ELMÁG
1. gyak (02.17.)

viszkmate@caesar.elte.hu

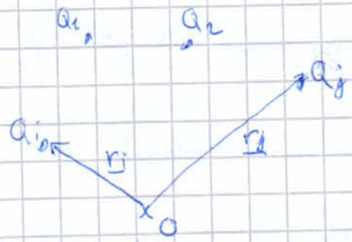
viszkmate.web.elte.hu

||

Ponttöltések, dipólusok

(1)

töltések egymás terében egyensúlyban vannak
Mennyi az összes energia, és stabil-e?



a)

$E_{teljes} = ?$ két töltés esetén $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{|\underline{r}_j - \underline{r}_i|}$

Összes esetén összegezni kell párokra $\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{|r_i - r_j|}\cdot\frac{1}{2} = E_{teljes}$

Azaz $\underline{F}_i = \sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = 0 \quad \forall i$-re

ötlet: minden töltést nyújtsunk távolabb az origótól $r_i \to \lambda r_i$ (ahol $\lambda \sim 1$)

Ekkor $\underline{F}_i' = \sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{\lambda^3 |r_i - r_j|^3}\lambda(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = \frac{1}{\lambda^2}F_i = 0$

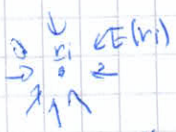
Ez is egyensúlyban van. A végzett munka ~~csak az első összegzett tagja~~ 0, mert nem hatott erő $\forall\lambda$-ra. Az E-megmaradás miatt:

$W_{végzett} = E^{(új)}_{teljes} - E^{(régi)}_{teljes}$

$\uparrow$ 0 $\quad$ ha $\lambda = \infty$ 0 $\quad \Rightarrow \underline{E^{(régi)}_{teljes} = 0}$

b)

Az i. töltés eltávolításával milyen az $\underline{r}_i$ helyén a tér szerkezete?



Ekkor az kell, hogy a kis környezetben az $\underline{E}$-nek legyen az $\underline{r}_i$ felé mutató komponense minden irányban kitérésre. Így viszont $\Psi_{zárt} < 0$

$\Psi_{zárt}\ \oint \underline{E}\, d\underline{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, de ott nincs semmi, tehát nem lehet negatív, így instabil

Erre a tételre Earnshaw jött rá

Earnshaw-tétel: Elektrosztatikus erőtér egyensúlya kritikus, vagy instabil

Ez igaz a gravitációra és a magnetosztatikára is (bizonyos végtelen esetén)

Lágy mágnesek:
- ferromágneses ($\mu_r \gg 1$)
- paramágneses ($\mu_r \gtrsim 1$, $\mu_r > 1$)
- diamágneses ($\mu_r \gtrsim 1$, $\mu_r < 1$)

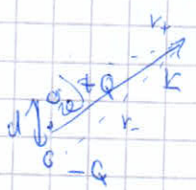
Ezekre kiterjeszthető Earnshaw-tétele

diamágnesekkel lehet stabil elrendezést kialakítani (mágneses lebegtetés)

diamágneses anyagok: víz, bizmut, szupravezetők

(2)

Dipólus

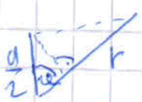


$E(\underline{r}, \vartheta) = ?$

Ehhez előbb $U(\underline{r}, \vartheta) = ?$

A szuperpozíció azért alkalmazható, mert az egyenletek lineárisak (Maxwell)

Potenciál: Egységnyi töltésen végzett munka, vagy a végtelenből idáig



Legyen $r \gg d$

$r_+ = r - \frac{d}{2}\cos\vartheta$

$$U(\underline{r}, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_-} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r - \frac{d}{2}\cos\vartheta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2}\cos\vartheta}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{1 - \frac{d}{2r}\cos\vartheta} - \frac{1}{1 + \frac{d}{2r}\cos\vartheta}\right) \approx$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\vartheta\right) - \left(1 - \frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)\right] = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\vartheta$$

Dipólus: Egyenlő nagyságú, de ellentétes töltésű töltésekből álló rendszer úgy, hogy

$$\lim_{\substack{Q \to \infty \\ d \to 0}} (Qd) = p = \text{dipól momentum / dipól nyomaték}$$

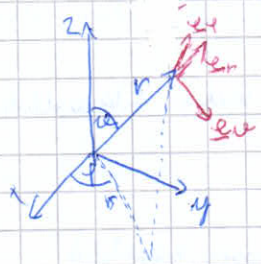
Ekkor $U(\underline{r}, \vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\vartheta$

$\underline{E} = -\nabla U$ gradiens operátor polárban.

Gradiens operátor polárkoordinátákban:

$f(\underline{r})$ $\qquad$ ~~Ha $df(\underline{r}) =$~~

$$df = f(\underline{r}+d\underline{r}) - f(\underline{r}) = \underline{\nabla} f(\underline{r})\, d\underline{r} \quad (1)$$



$$d\underline{r} = dr\, \underline{e}_r + r\, d\vartheta\, \underline{e}_\vartheta + r \sin\vartheta\, d\varphi\, \underline{e}_\varphi \quad (2)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \quad (3)$$

$$\underline{\nabla} f = \alpha\, \underline{e}_r + \beta\, \underline{e}_\vartheta + \gamma\, \underline{e}_\varphi \quad (4)$$

(1)-be a (2)-t és a (4)-et:

$$\cancel{f(\underline{r}+d\underline{r}) - f(\underline{r})} \quad \alpha\, dr + \beta\, r\, d\vartheta + \gamma\, r \sin\vartheta\, d\varphi = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

Emiatt $\alpha = \frac{\partial f}{\partial r}$ $\quad \beta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ $\quad \gamma = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$

Vagyis $\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\underline{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\underline{e}_\varphi$

Ez alapján $E(r,\vartheta,\varphi) = \frac{-p}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\cos\vartheta\, \underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\cos\vartheta)\frac{1}{r^2}\underline{e}_\vartheta + 0\right] =$

$$= \frac{-p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2}{r^3}\cos\vartheta\, \underline{e}_r - \frac{1}{r^3}\sin\vartheta\right) = \underline{\underline{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\vartheta\, \underline{e}_r + \sin\vartheta\, \underline{e}_\vartheta\right)}}$$

Más alak:

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos\vartheta\, \underline{e}_r - \cos\vartheta\, \underline{e}_r + \sin\vartheta\, \underline{e}_\vartheta\right)$$

Vegyük az $\underline{e}_z$ vektort! $\underline{e}_z(\cos\vartheta\, \underline{e}_r + \sin\vartheta\, \underline{e}_\vartheta) = -\cos\vartheta \cdot \cos\vartheta + \sin\vartheta \cdot \cos(\vartheta + 90°) =$

$= -\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = -1$, tehát az önmaga ellentettje

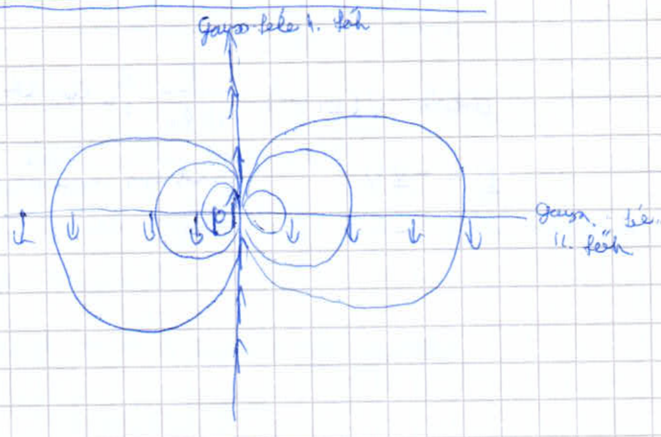
$$E(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\underline{p}\underline{r}}{r^4}\frac{\underline{r}}{r} + \frac{-\underline{p}}{r^3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\underline{p}\underline{r})\underline{r} - \underline{p}r^2}{r^5} = E(\underline{r}, \underline{p})}}$$

Spec. eset 1: $\vartheta = 0$

$$\underline{E}(r, \vartheta = 0) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\underline{e}_r$$

Spec. eset 2: $\vartheta = 90°$

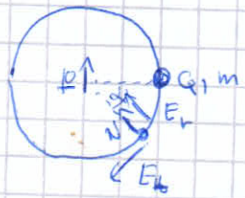
$$E(r, \vartheta = 90) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\underline{e}_\vartheta$$



$$\underline{E} = \frac{p\cos\vartheta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\underline{e}_r + \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\underline{e}_\vartheta$$

Vegyük egy tetszőleges $\underline{r}$ esetén $\underline{p}$-t érdemes felbontani $\underline{r}$-re $\perp$ és $\parallel$ vektorokra és az $\underline{E}$ ezek tereinek szuperpozíciója

2. feladat



- Mekkora erővel fogja nyomni a gyűrűt a kezdeti α szögnél?
- Hol áll meg először?
- Hogy mozogna huzal nélkül?

Newton II.:

$$N + E_r Q = m a_{cp}$$

$$N - Q\frac{p\cos(\alpha+90^\circ)}{2\pi\varepsilon_0 R^3} = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

E-megmaradás:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\cos(\alpha+90^\circ) = 0 + \underbrace{\frac{qp}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\cos(90^\circ)}_{0}$$

$$\Rightarrow mv^2 = \frac{Qp\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad v(\alpha) = \sqrt{\frac{Qp\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 R^2 m}} \qquad \alpha = 180^\circ\text{-nál áll meg.}$$

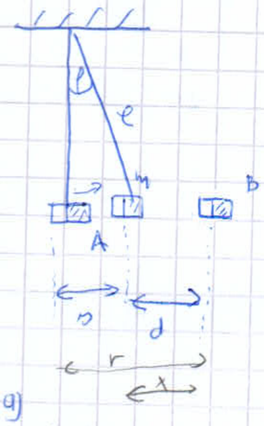
$$N = \frac{Qp\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 R^3} - \frac{Qp\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 R^3} = 0 \quad \Rightarrow \text{úgy mozogna huzal nélkül is}$$

A sebesség időbeli lefolyása pont olyan, mint egy ingán $\sqrt{\sin\alpha}$.

