ELEKTROMÁG

1. előadás (02.14.)

Jackson-féle könyv az jó elvileg

Mit tudunk a Newton törvényekről?

erőfüggetlenség elve: ha egy test egyszerre több testtel hat kölcsön, erők hatásai egymástól függetlenül összeadódnak

Ez azért fontos, mert osztják miért 3-astest-erő, csak ritkásabb

Hány fajta erő van:

1) Gravitációs

$$\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{R}|^2} \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} \qquad \text{ahol } \underline{R} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

2) Elektromágneses

Erről lesz szó

3) Gyenge k.h. $\quad p^+ \to n^0 + e^+ + \nu \qquad \nu \ \nu \ \nu \ \nu \ \nu$

$$n^0 \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$$

4) Erős k.h.

elemi részecskék esetén

A 2-4.-re van közös elmélet: Standard modell

Fejezetek: Elektrosztatika; magnetosztatika; elektromágnesség; kvantum

Elektrosztatika

Az elektromos kölcsönhatás töltések között:

Kvalitatív: a) azonos töltések taszítanak

b) különböző töltések vonzanak

c) távolsággal csökken

Kvantitatív: a) az erő a töltésekkel egyenesen arányos

b) az iránya a töltéseket összekötő mentén van

c) a nagysága a távolsággal $\frac{1}{r^2}$-tel csökken (Charles Augustin de Coulomb 1780)

$$\underline{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\underline{R}|^3} \underline{R} \qquad \underline{R} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

Több töltés esete: szuperpozíció

$$\underline{F}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_j - \underline{r}_i|^3} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) = q_i \left(\sum_{j \neq i} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\underline{r}_j - \underline{r}_i|^3} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \right)$$

$$\frac{\underline{F}}{q} = \underline{E}(\underline{r}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\underline{r}_j - \underline{r}|^3} (\underline{r}_j - \underline{r})$$ Ez már a teret jellemzi, nem a kölcsönhatást

Ezt nehéz általánosítani, úgy általánosabban megfogni leírni (térelmélet)

<u>Gauss-törvény</u>

A térerősség $\frac{1}{r^2}$-tel ~~gyors~~ csökken

a felület r^2-tel nő

Legyen egy adott felületre a fluxus $\int \underline{E}\, d\underline{f}$

Nézzük a fluxust egy zárt felületre: $\oint \underline{E}\, d\underline{f}$

Ha r gömb: $\oint \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Mi van, ha nem gömb? akkor gömbszeletekkel közelítjük

$$\boxed{\oint_F \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{q[F]}{\varepsilon_0}}$$

Mivel $\Delta E_{energia} = \int \underline{F}\, d\underline{r}$ és ha $\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0$ akkor konzervatív

Jelenleg $\boxed{\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0}$ zárt örvény nincsen, tehát konzervatív

Ez a két egyenlet ~~egyszerre~~ ekvivalens a Coulomb-törvénnyel

Adott töltéseloszlás esetén adott $\underline{E}(\underline{r})$.

Erővonal:
1) Minden töltésből a töltéssel arányos számú erővonal lép ki
2) folytonos (+-ból ered, --ba végződik
3) nem képez hurkot
4) iránya megegyezik $\underline{E}$ irányával
5) sűrűsége arányos $|\underline{E}|$-vel

Erővonal rajzok

ELEKTROMÁG

2. előadás (02.16)

ZH-k: IV.04. (kedd)

V.04. (csüt) előadásban

Gauss-törvény: $\oint_F \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{q_F}{\varepsilon_0}$

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0$$

Ezt diff alakban akarjuk írni. Töltéssűrűség: $\rho(\underline{r}) = \frac{q}{V}$ $(V \to 0)$

~~Töltésmegmaradás~~ A Emiatt: $q[F] = \int_F \rho(\underline{r})\, dV = \int_F \rho(\underline{r})\, d^3r$

A ponttöltés sűrűsége: $\rho(\underline{r}) = q\,\delta(\underline{r}) \left(= q\,\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right)$

A Gauss-tétel miatt $\oint \underline{E}\, d\underline{f} = \int \operatorname{div} \underline{E}\, d^3r$ ami $= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\underline{r})\, d^3r^3$

Mivel az akármely térfogatra igaz $\operatorname{div} \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

A Stokes-tétel miatt $\oint \underline{E}\, d\underline{r} = \int \operatorname{rot} \underline{E}\, d\underline{f}$ ami $= 0$

Mivel minden felületre igaz $\operatorname{rot} \underline{E} = 0$

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial r_i} = \partial_i E_i$$

$$(\operatorname{rot} \underline{E})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial r_j}$$

Gauss bizonyítása

$x \in (-a, a)$

$y \in [-b, b]$

$z \in [-c, c]$

$$\int \operatorname{div} \underline{E}\, d^3r \overset{1\text{.tag}}{=} \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \left[E_x(a,y,z) - E_x(-a,y,z)\right] dy\, dz =$$

$$= \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} E_x(a,y,z)\, dy\, dz - \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} E_x(-a,y,z)\, dy\, dz \leftarrow$$ a két szembenlévő lap integrálja

A többi lapot is hozzávéve, az egy felületi bőrintegrál: $\oint \underline{E}\, d\underline{f}$

Stokes bizonyítása

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \frac{\partial E_y}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{-b}^{b} \left[E_y(a, y, c) - E_y(-a, y, c)\right] dy \leftarrow$$ téglalap szemközti oldalain vonalintegrálja

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \frac{\partial E_x}{\partial y}\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} \left[E_x(x, -b, c) - E_x(x, b, c)\right] dx \leftarrow$$ szintén

tehát $\int \frac{\partial E_y}{\partial x}\,d^2r - \int \frac{\partial E_x}{\partial y}\,d^2r = \oint E$

Tehát $\operatorname{div} \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ és $\operatorname{rot} \underline{E} = 0$

ezekből egyértelműen kiszámolható $\underline{E}(\underline{r})$

Potenciál, feszültség

A potenciál már ismert mechanikából

gravitáció esetén: $\underline{F}_g(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\underline{r}$ és $U_g(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$

nehézségi erőnél: $F_n = -mg\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ és $U_n(\underline{r}) = mgz$

rugónál: $\underline{F}_r(\underline{r}) = -Dx$ és $\frac{1}{2}Dx^2$

Itt az volt, hogy $\underline{F} = \begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{\partial U_x}{\partial x}\\ \frac{\partial U_y}{\partial y}\\ \frac{\partial U_z}{\partial z}\end{pmatrix} = -\operatorname{grad} U$

Emiatt $-\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{E}(\underline{r})\,dr = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \operatorname{grad}(U(\underline{r}))\,dr = U_{p0}(\underline{r})$

Mivel $\oint \underline{E}\,d\underline{r} = 0$ mert az elektrosztatikus tér konzervatív

$$-\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{E}\,d\underline{r} = U(\underline{r}) - U(\underline{r}_0)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} U(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\,U(\underline{r})$$

Ebből $[U] = \frac{N}{C}m = \frac{J}{C} = \frac{Ws}{As} = \frac{W}{A} = \frac{VA}{A} = V$

Maxw. $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \frac{\partial E_i}{\partial r_i} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_i} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Poisson-egyenlet

Jelölés: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta} - \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta}}{\Delta} = \frac{U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i}{\Delta^2}$$

mennyivel tér el a szomszédok közepétől a középső

Tétel: az ekvipotenciális felület merőleges a felületre

Biz: Legyen r felületen $\underline{r}$ és $\underline{r}+d\underline{r}$ ekvipot

$U(\underline{r} + d\underline{r}) - U(\underline{r}) = 0$

Ebből: $U(\underline{r}) + \operatorname{grad} U \, d\underline{r} - U(\underline{r}) = 0$

$\operatorname{grad} U \, d\underline{r} = 0$

$\underline{E} \, d\underline{r} = 0$ $\qquad \square$

ELMÁG

3. előadás (02.21.)

Speciális töltéselrendezések

1) ponttöltés

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$$

Ha $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ akkor igaz-e az $E = -\text{grad}\, V$ egyenlőség?

igen.

Ellenőrzés $\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\underline{\nabla}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underline{\nabla}\left(\frac{\underline{r}}{r^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3r^3 - 3r^2\,\underline{r}\,\frac{\underline{r}}{r}}{r^6} = 0 \qquad \text{ha } r \neq 0$$

Ugyanúgy $V(\infty) = 0$

2) ∞ hosszú rúd, σ-val feltöltve

$$\sigma = \frac{q}{\ell}$$

$$E \cdot 2r\pi h = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \underline{E} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^2} \text{ ahol } \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

Itt V nem lehet $V(\infty) = 0$ feltétel $\quad V(r_0) = 0$

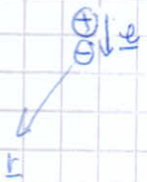
3) síktöltés $\qquad \sigma = \frac{q}{A}$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \leftarrow \text{homogén erőtér}$$

$$V(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$$

Dipól:



$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\underline{r}+\underline{e}|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\underline{r}|} \overset{\text{ha } |\underline{e}| << |\underline{r}|}{\approx}$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)\underline{e} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)\underline{e} =$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\underline{e}\,\underline{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}\,\underline{r}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\mathrm{grad}\, V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}r^3 - 3r^2\frac{\underline{r}}{r}(\underline{p}\underline{r})}{r^6} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2\underline{p} - 3(\underline{p}\underline{r})\underline{r}}{r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

van két főhelyzet

$$\underline{E}_1 = -\frac{4p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{\underline{r}}{r} \to -\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

$$|\underline{E}_2| = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^3} \quad (x \text{ irányú})$$

Dipólra ható forgató nyomaték:

$$\underline{M} = \sum_{1,2}\underline{r}\times\underline{F} = q(\underline{r}_1\times\underline{E} - \underline{r}_2\times\underline{E}) = q(r_1 - r_2)\times\underline{E} = \underline{p}\times\underline{E}$$

Az erő:

$$\underline{F} = q\underline{E}(\underline{r}+\underline{e}) - q\underline{E}(\underline{r}) = q\left(\cancel{\underline{E}(\underline{r})} + \mathrm{grad}(\underline{E})\cdot\underline{e} - \cancel{\underline{E}(\underline{r})}\right)$$

$$F_i = \frac{\partial E_i}{\partial r_j}p_j$$

Kvadrupól

$$\underline{\underline{Q}} = q(\underline{e}_1 \circ \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \circ \underline{e}_1)$$

$$V \sim \frac{1}{r^3}$$

$$E \sim \frac{1}{r^4}$$

Egy tetszőleges töltéselrendeződést lehet közelíteni egy monopóllal plusz dipól plusz kvadrupól ...

multipól-sorfejtés

$\rho(\underline{r})$

$$U(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3 r'$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}}$$

Szigetelők és vezetők

A vezetőkben hosszútávon tudnak elmozdulni a töltések

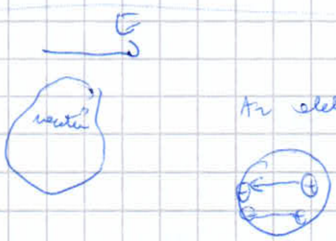
A szigetelőkben csak atomi szinten

(1. fajta vezetők) fémek: ⊕ ionok állnak
⊖ e^--k mozognak

- szupravezetők (fém + kerámia): Cooper-párok
⊕ ⊖

Eddigi mérések szerint 0 Ω az ellenállás

- elektrolit: ⊖ és ⊕ ionok
- szuperionos vezető: pl.: Ag^+I^- I^-: áll
Ag: mozog



Az elektronok a tér hatására elmozdulnak

Ekkor addig áramlik, amíg a belül kialakult tér kiegyensúlyozza az E-t.

A vezetők belül $\underline{E} = 0$ ⇒ ekvipotenciális ⇒

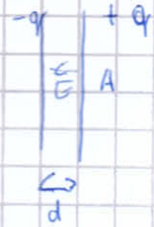
⇒ a külső $\underline{E} \perp$ a felületre

Kapacitás – kondenzátor (sűrítő)

$$C(U_2-U_1) = q$$

$$[C] = \frac{C}{V} = F = \frac{As}{V}$$

síkkondenzátor kapacitása:



Mivel a két ezen $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$-t hoz létre, így a lapok között a térerősség:

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ kívül a tér 0.

Így a feszültség $U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{q d}{A \varepsilon_0} \Rightarrow q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} U \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

ELMÁG

4. előadás (02.23.)

