A = 3\delta\ell\,(-\underline{e}_z)$

$$\delta \underline{r}_B = 2\delta\ell\,(-\underline{e}_z)$$

$$\delta \underline{x}_M = 3\delta\ell\,(-\underline{e}_z)$$

A virtuális munka elve: $\delta \underline{x}_M \underline{F}_M + \delta \underline{x}_B \underline{F}_B + \delta \underline{x}_A \underline{F}_A = 0$

$$(+3\delta\ell\, mg + 2\delta\ell\, F - 3\delta\ell\, F) = 0$$

$$\underline{F = 3mg}$$

### Holonom kényszer

$f$ szabadsági fokkal, $q_1 \dots q_f$ koordinátákkal jellemezhető rendszerben a k. kényszer:

$\varphi_k(q_1(t), q_2(t), \dots q_f(t), t) = 0$ egy függvény a trajektóriák között ami minden időpillanatban teljesül

deriválva idő szerint: $\underbrace{\partial_t \varphi_k}_{a_{k0}} + \sum_{\ell=1}^{f} \underbrace{\partial_{q_\ell} \varphi_k}_{a_{k\ell}} \cdot \dot{q}_\ell = 0$

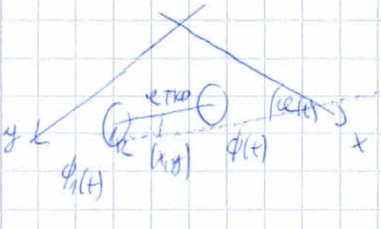
ez esetben $a_{k0}(q_\ell(t),t) + \sum_{j=1}^{f} a_{kj}(q_\ell(t),t)\,\dot{q}_j(t) = 0$ egy adott kényszer

Tetszőleges $a_{k\ell}$-ekre nem biztos, hogy létezik olyan $\varphi_\ell(q_k(t),t)$-k, hogy a deriváltjukból a fenti egyenletet kapjuk

Ha nem létezik, de a kényszer teljesül, az az anholonom kényszer.

„Minden kényszer tulajdonképpen a sebességekkel fejezhető ki. A holonom geometriai, de az anholonom nem feltétlenül.” (Baranyai)

## Példa 3




$\phi$: a rendszer szögelfordulása

A kerekek végig tapadnak.

Helyzetvezérlés, hogy adott időpontban kerekeket meghajtjuk $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$-vel ($\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ pl.)

Üljünk be a TKP rendszerbe!

$$\left.\begin{aligned}\underline{v}_1 &= \underline{v}_{TKP} - \underline{v} \\ \underline{v}_2 &= \underline{v}_{TKP} + \underline{v}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{v}_{TKP} = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)\ ;\ \underline{v} = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

Mivel $\underline{v}_{TKP} \parallel \underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2$ $\quad v_{TKP} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{R}{2}(\dot\phi_1 + \dot\phi_2)$

$$v = \frac{1}{2}(R\dot\phi_2 - R\dot\phi_1)$$

Mivel $v = \frac{\ell}{2}\dot\vartheta$ ezért $\quad \ell\dot\vartheta = R(\dot\phi_2 - \dot\phi_1)$ (1)

$$\dot x = -\cos\vartheta \frac{R}{2}(\dot\phi_1 + \dot\phi_2) \quad (2)$$

$$\dot y = -\sin\vartheta \frac{R}{2}(\dot\phi_2 - \dot\phi_1) \quad (3)$$

(1), (2), és (3) a kényszerek

| | $\dot x$ | $\dot y$ | $\dot\vartheta$ | $\dot\phi_1$ | $\dot\phi_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 0 | 0 | $\ell$ | $R$ | $-R$ |
| (2) | 1 | 0 | 0 | $\frac{R}{2}\cos\vartheta$ | $\frac{R}{2}\cos\vartheta$ |
| (3) | 0 | 1 | 0 | $-\frac{R}{2}\sin\vartheta$ | $\frac{\ell}{2}\sin\vartheta$ |

Legyen $L_0$ a kényszerek nélküli Lagrange (jelenleg $L_0 = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot\vartheta^2$) akkor a kényszerekkel:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot q_e} = \frac{\partial L_0}{\partial q_e} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k a_{ke}$$

$$\left.\begin{aligned}
m\ddot x &= \lambda_1 \\
m\ddot y &= \lambda_2 \\
\frac{m\ell^2}{12}\ddot\vartheta &= \ell\lambda_3 \\
0 &= \frac{R}{2}(\lambda_1\cos\vartheta - \lambda_2\sin\vartheta + R\lambda_3) \\
0 &= \frac{R}{2}(\lambda_1\cos\vartheta - \lambda_2\sin\vartheta - R\lambda_3)
\end{aligned}\right]$$

