EVOLÚCIÓS JÁTÉKELMÉLET

1. előadás (09. 08.)

Szóbeli vizsga, 2 tétel (1 választott, 1 húzott)

(elvileg nem kell hozzá a bizonyítós rész, de a vázlat igen)

Előadás hetente, kedd 16:00, terem (szünetekben zene ☺)

Scheuring István

Példa: Lázadás ok nélkül (1950): mikor kell kiugrani az autóból?

én \ ellenfél	egyenes	kitér
egyenes	-100	100
kitér	10	20

„chicken game"

Mindig az ellenféllel ellentétes dolgot érdemes csinálni

Másik példa: „hótorlasz játék" lapátoljak-e vagy ne?

én \ ellenfél	lapátolás	nem lapát
lapátol	$b - \frac{c}{2}$	$b - c$
nem lapátol	b	0

b: hazaérés haszna

c: lapátolás költsége

$b > c$, tehát érdemes lapátolni

itt is az ellentétes dolgot kell csinálni

Mindkét helyzetben a lényeg, hogy megjósolom a másikat, hogy a számomra nyereséges opciót fogom választani, így ő ehhez képest működik ⇒ félre kell vezetni (politika, közgazdaság, stb...)

Ha sokszor játsszuk a játékot, akkor az a kérdés, hogy mit kell tenni, hogy átlagosan jobban járjak, mint a többiek?

Ez az ugyan a közgazdaságban szubjektív, mert értékrend függő, de a biológiában az univerzális mérték a „fitness", azaz a szaporodóképes utódok száma

Def: A stratégia olyan viselkedési mintázat, ami minden szituációban egyértelműen megmondja a viselkedést

Def: Kifizetési mátrix az összes lehetséges helyzetben a nyereség, ami a fitness

Egy stratégia ESS, ha semmilyen más ritka stratégia nem tud benne elterjedni

evolúciósan stabil stratégia

Feltevések:
- ∞ nagy populáció
- aszexuális populáció
- jól kevert populáció
- véges sok stratégia
- páros KH (bár ez a biosznban nem mindig így van)
- azonos egyedek
- szimmetrikus helyzet

Alkalmazzuk a definíciót a feltevésekre:

Az ESS feltétele: $W(I) > W(M)$

I: az ESS stratégia
M: mutáns stratégia
W: fitness
p: I-t követő populáció
1-p: M-t követő populáció
$(p \gg 1-p)$
$E(k,l)$: A mátrix k, l eleme.

$$W(I) = \underset{\text{alap fitness}}{W_0} + \underset{\text{többlet, ha I-vel találkozik}}{p \cdot E(I,I)} + \underset{\text{többlet, ha M-mel találkozik}}{(1-p) \cdot E(I,M)}$$

$$W(M) = W_0 + pE(M,I) + (1-p) \cdot E(M,M)$$

Az (1-p)-s tagokat elhagyva, az egyenlőtlenség: $\underline{E(I,I) > E(M,I)}$

Ez az ESS elégséges.

Ha $\underline{E(I,I) = E(M,I)}$, akkor az elhanyagolás nem jó, tehát $\underline{E(I,M) > E(M,M)}$

tehát : ' $E(I,I) > E(M,I)$

'' $E(I,I) = E(M,I)$ és $E(I,M) > E(M,M)$

Héja - galamb játék (HD-játék):

Mindenki egy területen él, de a jó terület kevés.

lehetséges stratégiák : H := addig harcol, amíg győz vagy legyőzik

D := színlel, és elfut ha megtámadják.

a győzelem V nyereség, a sérülés C költség. A mátrix :

	H	D
H	$\frac{1}{2}V - \frac{1}{2}C$	V
D	0	$\frac{1}{2}V$

kikapcsoltam a [illegible] populációs gondolatát.

Lehet-e a D stratégia ESS ?

feltétel alapján tehát igaz-e hogy $\underset{V/2}{E(D,D)} > \underset{V}{E(H,D)}$ ez nem igaz.

$\Rightarrow$ A D soha nem ESS

[Kocsmában egy sörrel álldogáló emberek nem fognak szaporodni]

Beethoven Cello Sonata No 5.

EVO. JÁTÉKELM.