Gömbkondenzátor :

$R_2 > R_1$

Kívül és belül nincs E, de a kettő között van

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

A kettő közötti a feszültség : $$U = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_{gömb} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$ (Ez akkor nagy, ha közel vannak

a) ha $R_1 \approx R_2$

$$C_{gömb} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$ (síkkondenzátornak tekinthető)

b) $R_2 \to \infty$

$$C_{gömb} - 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

Ez alapján $C_{föld} = 0{,}707\, mF$

Kondenzátor energiája

$$q(t) = C\,U(t)$$

$$E = \int U(t)\, dq(t) = \int_0^q \frac{1}{C} q'\, dq' = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$$

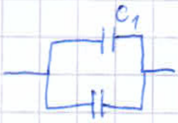
$$E_{sík} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 A d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V$$

Elektrosztatikus tér energiája : $$E = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(\underline{r})\, d^3 r$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(\underline{r}) = W$$ energiasűrűség

Kondenzátorok kapcsolása

a) párhuzamos



$q_1 = C_1 U$

$q_2 = C_2 U$

$q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\,U \Rightarrow C_{eredő} = C_1 + C_2$

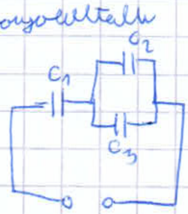
b) soros

Ha az egyikre q töltés van, a másikon $-q$, mert a középsőn nincs töltés

$U_1 = \frac{1}{C_1} q \qquad U_2 = \frac{1}{C_2}(+q)$

$U_{össz} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) q \Rightarrow C_{eredő} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

c) bonyolultabb

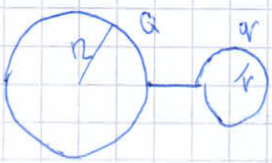


Kirchhoff törvények:

- A csomópontba átfolyó töltés 0
- Zárt hurokban a feszültség 0.

$\Rightarrow$ megfelelő alkalmazással az eredő C, mint a R-nél

Csúcshatás: A kisebb görbületi sugarú részen nagyobb az E

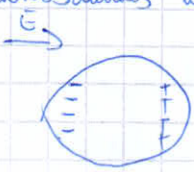


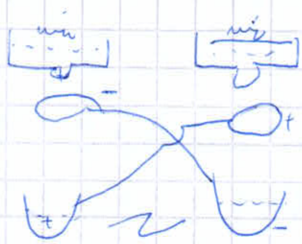
$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{q}{r}$

$\Rightarrow \frac{Q}{R^2} R = \frac{q}{r^2} r \Rightarrow E_R R = E_r r$

$\Rightarrow \underline{E \sim \frac{1}{r}}$

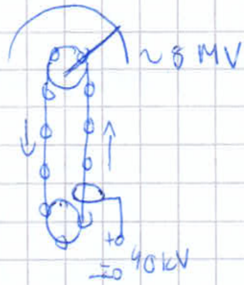
Elektrosztatikus megosztás





Thomson-féle gép

Pelletron



Szigetelők

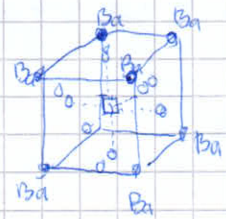
Nem mozdulnak el a töltések magukon. (kis, egy atomnyit)

Elektret

az egyik fele pozitív a másik negatív.

A valóságban ilyen nincs, mert hamar eltűnik

Pl: $BaTiO_3$



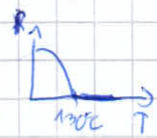
Ba a csúcsokon

O a lapközépen

Ti középen

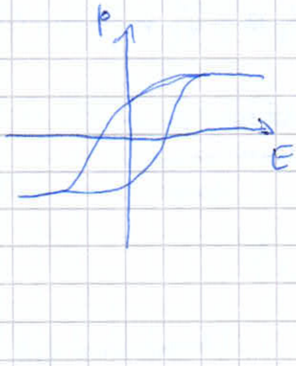
$\underline{P} = \frac{\Sigma \underline{p}_i}{V}$ polarizáció

$BaTiO_3 \rightleftharpoons Ba^{2+} + (TiO_3)^{2-}$



130°C alatt a titán elmozdul:

Elektretté alakul, ami spontán megpolarizálható a külső térrel



hiszterézis

Eredő polarizációval nem rendelkező anyagok

a) apoláris molekulákból álló anyagok

Ar, CH_4, CO_2

Külső térrel polarizálható a molekulák, így dipólmomentum lesz

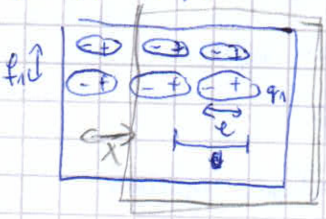
b) poláris molekulák

H_2O, NH_3, C_2H_6O

$E=0$ esetén össze-vissza állnak, mert annyira nem erős a tér

$E\neq 0$ esetén a molekulák beállnak irányba

Legyen egy anyag, amiben minden molekulának van dipólmomentuma:



$p = \ell q_1$ $\quad \underline{P} = \frac{\Sigma p}{V}$

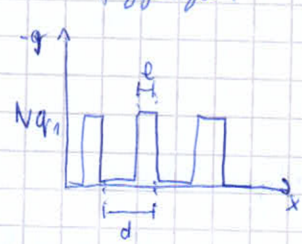
N dipól esetén a teljes felület $f = N f_1$

Behelyezünk egy felületet és ezt x irányba tologatjuk. A beszórt töltés x függvénye:

q és ℓ atomi nagyságú, de mi távolról nézünk rá:

$q_{átl} = \frac{N q_1 \ell}{d} = \frac{N_f p}{d f} = \frac{Np}{V} f$

dipól sűrűség $\underline{P}$



A polarizációs töltés: $q_P = \int \underline{P}\, d\underline{f}$

De így a Gauss: $\oint \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_{valódi} + q_{polarizált}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{valódi} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint \underline{P}\, d\underline{f}$

$$\oint(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P})\, d\underline{f} = q_{valódi}$$

$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$: Elektromos eltolás vektor (Displacement field)

$[E] = \frac{V}{m}$ $\quad [D] = [P] = \frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2}$

Összefüggés $\underline{P}$-re:

a) Elektrét: közelítés $\underline{P}$ = állandó, mert telítés van.

b) $\underline{P}$-t az $\underline{E}$ hozza létre és lineáris $\underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E}$ $\quad \chi$: elektromos szuszceptibilitás

$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \chi \varepsilon_0 \underline{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \underline{E}$ $\quad [\chi] = 1$

$\varepsilon_r = 1 + \chi$: relatív dielektromos együttható $\quad [\varepsilon_r] = 1$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$: dielektromos együttható, elektromos permittivitás $\quad [\varepsilon] = \frac{As}{Vm}$

ELMÁG

9. előadás (02. 29.)

$$\oint \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_{valódi} + q_{polarizációs}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{valódi} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint \underline{P}\, d\underline{f}$$

$$\underbrace{\oint (\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P})\, d\underline{f}}_{\underline{D}} = q_{valódi} \qquad \oint \underline{D}\, dA = q_{valódi}$$

$$\text{div}\, \underline{D} = \rho_{valódi}$$

$$\underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E} \qquad \underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \chi \varepsilon_0 \underline{E} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r} \underline{E}$$

ε : dielektromos együttható ≡ elektromos permittivitás

ε_r : relatív 〃

ε_0 : vákuum 〃

$[\varepsilon] = \frac{As}{Vm}$

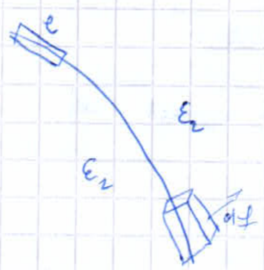
$[\varepsilon_r] = 1$

Tehát mik vannak adottak:

$$\oint \underline{D}\, d\underline{f} = q$$

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0 \qquad \text{és} \quad \underline{D} = \underline{D}(\underline{E})$$

$$\underline{D}(\underline{r}) = \varepsilon(\underline{r})\, \underline{E}(\underline{r})$$



Határ esetén mit mondhatunk?

$$\underline{D}_2\, d\underline{f}_2 + \underline{D}_1\, d\underline{f}_1 = 0$$

Mivel $d\underline{f}_2 = -d\underline{f}_1 \Rightarrow \underline{D_{1n} = D_{2n}}$

$\underline{E}_1 \underline{e}_1 + \underline{E}_2 \underline{e}_2 = 0 \Rightarrow \underline{E_{1t} = E_{2t}}$

Ha D és E irányban függ, ε lehet mátrix: $\underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad \text{ahol } \underline{\underline{\varepsilon}}^T = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$\varepsilon_r = 1$ vákuum

$\varepsilon_r \approx 1,00059$ levegő

$\varepsilon_r = 2,5$ olaj

$\varepsilon_r = 10$ üveg

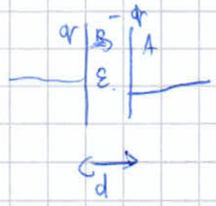
$\varepsilon_r = 81$ víz

$\varepsilon_r = 1800$ $LiNbO_3$ (ez valójában elektret, tehát az összefüggés nem érvényes)

Ha az egyik oldal fém, akkor az $\underline{E}$ merőleges a felületre, a $\underline{D}$ van feltétel

$D_n = \sigma$ ahol σ a felületi töltéssűrűség

Kondenzátor kapacitása:



$\underline{D} \cdot \underline{A} = q$

$DA = q$ $\qquad D = \varepsilon E$ és $Ed = U$

ebből $= q = \frac{V}{d} \varepsilon A \Rightarrow C = \frac{\varepsilon A}{d}$

Energia $= \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V$

$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2\varepsilon} D^2 = \frac{1}{2} \underline{E}\,\underline{D}$

A töltés megmarad

Áram: I folyás $I = \frac{\text{töltés}}{\text{idő}}$ $\qquad [I] = A = \frac{C}{s}$

meg kell mondani a felületet, amin áramlott át: $I(f)$

Ha egy zárt felületen áram folyik, akkor a térrészben megváltozik a töltés:

$$I(\text{zárt felület}) + \frac{dq(\text{zárt felület belseje})}{dt} = 0$$ kontinuitási egyenlet (*)

$q = \int \rho \, dV$

Legyen $\underline{j}$ az áramsűrűség vektor $\quad I = \int \underline{j}\, d\underline{f}$

(*): $$\oint \underline{j}\, d\underline{f} + \frac{d}{dt}\int \rho\, d^3r = 0 \Rightarrow \int \operatorname{div} \underline{j}\, d^3r + \int \frac{d}{dt}\rho\, d^3r = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Mert áram mozgatja a töltéseket, tehát kell a mozgásegyenlet

1) $m \frac{d^2 r}{dt^2} = q\underline{E}$ $\qquad$ szabad töltés

2) $m \frac{d^2 r}{dt^2} = q\underline{E} - S\underline{v}$ $\qquad$ súrlódás

Túlcsillapított, ha $q\underline{E} = S\underline{v}$ $\qquad$ (fémek)

olyankor áram nagy, amíg $\underline{E}$ van egyben $S = \frac{m}{\tau}$ $\qquad \tau$: relaxációs idő

tehát kapjuk $\underline{j} = \rho \underline{v} = \rho \frac{q\underline{E}}{\frac{m}{\tau}} = \frac{n q^2 \tau}{m} \underline{E}$ Drude-féle egyenlet

n: térfogategységi ~~db~~ szám

$$\boxed{\underline{j} = \sigma \underline{E}}$$

$\sigma = \frac{n q^2 \tau}{m}$ vezetőképesség

$\frac{1}{\sigma} = \rho$: fajlagos ellenállás

→ Differenciális Ohm-törvény (Az integrális: $I = \frac{U}{R}$)

$[R] = \frac{V}{A} = \Omega$ ohm

$\left[\frac{1}{R}\right] = S$ siemens

Vezető fajták

1) fémek (+) atomtörzsek és ⊖ ionok Drude modell

2) szupravezetők Cooper-párok

3) Elektrolit

4) szilárd elektrolit AgI

5) Félvezetők

$\underline{v}_+ = \mu_+ \underline{E}$

$\underline{v}_- = -\mu_- \underline{E}$

$\underline{j} = e(n_+ \underline{v}_+ - n_- \underline{v}_-) = e(n \mu_+ + n_- \mu_-) \underline{E}$

6) szigetelők magas T-n

7) gázok

8) vákuum

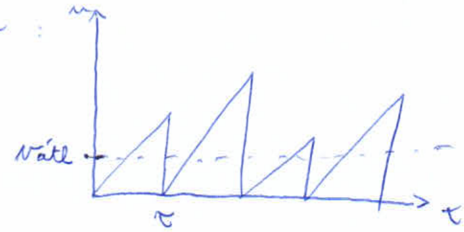
Vezetés fajtái:

1) Fémek ⊕ ionok ⊖ e^--ok

Drude modell: A töltéseket az anyagban lévő tér gyorsítja: $m\dot{v} = eE$

$$\Rightarrow v = \frac{e}{m}Et$$

Mivel viszont néha ütköznek, a v lecsökken:



$\bar{v} = \frac{e}{2m}E\tau$ Ha átlagosan τ időnként ütköznek

$j = \rho\bar{v} = ne\cdot\frac{e}{2m}E\tau = \frac{ne^2\tau}{2m}E$ Ez Ohm-törvény szerű, de a valóságban sok mindenben nem stimmel

Valóságban: $j = \frac{ne^2\tau^*}{m^*}E$ ahol τ^* m^* mást jelent

2) Szupravezetők

Az elektronok szabadon elmozdulnak ⇒ kicsi ellenállás (Cooper-párok)

3) Elektrolit Oldatban lévő ionok mozognak

Ha elektródákat rakunk be, és áramot folyatunk át, akkor töltéscsere van.