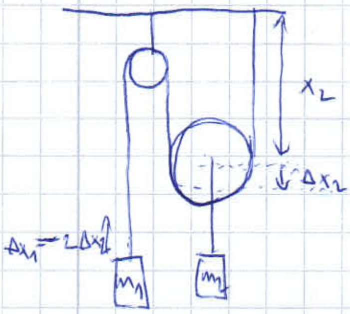
Ezek a mozgásegyenletek

# ELMMECHA

9. gyak (11.24) helyett videó

## Hamilton-leírás

Példa 11.17.




$$\dot x_1 = -2\dot x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 + C$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot x_2^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 =$$

$$= 2m_1\dot x_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot x_2^2 - 2m_1 g x_2 + m_1 g C + m_2 g x_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(4m_1 + m_2)\dot x_2^2 - (2m_1 - m_2) g x_2 + m_1 g C$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot x_2} = (4m_1 + m_2)\dot x_2 \quad \rightarrow \quad \dot x_2 = \frac{p}{(4m_1+m_2)}$$

$$E = p\dot x - L = \frac{1}{2}(4m_1+m_2)\dot x_2^2 + (2m_1 - m_2) g x_2 + m_1 g C$$

$$H = \frac{p^2}{2(4m_1+m_2)} + (2m_1-m_2) g x_2 + m_1 g C$$

Hamilton-egyenletek:

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot p &= (2m_1 - m_2) g \\ \dot x_2 &= \frac{p}{4m_1+m_2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad p(t) = (2m_1-m_2)gt + p_0 \\ &\Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{(2m_1-m_2)gt^2}{2(4m_1+m_2)} + \frac{p_0 t}{4m_1+m_2} + x_0 \end{aligned}$$

Példa (296)


milyen pályán megy a részecske

Az általánosított lendület: $\underline{p} = m\underline{v} + Q\underline{A}$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

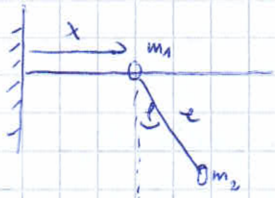
$$H(\underline{r}, \underline{p}) = \frac{1}{2m}(\underline{p} - Q\underline{A})^2 + Q\phi - mgy$$

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}\left[(p_x + QBy)^2 + p_y^2\right] - mgy$$

Hamilton-egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} &(1): \quad \frac{\partial H}{\partial p_x} = \dot x \\ &(2): \quad \dot p_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ &(3): \quad \dot y = \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ &(4): \quad \dot p_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin(\omega t) \\ y(t) &= \frac{g}{\omega^2} - \frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t) \end{aligned}$$

## Tömegmátrix és a kis rezgések




Legyenek a koordináták: $x_1 = x$

$x_2 = x + \ell \sin\varphi \approx x + \ell\varphi$

$$L(x_1, x_2, \dot x_1, \dot x_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot x_2^2 + m g \ell \cos\varphi \to \approx 1 +$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot x^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell^2 \dot\varphi^2 + m_2 \dot x \ell \dot\varphi + m_2 g \ell - m_2 g \ell \frac{\varphi^2}{2}$$

Legyen $\underline{q} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}$ ekkor a Lagrange:

$L = \frac{1}{2} \underline{\dot q}\, \underline{\underline{M}}\, \underline{\dot q} - \frac{1}{2} \underline{q}\, \underline{\underline{K}}\, \underline{q}$ ahol $\underline{\underline{M}}$: tömegmátrix

$\underline{\underline{K}}$: rugó állandó mátrix

$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot q}}$ $\underline{F} = \frac{\partial L}{\partial \underline{q}}$

A mozgásegyenlet: $\underline{\underline{M}}\, \underline{\ddot q} = -\underline{\underline{K}}\, \underline{q}$

$\underline{\ddot q} = \underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{A}}}\, \underline{q}$

Ha $\underline{\underline{A}}$ sajátérték megoldásai: $\underline{a}_j$, $\omega_j$

ekkor $\underline{q}(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j \underline{a}_j e^{\pm i \omega_j t}$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \ell \\ m_2 \ell & m_2 \ell^2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 g \ell \end{pmatrix}$$

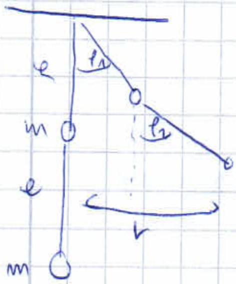
$$\det(\underline{\underline{K}} - \omega_j^2 \underline{\underline{M}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\omega_j^2 (m_1+m_2) & -\omega_j^2 m_2 \ell \\ -\omega_j^2 m_2 \ell & -\omega_j^2 [m_2 \ell^2 + m_2 g \ell \end{vmatrix} = 0$$

megoldás: $\omega_1^2 = 0$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1} \frac{g}{\ell}}$