2. előadás (09.15.)

héja-galamb játék:

	H	D
H	$\frac{1}{2}(V-C)$	V
D	0	$V/2$

Megállapítottuk, hogy D az nem ESS, mert $E(D,D) < E(H,D)$

Kérdés: lehet-e H ESS?

Ekkor $E(H,H) > E(D,H)$ kell

$$\underset{\frac{1}{2}(V-C)}{E(H,H)} \quad \underset{0}{E(D,H)}$$

ez teljesül ha $V > C$

$\Rightarrow$ H ESS ha $V > C$

biológiai jelentés: ha a nyeremény nagyobb, mint a költség, akkor az agresszivitás megéri

Mi van, ha $V < C$? ilyenkor se H se D nem ESS. Akkor mi van?

A táblázat alapján itt mindig az a jó, ha az ellentétest választom (u.a. mint a gyáva nyúl)

mit kell csinálni akkor? Azt, hogy átlagosan jól járjunk, mert sokszor játsszuk le.

Kevert stratégia: Olyan egyed, aki a tiszta stratégiákat különböző valószínűséggel választja a játék során.

Van kevert ESS? Hogy találjuk meg?

Bishop–Cannings-tétel (1978): Ha az I ESS, akkor

$$E(A,I) = E(B,I) = E(C,I) = E(I,I)$$

ahol az I kevert stratégiában az A, B, C tisztán vannak benne.

nem bizonyítjuk, de érzékeltetjük.

TFH $E(A,I) > E(\cdot,I)$. Akkor érdemesebb az A-t jobban belevenni, tehát nem lehet itt nem =.

Az ESS második feltétele az volt, hogy ha $E(I,I) = E(M,I)$
akkor $E(I,M) > E(M,M)$ (*)

kevert esetben az első mindig igaz, ezért a második összefüggést kell nézni.

Nézzük a mi játékunkat! Mi az az I, amire igaz, hogy

$E(H,I) = E(D,I)$? $\qquad I = p\cdot H + (1-p)\cdot D$

$$E(D,I) = p\,E(D,H) + (1-p)\cdot E(D,D)$$
$$E(H,I) = p\,E(H,H) + (1-p)\,E(H,D)$$
$\|$ ← feltétel miatt.

beírva: $(1-p)\frac{V}{2} = p\,\frac{1}{2}(V-C) + (1-p)V \implies p = \frac{V}{C}$

A kettő között $0 < p < 1$, ami jó

ha $V > C$, akkor $p > 1 \implies$ csak a H-t érdemes választani

DE ahhoz, hogy ez tényleg ESS legyen, az (*)-t is be kell látni, ahol M egy tetszőleges kevert stratégia.

megjegyzés: ha $V < C$, akkor bármely kevert stratégia jobb, mint a tiszták.

bizonyítás: $J = qH + (1-q)D$. Igaz-e, hogy $E(J,H) > E(H,H)$?

mivel $qE(H,H) + (1-q)\cdot E(D,H) > E(H,H)$

$qE(H,H) > E(H,H)$ ✓

a másik: $E(J,D) > E(D,D)$

$$q\,E(H,D) + (1-q)E(D,D) > E(D,D)$$
$$qV + \frac{V}{2} - q\frac{V}{2} > \frac{V}{2}$$
$$q\frac{V}{2} > 0 \ ✓$$

$\implies$ A kevert fog terjedni a tiszták között

A kevert stratégiák 2D-s vektorok $\quad I \to \begin{pmatrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{pmatrix} p_2$

$M \to \begin{pmatrix} q_1 \\ 1-q_1 \end{pmatrix} q_2$

$$E(I,M) = E(H,H)\,p_1 q_1 + E(H,D)\,p_1 q_2 + E(D,H)\,p_2 q_1 + E(D,D)\,p_2 q_2 =$$

$$= \sum_{i,j} E_{ij}\, p_i q_j = \underline{I} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{M}$$

Azt kell belátni, hogy $E(M,I) > E(I,I)$ és $E(I,M) > E(M,M)$

hozzuk az előbbit rendezett alakba: $E(I,M) - E(M,M) + E(M,I) - E(I,I) > 0$

$$\underline{p}^T E \underline{q} - \underline{q}^T E \underline{q} + \underline{q}^T E \underline{p} - \underline{p}^T E \underline{p} > 0$$

$$(\underline{p} - \underline{q})^T E \underline{q} + (\underline{q} - \underline{p})^T E \underline{p} > 0$$

$$(\underline{p} - \underline{q})^T E (\underline{q} - \underline{p}) > 0$$

$$\begin{pmatrix} p-q, & q-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(V-c) & V \\ 0 & \frac{V}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q-p \\ p-q \end{pmatrix} > 0$$

$$\frac{1}{2} c (p-q)^2 > 0 \quad \rightarrow \text{mindig igaz} \quad \checkmark$$