ε: standard potenciál ⇓

válnak ki

4) Szilárd elektrolit pl.: AgI

a kristályban lyukak vannak, és az ugráló ionok vezetnek

5) Félvezetők: elektronok és lyukak mozognak $v_+ = \mu_+ E$ $v_- = \mu_- E$

$j = e(n_+ v_+ - n_- v_-) = e(n_+\mu_+ + n_-\mu_-)E$

Általában kicsi áram, de a szerkezetet módosítva sok mindenre használható

6) Szigetelők itt is lehetnek töltéshordozók, de azokból kevés, vagy aktiválni kell őket (eV nagyságrend)

7) Gázok nagy feszültségnél kisülés (ezt nem Tam tartotta)

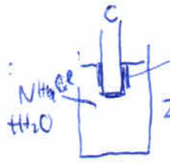
8) Vákuum nagy feszültségnél az e^--k átmehetnek a vákuumon (SEM, TEM)

Áramforrások

1) mechanikai energiából állít elő teret (Thomson-gép; van-der Graaff generátor)

2) kémiai energia   elektrolitba merülő elektródák között feszültség van

szárazelem:



Az elektronok negatívvá teszik a Zn-t

$Zn \to Zn^{2+} + 2e^-$

$Zn^{2+} + 2Cl^- \to ZnCl$

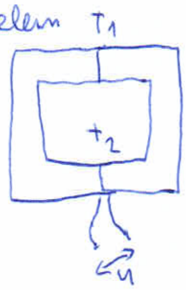
$2NH_4^+ + 2e^- \to 2NH_3 + H_2$

Elektromotoros erő:

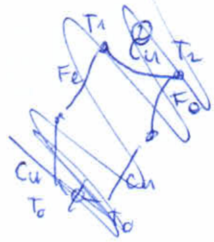
$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (A standard potenciálok különbsége)

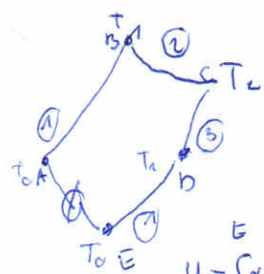
hasonló elven működik az akkumulátor és az üzemanyag cella

3) Termoelem



$U = \alpha (T_1 - T_2)$ Seebeck együttható





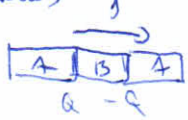
$E = \alpha_i \operatorname{grad} T$

$U = \int_A^E \alpha_i \operatorname{grad} T \, d\underline{r} =$

$= \alpha_1 (T_1 - T_0) + \alpha_2 (T_2 - T_1) + \alpha_3 (T_1 - T_2) + \alpha_1 (T_0 - T_1) =$

$= \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_3)}_{\alpha_{23}\ \text{Seebeck eh}} (T_2 - T_1)$

Peltier-effektus



$Q = \Pi_{AB}\, q = \Pi_{AB}\, I t$

ELMAG

6. előadás (04.02.)

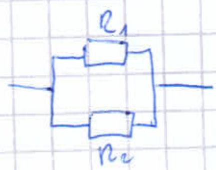
Kirchhoff-egyenletek

$\sum_i I_i = 0$ csomóponttörvény (ez a kontinuitásból)

$\sum U_i = \sum E_i$ minden hurokra (ez a Maxwell-egyenletből)

Ezekből levezethető az ellenállás-törvények

$R_e = R_1 + R_2$



$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

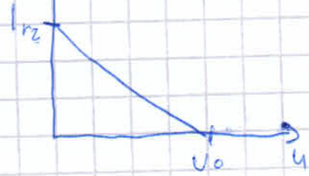
Tevenin
~~Theorem~~ és Norton-tétel

Lineáris hálózatból kilép 2 drót.

Ha 0 az áram: üresjárási feszültség (ideális voltmérő)

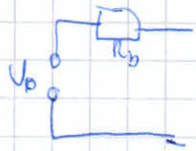
Ha 0 a feszültség: rövidzárási áram (ideális ampermérő)

A kettő között lineáris kapcsolat van és $\frac{U_0}{I_{röv}} = R_B$



T-tétel:

Ez helyettesíthető egy belső ellenállású feszforrással



N-tétel:

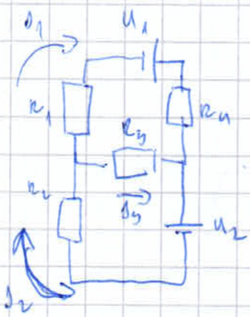
Ez helyettesíthető egy áh. belső ellenállású áramforrással

$E_{\text{energia}} = qU$

$P_{\text{telj}} = \frac{qU}{t} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}$

Akkor optimális a teljesítmény, ha a feszültség a teljes feszültség fele, tehát az

$R_{\text{külső}} = R_{\text{Belső}}$



$$\left.\begin{aligned} I_1 + I_3 - I_2 &= 0 \\ U_1 &= I_1R_4 - I_3R_3 + I_1R_1 \\ -U_2 &= I_2R_2 + I_3R_3 \end{aligned}\right\}$$ megoldható, de hosszú (ha bonyolult a rendszer)

Hurok rendszer:

$U_1 = I_1R_4 + R_3(I_1 - I_2) + I_1R_1$

$-U_2 = I_2R_2 + R_3(I_2 - I_1)$

Teljesítmény-sűrűség

$P = UI = (\vec{E}\vec{d})(\vec{j}\vec{A}) = \vec{j}\vec{E}\,Ad$

Teljesítmény mérése: $\vec{j}\,\vec{E}$

ELMÁG

7. előadás (03.07.)

Elektrolízis

Faraday-törvények

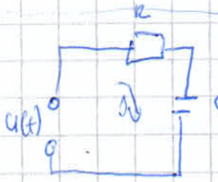
1) anyagmennyiség: $m = k I t$

2) grammegyenértéksúly

egy gram egyenértéknyi anyag kiválasztásához

$$F = 96500 \frac{C}{mol}$$ kell

(mellesleg ez pont: $1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol} = 9{,}6 \cdot 10^4 \frac{C}{mol}$)



$$R I + \frac{1}{C}\int_0^t I(t')dt' = U(t)$$

Ha $U(t)$:

$t > 0$ esetén

$$R I(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(t')dt' = U_0$$

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

TFH: $I(t) = I_0 e^{-\lambda t}$

$$-R\lambda I_0 \cancel{e^{-\lambda t}} + \frac{1}{C} I_0 \cancel{e^{-\lambda t}} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{RC}$$

megoldás: $I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$

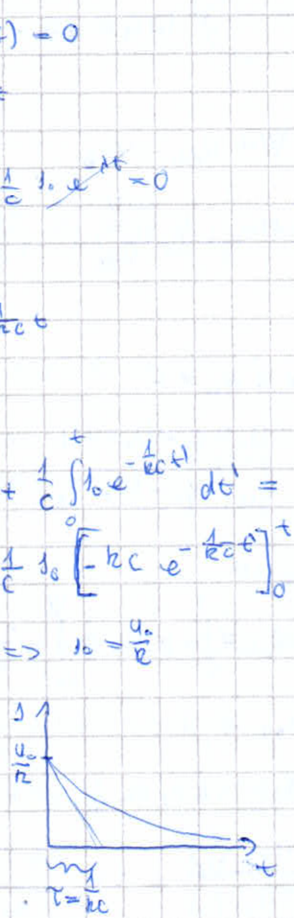
integrálegyenlet megoldása:

$$R I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{1}{C}\int_0^t I_0 e^{-\frac{1}{RC}t'} dt' =$$

$$= R I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{1}{C} I_0 \left[-RC\, e^{-\frac{1}{RC}t'}\right]_0^t = R I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{I_0}{C}\left(-RC\, e^{-\frac{1}{RC}t} + RC\right) =$$

$$= I_0 R \stackrel{!}{=} U_0 \Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{R}$$

Tehát: $I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$



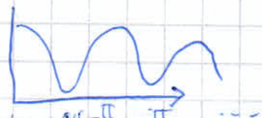
$$\Rightarrow U_C = U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

Váltakozó áram

$U(t) = U_0 \cos\omega t$ ⇒ $U_0 = 230\sqrt{2}\,V$

$\omega = 2\pi\cdot 50\,\frac{1}{s} = 2\pi\nu$ $\nu = 50\,Hz = 50\,ops$

$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R}\cos\omega t$ $P(t) = \frac{U_0^2}{R}\cos^2\omega t$



$\overline{P} = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R} = \frac{U_{eff}^2}{R}$

Kondi teljesítménye: $U(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(t')\,dt' + U_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I_0\cos\omega t'\,dt' + U_0 =$

$= \frac{I_0}{C}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_{t_0}^{t} + U_0 = \frac{I_0}{C}\frac{\sin\omega t}{\omega} \underbrace{- \frac{I_0}{C}\frac{\sin\omega t_0}{\omega} + U_0}_{U_1} =$

$P(t) = \frac{I_0^2}{\omega C}\sin\omega t\cos\omega t + U_1\cos\omega t$

$\overline{P} = 0$ ideális rendszerben a teljesítmény nem disszipálódik

---

Mágnesség — mágnes / áram mágneses tere

Mágneses erő (töltésre hat): 1) merőleges a sebességre
2) arányos a sebességgel
3) arányos a töltéssel

$\underline{F} = q(\underline{v}\times\underline{B})$

$F_x = q(v_y B_z - v_z B_y)$
$F_y = q(v_z B_x - v_x B_z)$
$F_z = q(v_x B_y - v_y B_x)$
$\Bigg\}$ $F_i = \varepsilon_{ijk} v_j B_k$

$\underline{B}$: mágneses indukció vektor

$\underline{B}$: nem rendelhető „valós fizikai" jelentése   pszeudo vektor (koordinátarendszer változásnál előjelet vált)
axiál vektor: forgásirányt jelöl

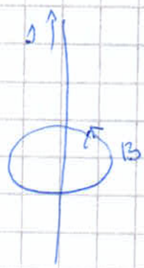
$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Minden pszeudovektor leírható antiszimmetrikus mátrixszal
Ezért nem pszeudo-mátrix, hanem igazi

Tisztán csak a pedagógia miatt foglalkozunk vektorokkal

$$[B] = \frac{N}{C\frac{m}{s}} = \frac{\frac{J}{m}s}{Cm} = \frac{VAs^2}{Cm^2} = \frac{Vs}{m^2} = T$$

Az áram I ad B-t



$$|B| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \quad ; \quad \mu_0 \hat{=} 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Mivel nincs monopólus: $\oint \underline{B}\, d\underline{A} = 0$

továbbá: $\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 I$ Ampère-törvény

Mágnesesség alapegyenletei

Általában diff alakban: $\underline{\nabla}\,\underline{B} = 0$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

ELMÁG

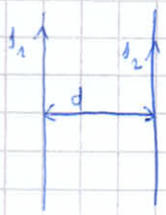
(8. előadás 03. 09.)

$\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\nabla}\, \underline{B} = 0$

$\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad \underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$

$\underline{F} = q(\underline{v} \times \underline{B})$

$\underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$ végtelen vezető esetén



Mekkora erő hat I_2-re

$\underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} \Rightarrow F_2 = Nqv B = \underbrace{\underbrace{\frac{Nq}{fl}}_{\rho_2} v}_{j_2} f\, B l = I_2 B l =$

$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} I_2 l =$

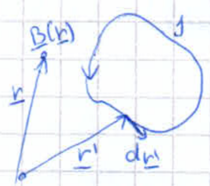
Ha I_1 és I_2 egyirányú ~~vonzás~~ vonzás van, ha ellentétes, taszítás

Az alapegyenletek alapján $\underline{\nabla}\, \underline{j} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \times \underline{B}) = 0$, de a kontinuitás alapján

$$\underline{\nabla}\, \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Az alapegyenlet csak akkor igaz, ha nincs töltésfelhalmozódás

Biot - Savart - törvény



Az áramhurokra

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\underline{r}' \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

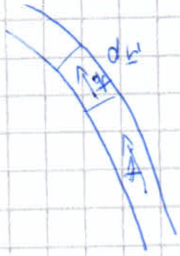
Levezetés: mivel $\mathrm{div}\, \underline{B} = 0$

$\mathrm{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ miatt ha $\underline{B} = \mathrm{rot}\, \underline{A}$ akkor az első egyenlet teljesül

DE $\underline{A}$ nem egyértelmű, mert $\underline{A}' = \underline{A} + \mathrm{grad}\, \chi$ szintén jó, ezért kössük ki, hogy $\mathrm{div}\, \underline{A} = 0$

A másikból: $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \underline{A}) = \mathrm{grad}\, \underbrace{\mathrm{div}\, \underline{A}}_{0} - \Delta \underline{A} = -\Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j} \Rightarrow \boxed{\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}}$ Ez a vágásos Poisson egyenlet

ennek megoldása: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3\underline{r}'$



$$d^3\underline{r}' = q\, d\underline{r}'$$

$$\underline{j}(\underline{r}')\, d^3 r' = \underline{j}(\underline{r}')\, q\, d\underline{r}' = I\, d\underline{r}'$$

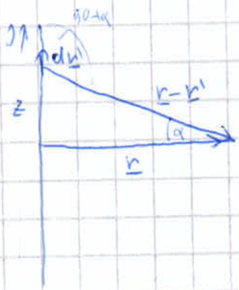
$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Mivel $\text{rot}\, \lambda \underline{v} = \lambda\, \text{rot}\, \underline{v} + \text{grad}\, \lambda \times \underline{v}$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\, \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \left(\underline{0} + \text{grad} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \times d\underline{r}' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \left(- \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \times d\underline{r}' \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Egyenes vezető tere B-S alapján



$$|d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')| = dz \cdot |\underline{r}-\underline{r}'| \sin(90+\alpha) = dz \cdot |\underline{r}-\underline{r}'| \cdot \frac{d}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = d \cdot dz$$

$$\underline{B}(d) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z=-\infty}^{\infty} \frac{d\, dz}{(z^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \frac{d}{\cos^2\alpha}\, d\alpha}{(d^2 \text{tg}^2\alpha + d^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \cdot (1-(-1)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

vektorpotenciál: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d\underline{r}'$

Be kéne látni, hogy teljesül rá, hogy $\text{div}\, \underline{A} = 0$ (Coulomb feltétel)

Mivel $\text{div}\, \lambda \underline{v} = \lambda\, \text{div}\, \underline{v} + \underline{v}\, \text{grad}\, \lambda$

$$\text{div}(\underline{A}(\underline{r})) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{d\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\text{div}\, \underline{j}}_{0} + \text{grad} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \cdot \underline{j}(\underline{r}')\, d\underline{r}' \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{grad}' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \cdot \underline{j}(\underline{r}')\, d^3\underline{r}' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\text{div}' \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3\underline{r}' \right) \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\text{div}' \underline{j}}_{0}\, d^3\underline{r}' \right) =$$

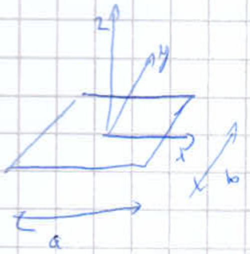
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\oint \frac{\underline{j}(\underline{r}')\, d\underline{f}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{A határon vesze ramat, ahol } \underline{j}=0} + 0 = 0$$

ELMÁG

9. előadás (07.11.)