Példa 2




milyen $\nu$ esetén lesz instabil

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left( l \dot{\varphi}_1^2 + l \dot{\varphi}_2^2 \right)$$

$$V = -mgl\cos\varphi_1 - mgl\left(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) - \frac{1}{2} m \Omega^2 l^2 \sin^2\varphi_1 -$$
$$- \frac{1}{2} m \Omega^2 l^2 \left(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}\, \underline{\underline{M}}\, \dot{\underline{q}} \qquad \underline{q} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} 2m(gl - \Omega^2 l^2) & -m\Omega^2 l^2 \\ -m\Omega^2 l^2 & m(gl - \Omega^2 l^2) \end{pmatrix}$$

Megoldom a sajátértékeket: $\omega_1^2 = \dfrac{\sqrt{2}\frac{g}{l} - (\sqrt{2}-1)\Omega^2}{\sqrt{2}-1}$ $\qquad \omega_2^2 = \dfrac{\sqrt{2}\frac{g}{l} - (\sqrt{2}+1)\Omega^2}{\sqrt{2}+1}$

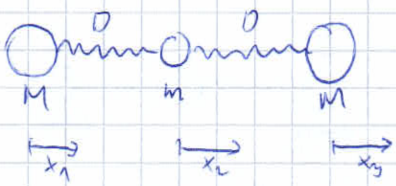
$$\Omega_{krit} = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}}$$

# ELMMECHA

10. gyak (11.01.)

Összetett rezgések

① $CO_2$ molekula:




klasszikus rugós rezgési modell

$$L(\underline{x},\underline{\dot{x}}) = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}D(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}D(x_3-x_2)^2$$

általában is a sorbafejtés után mindig felírható így: $L(\underline{x},\underline{\dot{x}}) = \frac{1}{2}\underline{\dot{x}}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\dot{x}} - \frac{1}{2}\underline{x}\,\underline{\underline{k}}\,\underline{x}$

ahol $\underline{\underline{M}}$ és $\underline{\underline{k}}$ szimmetrikus.

Ebben az esetben: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} M & & \\ & m & \\ & & M \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{k}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D & -D & 0 \\ -D & 2D & -D \\ 0 & -D & D \end{pmatrix} = \frac{D}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Mozgásegyenlet felírása:

$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} = \underline{\underline{M}}\,\underline{\dot{x}}$ $\qquad \frac{d}{dt}\underline{p} = \underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}$

$\underline{F} = \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = -\underline{\underline{k}}\,\underline{x}$ $\qquad$ EL-egyenlet: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}} = -\underline{\underline{k}}\,\underline{x}$

TFH: $\underline{x}(t) = \underline{a}\,e^{-i\omega t}$ $\qquad \underline{\ddot{x}} = -\omega^2 \underline{a}\,e^{-i\omega t}$

ekkor: $-\omega^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{a} = -\underline{\underline{k}}\,\underline{a}$

$(\underline{\underline{k}} - \omega^2\underline{\underline{M}})\underline{a} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \det(\underline{\underline{k}} - \omega^2\underline{\underline{M}}) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} D-\omega^2 M & -D & 0 \\ -D & 2D-\omega^2 m & -D \\ 0 & -D & D-\omega^2 M \end{pmatrix} = 0$$

$\hookrightarrow (D-\omega^2 M)\begin{vmatrix} 2D-\omega^2 m & -D \\ -D & D-\omega^2 M \end{vmatrix} + D$

$(D-\omega^2 M)(2D-\omega^2 m)(D-\omega^2 M) - 2D^2(D-\omega^2 M) = 0$

$(D-\omega^2 M)\left[(2D-\omega^2 m)(D-\omega^2 M) - 2D^2\right] = 0$

$(D-\omega^2 M)\left(\omega^4 mM - 2D\omega^2 M - D\omega^2 m\right) = 0 \quad \Rightarrow$

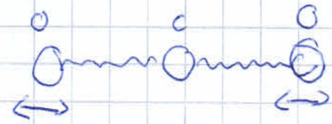
$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{D}{M}} \\ \omega_2 &= 0 \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{2D}{m} + \frac{D}{M}} \end{aligned}\right\}$$ Ezek a sajátfrekvenciák

sajátmódusok:

$\omega_1$ esetén:

$$\underline{K}-\omega^2 M = \begin{pmatrix} 0 & -D & 0 \\ -D & \left(2-\frac{m}{M}\right)D & -D \\ 0 & -D & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -D & 0 \\ -D & \left(2-\frac{m}{M}\right)D & -D \\ 0 & -D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



lélegző módus

$\omega_2$ esetén u.a. a módszer

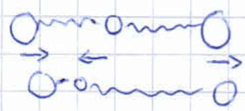
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

zérus módus

tiszta transzlációs mozgás

$\omega_3$ esetén:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{2M}{m}a \\ a \end{pmatrix}$$



tili-toli módus

## Hamilton-Jacobi-egyenlet.

① 1D-s harmonikus oszcillátor

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Hatásfüggvény: $S[q(t)] = \int_{t_0}^{t} L(q', \dot{q}', t')\,dt' = S(q_0, t_0, q, t)$

TFH $q_0$ és $t_0$ továbbra is fixek. Ekkor már csak $q$-tól és $t$-től függ

$dS = p\,dq - H\,dt$ tulajdonképp $\frac{\partial S}{\partial q} = p$ $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q,p)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0}$$ HJ-egyenlet

Mivel az energia megmarad $\frac{\partial S}{\partial t} = -E \rightarrow S(x,t) = S_0(x) - Et$

ebből $p = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{dS_0}{dx}$

Így a Hamilton: $H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = E$ redukált HJ egyenlet (mert az E megmarad)

$$\frac{dS_0}{dx} = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2}$$ Ez egy választás

$$S_0 = \pm\sqrt{2mE}\int\sqrt{1-\frac{m\omega^2}{2E}x^2}\,dx = \qquad z = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x$$

$$= \pm\sqrt{2mE}\int\sqrt{1-z^2}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\,dz = \pm\frac{2E}{\omega}\int\sqrt{1-z^2}\,dz \qquad \begin{array}{l} z = \sin\alpha \\ dz = \cos\alpha\, d\alpha \end{array}$$

eredmény: $S_0(x) = \pm\frac{2E}{\omega}\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-z^2}\,z + \arcsin z\right) + \alpha_2 =$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{2mE - m\omega^2x^2}\;x \pm \frac{E}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x\right) + \alpha_2$$

Mivel vannak integrálási állandók, ezeket kezelni kell $\alpha_2$ legyen 0, mert nem $S_0$ értéke érdekel, hanem a derivált. 1 szab. fok $\Rightarrow$ 1 marad $\underline{\underline{E}}$

Tfh már tudjuk $S(q,t,\underline{\alpha})$ összefüggést (itt $\underline{\alpha}$ egy $f$ hosszú vektor.)

Beírjuk a HJ egyenletbe:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial S}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0$$

Legyen $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$! Mivel $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ ezért ezt beírva

$$\dot{q}\frac{\partial}{\partial q}\beta_i + \frac{\partial}{\partial t}\beta_i = \frac{d}{dt}\beta_i(q,t,\alpha_i) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta_i = \text{const}}$$

Feladat:

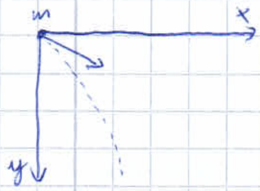
$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E}$ mert az egyetlen konstans az E

$$\beta_1 = \frac{\partial}{\partial E}(S_0 - Et) = \frac{\partial S_0}{\partial E} - t = \pm\frac{1}{2}\frac{2mx}{2\sqrt{2mE - m\omega^2x^2}} \pm \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x\right) \pm \frac{E}{\omega}\frac{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\,x}{\sqrt{1-\frac{m\omega^2}{2E}x^2}}\left(-\frac{1}{2}\right)E^{-3/2} - t$$

$$= \text{A 1. és a 4. tag u.a.} = \pm\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x\right)$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{A}\sin\big(\omega t + \underbrace{\omega\beta_1}_{\text{const}:\ \varphi_1}\big)$$

③ ferde hajítás



$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - mgy$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \longrightarrow S = -Et + S_0(x,y)$$

$$p_x \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}$$

Így a Hamilton: $H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2\right] - mgy = E$ ← redukált HJ egyenlet

keressük $S_0$-t $S_0(x,y) = X(x) + Y(y)$ alakban!

$\frac{1}{2m}\left(X'^2(x) + Y'^2(y)\right) - mgy = E = \text{konst}$ Ez csak úgy lehet $\forall x, y$-ra, ha mind a két tag állandó

$\frac{1}{2m} X'^2(x) = \alpha_2$ és $\frac{1}{2m} Y'^2(y) - mgy = \alpha_3$ $\alpha_2 + \alpha_3 = E$ tehát csak 2 konst.