Tehát

ha $V > C$ $\quad H$ ESS

ha $V < C$ $\quad I = \begin{pmatrix} V/c \\ 1 - V/c \end{pmatrix}$ $\quad$ ESS

Kérdés: • lehet-e polimorf megoldás? (Héja játék esetén)
• ha lehet, u.a. lesz-e az egyensúlyi arány?

Legyen P a H-t játszók aránya! Számoljuk ki a D-t és H-t játszók átlagos fitnesszét

D-re: $P\,E(D,H) + (1-P)\,E(H,H)$

H-ra: $P\,E(H,H) + (1-P)\,E(H,D)$

)) ! a feltétel szerint

korábban ugyanezt írtuk fel, p-vel, tehát az egyensúly u.a.

$$\Rightarrow P = \frac{V}{c}$$

Kérdés: ez stabil-e, azaz P megváltoztatásával visszatér-e?

Mi történik, ha $P+\delta$ -val számolunk?

A stabilitás feltétele, hogy $P+\delta$ esetén $W(H)$ kisebb legyen, ezért az agresszívan visszaszorulna.

Beláthatjuk, hogy ez így van (HF)

megjegyzés: ez általában nem így van, azaz általában a populációs állapot stabilabb, mint az ESS koncepció.

Játékok több ESS-sel

Vannak, akik a bal oldalon és a jobb oldalon járnak, hogy melyik domináns.

	A	B
A	$-k$	$-k-s$
B	$-k-s$	$-k$

k: dominancia eldöntésének költsége

s: tévedés költsége

Lehet-e A ESS, azaz $E(A,A) > E(B,A)$

$$-k > -k-s \quad \checkmark$$

Lehet-e B ESS? mivel szimmetrikus, igen.

A kevert stratégia ESS-e: $E(A,I) = E(B,I)$

a szimmetria miatt $I \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

igaz-e erre, hogy $E(I,M) > E(M,M)$

$M = A$-ra: $\frac{1}{2}(-k) + \frac{1}{2}(-k-s) > -k$

$$-k - \frac{s}{2} > -k \quad ↯$$

$\Rightarrow$ nincs kevert ESS

Mi dönti el, hogy a populáció melyik állapotban lesz?

A kezdeti állapot

EVOL JÁTÉCM

3. előadás (09.22.)

Melyik ESS állapotba konvergálunk? A KF-től függ.

Mai játék: kooperatív vagy tudunk anélkül valamit b eséllyel, c költséggel és s plusz nyereséggel.

	K	Ö
K	$b-c+s$	$b-c$
Ö	b	$\emptyset$

TFH $b < c$ és $b-c+s > b$ azaz $s > c$

Mi lesz az ESS? K-ban a kell $E(K,K) > E(Ö,K)$ ✓

Ö-ban a kell $E(Ö,Ö) > E(\cancel{K},Ö)$ ✓

Van-e kevert ESS?

Mi lesz az az I, amire $E(K,I) = E(Ö,I)$

ha kiszámoljuk az jön ki $p = \frac{c-b}{s-b}$

DE ez nem lesz ESS, mert terjedni fog benne K és Ö is.

Ezt értjük, de ha egy kezdeti tisztán önző állapotból hogyan jutunk el a kooperatívig, ott van egy „potenciálhegy". ez egy érdekes kérdés de nem érdekel.

Tudunk-e olyan játékot, ahol az egyik stra tiszta, a másik kevert:

	H	D	R
H	$\frac{1}{2}(v-c)$ -1	v 2	$\frac{1}{2}(v-c)$ -1
D	0 0	$\frac{1}{2}v$ 1	$\frac{1}{2}v$ 1
R	$\frac{1}{2}(v-c)$ -1	$\frac{1}{2}v$ 1	$\frac{1}{2}v$ 1

R: megtorló (úgy viselkedik, mint a másik)

legyen $v=2$, $c=4$

itt a D és R nem megkülönböztethető, de csavarjuk!