Kis hurok:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underbrace{\oint \frac{d\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\underline{a}(\underline{r})} \qquad x' \ll r \qquad \frac{b}{2} \ll r$$



$$a_x(\underline{r}) = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+z^2}} + \int_{+\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+z^2}} = *$$

Mivel $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{c}|} = \frac{1}{|\underline{r}|} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{|\underline{r}|}\right)(-\underline{c}) = \frac{1}{|\underline{r}|} + \frac{\underline{r}\,\underline{c}}{|\underline{r}|^3}$

$$* = -\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{y}{r^3}\frac{b\,dx}{2} - \int_{-\frac{a}{2}} \frac{y b}{r^3 2}\,dx' = -\frac{y a b}{r^3}$$

Ez alapján $a_y(\underline{r}) = \frac{x a b}{r^3}$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ab}{r^3}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} \qquad \text{ahol } \underline{m} = \begin{pmatrix}0\\0\\m\end{pmatrix}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 + \frac{\mu_0 m}{4\pi} x \cdot \frac{3z}{r^5}$$

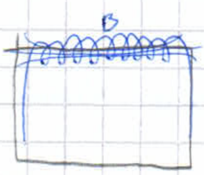
$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3yz}{r^5} + 0$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{r^3 - x\,3r^2\frac{x}{r}}{r^6} + \frac{r^3 - y\,3r^2\frac{y}{r}}{r^6}\right) = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{2r^2-3(x^2+y^2)}{r^5}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3z^2-r^2}{r^5}$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\underline{m}\,\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{m}}{r^5} \qquad \text{u.a.m. elektromos dipól}$$

Szolenoid tere



$$\oint \underline{B}\,d\underline{r} = \mu_0 I$$

$$B\,l = \mu_0 \cdot N \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

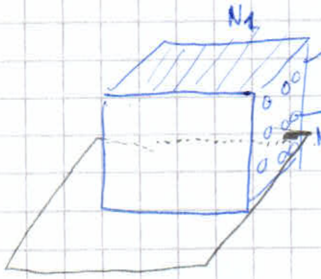
Mágneses anyagok:

erősen mágneses anyagok (ferromágnesek)

gyengén mágneses anyagok (minden más)

paramágneses — diamágneses

$$\frac{\underline{m}}{V} = \underline{M}(\underline{r})$$



N_1 — F: Teljes felület

f: elemi áramkör felülete

N_2: áramkör/felület

I: áramkör erőssége

$$\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 I$$

A hurok: $\oint \underline{B}\, d\underline{r}$. Ha a köráramon kívül megy át, akkor $\oint \underline{B}\, d\underline{r} = 0$ $\left(p = \frac{F - N_2 f}{F}\right)$

Ha a köráramon belül: $\mu_0 N_1 I$ $\left(p = \frac{N_2 f}{F}\right)$

átlagban: $\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 f I}{F} = \mu_0 \underbrace{\frac{N_1 N_2}{F e}}_{\text{kiürítősűrűség}} \overbrace{f I}^{m_{elemi}} e = \mu_0 \underline{M} e$

Tehát: $\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 I_{valódi} + \mu_0 \oint \underline{M}\, d\underline{r}$

$$\oint \underbrace{\left(\frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}\right)}_{\underline{H}} d\underline{r} = \mu_0 I_{valódi}$$

$\underline{H}$: mágneses térerősség

módosított maxwell: $\oint \underline{H}\, d\underline{r} = \mu_0 I_v \quad \rightarrow \quad \nabla \times \underline{H} = \mu_0 \underline{j}_v$

$\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \underline{B} = 0$

Ez csak akkor lehet igaz, ha létezik $\underline{B}(\underline{H})$. Gyenge mágneseknél ez lineáris összefüggéssel közelíthető

Gyenge mágnesesre: $\underline{M}(\underline{H}) = \chi \underline{H}$ (χ lehet tenzor is)

$$\underline{B} = \mu_0(\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0(\underline{H} + \chi \underline{H}) = \mu_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\mu_r} \underline{H} = \mu \underline{H}$$

μ_0: vákuum mágneses permeabilitás

μ_r: relatív permeabilitás

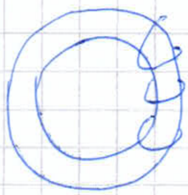
μ: anyag mágneses permeabilitása

Ha $\chi > 0$ akkor $\mu > \mu_0$: paramágneses anyag

Ha $\chi < 0$ akkor $\mu < \mu_0$: diamágneses anyag

Ferromágneses anyagoknál $\mu_r \gg 1$

Toroid



$\mu \gg \mu_0$

$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I e$

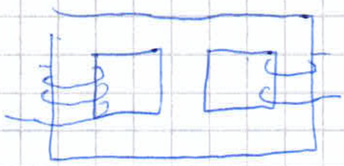
$H \, 2r\pi = I \cdot N$

$H = \frac{IN}{2r\pi}$ $B = \mu \frac{IN}{2r\pi}$

ELMA'G

10. előadás (03.16.)

Kirchhoff-törvények itt



$\int \underline{B}\, d\underline{f} = \Phi$: fluxus

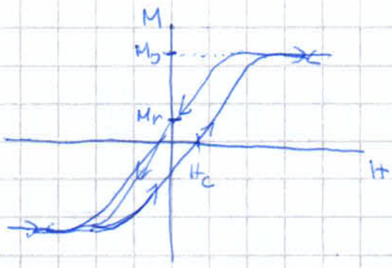
A fluxus megmarad, mert $\nabla B = 0$

$\int \underline{H}\, d\underline{r} = I$

Ennél többet nem tanulunk.

Ferromágneses anyagok

hiszterézis



M_s : szaturációs mágnesezettség (telített)

M_r : remanens mágnesezettség (maradék)

H_c : koercitív erő

$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \mu_0 \underline{M}$ Mivel $M \gg H$, ezért $\underline{B} \approx \mu_0 \underline{M}$

így a hiszterézis-görbe B – H grafikonon is u.a.

A $H = M = 0$-t úgy érhetjük el, ha az áram amplitúdóját egyre csökkentjük

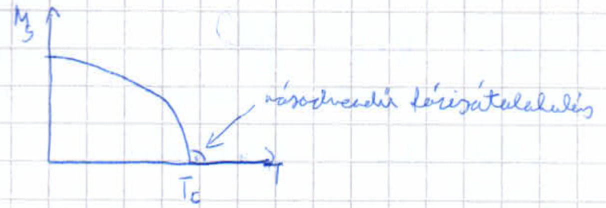
Váltakozó áramnál átmágneseződés hő a bezárt területtel arányos

Lágymágneses: ahol a hiszterézis görbe keskeny (közel ideális)

Keménymágneses: széles: Az $M_r \approx M_s$ és a H_c kicsi

ezek jók mágneses adattárolásra

A mágnesség hőmérséklet hatására eltüntethető:



Alapesetben a mágneses domének szeretnek zárt kört alkotni

Indukció

mozgási indukció

mozgó drótban áram feszültség indukálódik

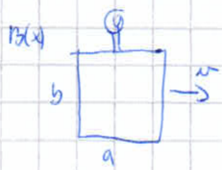
miért?: $\underline{F} = q\,\underline{v} \times \underline{B}$

próbatöltésre: $W = F\ell = q v B \ell$

$$U = v B \ell$$

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\underline{B} \times \underline{\ell}\right) = -B v \ell$$

másik eset: ha most halad az inhomogén térben



$$W = q v B(x+a) \cdot b - q v B(x) \cdot b =$$

$$= q v b a \frac{B(x+a) - B(x)}{a} = q v A \frac{B(x + v\Delta t) - B(x)}{v \Delta t} =$$

$$= q A \frac{dB}{dt}$$

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B \cdot A\right) = -A \frac{dB}{dt}$$

nyugalmi indukció: A keret áll és a $\underline{B}$ változik időben

A relativitás elve miatt ez mindegy

Az indukció miatt módosul a Maxwell:

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\int \underline{B}\, d\underline{f} \qquad \text{ebből:} \qquad \underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Eddigi Maxwellek:

$$\oint \underline{D}\, d\underline{f} = q \quad \rightarrow \quad \underline{\nabla}\,\underline{D} = \rho$$

$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I \quad \rightarrow \quad \underline{\nabla}\times\underline{H} = \underline{j}$$

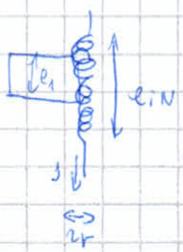
$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\int \underline{B}\, d\underline{f} \quad \rightarrow \quad \underline{\nabla}\times E = \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\nabla}\,\underline{B} = 0$$

vákuumban: $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$ $\quad \underline{B} = \mu_0 \underline{H}$

lineáris anyagban: $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$ $\quad \underline{B} = \mu \underline{H}$

Egy szolenoidban I áram létrehoz egy $\underline{H}$ teret, ami $\underline{B}$-t, ami Φ-t, ami U_{ind}-t.



$$H l_1 = I \cdot N \frac{l_1}{l} \Rightarrow H = \frac{IN}{l}$$

Emiatt, vákuumban: $B = \mu_0 \frac{IN}{l}$

Hogy számítjuk ki $\oint \underline{B}\, d\underline{f}$-t? Milyen felületen kell integrálni?

$$\Phi = B \cdot r^2\pi N = \mu_0 r^2\pi \frac{N^2}{l} I$$

$$U_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\mu_0 \frac{r^2\pi N^2}{l}}_{L} \frac{dI}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

L: önindukciós e.h.

$$[L] = \frac{Vs}{A} = H$$

vasmaggal

$$H l = I N \Rightarrow H = \frac{IN}{l}$$

$$B = \mu \frac{IN}{l}$$

A képletek u. azok, csak μ_0 helyett μ-vel, és l mást jelent

$$L = \mu \frac{r^2\pi N^2}{l} \qquad A_L = \frac{L}{N^2}$$

Ez csak a vasmagra vonatkozik

Mágneses tér energiája: $U = L\frac{dI}{dt}$ ahol $L \sim \mu \frac{q}{l} N^2$ $\quad$ q: keresztmetszet

Az energia a ~~belső~~ teljesítmény, amit az áram előállításakor gyűjtöttünk:

$$E_{energia} = \int_0^t U I\, dt' = L\int_0^t I \frac{dI}{dt'} dt' = L\int_0^I I\, dI = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\mu \frac{q}{l} N^2 I^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{NI}{l}\right)^2 l q = \frac{1}{2}\mu H^2 V$$

ahol $\quad$ anyag

$$w = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2}(\underline{B}\,\underline{H}) = \frac{1}{2\mu_0} B^2 - \frac{1}{2}\underline{B}\,\underline{M}$$

Föld mágneses tere, dinamó effektus

A pozitív töltések kihordulva a szélére és a forgás miatt mágneses tér alakul ki.

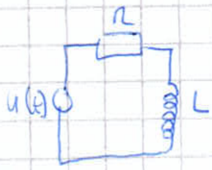
Emiatt deleül a pozitív töltésen kifelé ható erő hat, a negatívon befelé

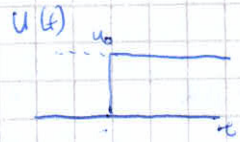
⇒ öngerjesztő folyamat

(Ez nem magyarázza, hogy egy idő után miért töltődik és fordul meg.)