ELMÁG

2. gyakorlat (02. 24.)

F. 1)



amikor A s-re van a e.h.-tól, akkor hozzácsapódik B-hez.

$s = 1\,cm$

$d = 4\,cm$

$l = 1\,m$

a)

Milyen jellegű a k.h., ha $F_M = \frac{k}{x^n}$ $\quad n = 2$

$k = ?$

Milyen erők hatnak A-ra?

Kezdetben az erők eredője 0

$$mg - F_F\cos\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$F_F\sin\varphi = F_M \qquad (2)$$

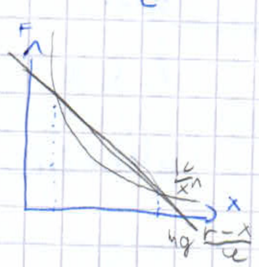
(1);(2)-ből: $mg\,tg\,\varphi = F_M$

Általánosan AB távolság: x, a B pedig az e.h.-tól r

tudjuk, hogy $\sin\varphi = \frac{r-x}{l}$ $\quad$ mivel az kicsi $\sin\varphi \approx tg\,\varphi = \frac{r-x}{l}$

Tehát egyensúlyban: $mg\frac{r-x}{l} \approx \frac{k}{x^n}$ $\qquad (3)$

ábrázolva



Adott r esetén két metszéspont is lehet, de lehet, hogy egy se

Ha kettő van, belátható, hogy a nagyobb a stabil, mert itt a visszatérítő a nagyobb a vonzónál ...

Ha r-t csökkentjük, az egyenes süllyed, X egy. is csökken és lesz egy pont, amikor az egyenes már csak egy pontban érinti: ez lesz a kérdéses pont.

Ekkor a pontban a két görbe meredeksége egyenlő:

$$-mg\frac{1}{l} = -n\frac{k}{x^{n+1}} \qquad (4)$$

(3) és (4) egyenletből:

Elostra esetével: $x_k - r = -\frac{1}{n} x_k$

$$d - r = -\frac{1}{n} d$$

$$s = \frac{1}{n} d \implies n = \frac{d}{s} = \underline{\underline{4}}$$

Ebből $k = \frac{mg}{e}\frac{d^{n+1}}{n} = \underline{\underline{mg\frac{d^5}{4e}}}$ (5)

b)

Betesszük őket egy kémcsőben

Az A-ra ható erők 0:

$$mg = \frac{k}{h^n}$$

(5)-ből:

$$mg = \frac{mg}{e}\frac{d^{n+1}}{n}\cdot\frac{1}{h^n}$$

$$h = \sqrt[n]{\frac{d^{n+1}}{ne}} = \sqrt[n]{\frac{d^{n+1}}{\frac{d}{s}e}} = \underline{\underline{d\sqrt[n]{\frac{s}{e}}}} \approx 1{,}3 \text{ cm}$$

Mágneses dipól | **elektromos dipól**

$m = IA$ példa

$d \updownarrow$ $+Q$, $-Q$ $\quad Qd = p$

$\underline{m}$ (mágneses dipól momentum) erősség $\quad$ $\vec{p}$ (elektromos dipól nyomaték)

$\underline{B}(\underline{r})$ mező $\underline{E}(\underline{r})$

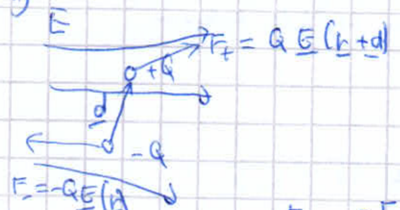
$\mu_0 \; \underline{B} \; \underline{m}$ $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{\varepsilon_0} \; \underline{E} \; \underline{p}$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\underline{m}\,\underline{r})\underline{r} - \underline{m}r^2}{r^5}$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\underline{p}\,\underline{r})\underline{r} - \underline{p}r^2}{r^5}$$

Dipólusok külső térben:

I.) Erő



$$\underline{F} = Q\underline{E}(\underline{r}+\underline{d}) - Q\underline{E}(\underline{r}) = Q\left[\underline{E}(\underline{r}+\underline{d}) - \underline{E}(\underline{r})\right] = *$$

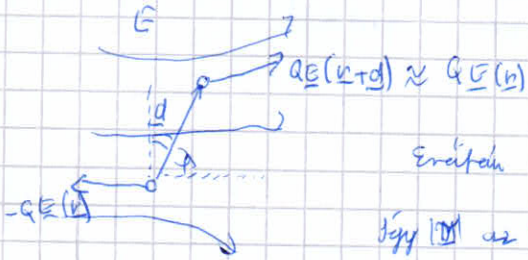
$$F_x = Q\left[E_x(\underline{r}+\underline{d}) - E_x(\underline{r})\right] = Q\,\underline{d}\,\underline{\nabla}\,E_x(\underline{r}) = \underline{p}\,\underline{\nabla}\,E_x(\underline{r}) =$$

$$= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$* = (\underline{p}\,\underline{\nabla})\,\underline{E}(\underline{r}) = \underline{F}$$

$\boxed{\text{HF: írja be a előző feladat – 4. határozza}}$

II.) Forgató nyomaték



Eszerint $\underline{T}$ a tetszőleges pontra állandó.

Így $|\underline{T}|$ az $|\underline{E}|$-szer az hatásvonalak távolsága

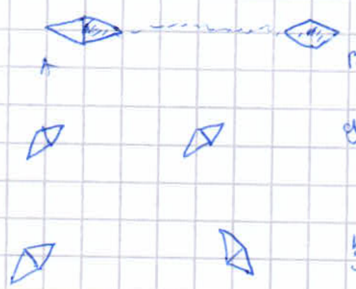
$$|\underline{T}| = Q|\underline{E}(\underline{r})|\, d \sin\varphi = p|\underline{E}(\underline{r})| \sin\varphi$$

A körüljárási irány $\underline{p}\times\underline{E}$ irányú, nagysága $\sin\varphi$ jelenik meg, így

$$\underline{T} = \underline{p}\times\underline{E}(\underline{r})$$

(2)

rögzített irányúak tengely körül



A rögzített, B-t kitérítjük, így a rezgés periódusideje T_0.

a) Ezután úgy tesszük be mindkettőt, hogy a kitérések egyezzenek.
Hat meg ennek a T-jét.

b) ← így veszi a T.

Nézzük általánosan! A mágnes hatása α, B-é β.

A forgó mozgás alapegyenlete:

$$\underline{T}_B = \Theta \, \underline{\ddot{\beta}} \qquad (1)$$

Az egyenletet csak általában meg kell határozni

$$\underline{T}_A = \Theta \, \underline{\ddot{\alpha}} \qquad (2)$$

A mágnes $\underline{m}$-ét bontsuk fel $m \sin\alpha$, és $m \cos\alpha$-ra

Ezek B helyén $\underline{B}_2$ és $\underline{B}_1$ teret hoznak létre

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m \sin\alpha}{r^3} \quad (\text{lefelé})$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos\alpha}{r^3} \quad (\text{jobbra})$$

A két forgató nyomaték ugyanolyan irányú, egyszerű össze kell őket adni

$$T_B = m B_1 \sin\beta + m B_2 \sin(90^\circ + \beta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m^2}{r^3} \left(2 \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta\right)$$

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha \approx \alpha & \cos\alpha \approx 1 \\ \sin\beta \approx \beta & \cos\beta \approx 1 \end{pmatrix}$$

(1)-ből

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m^2}{r^3} \left(2\beta + \alpha\right) = -\Theta \ddot{\beta}$$

Ugyanez A mágnesre is eljátszható:

(2)-ből:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m^2}{r^3} \left(2\alpha + \beta\right) = -\Theta \ddot{\alpha}$$

2. rendű csatolt diffegyenletek

$$\boxed{\text{H.F.: általánosan megoldani}}$$

Ha A-t lefogjuk $\alpha = 0$, úgy a (1) alapján meghatározható a rezgésidő:

$$-\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m^2}{r^3 \Theta} \beta = \ddot{\beta} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi r^3 \Theta}{\mu_0 m^2}}$$

(1) & (2): Legyen $\underline{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m^2}{\Theta r^3}}_{\omega_0} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

TPH: harmonikus és $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Emiatt:

$$\left[-\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \Omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \qquad \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = \lambda$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

Akkor van nem triviális megoldás, ha a det =: 0

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \Omega_1 = \omega_0 \Rightarrow$ ehhez: $\alpha = -\beta$ (ellentétes fázisban)

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow \Omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_0 \Rightarrow$ ehhez: $\alpha = \beta$ (azonos fázisban)

$$\omega_0 = \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} = \frac{T}{2\pi\sqrt{2}}$$

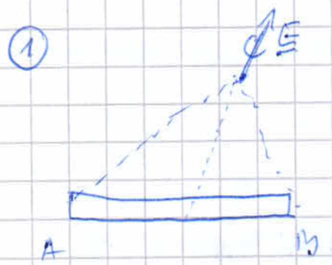
$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{2}\,T_0$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,T_0$$

ELMÁG

3. gyak (03.03.)

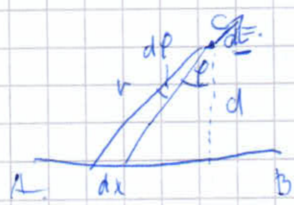
(1)



Mert úgy, hogy $\underline{E}$ iránya $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjében ph.