R': olyan mint az R, de felismeri a D-t és néha rátámad, így a D-R és R-D kicsit módosul

	H	D	R'
H	-1	2	-1
D	0	1	$0{,}8$
R'	-1	$1{,}2$	1

itt mi az ESS?

Az eredeti H-D játékban az ESS I, ami $p = \frac{V}{C} = \frac{1}{2}$ -del választja H-t.

Nézzük, hogy elterjed-e R'? $E(I,I) \stackrel{?}{>} E(R',I)$

$$E(I,I) = \tfrac{1}{2}\{E(D,H) + \tfrac{1}{2}E(D,D)\} = \tfrac{1}{2}$$

$$E(R',I) = \tfrac{1}{2}E(R',H) + \tfrac{1}{2}E(R',D) = 0{,}1 \quad \Rightarrow \text{ R' nem terjed, tehát I ESS.}$$

HF: minden R'-t tartalmazó mutánsra is igaz.

Megmutatjuk, hogy R' is ESS.

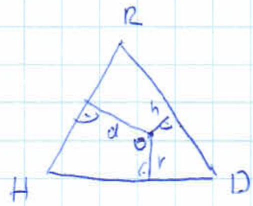
Ekkor $E(R',R') > E(M,R')$ ahol M bármilyen mutáns (akár kevert is).

$M =$ D-re, H-ra triviális. Mivel az R' oszlopban a R' sorban a legnagyobb, a mutánsok ennél tuti kisebbek.

Általános tétel: ha a főátlóban levő elem a legnagyobb az oszlopban, akkor az egy tiszta ESS.

A H-D játékban nincs tiszta ESS, de a HDR'-ban már van.

Tetszőleges ábrázolás:

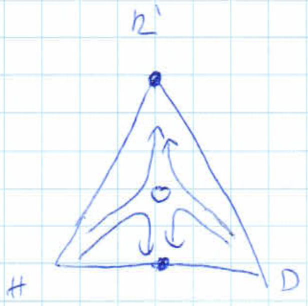


$d+r+h = 1$ $\forall$ belső pontra

Bz:

Van 3 Δ-ünk: HRO, ROD, DOH.

Területük: $\frac{ar}{2} + \frac{ad}{2} + \frac{ah}{2} = \frac{am}{2} \Rightarrow r+d+h = m$ $\square$



A két • a két pont ESS-ünk.

Van-e még egy $\exists$, ami kielégíti a BC-tételt.

Kell legyen valahol középen egy instabil állapot.

Az instabil pont tulajdonságai segítene megérteni, hogy a kiválasztási kezdeti állapotoktól merre jutunk.

<u>Játék ESS nélkül.</u>

Kő, papír, olló játék biológiai megfelelője.

	K	P	O
K	ε	-1	1
P	1	ε	-1
O	-1	1	ε

Azonos jel esetén ε, ami $-1 < \varepsilon < 1$

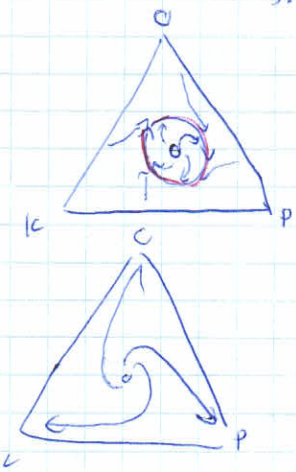
Tiszta ESS nincs, mert a főátló mindenhol < 1. Keressünk kevertet!

Mivel kijelölt stratégiák egymással felcserélhetők, tehát ha van ESS, ott az E-k egyenlők.

$$I = \left(\tfrac{1}{3}; \tfrac{1}{3}; \tfrac{1}{3}\right). \quad \text{igaz, hogy } E(I,M) > E(M,M) \text{ ?}$$

$$E(I,M) = \tfrac{1}{3}\varepsilon \ , \quad E(M,M) = \varepsilon$$

Ha $\varepsilon > 0$ akkor nincs egyértelmű ESS. Mi történik a populációban?



- lehet egy kiszorulás a szélre.
- az is lehet, hogy egy zárt görbén áll ún. „stabil állapot"
- mások is vannak

Mitől függ, hogy melyik? Attól, hogy hogyan definiáljuk a rendszer dinamikáját, ami hogyan változtatja a stratégiák gyakoriságát.