ELMÁG

11. előadás (03.21.)





$$RI + L\frac{dI}{dt} = U(t)$$

$$RI + L\frac{dI}{dt} = U_0 \quad \text{ahol } I(t=0)=0$$

homogén eset: $RI + L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$

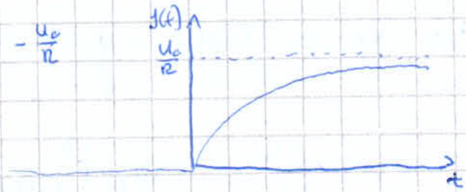
$$I_H(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

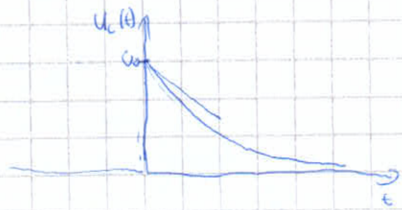
inhomogén eset: partikuláris megoldás: $I_P = \frac{U_0}{R}$

$$I_{ált}(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}$$

Ha $I(t=0)=0$ akkor $I_0 = -\frac{U_0}{R}$

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$





Kölcsönös indukció, transzformátor

$$U_1 = L_1\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 = L_{21}\frac{dI_1}{dt} + L_{22}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

L_{11}: 1. tekercs önindukciós eh.

L_{22}: 2. tekercs önindukciós e.h.

L_{12}: kölcsönös indukciós eh.

L_{21}: mindig egyező L_{12}-vel

Mindig szimmetrikus mátrix

Ha az 1. tekercs teljes fluxusa átmegy a 2. tekercsen, akkor $L_{12}=\sqrt{L_{11}L_{22}}$ és a második tekercs teljes fluxusa is átmegy az 1. tekercsen (pl.: közös vasmag)

Ha a 2. tekercs V-mérője nagy, a 2. tekercsen nem folyik áram

① primer $U_1(t)$; $I_1(t)$

② szekunder $U_2(t)$; $I_2(t)=0$

így:
$$\left.\begin{aligned} U_1 &= L_{11}\frac{dI_1}{dt} \\ U_2 &= L_{21}\frac{dI_1}{dt}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{L_{21}}{L_{11}} = \text{konst}$$

Transzformátor

jelölés 

$$H\ell = N_1 I_1 + N_2 I_2 \rightarrow B = \mu\frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\ell}$$

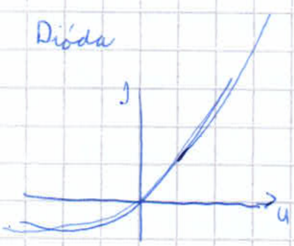
$$U_1 = \frac{d}{dt}(N_1 B \varphi) \qquad U_2 = \frac{d}{dt}(N_2 B\varphi)$$

$$U_1 = \mu\frac{N_1^2}{\ell}\varphi\frac{dI_1}{dt} + \mu\frac{N_1N_2}{\ell}\varphi\frac{dI_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

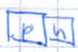
$$U_2 = \mu\frac{N_1N_2}{\ell}\varphi\frac{dI_1}{dt} + \mu\frac{N_2^2}{\ell}\varphi\frac{dI_2}{dt}$$

Dióda



Tűs dióda

PN-réteg



Ha az egyik Si-t kicseréljük P-re, akkor +1 e^--ja van, ami vezet

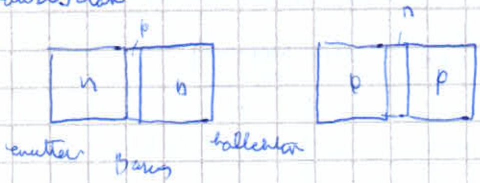
⇒ n típusú

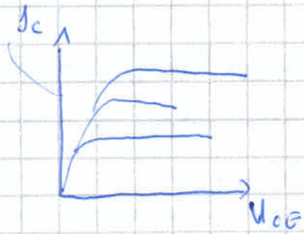
Ha Al-t rakunk be, akkor a lyuk lesz benne

⇒ p típusú

rekombináció: $e^- + e^+ = 0$

transistor





$$\beta = \frac{I_c}{I_B} \approx 1000$$

ELMÁG

12. előadás (05.23.)

$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Háromfázis: RST 0 $\perp$

$$U_R = U_0 \sin(\omega t)$$

$$U_S = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$U_T = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) = U_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

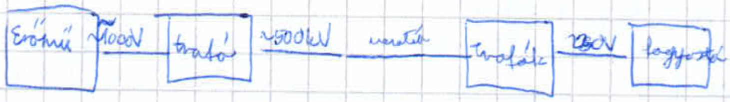
Ellenőrzés: $U_R + U_S + U_T = U_0\left(\sin(\omega t) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$$= U_0\left(\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t)\right) = 0$$

$$U_S - U_T = U_0\left(\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$U_0\left(-\frac{1}{2}\sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t)\right) = \sqrt{3}\cos(\omega t)\, U_0$$

$(230V \cdot \sqrt{3} = 397V \approx 400V$



Erőművek

Hőerőmű — szén, gőzturbina $\eta \approx 25\%$

földgáz (olaj) — gőzturbina (u.a. mint előbb) $\eta \approx 25\%$

gázturbina (itt is nagyon adja le a felesleget, de bármikor be lehet indítani)

kombinált ciklusú erőmű $\eta \approx 70\%$

Atomerőmű: ugyanúgy vizet melegít

Vízerőmű — sok víz, kevés esés (Duna, Tisza, Nílus)

kevés víz, sok esés (Alpok)

Alternatív energia forrásai

Napenergia: 1) Napelem: áramtermelés fotoeffektussal

2) Napkollektor: vízfűtés

3) [illegible] izé

Szélerőmű

Geotermikus erőmű

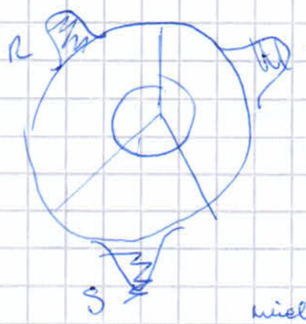
Árapály erőmű; Hullám erőmű; Sókoncentrációs

ELMÁG

13. előadás (09. 28.)

Motorok

3-fázisú motor (aszinkron)

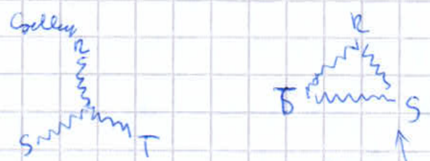


A belsejében a B tér forog, így a rövidre zárt kalickában áram indukálódik => nagy áram

=> forgás

ideális esetben pont követi a mágneses teret

mivel nem ideális, ezért 3000 helyett csak 2950 $\frac{\text{ford}}{\text{perc}}$ van

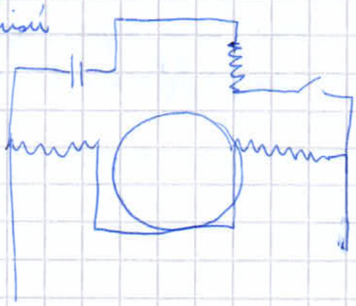


itt nagyobb a nyomaték

Egyfázisú motor

Belül a tér vagy egyik, vagy másik állásban van, így a forgórész nem tudja merre kell indulni

a) Segédfázisú

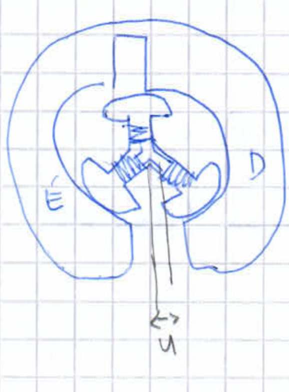


A kondenzátor késlelteti az áramot, és emiatt elindul, a kapcsoló kikapcsolódik

b) Tajásmozós

Van ott egy rézgyűrű ami késlelteti, de egy részben a hatásban

Egyenáramú motorok

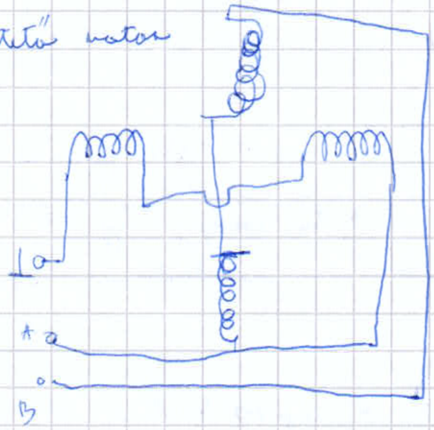


A kommutátor biztosítja a forgás irányát

Kefe: hattó lehet érzett ma csak fém

Van, hogy a mágneses tér is elektromossal van

Léptető motor

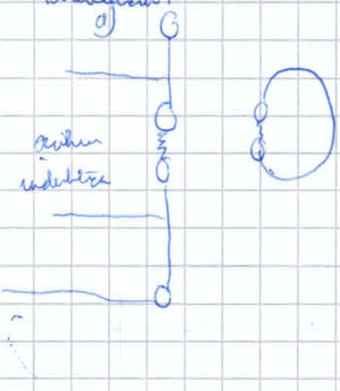


Minden lépésben tudjuk milyen irányban áll

Teljes Maxwell-egyenlet.

Problémák:

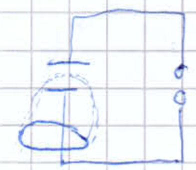
a)



itt is indukál

b)

$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I$



itt valami nem stimmel

+ tudjuk azt $I = \oint \underline{j}\, d\underline{f}$

Ha I minden zárt felületre 0, akkor div $\underline{j} = 0$

Viszont tudtuk alapján, hogy div $\underline{j} \neq 0$

div $\underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ← kontinuitás

$$\oint \underline{D}\, d\underline{f} = q$$

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\int \underline{B}\, d\underline{f}$$

$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I + \frac{d}{dt}\int \underline{D}\, d\underline{f}$$ ← eltolási áram

$$\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0$$

differenciális alakban

$$\text{div}\, \underline{D} = \rho$$

$$\text{rot}\, \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\, \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\text{div}\, \underline{B} = 0$$

$\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

$\underline{B} = \mu \underline{H}$

$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

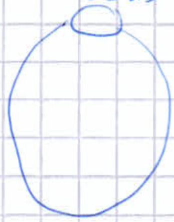
Lineáris inhomogén diffegyenletek

Ezek egyértelműen meghatározzák $\underline{j}$ és ρ függvényeket.

Ha $\underline{j}$ és ρ 0, akkor is van nem triviális megoldás => elektromágneses hullám

Nézzük a 3. egyenletet

$\oint \underline{H}\, d\underline{s} = 0$ ha a zsák száját beszűkítjük



$$I + \frac{d}{dt}\oint \underline{D}\, d\underline{f} = 0$$

$$I + \frac{dq}{dt} = 0$$ Ez a kontinuitási egyenlet integrális alakja

Ha a differenciálisból indulunk ki:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{H} = \mathrm{div}\,\underline{j} + \mathrm{div}\,\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}$$

$$0 = \mathrm{div}\,\underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$ => A Maxwell egyenlet megoldásakor megadott ρ és $\underline{j}$ ki kell elégítse a kontinuitást

Ezek, a div-es egyenletek felfoghatók úgy, mint a többi kezdőfeltételei

ELMÁG

14. előadás (03. 20.)

$$\operatorname{div} \underline{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \underline{H} = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0$$

Hullámegoldás

~~Legyen~~ $\rho = 0 \quad j = 0 \quad \underline{B} = \mu \underline{H} \quad \underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

Egyenletek

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \underline{E} = 0 \\ &\operatorname{rot} \underline{E} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ &\operatorname{rot} \underline{H} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\ &\operatorname{div} \underline{H} = 0 \end{aligned}\right\}$$

TFH: $\underline{E} = \underline{E}_0 \cos(\omega t - kz)$ ahol $E_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = E_{0z} \sin(\omega t - kz) k = $$
$$= 0$$

a többi is 0, így (1) ✓

$$\operatorname{rot} \underline{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_x - \partial_z E_y \\ \partial_z E_y - \partial_y E_z \\ \partial_x E_z - \partial_x E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_0}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\underline{H}$-nak csak y komponense van

TFH: $\underline{H} = \underline{H}_0 \cos(\omega t - kz)$ ahol $\underline{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ H_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \mu_0 H_0 \omega \sin(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \underline{E_0 k = \mu H_0 \omega} \quad (2) ✓$$

$$\operatorname{rot} \underline{H} = \begin{pmatrix} \partial_y H_x - \partial_z H_y \\ \partial_z H_y - \partial_x H_z \\ \partial_x H_z - \partial_y H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_0}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \varepsilon E_0 \sin(\omega t - kz) \omega$$

$$\Rightarrow \underline{H_0 k = \varepsilon E_0 \omega} \quad (3)$$

$\operatorname{div} \underline{H} = 0$ hasonlóan (1)-hez (4) ✓

A két feltétel egyenlőség helyettesítve:

$$E_0 H_0 k^2 = E_0 H_0 \varepsilon \mu \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} k^2 \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} k \rightarrow \omega = c k$$ diszperziós reláció

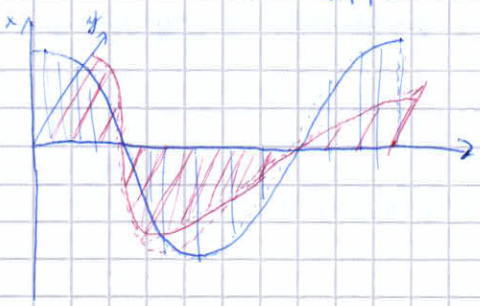
Minden frekvencián ugyanazzal a sebességgel terjed (nincs diszperzió), mert az $\omega(k)$ van lineáris.