Az ilyen feladatokban fel kell bontani a töltéseloszlást kisebb részekre

A gond a paraméterezés megtalálása

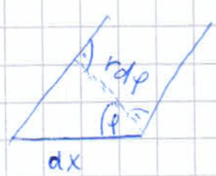


Legyen d C távolsága AB-tól

λ a töltéssűrűség

φ szög egyértelműen meghatározza a pálca pontjait

$$|d\underline{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda\, dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{\left(\frac{d}{\cos\varphi}\right)^2} = *$$



$$r\,d\varphi = dx\cos\varphi \rightarrow dx = \frac{r\,d\varphi}{\cos\varphi}$$

másképp: $x = r\sin\varphi$

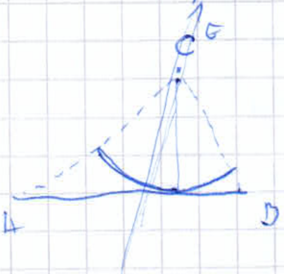
$\boxed{\text{HF: kiszámolni így is}}$

$$* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r\, d\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\varphi}{d} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cdot d\varphi}{d^2}$$

a számláló egy d sugarú kör dφ szöghöz tartozó ívhossza

a nevező ennek a négyzete

⇒ A dφ szög alatt látszó rész ugyanakkora térerősség járulékot ad C-ből látva, mint egy d sugarú kör esetén



Egy körív a szimmetriatengellyel ph. E-t ad, ha C-ből látva, szögfelezőt

(2)

Mivel itt az térerő egy végtelennek negyede!

Így a szög 45°-os

A nagyságán felbontható E_x és E_y-ra

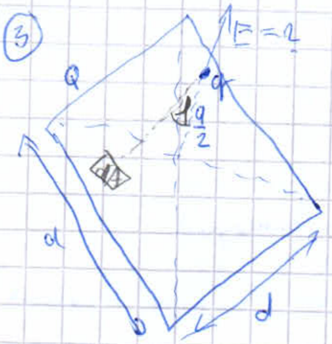
Rakjunk oda egy másik vezetéket, és számoljunk egy r sugarú hengerfelületen a Gauss-t!

$$E(r)\cdot \ell\, 2r\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda \ell \longrightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Ebből

$$2E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

(3)



Az erő tuti felfelé hat.

Ugyanekkora erő hat a lapra

$\boxed{\text{HF: megoldás integrállal}}$

A ΔA-ra ható erőt számoljuk ki!

Iránya adódik, távolsága r_i

$\Delta Q = \sigma \Delta A$ ahol $\sigma = \frac{Q}{d^2}$

A rá ható erő: $\Delta F = \Delta Q \cdot E$ Ez adott irányú, de nekünk a normális komponens kell.

$$F = \sum \Delta F_n = \sum_i \frac{Q}{d^2}\Delta A_i E_i \cos\varphi_i = \frac{Q}{d^2}\underbrace{\sum_i E_i \Delta A_i \cos\varphi_i} = \frac{Q}{d^2}\Psi_\square$$

Ez a négyzetlapon létrehozott fluxus.

Még 5 db ilyennel körbevéve, egy dobozzal bezárva, és a elrendezés szimmetrikus

Gauss-törvény alapján: $6\Psi_\square = \frac{1}{\varepsilon_0}q$

$$\Rightarrow \underline{F = \frac{Q}{d^2}\frac{1}{6\varepsilon_0}q}$$

Másképp: $F = \sum_i \frac{Q}{d^2}\Delta A_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_i^2}\cos\varphi_i = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\underbrace{\sum_i \frac{\Delta A_i \cos\varphi_i}{r_i^2}}$

Ez a ΔA_i terület térszöge

Mivel ez egy kocka lapja, a térszöge $\frac{4\pi}{6}$

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\frac{4\pi}{6} = \frac{Qq}{6\varepsilon_0 d^2}$$

Térszög

Egy égitest objektum a látótér mekkora részét takarja ki?

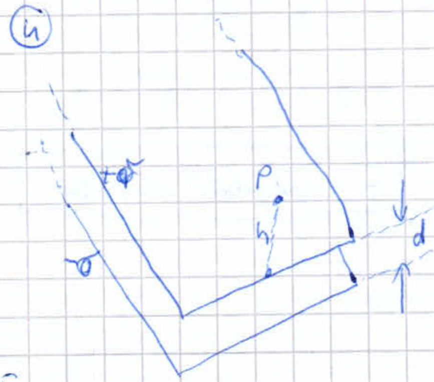
Az objektumot levetítjük egységnyi sugarú gömb felszínére, egy ΔA területű rész lesz

térszög: $\frac{\Delta A}{r^2} = \Delta \Omega$ Ez független r-től, mert ΔA is négyzetesen nő

a távolság növekedésével

teljes térszög: $\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$

(4)



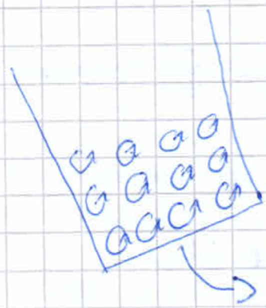
$E(P) = ?$

$d \ll h \ll$ oldalélek

Gondolat: használjuk a mágneses analógiát

Láttuk, hogy a felső egyenes E párhuzamos, az alsó D párhuzamos

De ehelyett helyettesíthetjük kis áramokkal végtelen



Az egymás melletti felületi áramokban kioltják egymást, marad a széle.

$\Rightarrow$ Elképzelhetünk egy lapon szélén folyó áramot

Az eredeti elrendezésben ΔA-t használva $p = \sigma \Delta A d$ nagyságú dipólt kapunk

$\frac{p}{\Delta A} = \sigma d$ dipól-momentum sűrűség

mágneses analógiában $\frac{m}{\Delta A} = I \Rightarrow I \sim \sigma d$

A két szélső áram esetén elhanyagolható a középsőhöz képest

$$2\pi h B_p = \mu_0 I \Rightarrow B_p = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{h}$$

visszatérünk az elektromos analógiához: $E_p = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma d}{h}$ merőleges irányban

ELMÁG

4. gyak. (03.10.)

Tükörtöltés: speciális alakú vezetők terében megoldásmódszer. Egyébként nem létezik analitikus módszer a kiszámításra

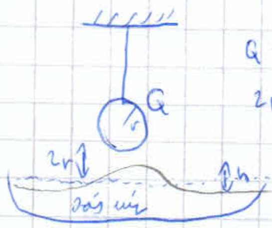
Elektrom. tér vezetők esetén:

1) a fém belsejében $\underline{E} = 0$
ez a felületi töltésmegoszlásnak alakul ki.

2) A fém ekvipotenciális

3) Az elektromos tér a fém felületére merőleges

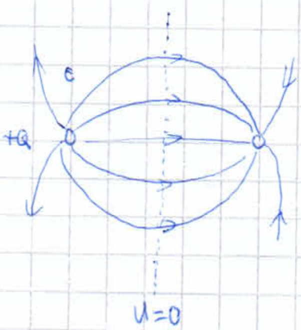
(1)



$Q = 10^{-8}\,C$ műanyag golyó
$2r = 1\,cm$

Mennyivel emelkedik meg a víz felszíne a golyó alatt

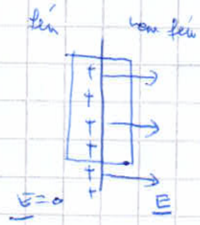
Először vizsgáljunk meg egy két ellentétes töltés terét



Ha a ekvipotenciális síkban bárhová behelyezünk egy vagy kiterjedésű fém síklapot, akkor a töltésnek a síklap két oldalán hűűlnek

⇒ A fémlap behelyezése nem változtat a külső téren

Ezt együtt felírva a Gausst:



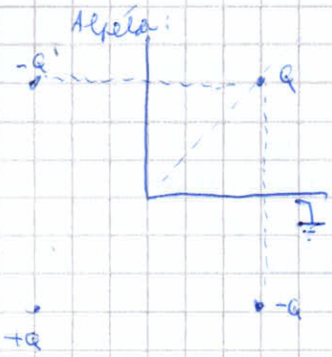
$$A\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{bezárt}$$

$$\Rightarrow \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$

Ha a sík egy $R \to \infty$ sugarú gömb, akkor a +Q töltés be van zárva ⇒ Faraday kalitka
ugyanez fordítva ⇒ A két térrész független egymástól

Ha általánosítjuk -Q +, akkor a bal oldal marad, a jobb oldalt 0 lesz a tér
megjegyzés: ~~akkor~~ a térrésznek, ahol a teret számítjuk, nem lehet tükörtöltés

Alpélda:

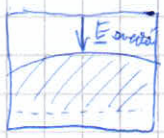


mekkora erő hat a töltésre

Back to the problem

A golyót tükrözzük a vízre, és ezzel kiszámolható a tér nagysága a vízfelszín közelében

Milyen erők tartják egyensúlyban a vizet: elektromos, és nehézségi



$$E_{\text{eredő}} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(3r)^2}$$

A töltéssűrűség: $\sigma = \varepsilon_0 E_{\text{eredő}}$

$$q_{\text{felszín}} = \sigma A = \varepsilon_0 E_{\text{eredő}} A$$

$$F_{el} = \frac{1}{2} q_f E_{er}\,..$$

($\frac{1}{2}$ kell, mert az E_{er}-ben benne van a saját hatása.)