<u>Replikátor dinamika</u>

- $s_1, s_2 \dots s_n$ tiszta stratégiák
- $p_1 \ p_2 \dots p_n$ $\quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- $E(i,j)$: Az s_i-t játszó nyereménye az s_j-vel játszó ellen.

az átlagos fitness: $W_i = c + \sum_{j=1}^{n} E(i,j) p_j = c + w_i$

populáció átlagos fitness: $\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} p_i W_i = c + \underbrace{\sum_{i,j} p_i E(i,j) p_j}_{\overline{w}}$

N_i: az S_i-t követők száma

A stratégiát váltók száma arányos azzal, amennyi a stratégia fitnesse:

$$\frac{dN_i}{dt} = W_i N_i$$ ← ez az exponenciális szaporodás modellje

Tudjuk, hogy $p_i = \dfrac{N_i}{\sum_{j=1}^{n} N_j}$

Minket $\frac{dp}{dt}$ érdekel, ezért helyettesítsük be:

$$\boxed{\frac{dp_i}{dt}} = \frac{\dot N_i \cdot \sum_j N_j - N_i \sum_j \dot N_j}{\left(\sum_j N_j\right)^2} = \frac{W_i N_i}{\sum_j N_j} - p_i \sum_j \frac{W_j N_j}{\sum_k N_k} =$$

$$= (c+w_i)p_i - p_i \sum_j (c+w_j) p_j = w_i p_i - p_i \sum_j w_j p_j =$$

$$= \boxed{p_i (w_i - \overline{w})}$$

ha adott stratégia jobb mint átlag akkor nő, ha rosszabb, akkor csökken.

Mik a fix pontok, ami alatt $\dot p_i = 0$, és melyik stabil?

Állítás: Ha tiszta ESS akkor lokálisan stabil

Ha valódi ESS akkor globálisan stabil.

Általában visszafelé nem igaz az állítás.

EVOL JÁTÉKELM

4. előadás (09.29.)

replikátor dinamika arról szól, most nem csak a ES. halmazokat tudjuk, hanem azt, hogy honnan hova jutunk.

Az ESS-ek fix pontok.

Emlékeztető: Ha véges db tiszta stratégia van, páros KH-val, akkor van egy E mátrix

Az i-ik stratégia valószíny. $p_i(t)$

$$\frac{dp_i}{dt} = (w_i - \overline{w})\,p_i \qquad \text{ahol} \qquad w_i = \sum_{j=1}^{n} E_{ij}\,p_j$$

$$\overline{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j\,p_j$$

Mivel $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ezért ez $n-1$ db független egyenlet.

Oldjuk meg a héja-galamb játékot!

$V=2,\ C=4$

	H	D
H	-1	2
D	0	1

$H \to p$

$D \to 1-p$

$$w_H = -1p + 2(1-p) = 2-3p \ ; \quad w_D = 0\cdot p + 1\cdot(1-p) = 1-p$$

$$\overline{w} = (2-3p)p + (1-p)(1-p) = 2p - 3p^2 + 1 - 2p + p^2 = 1 - 2p^2$$

Az egyenlet: $\frac{dp}{dt} = (1 - 3p + 2p^2)\,p$

HF: nagyobb tetszőleges KF-re.

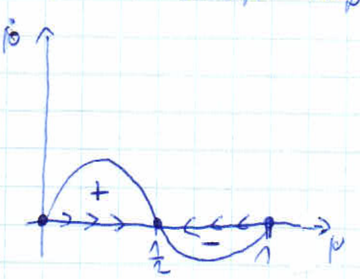
minket érdekel a fix pontok és azok stabilitása érdekel.

$$\dot{p} = 0 \implies (1-3p+2p^2)\,p = 0 \implies p_1^* = 0$$

$$p_3^* = 1$$

$$p_2^* = \tfrac{1}{2}$$

A stabilitást a fázisdiagram adja meg:



Az $\frac{1}{2}$ alatt a p nő, fölötte csökken

$\Rightarrow$ az $\frac{1}{2}$ az egyetlen stabil fixpont.

Korábban is ezt kaptuk ESS-nek:

[dinamikus - nem ESS játékokkal]

EVOL JÁTÉKM.