$X'(x) = \pm\sqrt{2m\alpha_2} \Rightarrow X(x) = \sqrt{2m\alpha_2} + \text{konst}$ ← ez legyen 0. A ±-t majd vagy a kezdeti fel

$Y'(y) = \sqrt{2m\alpha_3 + 2m^2 g y} \Rightarrow Y(y) = \frac{2}{3m^2 g}\left(2m\alpha_3 + 2m^2 g y\right)^{3/2}$

összesen: $S_0 = \sqrt{2m\alpha_2}\,x + \frac{1}{3m^2 g}\left[2m(E-\alpha_2) + 2m^2 g y\right]^{3/2}$

Így kiszámolhatók $\beta$-k:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{1}{mg}\sqrt{2m(E-\alpha_2) + 2m^2 g y} \qquad (1)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{mg}\sqrt{2m(E-\alpha_2) + 2m^2 g y} + \frac{mx}{\sqrt{2m\alpha_2}} \qquad (2)$$

(1)-et beírva (2)-be:

$$\beta_2 = -(\beta_1 + t) + \frac{mx}{\sqrt{2m\alpha_2}} \Rightarrow x(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}(\beta_1 + \beta_2)}_{x_0} + \underbrace{\sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}}_{v_{x0}} t$$

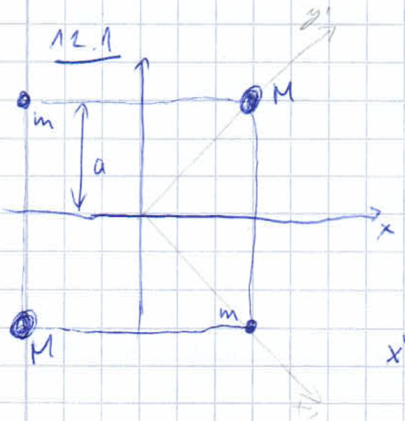
Az (1)-ből négyzetre emelve: $m^2 g^2 (\beta_1 + t)^2 = 2m(E - \alpha_2) + 2m^2 g y \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \underbrace{g\beta_1}_{v_{y0}} t + \underbrace{\frac{1}{2} g \beta_1^2 - \frac{1}{mg}(E - \alpha_2)}_{y_0}$$

ELM MECHA

11. gyak. (12.08.)

1. Merev testek




a) ; Határozzuk meg a tehetetlenségi tenzort $x-y$-ban

b. erre $45°$-os szögben állóra

a) $\Theta_{ij} = \sum_k m_k \left( \delta_{ij} r_k^2 - x_{ki} x_{kj} \right)$

így is lehetne, de egyszerűbb, ha a főtengely-rendszert nézzük

$x'-y'-z'$ rendszerben $\underline{\underline{\Theta}}'$ diagonális

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \begin{pmatrix} \Theta_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{z'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2M(\sqrt{2}a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(M+m)a^2 \end{pmatrix}$$

vegyük észre, hogy $\Theta_{x'x'} + \Theta_{y'y'} = \Theta_{z'z'}$. Ez minden sík testre igaz

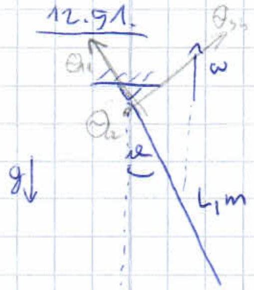
mert:

$$\Theta_{x'x'} = \sum m_k y_k'^2 \qquad \Theta_{y'y'} = \sum_k m_k x_k'^2 \qquad \Theta_{z'z'} = \sum_k m_k (x_k'^2 + y_k'^2) = \Theta_{x'x'} + \Theta_{y'y'}$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos 45° + y' \sin 45° \\ y' \cos 45° - x' \sin 45° \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Theta_{x'x'} + \frac{1}{2}\Theta_{y'y'} & -\frac{1}{2}\Theta_{x'x'} + \frac{1}{2}\Theta_{y'y'} & 0 \\ -\frac{1}{2}\Theta_{x'x'} + \frac{1}{2}\Theta_{y'y'} & \frac{1}{2}\Theta_{x'x'} + \frac{1}{2}\Theta_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{z'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m+M)a^2 & 2(m-M)a^2 & 0 \\ 2(m-M)a^2 & 2(m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(m+M)a^2 \end{pmatrix}$$




a) Mekkora az állandósult $\alpha$ ?

$\underline{J} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$

Érdemes olyan tengelyrendszert választani, hogy $\Theta$ szép legyen

A főtengelyrendszer pl. tengelyen is főtengelyek

Legyen az origó a csuklónál!