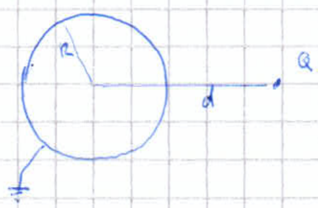
$$F_{neh} = \rho A h g$$

Mivel $F_{neh} = F_{el}$

$$\rho \cancel{A} h g = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{er}^2 \cancel{A}$$

$$h = \frac{\varepsilon_0 E_{er}^2}{2\rho g} = \frac{\varepsilon_0 \, 4 \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{Q^2}{81 r^4}}{2\rho g} = \frac{Q^2}{648\,\varepsilon_0\pi^2\rho g r^4} = 0{,}3\text{ mm}$$

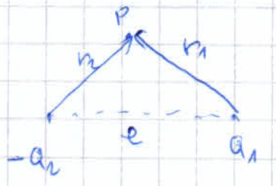
2



Mekkora erő hat

Gömbi tükörtöltés

Vizsgáljuk a teret két, ellentétes előjelű, de különböző nagyságú töltés esetén



$$U_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1}-\frac{Q_2}{r_2}\right)$$

Hol vannak a 0 potenciálú pontok?

$$\frac{Q_1}{r_1}=\frac{Q_2}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2}=\frac{Q_1}{Q_2}$$

TFH: $Q_1>Q_2$

Apollonius körök

$$\frac{Q_1}{Q_2}=k$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2}=k^2$$

$$y^2+\left(\frac{e}{2}-x\right)^2=k^2\left[y^2+\left(\frac{e}{2}+x\right)^2\right]$$

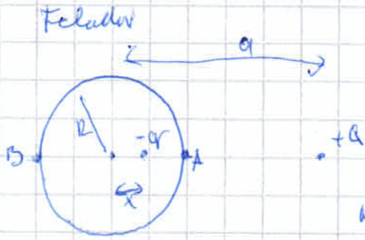
$$y^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-ex+x^2=k^2y^2+k^2x^2+k^2ex+k^2\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$y^2(k^2-1)+x^2(k^2-1)+(k^2+1)ex+(k^2-1)\left(\frac{e}{2}\right)^2=0$$

$$y^2+x^2+\frac{k^2+1}{k^2-1}ex+\left(\frac{e}{2}\right)^2=0$$

ez valóban egy kör, ami az x tengely mentén el van tolva

Feladat



Találjunk egy $-q$ töltést, ami a gömb felületén 0 potenciált ad

Mivel tudjuk, hogy a 0 potenciálú felület gömb, elég A és B pontot nézni

$$U_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{d-R}-\frac{q}{R-x}\right)=0 \rightarrow \frac{d-R}{Q}=\frac{R-x}{q}$$

$$U_B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{d+R}-\frac{q}{R+x}\right)=0 \rightarrow \frac{d+R}{Q}=\frac{R+x}{q}$$

Összevetve: $q=\frac{R}{d}Q$

továbbá: $x=\frac{q}{Q}(d+R)-R=\frac{R^2}{d}$

a) Földelt gömb esetén:

$$F_Q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{(d-x)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{d}\frac{Q^2}{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2}$$

b) Töltetlen gömb: Nem lesz

b)

Töltetlen gömb!

Itt a potenciál nem lesz 0, de egyforma, így a közepén vehetünk egy új töltést, hogy azonos maradjon a töltés.

Az új töltés nagysága egyenlő a |-q| -val

$$F_Q^b = F_Q^a - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d^2}$$

c) töltött gömb: ugyanaz, mint az előbb, csak nem +q-t veszünk oda

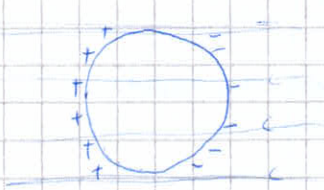
ELMÁG

5. gyakorlat (03.17)

(1)

Töltetlen fémgömb homogén $\underline{E}$-térben

Legyen $\underline{E}_0$ a térerősség a gömb nélkül



A gömbben a térerősség 0.

Ha nincs homogén $\underline{E}_0$, ennek egy Q_i elrendezés az előző feladat b részére visszavezethető

Legyen a külső $+Q$ töltés d távolságra. Ez a gömbnél

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2}$$ nagyságú teret hozna létre. $d \to \infty$ esetén ez ennélinkább p b-k

Legyen $Q \to \infty$ úgy, hogy $\frac{Q}{d^2}$ = áll legyen! $\frac{Q}{d^2} = 4\pi\varepsilon_0 E_0$

A tükörtöltés: $q = \frac{R}{d}Q = \frac{R}{d}4\pi\varepsilon_0 E_0 d^2 = 4\pi R\varepsilon_0 E_0 d \to 0$

$$x = \frac{R^2}{d} \to 0$$

DE az xq mennyiség állandó, tehát a gömb belsejében egy virtuális dipól lesz:

$$p = qx = 4\pi R\varepsilon_0 E_0 d\frac{R}{d} = 4\pi R^3\varepsilon_0 E_0$$

A gömb viselkedése olyan, mintha egy dipólt rakunk oda (a középpontjába)

b) töltéseloszlás

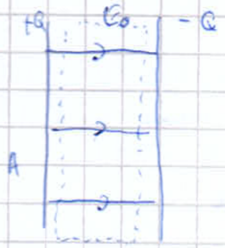
Gauss-törvény miatt: $\sigma(\varphi)\cdot\Delta A\cdot\frac{1}{\varepsilon_0} = E\cdot\Delta A$

$$\sigma(\varphi) = \varepsilon_0 E(\varphi)$$

$$E(\varphi) = E_0\cos\varphi + \frac{p\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3} = E_0\cos\varphi + 2E_0\cos\varphi = 3E_0\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \sigma(\varphi) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\varphi$$

Dielektrikum



Gauss-tétel miatt $\frac{1}{\varepsilon_0} E_0 = QA \Rightarrow E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Helyezzünk bele egy dielektrikumot.

Atom elektromos tér nélkül

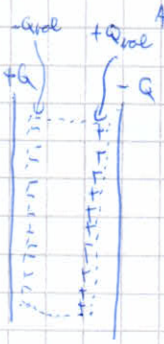
Atom elektromos térrel

Hogy az atommag egy.-ban legyen: $qE = qE_g(x)$ ahol $E_g(x)$ a gömbben elhelyezkedő elektronfelhő tere.

$E_g(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^3} \Rightarrow$ A dielektrikumban a tér $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3} qx = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

E térben levő atomban indukált dipólmomentum: $p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E$

Az indukált dipólok térfogati dipólmomentum-sűrűsége: $P = n \cdot p$ ahol n az atomok sűrűsége



$\underline{P} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 n \underline{E} = \varepsilon_0 \chi \underline{E}$ χ: elektromos szuszceptibilitás

Egy pozitív tölteshez mindig lesz közel egy negatív ~~dipól~~ vége, így ezek az atomok kiejtik egymást, kivéve a széleken.

Ezek tere $E_{pol} = \frac{Q_{pol}}{\varepsilon_0 A}$ ~~Ebből~~ Előbbi a polarizáció nagysága: $P = \frac{Q_{pol} d}{A d} = \frac{Q_{pol}}{A}$

vagyis $E_{pol} = \frac{1}{\varepsilon_0} P$ vektorosan $\underline{E_{pol}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\underline{P}$

Szuperpozíció: $\underline{E} = \underline{E_0} + \underline{E_{pol}} = \underline{E_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{P} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\varepsilon_0 \underline{E_0} - \underline{P}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\underline{D} - \underline{P})$

D tulajdonságai:

$\underline{D}$ forrásai a szabad töltéshordozók: $\text{div}\,\underline{D} = \rho_{szabad}$ vs. $\text{div}\,\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{teljes}$

$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r} \underline{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E} = \varepsilon \underline{E}$

dielektrikumok határán az $\underline{E}$-k normálisa nem egyezik, de a tangenciális igen

a $\underline{D}$-k normálisa egyezik, viszont a tangenciális nem

③

Gömbkondenzátor

a)

$C = ?$

Tegyünk a belső fegyverzetre $+Q$-t, a külsőre $-Q$-t és számítsuk ki az U-t!

$\underline{D}$ radiális, izotróp és gaussból kijön : $D \cdot 4\pi \rho^2 = Q$

(kp.-tól mért táv. innentől ρ)

$$D(\rho) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\rho^2}$$

$$E_1(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \frac{Q}{\rho^2} \qquad E_2(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{Q}{\rho^2}$$

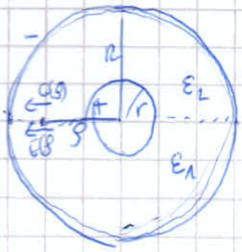
$$r < \rho < r^* \qquad r^* < \rho < R$$

$$U = \int_{r_1}^{R} \underline{E}(\rho)\, d\underline{\rho} = \int_{r_1}^{r^*} E_1(\rho)\, d\rho + \int_{r^*}^{R} E_2(\rho)\, d\rho = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left[-\frac{1}{\rho}\right]_r^{r^*} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left[-\frac{1}{\rho}\right]_{r^*}^{R} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r^*} - \frac{1}{R}\right) \qquad C = \frac{U}{Q}$$

ÉLMÁG

6. gyakorlat (03.24.)



b) TFH. $\underline{E}$ sugárirányú

$$C = \frac{Q}{U}$$

Mivel a tangenciális $\underline{E}$ folytonos marad, a határon a $E(\rho)$ lesz mindkét oldalon

$D_1(\rho) = \varepsilon_1 E(\rho)$; $D_2(\rho) = \varepsilon_2 E(\rho)$

Gauss-törvény miatt: $\oint \underline{D}\, d\underline{A} = Q^{\text{szabad}}_{\text{bezárt}}$

félgömbön:

$$\left.\begin{aligned} D_1(\rho) 2\pi \rho^2 &= Q_1 \\ D_2(\rho) 2\pi \rho^2 &= Q_2 \end{aligned}\right\} \quad Q_1 + Q_2 = Q$$

$$[D_1(\rho) + D_2(\rho)]\, 2\pi \rho^2 = Q$$

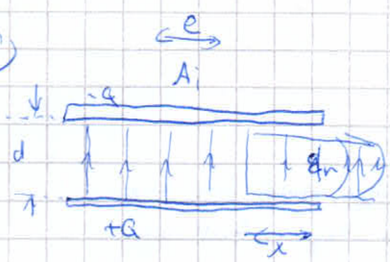
$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E(\rho)\, 2\pi \rho^2 = Q \quad \rightarrow E(\rho) = \frac{Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2) 2\pi \rho^2}$$

$$U = \int_r^R E(\rho)\, d\rho = \frac{Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\pi} \int_r^R \frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\pi} \frac{R-r}{Rr}$$

$$C = 2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{Rr}{R-r} \quad \Rightarrow \quad \text{Egy gömbkondi felének kapacitása: } C = 2\pi\varepsilon \frac{Rr}{R-r}$$

Ez a két fél kondenzátor összege, hiszen ez tkp. két fél gömb kondenzátor ph. kapcsolása

1



g) Adott töltésű kondenzátor esetén mekkora erő hat a lapra

A tangenciális E miatt a térerősség egyforma lesz, míg a dielektrikum határán ugrása lesz a töltéssűrűségnek

Miért hat erő? Mert a szórt tér nem csak függőleges, hat a dielektrikumra.

kondenzátor energiája: Előző feladathoz hasonlóan olyan, mint ph.-n kapcsolt kond.