vákuumban: $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{As}{Vm}$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} \frac{s^2}{m^2} \Rightarrow c_v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

$$c_{közeg} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} c_v = \frac{c_v}{n}$$



Hullámegyenlet

A feltételek ugyanazok:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\, \underline{E} = 0 \\ \mathrm{rot}\, \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\, \underline{H} = \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{array}\right\}$$

$$\underline{\mathrm{div}\, \underline{H} = 0}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \underline{E} = -\mu\, \mathrm{rot} \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{grad}\, \underbrace{\mathrm{div}\, \underline{E}}_{0} - \Delta \underline{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Delta \underline{E} = \mu \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial \underline{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial \underline{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0$$ vektorhullám

Kiegészítés síkhullám:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{Ha } \phi(z,t) = f(z-ct)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \text{Behelyettesítve: } f'' - \frac{1}{c^2}\cdot(-c)f'' = 0 \ \checkmark$$

Mivel ez egy diszperzió nélküli hullám, ezért minden alakban, az időben a térben tovaterjed (bármely irányban)

Általános megoldás: $\phi(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)$

Így az előző megoldásnak nem feltétlen harmonikusnak kell:

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} f(z-ct) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, f(z-ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mivel az elektromágneses hullám transzverzális, nincs gömbhullám, de egy gömbszimmetrikus tud leadni hullámot

3D megoldás:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{TFH } \phi(x,y,z) = \phi(\underline{r},t) = A\,\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{|r|}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = i\omega A\,\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{|r|} = i\omega\phi$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\phi$$

$$\operatorname{grad}\phi = A\operatorname{grad}\frac{1}{r}e^{i(\omega t-kr)} - ik\frac{A}{r}e^{i(\omega t-kr)}\operatorname{grad} r$$

$$\Delta\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = A\underbrace{\left(\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)}_{0}e^{i(\omega t-kr)} + 2Aik\underbrace{\operatorname{grad}\frac{1}{r}}_{-\frac{\underline{r}}{r^3}}e^{i(\omega t-kr)}\underbrace{\operatorname{grad} r}_{\frac{\underline{r}}{r}} - ik\frac{A}{r}e^{i(\omega t-kr)}\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad} r}_{\frac{2}{r}}$$

$=$

EZT MAJD SZÁMOLD KI,

MERT TICHY ELRONTOTTA

$$\Delta\phi = -k^2\phi$$

Ilyen nincs az elektromágnesességben, skalár, de más van tele

Az amplitúdó $\frac{1}{r}$-rel csökken, a energia $\frac{1}{r^2}$-tel.

Elektromos dipólsugárzás

dipól antenna

oldalra sugároz, felfelé nem   pl.: antennák Kossuth, Széchenyi-hegy

Mágneses dipólsugárzás

ugyanez, de dipól helyett tekercs   pl.: mikrohullám, telefon

$$\Delta\phi = A\,\Delta\left(\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right) = A\,\partial_k\partial_k\left(\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right) = -A\,\partial_k\left[\frac{x_k}{r^2}\,e^{i(\omega t-kr)}\left(\frac{1}{r}-ik\right)\right] =$$

$$= -A\,\partial_k\left(\frac{x_k}{r^2}e^{i(\omega t-kr)}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}+ik\right) - A\left(\frac{x_k}{r^2}e^{i(\omega t-kr)}\right)\partial_k\left(\frac{1}{r}+ik\right) =$$

$$= -A\,\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\left(\frac{1}{r}-ik\right)\left(\frac{1}{r}+ik\right) - A\left(\frac{x_k}{r}\,e^{i(\omega t-kr)}\right)\left(-\frac{x_k}{r^3}\right) =$$

$$= -A\,\frac{k^2 e^{i(\omega t-kr)}}{r} = -k^2\phi$$

ELMÁG

15. előadás (04.06.)

Diszperzió

Ha van $\varepsilon(\omega)$ és $\mu(\omega)$ $\quad n = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)}$

Forrás nélkül:
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \underline{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \underline{H} &= \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

Keressük a megoldást:
$$\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\omega t - \underline{k}\underline{r})}$$
$$\underline{H} = \underline{H}_0 \, e^{i(\omega t - \underline{k}\underline{r})}$$
alakban

Visszaírva:
$$\left.\begin{aligned} -i\underline{k}\underline{E} &= 0 \\ -i\underline{k}\underline{H} &= 0 \\ i\underline{k}\times\underline{E} &= -i\mu\omega\underline{H} \\ i\underline{k}\times\underline{H} &= i\varepsilon\omega\underline{E} \end{aligned}\right\}$$

(3)-at beszorozva $\underline{k}$-val:

$$\underline{k}\times(\underline{k}\times\underline{E}) = -\mu\omega\,\underline{k}\times\underline{H} \overset{(4)\text{ miatt}}{=} -\mu\varepsilon\omega^2\underline{E}$$

$$\varepsilon_{ijk} k_j \varepsilon_{klm} k_l E_m = -\mu\varepsilon\omega^2 E_i$$

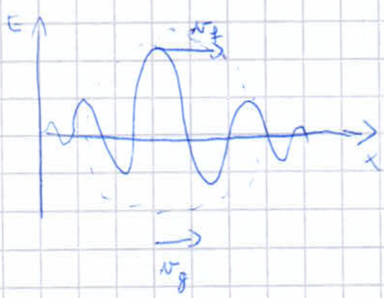
$$(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) k_j k_l E_m = k_i k_m E_m - k_l k_l E_i$$

Tehát: $\underbrace{\underline{k}(\underline{k}\underline{E})}_{(1)\text{ miatt } 0} - (\underline{k}\underline{k})\underline{E} = -\mu\varepsilon\omega^2\underline{E}$

$$k^2\underline{E} = \mu\varepsilon\omega^2\underline{E} \qquad \forall\underline{E}\text{-re, tehát}$$

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

ha ε és μ függenek ω-tól ~~így~~ ω és k közötti kapcsolat nem lineáris → ez a diszperzió, egyszerűen van.



$$v_f = \frac{\omega}{|\underline{k}|}$$

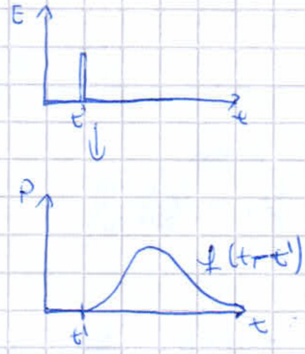
$$\underline{v}_g = \frac{d\omega}{d\underline{k}} = \operatorname{grad}\omega$$

Miért van diszperzió?

átlátszó anyagokra μ gyakorlatilag konstans

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 (1+\chi(\omega)) \qquad \underline{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \underline{E}$$

A polarizációhoz idő kell



$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} f(t-t') \underline{E}(t') \, dt' =$$

$$= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} f(t-t') \underline{E}_0 e^{i\omega t'} dt'$$

legyen $t - t' = \tau$

ebből: $t' = t - \tau$ és $-dt' = d\tau$

$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0 \underline{E}_0 \int_{\infty}^{0} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} (-d\tau) = \varepsilon_0 \underline{E}_0 e^{i\omega t} \underbrace{\int_{0}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau}_{\text{A fenti képlet miatt ez } \chi(\omega)}$$

Ez egy komplex integrál tehát $\chi(\omega) = \mathrm{Re}\,\chi(\omega) + i\,\mathrm{Im}\,\chi(\omega)$

a valós rész felelős a diszperzióért, a képzetes a elnyelődésért, ez a vezetőképességgel függ össze

Fénytörés elmélete

$$n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \qquad n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}$$

Tudjuk, hogy $D_{n1} = D_{n2}$ és $E_{t1} = E_{t2}$

$B_{n1} = B_{n2}$ $\quad H_{t1} = H_{t2}$

A tiszta polarizáció síkja a síkban, vagy a síkra merőleges

a határfeltételek kifejezése

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Spec esetek: $-\ \alpha = \beta$: $E_r = 0 \quad E_t = E$

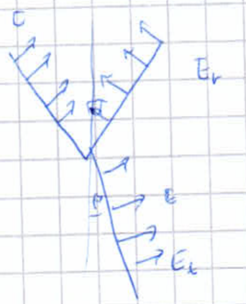
– teljes visszaverődés $\beta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{E_r}{E} = \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})} = -1$

– kis szögek $\alpha = n\beta$ $\quad \frac{E_r}{E} = -\frac{n-1}{n+1} \qquad \frac{E_t}{E} = \frac{2n}{n+1}$

Amplitúdók előjelei:

Ha $\alpha > \beta$ E_r ellentétes fázisú   sűrűbbe lép be

$\alpha < \beta$ E_r azonos fázis   sűrűbből lép ki



Fresnel formulák:

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)} \qquad \frac{E_t}{E} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

Speciális esetek: - $\alpha = \beta$ $\frac{E_t}{E} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \cdot 1} = 1$

- teljes visszaverődés: $\frac{E_r}{E} = -\frac{tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{tg\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = -1$

- $\alpha = n\beta$ $\frac{E_r}{E} = -\frac{n-1}{n+1}$ $\frac{E_t}{E} = \frac{2n}{n+1}$

ELMÁG
16. előadás (04.11.)

Ha a síkban merőleges polarizált

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)} \qquad \frac{E_t}{E} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

d) Brewster eset $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

$$E_r = 0 \qquad E_t = \frac{\sin 2\alpha}{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

e)

$n<1 \rightarrow \beta>\alpha$ azonos fázisban vannak mindig

$n>1 \rightarrow \alpha<\beta$ ellentétes fázisban — " —

Elektromágneses hullámok csoportosítása

- hosszúhullám : $\lambda > 1$ km $\quad \nu \leq 300$ kHz
- középhullám $1000\,m > \lambda > 100\,m \quad 300\,kHz < \nu < 3\,MHz$
- rövid hullám $100\,m > \lambda > 10\,m \quad 3\,MHz < \nu < 30\,MHz$
- VHF $10\,m > \lambda > 1\,m \quad 30\,MHz < \nu < 300\,MHz$?V — növekvő energia
- UHF $1\,m > \lambda > 0{,}1\,m \quad 300\,MHz < \nu < 3\,GHz$ mikrohullám
- infravörös $300\,GHz \quad \nu < 300\,THz$
- látható fény $700\,nm > \lambda > 350\,nm$
- ultraibolya $350\,nm > \lambda \gtrsim 0{,}1\,nm$ $> 3{,}3$ eV
- röntgen $\gtrsim 1$ keV
- gamma $\gtrsim 100$ keV

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j}$$

EM-hullám vezető lapba megy, mi történik?

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\mu\, \mathrm{rot} \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{rot}\,\underline{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} j = -\mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{E} - \Delta \underline{E} = -\mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

Ha grad di $\underline{E} = 0$ uniformá ablóve

$$\Delta \underline{E} = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

TFH $\underline{E}_0 = \underline{E}_0\, e^{i\omega t}$ $\underline{E}_0 = \underline{E}\, e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 \underline{E} = i\mu\sigma\omega \underline{E}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{i\mu\sigma\omega} = \pm \frac{i+1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu\sigma\omega} = \pm\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$$

Behatolási mélység $d = \frac{1}{\lambda}$

Cu-ban

D	50 Hz	500 kHz	5 MHz	1,8 GHz
d	12 mm	0,12 m	40 μm	2 μm

Optikai aktivitás

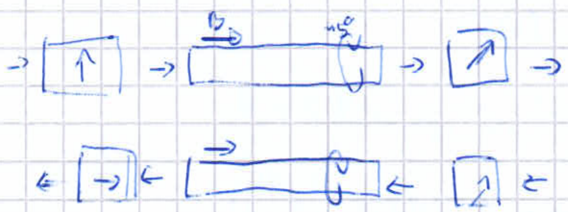
Cirkuláris polárás

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Faraday-effektus

Nem tom mi, mint korábbi elforgatás

Lineáris fény polarizációs elfordul $\underline{B}$ hatására



Kettős törés

Van, ahol ε nem szám, hanem tenzor

$$\underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E} \qquad \text{Főtengely-trafó} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Ha $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ egytengelyű kettőstörés

Ha nem x irányból jön a fény, akkor a két polarizáció sebessége különbözik a rácsban, így másképp törik

ordinárius sugár, extraordinárius sugár

ELMÁG

17. előadás (04. 20.)

Amíg ε_r-je $\varepsilon\,d$ számolásnál az alapfizikai $n = \sqrt{80} \approx 9$.