$\Theta_{33} = \frac{1}{3} m L^2$

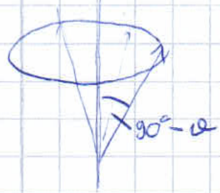
$\Theta_{11} = \frac{1}{2} m R^2 \ll \Theta_{33}$

$\Theta_{22} = \Theta_{33}$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \cos\alpha \\ 0 \\ \omega \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\underline{J} = (\Theta_{11}\omega_1, \Theta_{22}\omega_2, \Theta_{33}\omega_3) = \left(0, 0, \frac{1}{3} m L^2 \omega \sin\alpha\right)$$

A $\underline{J}$ vektor egy kúpon fog végig söpörni




A vonalat változik $\Rightarrow$ forgatónyomaték hat

$\dot{\underline{J}} = \underline{\tau}$

$|\dot{\underline{J}}| = J \sin\alpha\, \omega$

$|\underline{\tau}| = mg \frac{L}{2} \sin\alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{3} m L^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = mg \frac{L}{2} \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L\omega^2}$

Diszkusszió:

Ha $\omega \geq \omega_{krit} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ akkor $\cos\alpha = \frac{3g}{2L\omega^2}$

Ha $\omega < \omega_{krit}$ akkor $\alpha = 0$.

b) Mekkora a csuklóban ébredő erő? $(\omega > \omega_k)$


mozgásegyenlet a TKP-ra:

$F_1 - mg = 0$

$F_2 = m\frac{L}{2} \sin\alpha\, \omega^2$

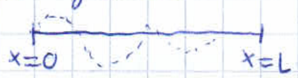
$$F_{cs} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(mg)^2 + m^2\frac{L^2}{4}\omega^4(1-\cos^2\alpha)} = \frac{mg}{2}\sqrt{\frac{7}{4} + \frac{L^2\omega^4}{g^2}}$$

## 1D-s hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$$

általános megoldás: $\Psi_{ált} = F_+(x-ct) + F_-(x+ct)$ D'Alembert-féle mo.

rögzített vég esete:




~~$\Psi(x,t) =$~~

Úgy képzeljük, mintha a húr egy periodikus fgv. 1 periódus hosszú darabkája lenne.

Ez soron fejtjük: $\quad * \quad \Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

beírva az egyenletbe, azt kapjuk, hogy $a_n$-ek egymástól függetlenül teljesül rájuk:

$$\ddot{a}_n(t) = -c^2 a_n(t)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow a_n(t) = a_n(0)\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{a}_n(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

ahol $\omega_n = c\frac{n\pi}{L}$

Tehát $\boxed{\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(0)\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{a}_n(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

$a_n(0)$ és $\dot{a}_n(0)$-t a KF.-ből tudjuk

$\Psi(x,0)$-ból és $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0)$-ból kell kiszámolni

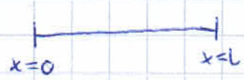
$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \xrightarrow{*} a_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \Psi(x,0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \longrightarrow \dot{a}_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial \Psi(x,0)}{\partial t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$*$: szorozzuk $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$-szel, integráljuk $x$ szerint és kihasználjuk $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{nm}$

### Feladat:

**15.24.**




KF: $\Psi(x,0) = 0$

$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = v_0 \sin\left(N\frac{\pi}{L}x\right)$

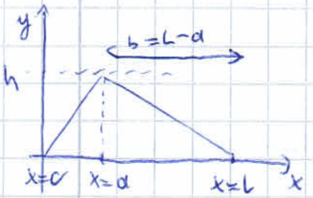
Adjuk meg $\Psi(x,t)$-t!

$$a_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0$$

$$\dot{a}_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L v_0 \sin\left(N\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2v_0}{L}\delta_{Nn}$$

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dot{a}_n(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = \frac{v_0}{\omega_N}\sin(\omega_N t)\sin\left(N\frac{\pi}{L}x\right)$$

## 15.30.




kitérítjük a pontban, elengedjük. $\Psi(x,t)=?$

$$\text{KF:}\quad \Psi(x,0)=\begin{cases}\frac{h}{a}x & \text{ha } 0\le x\le a\\ \frac{h}{b}(L-x) & \text{ha } a\le x\le L\end{cases}\qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,0)=0 \qquad (2)$$

A Fourier-módszer jó, csak minden tag megmarad, ezért nem szemléletes.

D'Alembert-féle megoldás:

$$\Psi(x,t)=F_+(x-ct)+F_-(x+ct)$$

viszont itt nem végtelen a húr. De képzeljük el, mintha végtelen lenne
periodikusan

Az kell, hogy kielégüljenek a feltételek

$(2)$: $\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,0)=-cF_+'(x)+cF_-'(x)\overset{!}{=}0 \Rightarrow F_+(x)=F_-(x)$ ismeretlen $F$

~~x=c-ben~~ $x=0$-ban: $\Psi(0,t)=F(-ct)+F(ct)=0 \Rightarrow F(x)=-F(x)$

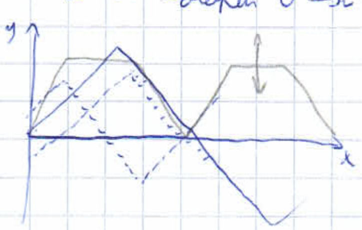
$\Psi$ $x=L$-ben: $\Psi(L,t)=F(L-ct)+F(L+ct)=0$

$$-F(ct-L)+F(ct+L)=0 \Rightarrow F(x)=F(x+2L)$$

Tehát $F$ antiszimmetrikus, és $2L$ szerint periodikus.