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 A(\ell - x)}{\ell d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A x}{\ell d} = \frac{\varepsilon_0 A[\ell + (\varepsilon_r - 1)x]}{\ell d}$$

Virtuális munka elve alapján:

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = +\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dx}\left(= \frac{1}{2}U^2 \frac{dC}{dx}\right) = \text{behelyettesítés}$$

b)

Mekkora az erő, ha nem a töltés, hanem a feszültség állandó

Csak a pillanatnyi helyzet számít az erő szempontjából, így a deriváltban nem tudjuk, hogy Q vagy U az állandó

$$-\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}CU^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{dC}{dx}U^2$$ ez ellentett, mint az előző, miért?

Most töltésváltozás van, ezért a telepen töltés áramlik át

Felírva a helyes formulát:

$$F\Delta x + \Delta W_{kond} + \Delta W_{telep} = 0 \to F = \underbrace{-\frac{dW_{kond}}{dx}}_{-\frac{1}{2}\frac{dC}{dx}U^2} - \frac{dW_{telep}}{dx}$$

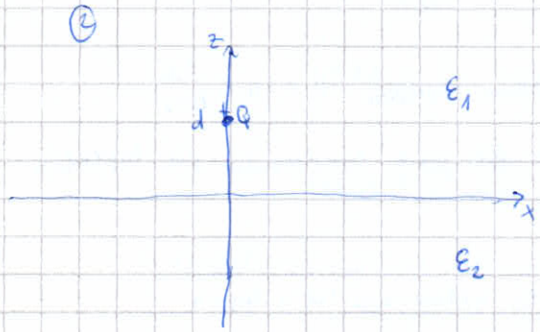
$$\cancel{\frac{dW_{telep}}{dx} = \frac{-U\,dQ}{dx}}$$

$$\Delta W_{telep} = -U\Delta Q = -U\Delta(CU) = -U^2\Delta C$$

$$\frac{dW_{telep}}{dx} = -U^2\frac{dC}{dx}$$

$$F = -\frac{1}{2}\frac{dC}{dx}U^2 + U^2\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dC}{dx}U^2$$ Ez jött ki az előbb is, így stimmel. :)

2)



Írjuk le az elektromos teret!

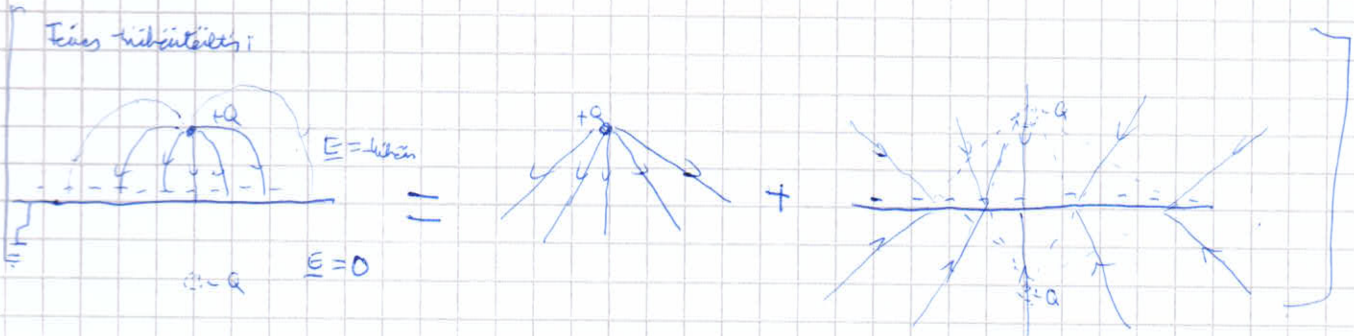
A határon próbáljuk kielégíteni a megfelelő egyenleteket, de ez nem sikerül. Így ennek tere olyan, mint a tükörtöltésnek a felén csak érvényes => Az alsó térrészben egyenes tért várunk

A felső térrészben szintén tükörtöltés van, de nem −Q-val, hanem −q'-vel.

Felső térrész

Alsó térrész

Töltés tükrözés:



Maxwell egyenletet és határfeltételeket kell ellenőrizni.

A Maxwellt automatikusan kielégítik a ponttöltések.

Határfeltételek: $E_{t1} = E_{t2}$; $D_{n1} = D_{n2}$

$$E_{t1} = E_{qt} + E_{q't} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{Q}{r^2}\sin\varphi - \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q'}{r^2}\sin\varphi$$

$$E_{t2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''}{r^2}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_1} - \frac{q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2} \qquad (1)$$

A q', q'', Q-ra helyfüggetlen egyenletet írtunk fel, ami jó.

$$D_{n1} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\cos\varphi \qquad D_{nq'} = \frac{1}{4\pi}\frac{q'}{r^2}\cos\varphi$$

$$D_{n2} = \frac{1}{4\pi}\frac{q''}{r^2}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow Q + q' = q'' \qquad (2)$$

(1)-ből és (2)-ből: $q' = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q$ és $q'' = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q$

Határeset: $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1 \rightarrow$ vagyis a alsó rész fém

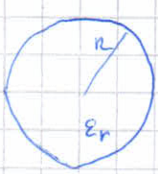
$q' = Q \qquad q'' = 2Q$

felső térrészben stimmel

Alsó térrészben - tér $E_{q''} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_2}\dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{Q}{r^2} = 0$ stimmel ✓

nagy

(3)



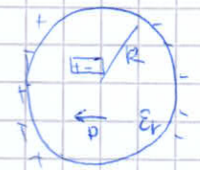
Homogén elektromos térbe helyezzük ezt a dielektrikum-gömböt milyen lesz a tér?

ELMÁG

7. gyak (03.31.)

(1)

$\leftarrow E_0$



Dielektrikumban gömbalakú homogén teret tessünk. Milyen lesz a tér?

TFH: A gömbön belül a polarizáció homogén ($\underline{P}$). Ha ez teljesíti a Poisson-egyenletet, akkor ez a megoldás.

Kinagyítva a szélét:

P a dipólmomentum sűrűség. ~~Legyen~~ Vegyünk 1 dipólnyi térfogatot!

$$P=\frac{p}{A\cdot d}=\frac{Qd}{Ad}=\frac{Q}{A}$$

Ez a felület közelében a töltéssűrűség, mert ez egyezik a kompenzálatlan töltéssel

Itt az A nem a gömb felületdarabja, hanem annak a vetülete. Ha a normális szöge a vízszintessel φ, akkor

$A = A'\cos\varphi$ A felületi töltéssűrűség: $\sigma=\frac{Q}{A'}=\frac{Q}{A}\cos\varphi=P\cos\varphi$

vektoriálisan $\sigma_{pol}=\underline{P}\,\underline{n}=\underline{P}\frac{\underline{r}}{r}$

A polarizáció felfogható úgy, mintha a közös középponttal rendelkező ellentétes [illegible] gömböket kissé eltolnánk

$x \ll R$

$d = x\cos\varphi$

Ha a gömbök térfogati töltéssűrűsége ρ, akkor a felületi töltéssűrűség annak a rétegnek a vastagságával arányos, ami világos: $\sigma=\rho d=\rho x\cos\varphi$

Ezen modell szerint $P=\rho x$ (1)

A modell jó, mert a felületi töltés azonos. Így tetszőleges pontban a tér egy felületi töltésen integrálás helyett elég a két homogén gömb terét összegezni

Homogén töltött gömb térerőssége belül $\underline{E}(\underline{r})=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\underline{r}$

$$E_{eredő}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\underline{r_+}-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\underline{r_-}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\underline{r_+}-\underline{r_-}\right)=\frac{\rho\underline{x}}{3\varepsilon_0}$$

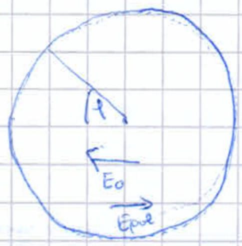
Így, $\underline{E}_{pol}=\frac{-1}{3\varepsilon_0}\underline{P}$

Kívül a tér olyan, mint két töltés közel egymáshoz $\Rightarrow$ dipól-tér ahol

$$p_{pol}=\rho\cdot\frac{4}{3}R^3\pi x=\frac{4\pi}{3}R^3P$$

Emlékeztető: $\underline{D}=\varepsilon_0\underline{E}+\underline{P}=\varepsilon_0\underline{E}+\varepsilon_0\chi\underline{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\underline{E}$ ahol $\varepsilon_r=1+\chi$ és $\underline{P}=\varepsilon_0\chi\underline{E}$

Hogyan elégítjük ki a határfeltételeket:



Sugárirány

A gömbön belül $E_{eredő} = E_0 - E_{pol}$ homogén.

$$E_{bent,n} = E_{er}\cos\varphi$$

A gömbön kívül $\underline{E}_{kint} = \underline{E}_0 + E_{dipól}$

sugár irányban: $E_{kint\,n} = E_0\cos\varphi + \dfrac{p\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0 R^3}$

A határfeltétel szerint $D_{1n} = D_{2n}$

$$\varepsilon_r E_{bent\,n} = E_{kint\,n}$$

$$\left(E_0\cos\varphi - \frac{1}{3\varepsilon_0}P\cos\varphi\right)\varepsilon_r = E_0\cos\varphi + \frac{4\pi}{3}R^3 P\,\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\cos\varphi$$

megfelelő P esetén valóban szögfüggetlenül teljesül a feltétel

$$\underline{P = 3\varepsilon_0 E_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}}$$

Érintő irány

$$E_{bent\,t} = E_{er}\sin\varphi = (E_0 - E_{pol})\sin\varphi$$

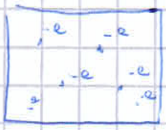
$$E_{kint\,t} = E_0\sin\varphi - \frac{p_{dip}\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Mivel $E_{kint\,t} = E_{bent\,t}$

$$E_0\sin\varphi - \frac{4\pi}{3}R^3 P\,\frac{\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \left(E_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}P\right)\sin\varphi$$ ez teljesül ✓

Tehát ez a megoldás valóban az egyetlen megoldás.