9. előadás (10.06.)

Aszimmetrikus mátrixjátékok

Eddig minden játékost egyenlőnek tekintettük, de milyen különbségek lehetnek

- képességek
- források birtoklása (tulajdon, megszerzési kérdés) } ezekkel fogunk foglalkozni
- stratégiahalmaz
- nyereségek nagysága

Hogy definiáljuk az ESS-t? nem egy stratégiát keresünk, hanem stratégiapárt.

Def: Az $\{A, B\}$ pár ESS, ha míg A' az I. szituációban, hogy $\{A', B\}$ nagyobb kifizetést kapjon, mint $\{A, B\}$ és u.a. B'-re.

Nézzük a HD játékot, de mindig van egy tulajdonos és betolakodó.

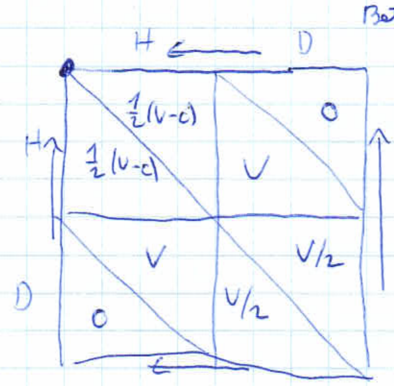
Két mátrixot kell felírni:

Tulaj \ Betolakodó	H	D
H	$\frac{1}{2}(V-C)$	V
D	0	$V/2$

betolak. \ Tulaj	H	D
H	$\frac{1}{2}(V-C)$	V
D	0	$V/2$

itt most mindkét mátrix u.a. de nem feltétlen (bimátrix játékok)

A 2 mátrixból csináljunk egyet!



$V > C$

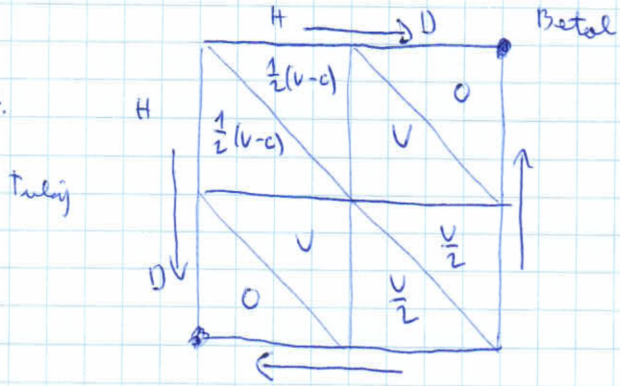
TFH a betolakodó H, mit érdemes ellene játszani? válasz: H-t
TFH a betolakodó D-t játszik mit érdemes? válasz: H-t
⇒ tulajdonosként H-t érdemes

Ugyanilyen logikával a betolakodónak is érdemesebb H-t játszani.

⇒ A $\{H, H\}$ az ESS.

Itt nem volt semmi új, mert mátrix esetben is ez volt.

Mi van, ha $V < C$?



$V < C$

Két irányban is található a nyilak $\Rightarrow$ 2 ESS: $\{H_T, D_B\}$; $\{D_T, H_B\}$

Állítás: Asszimetrikus vetélkedés játékok esetén, ha a felek tudják, hogy milyen szerepben vannak, akkor csak tiszta stratégia pár lehet ESS.

Érdekes, hogy ha az összecsapás költséges, akkor nincs nyílt harc.

Található, hogy a $\{D_T, H_B\}$ is ESS, de nagyon ritkán gondolják, hogy előfordul.

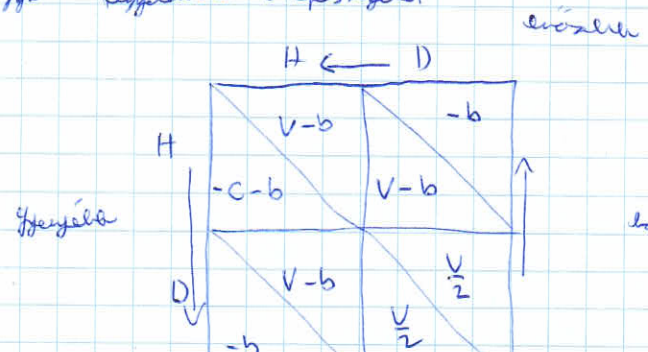
Pl.: számos madárnál csak akkor van harc a territóriumért, ha a tulajdonosi szerep nem egyértelmű (pl.: a tulajdonos meghal, vagy új ... van a szaporodásban)

pl: oroszlánok, lepkék és fényfoltok

Miért ritka a $\{D_T, H_B\}$? mert a képességek közti aszimmetriát nem vettük figyelembe, de valójában az ... a birtokot, aki erősebb.