DE az akkor igaz, ha a dipólusok van idejük átfordulni (kis frekv.) Rádió nagy frekvenciákon $n = 1{,}33$. (a diszperzió miatt)

A kettő között disszipáció van $\Rightarrow$ mikrohullámú sütő

Maxwell-egyenletek potenciálokkal

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div} \underline{D} = \rho \\ &\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \\ &\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ &\operatorname{div} \underline{B} = 0 \end{aligned}}$$

vákuumban: $\underline{D} = \varepsilon\,\underline{E}$

$\underline{B} = \mu\,\underline{H}$

Itt $\operatorname{rot} \underline{E} \neq 0$ $\rightarrow$ tehát nem lehet ϕ potenciált bevezetni ☹

DE a (4)-ből ki lehet indulni

legyen $\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A}$ $\quad$ $\underline{A}$: vektorpotenciál

($\underline{A}$ nem egyértelmű, mert $\operatorname{grad} f$ valahol hozzáadható)

(3)-ba írva

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\underline{A} = -\operatorname{rot}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Ennek már van potenciálja: $\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} U$ $\quad$ U: indukált feszültség

(1)-be írva:

$$\operatorname{div}(\varepsilon\,\underline{E}) = \rho \Rightarrow -\operatorname{div}\operatorname{grad} U - \operatorname{div}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\Delta U + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\underline{A} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Ez az esetben ez a Laplace-egyenlet

(2)-ből:

$$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A} = \underline{j} + \varepsilon\left(-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad} U - \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A} - \frac{1}{\mu}\Delta\underline{A} = \underline{j} - \varepsilon\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\underline{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\underline{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}\right) = -\mu\,\underline{j}$$

ezek:
$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = \mu\,\underline{j} \\ &\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}}$$

ha teljesül a Lorentz-feltétel: $\boxed{\operatorname{div}\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} = 0}$

ami olyan, mint a kontinuitás

D'Alambert operátor $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\Box \underline{A} = -\mu \underline{j}$$

$$\Box u = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Ezeket összeadva: $\Box\left(\mathrm{div}\,\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\mu\left(\mathrm{div}\,\underline{j} + \frac{1}{c^2\varepsilon\mu}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$

$0 = \mathrm{div}\,\underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ Ez maga a feltétel

Amikor $\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ volt, $u(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,d^3r'$ volt igaz (Green-függv.)

Most $\Box u = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, így: $u(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,d^3\underline{r}$

retardált potenciál

Dirac-deltával

$\rho(\underline{r},t) = \sum_i q_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i,t)$ és $\underline{j}(\underline{r},t) = \sum_i q_i\,\dot{\underline{r}}_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i,t)$

$\underline{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,d^3\underline{r}$ itt is, mint az U-nál, a számlálóban lehet plusz de annak nincs fizikai értelme (avanzsált potenciál)

Négyes koordináták:

$\underline{r}^{(4)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$ transzponálva: $(x, y, z, -ct)$

$(r^{(4)})^2 = x^2+y^2+z^2-(ct)^2$ Ez nem feltétlen pozitív

Ha az (+): térszerű vektor

(−): időszerű vektor

(0): fényszerű vektor

$j^{(4)} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \\ c\rho \end{pmatrix}$ $(j_x, j_y, j_z, -c\rho)$

$A^{(4)} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ \frac{u}{c} \end{pmatrix}$ $(A_x, A_y, A_z, -\frac{u}{c})$

$$\partial^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{1}{c} \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial ct}\right.$$

$$\Box = \left(\partial^{(4)}\right)^2$$

Ezzel a konvencióval:

$$\Box \underline{A}^{(4)} = -\mu j^{(4)}$$

A térerősség egy tenzor

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} & -\underline{E} \\ \underline{E} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{B}}$ az antiszim. tenz.

A Maxwell-egyenletek ennek $\int$ vonatkozva

(ez nem ezt mondja)

Lorentz-transzformáció: A Maxwell egyenleteket invariánsan hagyja

$$x' = \alpha_{11} x + \alpha_{12} t$$

$$t' = \alpha_{21} x + \alpha_{22} t$$

megoldás: $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\quad t' = \dfrac{-\frac{v}{c}x + t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

kezdetre: ha $x' = 0$ akkor $\dfrac{x}{t} = -\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = v$

Minden $x - ct$-re $x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$

$$(\alpha_{11}^2 - c^2\alpha_{21}^2)x^2 + 2(\alpha_{11}\alpha_{12} - c^2\alpha_{21}\alpha_{22})xt + (\alpha_{12}^2 - c^2\alpha_{22}^2)t^2 = x^2 - c^2t^2$$

tehát $\alpha_{11}^2 - c^2\alpha_{21}^2 = 1$ (2)

$\alpha_{11}\alpha_{12} - c^2\alpha_{21}\alpha_{22} = 0$ (3)

$\alpha_{12}^2 - c^2\alpha_{22}^2 = -c^2$ (4)

előírás $\alpha_{12} = -\alpha_{11} v$ (1)

(1) alapján a többit átírva:

$\alpha_{11}^2 - c^2\alpha_{21}^2 = 1$ (2)

$-\alpha_{11}^2 v^2 - c^2\alpha_{21}\alpha_{22} = 0$ (3)

$\alpha_{11}^2 v^2 - c^2\alpha_{22}^2 = -c^2$ (4) ezekből kiszámítható a megoldás

EL MÁG

18. előadás [04. 25.]

Lorentz-trafó, ami a Maxwellt invariánsan hagyja:

$$x' = \alpha_{11} x + \alpha_{12} t$$

$$t' = \alpha_{21} x + \alpha_{22} t$$

Előző órai levezetés alapján: $\alpha_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad \alpha_{21} = -\dfrac{v}{c^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \alpha_{12} = -\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Méterrúd rövidülés:

ha $x_1' = 0$ $\quad x_2' = l$ akkor $0 = \dfrac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad l = \dfrac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

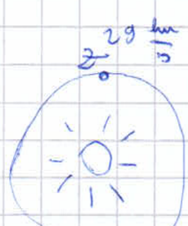
kivonva: $l = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ tehát $l_{\text{álló}} = l_{\text{mozgó}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Időlassulás

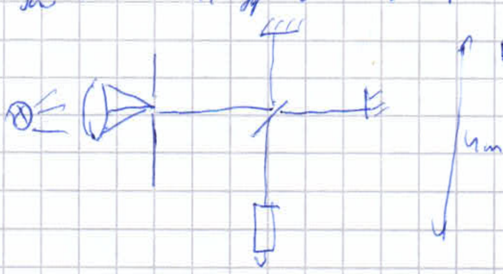
ha $x' = 0$ és $x = vt$

akkor $t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t$

A hullámnak valamiben terjednie kell



Jó kell számítani, hogy az éterhez képest mennyivel megy a Föld



Michelson-Morley-féle interferométer

Azt vették észre, hogy a fény minden irányba ugyanúgy megy

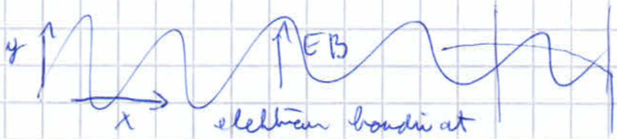
Einstein: nincs univerzális világ-idő

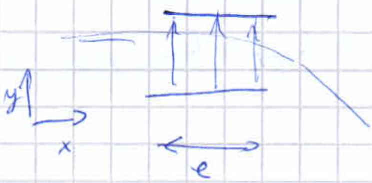
$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = \text{mindenkire egyenlő}$$

$$x^2+y^2+z^2-ct^2 = s^2 = -c^2\tau^2$$

Ha ez pozitív, térbeli
ha 0 fényszerű
egyébként időszerű

Thompson-parabola





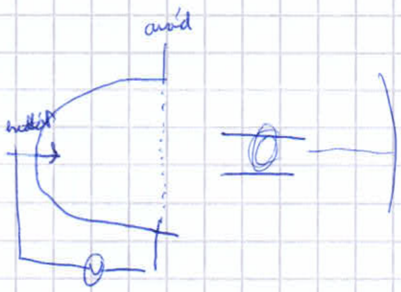
$$y = \frac{eE}{2m}t^2$$

$$x = vt = l \Rightarrow y = \frac{eE}{2m}\left(\frac{l}{v}\right)^2$$

elektron B-n át

$$x = \frac{evB}{2m}t^2 \qquad x = \frac{evB}{2m}\left(\frac{l}{v}\right)^2$$

$$y \sim \frac{E}{v^2} \qquad x \sim \frac{B}{v}$$



A különböző sebességű elektronoknak a katódsugárcső végén egy parabolán kéne lennie, de nagy sebességen nem jó

$\Rightarrow$ A tömeg sebesség függő $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Newton szerint $\underline{F} = m\underline{a}$

De

$\underline{F} = \frac{d}{dt}\underline{p}$ Mivel $\underline{p} = m\underline{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\underline{v} = m_0\frac{\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

A négyes-vektor: $x^{(4)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$ A sajátidő szerinti deriváltja: $v^{(4)} = \frac{dx^{(4)}}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{\sqrt{\;}} \\ \frac{v_y}{\sqrt{\;}} \\ \frac{v_z}{\sqrt{\;}} \\ \frac{c}{\sqrt{\;}} \end{pmatrix}$

$$v^{(4)}v^{(4)} = \frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2-c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v^2-c^2}{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = -c^2$$

A négyessebesség abszolútértéke mindig $-c^2$

Így a Newton-egyenlet

$$\frac{d}{dt} m_0 u = F \qquad \text{de sajátidővel} \qquad \frac{d}{d\tau} m_0 u = \frac{F}{\sqrt{}} = K \quad \text{Minkowski-erő}$$

Impulzus

$$p^{(u)} = \begin{pmatrix} m_0 u_1 \\ m_0 u_2 \\ m_0 u_3 \\ m_0 u_n \end{pmatrix} \begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{E}{c} \end{matrix}$$

a hatás elvek miatt ahogy

tehát ~~mert~~

$$\frac{E}{c} = m_0 \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \longrightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = E = mc^2$$

Sorbafejtés kicsi v esetén:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{m_0 c^2}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} \approx m_0 c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 = E_{nyug} + E_m$$

Ha tovább fejtenénk: $\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}$

ELMÁG

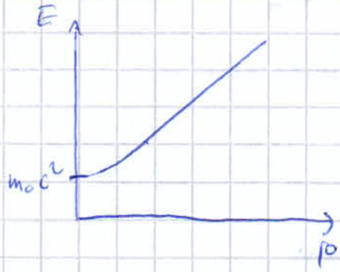
19. előadás (04. 27.)

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Tehát: $p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow p^2 - p^2\frac{v^2}{c^2} = m_0^2 v^2 \Rightarrow c^2 p^2 = (m_0^2 c^2 + p^2) v^2$

$$v^2 = \frac{c^2 p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$ Ebből:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2}}} = m_0 c^2 \sqrt{\frac{m_0^2c^2+p^2}{m_0^2c^2}} = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2}$$

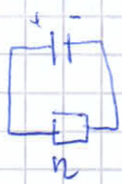


Az elején parabolikus (klasszikus fizika) a végén lineáris

A különböző részecskékre ez a diszperziós reláció, mert $E = \hbar\omega$ és $p = \hbar k$

Mivel a foton $m_0 = 0$, ezért ott ki is jön a lineáris összefüggés

Elektromágneses tér energiaviszonyai



Kondenzátor kisülés $U_0 = \frac{Q_0}{C}$

Kirchhoff miatt: $\frac{Q}{C} + IR = 0$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \tau = RC$$

Mennyi volt a kond. energiája? $\oint \underline{D}\, d\underline{f} = Q \Rightarrow \varepsilon_0 E r^2\pi = \sigma r^2 \pi \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E$

$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I + \frac{d}{dt}\int \underline{D}\, d\underline{f} \Rightarrow H 2r\pi = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} r^2\pi \Rightarrow H = \varepsilon_0 \frac{r}{2}\frac{dE}{dt}$$

Ezek már tavaly kellettek

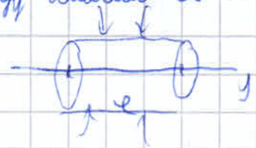
$$E_{energia} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 r^2 \pi d \qquad \frac{dE_{energia}}{dt} = \varepsilon_0 E \frac{dE}{dt} r^2 \pi d = EH\, 2r\pi d$$

A henger palástján áramlik ki az EH energia

$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ Poynting-vektor = energiaáramlás vektor

$$[S] = \frac{V}{m}\cdot\frac{A}{m} = \frac{watt}{m^2} = \frac{J}{m^2 s}$$

Hogy drótból hol jön ki az energia



$jU = H\, 2r\pi \cdot E l = EH\, 2r\pi\, l$ jó, itt is így megy be az energia

térvezetékben

Az áram irányának megfordításakor $\underline{S}$ iránya nem változik

Energiasűrűség: $w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$ & Poynting-vektor $\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H}$

általánosságban a kontinuitási: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = s$ ahol ρ a sűrűség
j az áram
s a forrás

itt a sűrűség a w, az áram a $\underline{S}$, de mi a forrás? $s \to -\underline{E}\,\underline{j}$

tehát annak kell kijönnie, hogy $\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\underline{S} = -\underline{E}\,\underline{j}$

Biz.:

$$-\underline{E}\,\underline{j} = -\underline{E}\left(\operatorname{rot}\underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\right) = -\underline{E}\operatorname{rot}\underline{H} + \varepsilon\,\underline{E}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = *$$

belátható, hogy $\underline{H}\operatorname{rot}\underline{E} - \underline{E}\operatorname{rot}\underline{H} = \operatorname{div}(\underline{E}\times\underline{H})$ mert

$$\partial_i(\varepsilon_{ijk}E_jH_k) = \varepsilon_{ijk}(\partial_i E_j)H_k + \varepsilon_{ijk}E_j(\partial_i H_k) = H_k(\varepsilon_{kij}\partial_i E_j) - E_j(\varepsilon_{jik}\partial_i H_k) =$$
$$= H_k(\operatorname{rot}\underline{E})_k - E_j(\operatorname{rot}\underline{H})_j$$

$$* = \operatorname{div}(\underline{E}\times\underline{H}) - \underline{H}\operatorname{rot}\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right) = \operatorname{div}(\underline{E}\times\underline{H}) - \underline{H}\left(-\mu\frac{\partial \underline{H}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right) =$$
$$= \operatorname{div}(\underline{E}\times\underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) = \operatorname{div}\underline{S} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Térimpulzus (lehagyom)

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial t} + \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} \qquad \text{ahol } \underline{f} = \rho\,\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B}$$

$\underline{f}$-t alakítva jön ki ez) és $\underline{g} = \underline{D}\times\underline{B} = \varepsilon\mu\,\underline{E}\times\underline{H} = \frac{1}{c^2}\underline{S}$ impulzus

$\underline{\underline{\sigma}}$: Maxwell-feszültségtenzor

Impulzus-momentum

sűrűsége $\underline{r}\times\underline{g}$

$\underline{B}$ vagy $\underline{E}$ megszüntetésekor elkezd forogni, mert az impulzus-momentum megmarad

ELMÁG

20. előadás (09.02.)