Fémek Drude-modellje



Szabadon elmozdulható -e nagyszámú töltéshordozó

Ha a fémben $\underline{E}$ van jelen, akkor $\underline{F} = -e\underline{E}$ erő hat rájuk és

Δt ideig ez $v = -\frac{eEt}{m}$ sebességre tesz szert.

Ezek időnként ütköznek egy-egy helyben álló atommaggal. A közötti idő, amíg vagy egy elektron τ (relaxációs idő)

A sodródási sebesség: $\underline{v}_{drift} = -\frac{eE\tau}{m}$

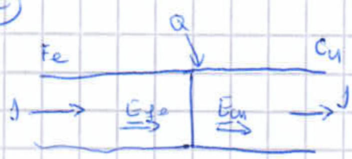
Az áramerősség: $I = \frac{A\cdot v_{drift}\,\Delta t\, n_e(-e)}{\Delta t} = \frac{e^2E\tau}{m} n_e A$ ahol n_e az elektronok sűrűsége

$$j = \frac{I}{A} = \underbrace{\frac{e^2 n_e \tau}{m}}_{} E$$

σ: vezetőképesség   általánosan: $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ vagy $\underline{j} = \frac{1}{\rho}\underline{E}$

differenciális ohm-törvény

(2)



Különböző anyagú vezetékben határán mekkora töltés halmozódik fel?

Mivel I állandó, az jellemezhető j-vel mindkét oldalon.

Ezért viszont $\underline{E}$ különböző $E_{Fe} = \rho_{Fe}\, j$

$E_{Cu} = \rho_{Cu}\, j$

Gauss-törvény miatt: $-(E_{Fe} - E_{Cu})A = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$

$$(\rho_{Cu} - \rho_{Fe})jA = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

$$\cancel{Q = \frac{\varepsilon_0(\rho_{Cu}-\rho_{Fe})}{j}}$$ $Q = \varepsilon_0 I(\rho_{Cu} - \rho_{Fe})$

Ez kisebb, mint egy elektron töltése

ELMÁG

8. gyak (04.07.)

Laplace-egyenlet

Elektrosztatikában

$$\mathrm{div}\,\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$$

$$\hookrightarrow \underline{E} = -\underline{\nabla} U$$

Ha $\rho = 0$: $\boxed{\Delta U = 0}$ Ezt az egyenletet kell megoldani határfeltételekkel

Vezetési feladatok

$$\mathrm{div}\,\underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ Stacionárius áramlás esetén $\mathrm{div}\,\underline{j} = 0$

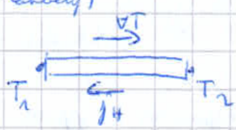
$\underline{j} = \sigma \underline{E} \Rightarrow \sigma\, \mathrm{div}\,\underline{E} = 0 \Rightarrow$ Mivel a $\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$ így ugyanúgy érvényes

$$\boxed{\Delta U = 0}$$

itt a $\underline{j}$ pl. a felülettel, tehát $\underline{E}$ is az. (Neumann-határfeltétel)

Hővezetési egyenlet (Fourier-törvény)

$$\underline{j}_H = -k\,\underline{\nabla} T$$



$T_2 > T_1$

$$\mathrm{div}\,\underline{j}_H + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

$$\Delta T = 0$$

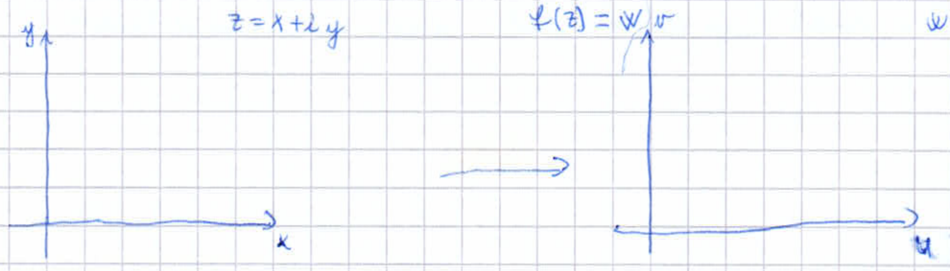
2D-s rendszereket vizsgálunk

Két értelmezés – olyan rendszer, amely az egyik irányt nem kell figyelembe venni

– valóban 3D-s lenne, de az egyik iránytól nem függnek a dolgok

Komplex függvénytan:

$z = x + iy$ $\qquad f(z) = w$ $\qquad w = u + iv$



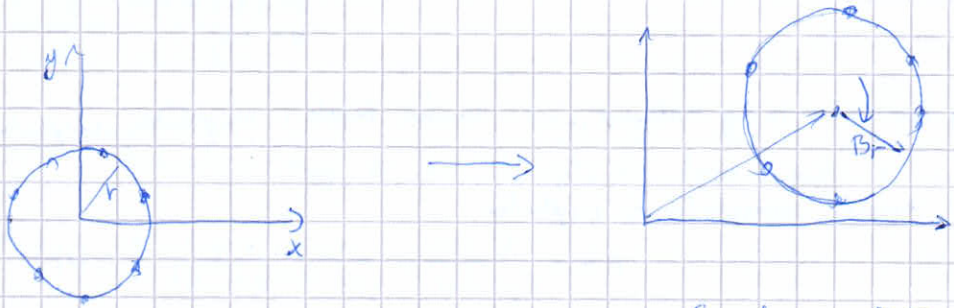
$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Pl.:

$f(z) = a + bz \qquad a, b \in \mathbb{C} \qquad b = Be^{i\alpha}$

$z = re^{i\varphi}$

$f(z) = a + Br\,e^{i(\alpha+\varphi)}$



Ez a függvény eltolta, nagyította, és elforgatta a síkot

Kört körbe, egyenest egyenesbe $\Longrightarrow$ Ez a leképezés szögtartó és aránytartó

Vegyünk egy tetszőleges differenciálható $f(z)$-t

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z)$$

Ahhoz, hogy ez létezzen, fenn kell állnia a Cauchy – Riemann – diffegyenleteknek

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Ez szükséges feltétele a deriválhatóságnak

Ezekből: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ és

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$$

Egy deriválható komplex függvény valós és képzetes része teljesíti a Laplace-egyenletet, tehát ha találunk egy deriválható fgv-t, találtunk egy Elektrosztatikai megoldást

Pl.:

$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2ixy}_{iv}$

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u = x^2 - \frac{v^2}{4x^2}$$

Ez minden x-re egy adott u-v görbe

Az eredeti sík a síknegyedben tehát írja le, a síknak azt, amire az $u > 0$ félegyenest fektetjük

Egy reguláris $f(z)$ fgv. sorbafejthető valamely z_0 körül

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z - z_0) = c_1 + c_2 z - c_2 z_0 = a + b z$$

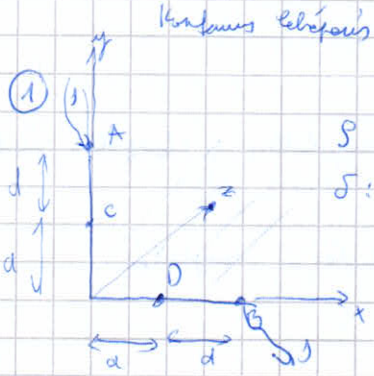
ahol $a = c_1 - c_2 z_0$

$b = c_2$

$\Rightarrow$ tetszőleges reguláris fgv. lokálisan úgy viselkedik, mint a lineáris függvény: szögtartó, aránytartó

Konform leképezés: kicsiben aránytartó és szögtartó

1.



ρ : fajlagos ellenállás

δ : vastagság

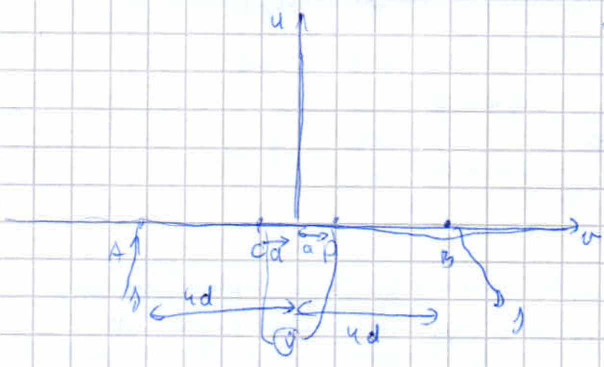
$U_{CD} = ?$

A konzolt a transzformált egy komplex fgv. írja le, ha összemérhető alakúra, amit tudunk számolni, jó.

Hatványozás

Nézzük a $f(z) = z^2$ fgv.-t

Az x tengelyen lévők ott maradnak, a y-on lévők az x tengely negatív oldalára mennek



Ennek szuperpozíciója

Ha csak az A elektródán menne jelen egyenletesen áramolna

Így $j(r) = \dfrac{I}{r\pi\delta}$ sugárirányban

Ebből: $E(r) = \dfrac{\rho I}{\pi\delta}\cdot\dfrac{1}{r}$

$$U_{CD}^{(A)} = \int_D^C E(r)\,dr = \int_{3d^2}^{5d^2} \frac{\rho I}{\pi\delta}\frac{1}{r}\,dr = \frac{\rho I}{\pi\delta}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

Ha csak a B elektródán menne jelen, ugyanez lenne, tehát $U_{CD}^{(B)} = U_{CD}^{(A)}$

$$U_{CD} = 2U_{CD}^{(A)} = \underline{\underline{2\frac{\rho I}{\pi\delta}\ln\left(\frac{5}{3}\right)}}$$

ELMÁG

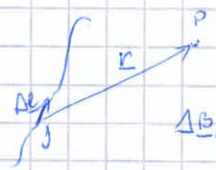
9. gyak (04. 29.)