TFH kialakul a birtoklási rendszer, ekkor akinek nincs birtoka egyre ritkábban talál, mert mindig D-t játszik. $\Rightarrow$ A birtok egyre értékesebb $\Rightarrow$ egy idő után átmegy $V > C$-be.

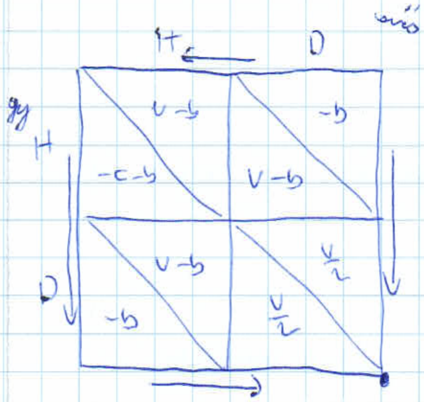
Vegyük figyelembe a képességeket



- erősebb mindig győz
- a játék előtt becslés van, de ennek költsége van: b

ha $\frac{V}{2} > b$

ESS pár: $\{D_{gy}, H_e\}$



$\frac{V}{2} < b$

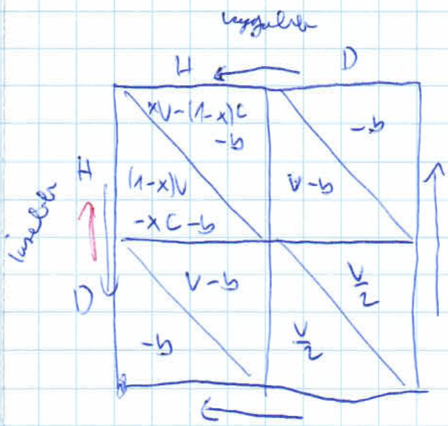
ESS pár: $\{D_{gy}, D_e\}$

$\Rightarrow$ ha a harcolás költséges akkor a nem-agresszív állapot a jó.

Általános tapasztalat: Az aszimmetrikus arbitrális stratégiák felé mutatnak.

kivétel, ha a zsákmány nagyon értékes.

Mi van, ha a nagyobbik x eséllyel nyer.



$$\left.\begin{array}{l} \frac{V}{2} > b \\ xV-(1-x)c > 0 \\ (1-x)V - xc < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{H_N, D_K\} \text{ ESS}$$

$\Downarrow$

$x > \frac{1}{2}$ vagyis a harcolás jobb lesz egyre, mint a védelem.

$$\left.\begin{array}{l} xV-(1-x)c > 0 \\ (1-x)V - xc > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{H_K, H_N\} \text{ ESS}$$

$\Downarrow$

$V > C \Leftarrow$ ezt láttuk a szimmetrikus esetben.

pl.: gímszarvas bőgés: • 6% lesz egy bőgés alatt megsérül

25%-a / élet

20% testtömegét elveszti

tehát ez költséges folyamat.

I. megnézik egymást messziről

II. bőgnek és a hangszínből megbecsülik egymás testi adottságait

III. párhuzamos séta, itt megnézik a másikat közelről is

IV. harc

Pl.: közönséges varangy

Jön a nőstény, akire ráugranak a hímek és nem engedik, amíg az nem rakja le ikráit.

⇒ nagyon erős a kompetíció a hímek között

előbb brekegnek.

csináltak kísérletet, ahol más hangját játszották be, mint amilyet hallottak

4 eset: nagy béka, nagy brekeg ← ettől féltek legjobban

nagy béka, kis brekeg ⇐ a felsőt jobban féltek

kis béka, nagy brekeg ↙

kis béka, kis brekeg ← ettől féltek legkevésbé

tanulság: a méret a fontos infó, de a brekegés is számít.

kérdés: miért brekeg a kis béka? mert a létraalján úgyis lesz..., de talán...

jobb brekegni, mint nem brekegni.