Einstein - de Haas - kísérlet

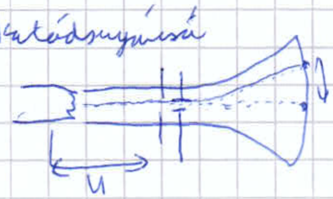
$$\underline{d} = \frac{q}{2m}\underline{N}$$

↳ giromágneses faktor

Ez kiszűri, ugyanis ez valószínűleg az e^- saját jellemzője: $\frac{q}{m}$ spin

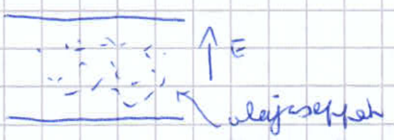
Elektronok

Katódsugárcső



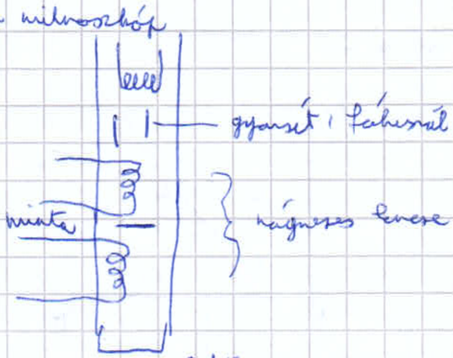
Ebből meghatározható az $\frac{e}{m}$ arány, de a tömeg nem

Millikan kísérlet



$$q = \frac{6\pi\eta r(v_1 - v_2)}{E} \Rightarrow e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$$

Elektron mikroszkóp

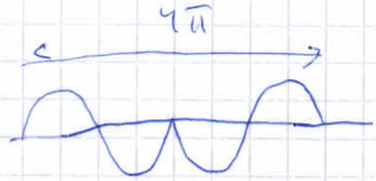


az optikai lencsékre kapott van jó

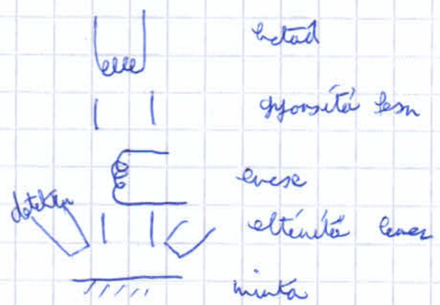
itt is igaz a $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

→ valódi kép

→ fókuszsíkban diffrakciókép



Pásztázó e^- mikroszkóp



Kohlrausch – Weber – kísérlet

passz

Klasszikus elektronsugár

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_{\text{energia}} = \frac{1}{2}\int E^2(r)\,dV = \frac{1}{2}\int_0^\infty E^2(r)\,4\pi r^2\,dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4}\,4\pi r^2\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left[\frac{1}{r}\right]_0^\infty \rightarrow \infty$$

ez nem lesz jó, mert egy elektron terének energiája végtelen.

Mondjuk, hogy a fenti $E(r)$ képlet csak egy adott sugáron kívül érvényes

$$E_{\text{felszínen}} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{1}{r_0} \qquad \text{ha } r > r_0$$

$$E_{\text{homogén}} = \frac{1}{2}\int_0^{r_0} \frac{e^2 r^2}{(4\pi\varepsilon)^2 r_0^6}\,4\pi r^2\,dr = \frac{3}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{1}{r_0}$$

r_0: klasszikus e^- sugár

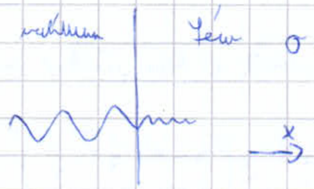
r_0 legyen olyan, hogy $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{1}{r_0} = m_e c^2 \Rightarrow r_0 = 2{,}82\cdot 10^{-15}$ m

ELMÁG

21. előadás (05.09)

tichy@ludens.elte.hu

Skin-effektus (bőr-hatás)



vákuum | fém $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j}$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \underline{H} = \sigma \underline{E}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{H} = \sigma \operatorname{rot} E$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{H} = -\sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\underbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{H}}_{0} - \Delta \underline{H} = -\mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{Telegráf egyenlet}$$

Mivel a hullám x irányú terjed $\underline{H} = \underline{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ valós része

$$k^2 \underline{H} = -i \omega \mu \sigma \underline{H} \quad \Rightarrow \quad k^2 = -i \mu \sigma \omega \qquad \text{ez a disp. rel.}$$

$$k = \pm \sqrt{-i} \sqrt{\mu \sigma \omega} = \kappa (1 - i) \quad \text{ahol} \quad \kappa = \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}}$$

Így a hullám: $\underline{H}_0 e^{i(\omega t - \kappa x + i \kappa x)} = \underline{H}_0 e^{i(\omega t - \kappa x)} e^{-\kappa x}$

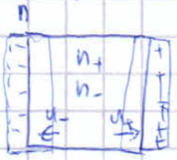
$$\Lambda = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \qquad \text{réz} \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = 0{,}01695\ \Omega m$$

Ha $f = 50\ Hz \to \Lambda = 1{,}2$ cm

1 kHz	2,9 mm
1 MHz	9,0 μm
1 GHz	2,9 μm

Plazma

$\oplus$ és $\ominus$ töltésű



$$n_+q_+ + n_-q_- = 0$$

Plazmon: a plazma rezgései

$$D = \varepsilon E = -n_+q_+(u_+ - u_-)$$

$$E = -\frac{n_+q_+}{\varepsilon}(u_+ - u_-)$$ ez a kialakult térerősség

A mozgásegyenlet: $m_+\ddot{u}_+ = q_+E$

$m_-\ddot{u}_- = q_-E$

ebből $\ddot{u}_+ - \ddot{u}_- = \left(\frac{q_+}{m_+} - \frac{q_-}{m_-}\right)E$ legyen $u_+ - u_- = u$

A térerősséget beírva: $\ddot{u} = -\left(\frac{q_+}{m_+} - \frac{q_-}{m_-}\right)\frac{n_+q_+}{\varepsilon}u$ ← harmonikus oszcilláció

$$\omega_{plazma}^2 = \left(\frac{q_+}{m_+} - \frac{q_-}{m_-}\right)\frac{n_+q_+}{\varepsilon}$$

Ha $m_+ \to \infty$ (fémen)

$$\omega_p^2 = -\frac{q_-}{m_-}\left(-\frac{n_-q_-}{\varepsilon}\right) = \frac{n_-q_-^2}{m_-\varepsilon}$$

Általában egy fém esetén $\omega < \omega_p$ visszaver

$\omega > \omega_p$ átengedi

Ionoszféra: mintha plazma, így a frekvencia $\nu_p = 30\,MHz$

$\lambda = 10\,m$

A rövid rádiót az ionoszféra visszaveri, de az újak ki mennek az űrbe

Mert: $m\ddot{x} + m\omega_p x = F$ kis ω-nál a gyorsulás elhanyagolható

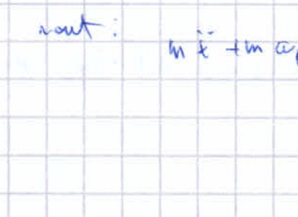
így $m\omega_p x = F$ számít

nagy ω-nál pedig csak a $\ddot{x}$ számít

$m\ddot{x} = F$

Ugyanakkor a töltés rezgése a rezgő elektromos térrel ellentétes fázisú, így a

$k_e < 0$ $\varepsilon < 1$ $n < 1$ $v_{fázis} = \frac{c}{n} > c$ de a fázissebesség



Az átmenetnél az anyag nem átlátszó, ott elnyeli az energiát (miért?)

$\frac{C \frac{\cdot}{m^3} \frac{Nm^2}{C^2}}{kg^2} =$

ELMÁG

11. előadás (05.16.)

Rezgőmozgás

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + m\omega_0^2 x = F$$

Keressük a mo.-t $x = x_0 e^{-i\omega t}$ $F = F_0 e^{-i\omega t}$ alakban

visszaírva: $\left(m(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\beta\right) x_0 = F_0$

$$x_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\beta}$$

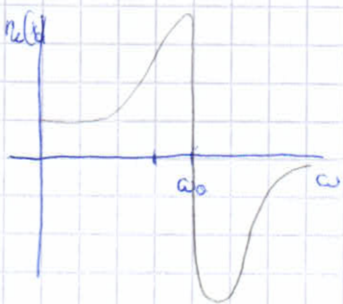
A külső erő teljesítménye:

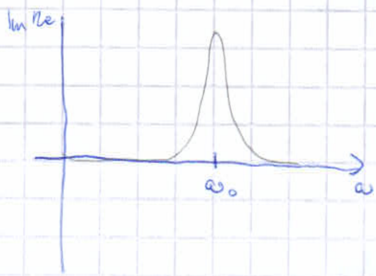
$P = Fv = F\frac{dx}{dt}$ de ez már nem lineáris, így nem lehet komplexxel számolni csak a valós részükkel

DE az átlag P-t igen

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(F\left(\frac{dx}{dt}\right)^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[F_0 e^{-i\omega t}\left(-i\omega x_0 e^{-i\omega t}\right)^*\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[F_0 e^{-i\omega t}\, i\omega x_0 e^{i\omega t}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[iF_0\omega x_0\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[F_0\omega x_0\right]$$





1) ha $\omega \ll \omega_0$

$$x_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

2) ha $\omega \gg \omega_0$

$$x_0 = -\frac{F_0}{m\omega^2}$$

3) ha $\omega = \omega_0$ $\quad x_0 = \frac{iF_0}{\omega\beta}$

Hall-effektus

+ töltések eltérülnek, és a vezeték tetején valamivel többlettöltés van

Stacionárius állapotban $q v B = q E$

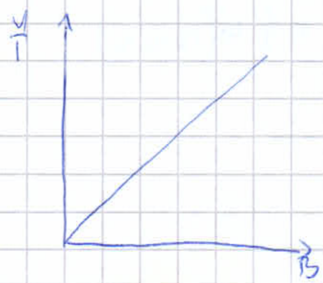
$$v B L_x = \underbrace{E L_x}_{U}$$

$$\rho v B L_x L_y = \rho E L_x L_y$$

$$I B = \frac{q}{L_x L_y L_z} U L_y$$

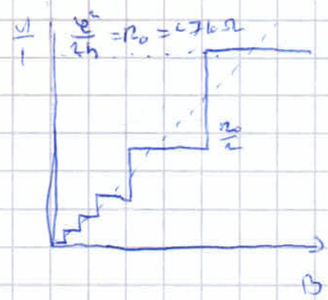
$$I B = \frac{q}{L_x L_z} U$$

Kvantum-Hall-effektus

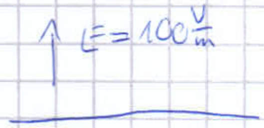


klasszikusan

DE ha atomi vastagságú réteg



Légkörben lévő elektromos jelenségek



A levegő vezetőképessége miatt folyik a áram

$$j = 10 \frac{pA}{m^2}$$

A Föld felszínén 5000 A

$$\rho_{levegő} = \frac{1}{\sigma_{lev}} = \frac{j}{E} = 10^{13}\ \Omega m$$

$$\rho_{réz} = 10^{-8}\ \Omega m$$

1912: Victor-Franz Hess

Kimutatta, hogy feljebb nagyobb a sugárzás, mint lent.

→ kozmikus sugárzás

ELMÁGO

23. előadás (05.18.)

zivatar: süt a nap, → sávos meleg levegő ami nem tud felszállni, ezért oldalról száll

A felszálló levegő lehűl, és a víz kicsapódik (kumulusz felhő = vízszintes alja, mert egy adott helyen csapódik ki a víz)

Bénard - instabilitás: nem tud mindenhol felszállni a levegő, szimmetriasértés kell

kis ΔT esetén hengeres áramlás

nagyobb ΔT esetén hatszöges

még nagyobb esetén: Totál kaotikus

A vízcseppek nőnek, és ha elég nehezek, leesnek:

záporok: ha nincs villámlás

zivatar: ha van villámlás

Szent Elmo tüze: Az eső előtt a hajóárbócok csúcsai világítanak
olyankor már minden fel van töltve, és a csúcshatás ionizálja a levegőt

minden hegyes tárgy sötétben

mesterséges előállítás: ~~KIRLIAN~~ ~~Kirlian~~ - fotó
KIRLIAN

gömbvillám: gömbszerű világító valami, de nem tudják mi ez