Ampère-féle gerjesztési törvény

$$\oint \underline{B}\,d\underline{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_D$$

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Biot-Savart-törvény



$$\Delta \underline{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\Delta\underline{l}\times\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

Példa: ①

Egyenes vezető mágneses tere hosszúnál

$$\underline{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

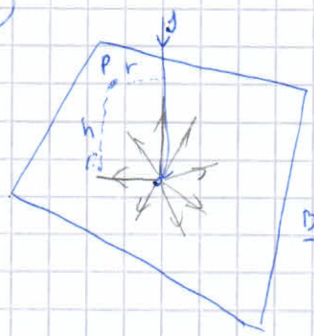
③ Szolenoid belsejében a tér

$$\underline{B} = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

② Kör alakú vezető tere

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

① Mekkora $\underline{B}$ a P pontban (r-re az I-től és h-ra a laptól)



Sejtés az indukcióvonalak a síkkal p.h. sugárban lesznek

Biz 1:

Tükrözzük a rendszert a P és a vezető által tartalmazott síkra!

DE tükrözésnél vigyázni kell

polárvektorok ($\underline{r}, \underline{v}, q\underline{E}$) a vonzás irányát adják meg, az axiálvektorok ($\underline{\omega}, \underline{P}, \underline{B}, \underline{F}$) egy tengely irányát, ami körül forgás van.

A polárvektorok rendesen tükröződnek, az axiálvektorok ~~A-gyel ugyanakkor~~ ha pl. síkban van vágódik, ha merőleges, nem

A tükrözésnél az áramsűrűség megmarad, a B_z megfordul. Ez csak akkor lehet, ha $B_z = 0$. A radiális B_r szintén változna, tehát az is 0. A tangenciális az jó, tehát az ~~irodalmat~~ ⇒ ~~saját irányú~~, érintő irányú $\underline{B}$-k lesznek, körvonalúak □

Felvéve egy kontúrt, a drót mentén

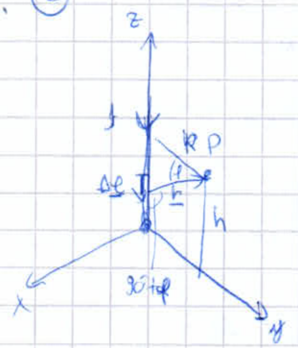
$$B\,2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \quad \text{ha} \quad h > 0$$

$$B = 0 \quad \text{ha} \quad h < 0$$

(2)

a) $B_P = ?$ Biot - Savart

b) $B_P =$ Ampère törvény



a)

$$\operatorname{tg}\varphi_{max} = \frac{h}{R}$$

$$\Delta \underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\Delta \underline{\ell} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

$$z = h - R\operatorname{tg}\varphi$$

$$\Delta \ell = |\Delta z| = \left|\frac{dz}{d\varphi}\Delta\varphi\right| = \frac{R}{\cos^2\varphi}\Delta\varphi$$

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R\frac{1}{\cos^2\varphi}\Delta\varphi \cdot \frac{R}{\cos\varphi}\cdot \sin(90°+\varphi)}{\left(\frac{R}{\cos\varphi}\right)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{R}\Delta\varphi$$

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_{max}}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\sin\varphi_{max} + 1\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\frac{\frac{h}{R}}{\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}} + 1\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} + 1\right)$$

b)

Síma hurokkal számolva

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{ha} \quad h > 0$$

$$B = 0 \quad \text{ha} \quad h < 0$$

Ez nem jól működik, a Bele kell venni az eltolási áramot

$$E(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\rho^2} \qquad \dot{E}(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I}{\rho^2}$$

A felület legyen gömbfelület

$$\Psi(\rho) = E(\rho)\cdot 2\pi\rho H \qquad \text{ahol} \quad \rho = \sqrt{R^2+h^2}$$

Az Ampère-törvény

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 I - \mu_0\varepsilon_0\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I}{\rho^2}\cdot 2\pi\rho\frac{(\rho - h)}{\rho}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{\rho}\right)\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

ELMÁG

10. gyak. (04.28.)

Lorentz-erő: $\underline{F} = Q\,\underline{v}\times\underline{B}$

a Lorentz erő teljesítménye: $P = \underline{F}\,\underline{v} = Q(\underline{v}\times\underline{B})\underline{v} = 0 \Rightarrow$ nincs munkavégzés $\Rightarrow |\underline{v}| =$ áll

1

Az origóból elejtem egy m tömegű Q töltésű részecskét, írjuk le a pályát.

a gravitációs erő kezd gyorsítani, majd a $\underline{B}$ [illegible]

$$m\underline{g} + Q\,\underline{v}\times\underline{B} = m\underline{a}$$

$$m\begin{pmatrix}0\\g\\0\end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}\dot v_x\\\dot v_y\\0\end{pmatrix}$$

x: $Q v_y B = m\dot v_x$

y: $mg - Q v_x B = m\dot v_y$

$\Rightarrow -QB\dot v_x = m\ddot v_y$

$$-QB\frac{Q v_y B}{m} = m\ddot v_y$$

$$-\left(\frac{QB}{m}\right)^2 v_y = \ddot v_y \qquad \omega = \frac{QB}{m}$$

$$v_y(t) = V\sin(\omega t + \varphi_0)$$

KF: $v_y(t=0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

$$v_x = \frac{mg}{QB} - \frac{m\dot v_y}{QB} = \frac{g}{\omega} - \frac{V}{\omega}\omega\cos(\omega t)$$

KF: $v_x(t=0) = 0 \Rightarrow V = \frac{g}{\omega}$

megoldás:

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega}\left(1 - \cos(\omega t)\right)$$

$$v_y(t) = \frac{g}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin(\omega t)$$

$$y(t) = -\frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$$

ciklois pálya

II. megoldás

Vegyünk egy homogén mágneses teret és ebben $\underline{v}$ sebességgel egy részecskét

$$\underline{F_K} = Q\underline{v} \times \underline{B}$$

K' rendszer K-hoz képest $\underline{V}$-vel megy

$$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{V}$$ mit látunk?

naivan $\underline{F_{K'}} = Q\underline{v}' \times \underline{B}$, de ez különbözne $\underline{F_K}$-tól

DE a K' rendszerben $\underline{E}$ és $\underline{B}$ is különbözik

$$\underline{F_{K'}} = Q\underline{v}' \times \underline{B}' + Q\underline{E}'$$

Mit tudunk? az áram a rendszerváltáskor nem változik. TFH van egy I áram K rendszerben a ⊕ töltéshordozók K'-höz képest lassabban mozognak, K'-ben viszont a ⊖ töltések is mozognak $\Rightarrow I' = I$

Csak ha $V \ll c$

Mivel $\underline{B}$ az áram kelti, ezért $\underline{B}' = \underline{B}$

mivel $$Q\underline{v}\times\underline{B} = Q\underbrace{\underline{v}'}_{\underline{v}-\underline{V}}\times\underline{B} + Q\underline{E}'$$

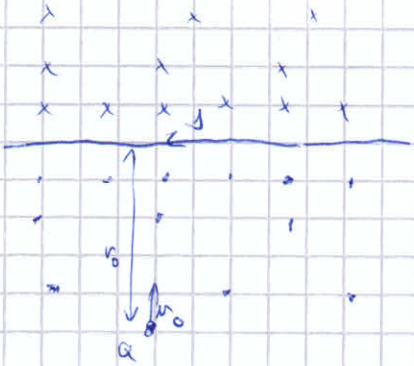
$$0 = Q(\underline{E}' - \underline{V}\times\underline{B}) \quad \Rightarrow \quad \underline{E}' = \underline{V}\times\underline{B}$$

Kompenzáljuk ki g-t $\underline{E}$-vel úgy, hogy átülünk egy olyan rendszerbe, hogy felfelé mutató $\underline{E}$ alakuljon ki $\longrightarrow$ Arra kell mennünk $V = \frac{mg}{QB}$

Ebben a rendszerben $\underline{v}_0 = -\underline{V}$, és a homogén $\underline{B}$ miatt egy körpályán mozog, aminek sugara

$$R = \frac{m^2 g}{Q^2 B^2} \qquad \omega = \frac{V}{R} = \frac{QB}{m}$$ ciklotron frekvencia

2



$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

A vezetéket $\frac{r_0}{2}$-re közelíti meg. $v_0 = ?$

A részecskére Lorentz-erő hat

Adott helyzetben legyen v_x, v_y és a Lorentz miatt $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$

$$m\dot{v}_x = Q v_y B(r)$$

$$m\dot{v}_y = -Q v_x B(r) \qquad \Big| \cdot dt$$

$$m\,dv_x = Q\,dy\,B(r) \qquad (1)$$

$$m\,dv_y = -Q\,dx\,B(r)$$

A (1) egyenlet mindkét oldalát integrálja BO: $0 \to v_0$
JO: $r_0 \to r_0/2$

$$m\int_0^{v_0} dv_x = Q\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{r_0}^{\frac{r_0}{2}} \frac{-dr}{r}$$

$$m v_0 = \frac{Q\mu_0 I}{2\pi}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{v_0 = \frac{Q\mu_0 I}{2\pi m}\ln(2)}$$

II. megoldás

Üljünk át abba a K' rendszerbe, ami a drótra $\xrightarrow{v_0}$ irányba mozog.

Ugyanis a részecske a kérdéses pillanatban megáll

Az érzékelt elektromos tér lefelé mutat, de ~~nem~~ helyfüggő

$$\underline{E}'(r) = \underline{v} \times \underline{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} v_0$$

$$U'(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} v_0\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v_0 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Energiamegmaradás: $\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2}\,v_0\right)^2 + Q\cdot 0 = 0 + Q\frac{\mu_0 I}{2\pi} v_0 \ln\left(\frac{r_0}{r_0/2}\right)$

$$\underline{m v_0 = \frac{\mu_0 I Q}{2\pi \cancel{m}}\ln(2)}$$

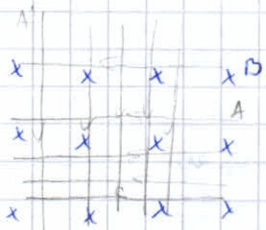
ELMÁG

11. gyak (05.05.)