$F(x)=\frac{1}{2}\Psi(x,0) \Rightarrow$ A grafikon két részre a felére felhasad, és az egyik erre, a másik arra fog továbbhaladni

Spec eset: ha $a=\frac{L}{2}$
akkor középen 0 lesz a meredekség, miközben nő



# ELMMECHA

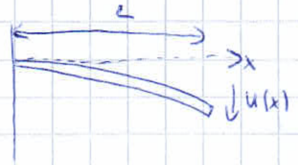
12. gyak. (12. 13.)

<u>ZH:</u>

Virtuális munka
Húr (meg lesz adva az egyenlet)
Adiabatikus inv
Hamilton ~~(meg lesz)~~
Csatolt rezgés (vödrök)
Disszipatív rendszer
Szórás
merev testek (ez tuti)

## I. Vékony rudak hajlítása

Az egyenlet általános:
$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho g A + F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$




Mi az egyes tagok jelentése:

1. ma ; 2. nehézségi erő ; 3. feszítőerő ; 4: hajlítási erő

EI: hajlítási merevség.

<u>Példa:</u>

A rúd behajlása a saját súlya alatt. Adjuk meg a rúd alakját és a vég helyzetét

egyenlet: $0 = \rho g A - EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{\rho g A}{24 EI}x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

Az $x^4$ együtthatója a differenciálegyenletből jön, $\alpha, \beta, \gamma$ és $\delta$ a HF-ből

$u(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0$

$EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x=L) = 0$ (mert a végén nincs g-erő és nincs forgatónyomaték)

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho g A}{2EI}L^2 + 6\alpha L + 2\beta = 0$$

A 4. feltételt kétféleképpen is meg lehet kapni

A) A hajlítási forgatónyomatékot fel lehet írni a befogási pontban:

$EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x=0) = mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\beta = \frac{mgL}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{mg}{6EI}$

$$\beta = \frac{mgL}{4EI}$$

Tehát $u(x) = \frac{mg}{24EIL}x^4 - \frac{mg}{6EI}x^3 + \frac{mgL}{4EI}x^2 = \underline{\frac{mg}{24EIL}\left(x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2\right)}$

végpont helye: $u(L) = \frac{mgL^3}{8EI}$

b)

Előadás anyagában 17.19. egyenlet:

effektív feszültség: $\sigma_{eff} = -EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + F\frac{\partial y}{\partial x}$

itt ez nincs

A negyedik HF: $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x=L) = 0 \Rightarrow \frac{\rho g A}{2EI}L^2 + 6\alpha L + 2\beta = 0$

ebből $\beta$ kijönnek azok, amik az előbb.

## II. Súrlódásos áramlások

Navier-Stokes-egyenlet: $\rho\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{f} - \nabla p + (\eta + \eta')\nabla(\nabla\underline{v}) + \eta\Delta\underline{v}$

hidrodinamikai derivált

Összenyomhatatlan folyadékra $\nabla\underline{v} = 0$.

Ahol mivel $\frac{d}{dt}\underline{v} = \frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\nabla)\underline{v}$ szerint a mozgásegyenlet:

$$\rho\frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v}\nabla)\underline{v} = \underline{f} - \nabla p + \eta\Delta\underline{v}$$

1. Példa


Adjuk meg a ~~sebes~~ két lap közötti folyadék áramlását az idő függvényében

Mivel stacionárius $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

$$\rho(\underline{v}\nabla)\underline{v} = -\nabla p + \eta\Delta\underline{v}$$

Mivel eltolási szimmetria van, az áramlás lamináris. $v(y)$ kizárólag x irányú.

ez alapján $(\underline{v}\nabla)\underline{v} = \underline{0}$

$$\nabla p = \eta\Delta\underline{v} \Rightarrow \nabla p = \eta\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \leftarrow 0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(x)$$

Az első egyenlet baloldala csak x-től, a jobb oldala csak y-tól függ, tehát értékük egy A állandó

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A \Rightarrow p(x) = Ax + p_0$$

$$\eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A \Rightarrow v(y) = \frac{A}{2\eta}y^2 + By + C$$