__Vektorpotenciál:__

$\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$ ← vektorpotenciál

Ez nem egyértelmű, mert az $\underline{A}'(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r}) - \underline{\nabla}\Lambda(\underline{r})$ is jó lenne.



Vegyünk egy homogén teret! Ennek mi az $\underline{A}$-ja?

$$[\mathrm{rot}(\underline{A})]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$$

pl. ha $\underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

De ha $\underline{A}'(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rot}\,\underline{A}'(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

$$\underline{A}'(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r}) + \begin{pmatrix} By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑ Ennek egy gradiensnek kell lennie

Érdekesség: $\mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r}) = 0$ és $\mathrm{div}\,\underline{A}'(\underline{r}) = 0$ Coulomb-mérték

Töltött részecske homogén $\underline{B}$ térben: $\underline{B} = (0\ 0\ B)$

$$Q\underline{v} \times \underline{B} = m\dot{\underline{v}} \longrightarrow \begin{cases} m\dot{v}_x = Q v_y B_z \\ m\dot{v}_y = -Q v_x B \end{cases}$$

Noether-tétel: Ha egy rendszer egy folytonos szimmetriával jellemezhető, akkor által létezik egy megmaradó mennyiség (Noether-töltés)

Ha eltolás van, úgy az impulzus megmarad. (pontosabban a kanonikus impulzus)

$\underline{p} = m\underline{v} + Q\underline{A}(\underline{r})$. Ha A-t vesszük, y irányú nem szimmetrikus a rendszer de x-re igen, tehát p_x megmarad

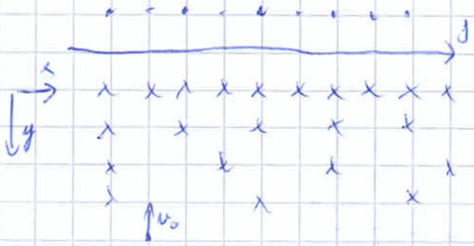
$$p_x = m v_x - QBy = \text{áll} \quad (1)$$

Ha A'-t vesszük, akkor y irányú nem szimmetrikus a rendszer, tehát itt az p_y marad meg

$$p_y = m v_y + QBx = \text{áll} \quad (2)$$

Deriválva (1)-t és (2)-t + számítás: kapjuk a mozgásegyenleteket vagyis

Előző órai példa:



$$\underline{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Olyan $\underline{A}$-t keresünk, ami a vezetékkel ph. eltolás inv.

$A(r)$ Nézzünk egy pontot a vezetőtől r távolságra

E körül a rotáció az elemi def.-fel: $(A_x < 0)$

$$\mathrm{rot}\,A(r) = \frac{-A(r)\cdot a + 0 + A(r+dr)a + 0}{a \cdot dr} = \underline{B}(\underline{r})$$

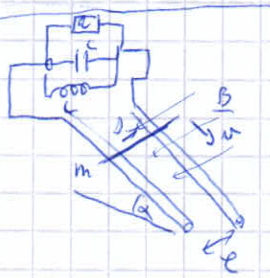
$$\frac{dA}{dr} = B(\underline{r})$$

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{c}\right)$$

$p_x = \text{áll} = m v_x + Q A_x$ a Noether-tétel miatt

$$m \cdot 0 - Q\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0}{c}\right) = -m v_0 - Q\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0/2}{c}\right)$$

$$\underline{v_0 = \frac{Q\mu_0 I}{2\pi}\ln 2}$$ u. e. jött ki a múltkor is ☺



Mi történik a különböző esetekben

Ami tuti: $mg\sin\alpha - IBl = m\dot{v}$ (1)

a)

$RI = Blv$ (2) ezt (1)-be írva:

$$mg\sin\alpha - \frac{B^2l^2}{R}v = m\dot{v}$$

$$-\frac{B^2l^2}{R}\left(v - \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2}\right) = m\dot{v} = m\frac{d}{dt}\left(v - \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2}\right)$$

$$v(t) - \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2} = C e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$ mivel $v(0) = 0$ $\quad C = -\frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2}$

$$v(t) = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$$

b)

$I = C\frac{dU}{dt} = CBl\dot{v}$ (2) ezt írva (1)-be: $mg\sin\alpha - CB^2l^2\dot{v} = m\dot{v}$

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{CB^2l^2 + m} = \text{áll}$$

c)

$L\dot{I} = B\ell v \quad (2)$ ~~(1) + [illegible]~~

$$\Rightarrow \quad I = \frac{B\ell}{L}\int v\,dt = \frac{B\ell}{L}x(t)$$

ezt (4)-be:

$$mg\sin\alpha - \frac{B^2\ell^2}{L}x = m\ddot{x} \qquad \text{legyen } X = x - \frac{mgL\sin\alpha}{B^2\ell^2}$$

$$-\underbrace{\frac{B^2\ell^2}{mL}}_{\omega^2}X = \ddot{X} \qquad \text{harmonikus oszcillátor}$$

$$X(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

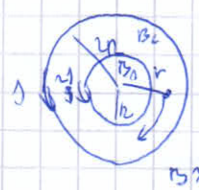
$$\dot{X}(t) = v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{Mivel } \begin{matrix} v(0) = 0 \\ a(0) > 0 \end{matrix}$$

$$v(t) = A\omega\sin(\omega t) \qquad \text{ezért } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

ELMÁG

12. gyakorlat (05. 19.)

(1)



$n = \frac{N}{L}$ $\quad I(t) = \alpha t$

A töltés egy r sugarú körön megy. Ha $r = ?$

$B \approx 0$

$$B_2 = \mu_0 n I$$

$$B_1 = 3\mu_0 n I$$

Maxwell miatt: $\oint \underline{E}\, d\underline{l} = -\frac{d\phi}{dt}$

A tangenciális gyorsulásért a $\underline{F}_t$, a gyorsításért a $\underline{E}$ a felelős

Faraday-törvény: $E(r) \cdot 2\pi r = \frac{d}{dt}\left(B_1 \pi R^2 + B_2 \pi (r^2 - R^2)\right)$

$$E(r) = \frac{3}{2}\mu_0 n \alpha \frac{R^2}{r} + \frac{1}{2}\mu_0 n \alpha \left(r - \frac{R^2}{r}\right)$$

$$v(t) = at = \frac{Q}{m} E(r) t$$

A mágneses erő: $Q v(t) B_2(t) = m \frac{v^2(t)}{r}$

$$Q \mu_0 n \alpha t = \frac{m}{r} \mu_0 n \alpha \left[\frac{3}{2}\frac{R^2}{r} + \frac{1}{2}\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\right] \cdot \frac{Q}{m} t$$

$$1 = \frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{r = \sqrt{2}R}}$$

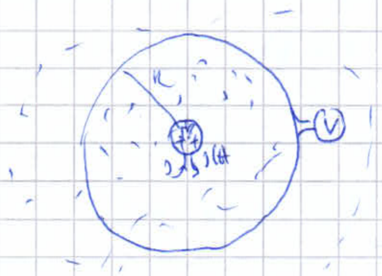
$\boxed{\text{Betatron}}$

$$B_{átl} = \frac{B_1 \pi R^2 + B_2 (r^2 - R^2)\pi}{r^2 \pi} = \frac{3\mu_0 n I R^2 + \mu_0 n I R^2}{2R^2} = 2\mu_0 n I = 2B_1$$

② $\boxed{\text{I.}}$

$I(t) = \alpha t$

$R \gg r$



Mit mér a voltmérő

$$U_i = \oint E\,dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

Távolról nézve dipóllal közelíthető, de közelében nem egyszerűbb a teljes fluxust úgy lehetne ezzel számolni

Viszont a körön kívüli fluxus a körön belülivel ellentett

$$B(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,r^2\pi}{\rho^3}$$

$$\phi = \int_{\rho=R}^{\infty} B(\rho)\,d\rho \cdot 2\pi\rho = \int_R^{\infty} \frac{\mu_0 I r^2 \pi\,d\rho}{2\,\rho^2} = \frac{\mu_0 I r^2 \pi}{2R}$$

$$\underline{U_i = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R}\alpha}$$

$\boxed{\text{II.}}$ Kölcsönös indukciós együttható

ϕ_{12}: Az egyes áram által keltett tér fluxusa a 2 áramkörben

$$\phi_{12} = M_{12}\, I_1$$

M_{12}: Az 1 kör a 2-re vonatkozó kölcsönös indukciós eh-ja

$$\phi_{12} = \int_{S_2} \underline{B}_1 d\underline{S}_2 = \int_{S_2} \operatorname{rot} \underline{A}_1 d\underline{S}_2 = \oint_{\partial S_2} \underline{A}_1 d\underline{l}_2$$

Biot-Savart a vektorpotenciálra: $\underline{A}_1(\underline{r}_2) = \oint_{1} \frac{I_1\, d\underline{l}_1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}\frac{\mu_0}{4\pi}$

$$\phi_{12} = \oint_1\oint_2 \frac{I_1\, d\underline{l}_1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}\, d\underline{l}_2\, \frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1\oint_2 \frac{d\underline{l}_1 d\underline{l}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$$

Tehát $\underline{M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1\oint_2 \frac{d\underline{l}_1 d\underline{l}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}}$ Emiatt $M_{12} = M_{21}$

Konkrét eset

$$U_i = \frac{d\phi_{12}}{dt} = \frac{d}{dt}(M_{12} I_1) = M_{12}\alpha = M_{21}\alpha = \underbrace{B_{2k}\cdot r^2\pi\alpha}_{I_p} = \underline{\frac{\mu_0 r\pi^2}{2R}\alpha}$$

egyezik ✓