PF-ekből: $v(y=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$v(y=h) = v_0 \rightarrow v_0 = \frac{A}{2\eta}h^2 + Bh$

Mivel a nyomást én értelmezem úgy, a 4. HF ettől függ

Spec esetek:

$A = 0$ (nincs nyomáskülönbség)

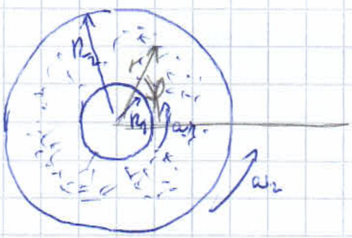
$$v(y) = \frac{v_0}{h} y$$

$A \neq 0 \Rightarrow$ parabolikus sebességprofil

Ha $A \neq 0$, de $v_0 = 0$

$$\text{így } v(y) = \frac{A}{2\eta}(y^2 - yh)$$

2. Példa



Írjuk le a sebességteret!

TFH $z$ irányban nincs nyomásgradiens, így elég az irányban vizsgálni

Legyenek a $\underline{e}_\varphi$ és $\underline{e}_r$ az egységvektorok

$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{e}_r v_r + \underline{e}_\varphi v_\varphi$. Elforgatási szimmetria miatt $v_r = 0$

és $p(\underline{r}) = p(r)$

Navier-Stokes egyenlet az általánosított tagokkal: $\rho(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v}$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

amiatt $(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{0}$

ezt nézd át újra!!!!!

$$\Delta \underline{v} = \frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r} + \frac{dv}{dr}\right) = \frac{\frac{dv}{dr} r - v}{r^2} + \frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} + \frac{d^2 v}{dr^2}$$

Ezzel N-S-egy.: $\frac{\partial p}{\partial r}\underline{e}_r = \eta\, \underline{e}_\varphi \left[\frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} + \frac{d^2 v}{dr^2}\right]$

Mivel $\underline{e}_r \perp \underline{e}_\varphi \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p(r) = p_0$

$$\frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} + \frac{d^2 v}{dr^2} = 0 \Rightarrow$$

Hatványalakú: $v(r) = c r^k$; $\quad k r^{k-2} - r^{k-2} + k(k-1) r^{k-2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (k-1)(k+1) = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

általános megoldás: $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$

PF: $\left.\begin{array}{l} v(R_1) = \omega_1 R_1 \\ v(R_2) = \omega_2 R_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \qquad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$

Spec esetek:

$\omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad v(r) = \omega r$

$\omega_2 = 0$ és $R_2 \gg R_1 \qquad v(r) \; \frac{\omega_1 R_1^2}{r}$

III. <u>2D-s potenciális áramlás</u>

Ha örvénymentes az áramlás $\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}$

forrásmentes $\mathrm{div}\,\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{A} = \nabla \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

A két egyenletből: $\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}\right\}$ $f(z) = \phi + i\psi$ ← áramlási függvény

sebességpotenciál

Előbbiekből: $(\nabla\phi)(\nabla\psi) = 0 \Rightarrow \phi = \text{konst}$ és $\psi = \text{konst}$ vonalak merőlegesek

<u>Példa</u>

$f(z) = \frac{A}{z}$ Milyen alakú a sebességtér?

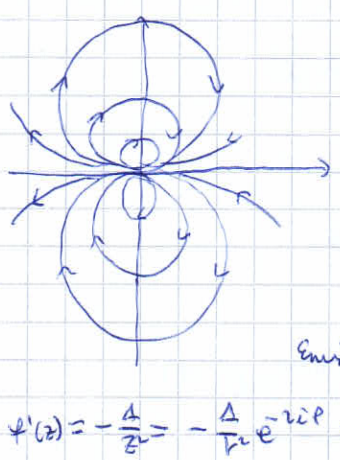
$$\frac{A}{z} = \frac{A}{re^{i\varphi}} = \frac{A}{r}e^{-i\varphi} = \frac{A}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \phi(x,y) = \frac{A}{r}\cos\varphi$$

$$\mathrm{Im}(f(z)) = \psi(x,y) = -\frac{A}{r}\sin\varphi$$

Áramvonalak: $-\frac{A}{r}\sin\varphi = -AC$

átírva Descartesba: $\frac{y}{x^2+y^2} = C \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$



dipól-áramlás

sebességtér $v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$

$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$

Emiatt $f'(z) = v_x - i v_y$

$$f'(z) = -\frac{A}{z^2} = -\frac{A}{r^2}e^{-2i\varphi} = -\frac{A}{r^2}(\cos(2\varphi) - i\sin(2\varphi)) \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= -\frac{A}{r^2}\cos(2\varphi) \\ v_y &= -\frac{A}{r^2}\sin(2\varphi) \end{aligned}$$