EVOL JÁTÉKM

6. előadás (11.13.)

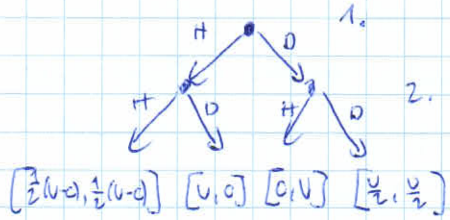
Asszimetria az időzítésben:

A játék szekvenciálisan történik, pl.: az egyik hamarabb választ és csak utána a másik.

1. \ 2.	H	D
H	$\frac{1}{2}(V-C)$, $\frac{1}{2}(V-C)$	V, 0
D	0, V	$V/2$, $V/2$

Tábla

← így is elmondható, de inkább rajzoljuk az extenzív formát:



ha $V<C$, akkor a 2-nak az ellentétet érdemes választani

Az elsőnek a kettő lehetőség közül azt választani, ahol többet kap

$\Rightarrow$ (H, D) stratégiapár lesz az ESS.

Replikátor dinamika asszimetrikus esetben:

B \ A	a	b
a	w^A_{aa}, w^B_{aa}	w^A_{ab}, w^B_{ab}
b	w^A_{ba}, w^B_{ba}	w^A_{bb}, w^B_{bb}

Külön kell a és b előfordulását vizsgálni A és B csoportban.

Az A-nál p, $(1-p)$

A B-nél q, $(1-q)$

Levezetés jegyzetben:

$$\dot{p} = (w^A_a - \bar{w}^A)\, p$$

$$\dot{q} = (w^B_a - \bar{w}^B)\, q$$

Konkrét példa vizsgálata: Agelenopsis valami. Ez egy pókfaj

Van valami tölcsére, amiből rohamoznak és védi a kiszáradástól

A hálókhoz sok választás, de kevés hálóhely

Ha: 3,3 mg/nap növekedés jó hálóhellyel

8 mg/nap csökkenés rossz hálóhellyel

A helyfoglalásnál először ki kell deríteni, hogy van-e már ott más és ha van, érdemes-e vele összecsapni. SR. kutató 33 viselkedési elemet figyelt meg, mi ezeket nem vesszük.

4 fázis:

- tájékozódás: megnézik, hogy van-e ott valaki és milyen
  - rezgetés: megrezgetik a hálót hogy megtudják mekkora a másik pók tömege
- jeladás: intenzív hálórezgetés és rángás.
  - Általában a kisebbik gyorsan hanyatló sztereotip viselkedést mutat.
- fenyegetés: egymás felé rohangálnak és próbálják megfélemlíteni a másikat
- érintkezés: megragadják a lábaikat és általában komoly sérülést okoz.

Lehetőségek:

1) Ha a tulaj sokkal nagyobb, akkor a jeladás után visszalép a betolakodó

2) Ha a betolakodó a sokkal nagyobb, akkor a tulaj lép vissza.

3) Ha kb. egyformák, akkor hosszú harc után a tulaj győz, de nincs bunyó

4) Ha a tulaj egy kicsit kisebb és a háló értékes, akkor van verekedés.

Miért van ez így? Erre alkotott matematikai modellt PH és SR.

Tapasztalat:
- A hálóhely jóságának aránya kalóriában adott
- Az, hogy egy háló jó-e, csak a tulaj tudja

Feltevések:
- A hálóhelyek k része V, $1-p$ része v alól $V > v$
- HD játékot játszanak
- Becslés során az $x = \frac{m_{tulaj}}{m_{bet}}$ nagyságot becsülik, és a tulaj győzelmi ~~[illegible]~~ esélye arányos x-szel.
- A háló értékét csak a tulaj ismeri, a betolakodó az átlagot tudja.
-

Most, hogy a tulaj ismeri a betolakodó stratégiáját, bevezethetünk egy új játékost:

CH (feltételes héja): → H-t játssza, ha V
→ D-t játssza, ha v.

Mi lesz az ESS az x fv.-ében?

Betolakodó

		H	D
Tulaj	H	$xE-(1-x)C$ \ $(1-x)E-xC$	E \ 0
	CH	$p[xV-(1-x)C]$ \ $p[(1-x)V-xC]+(1-p)v$	$pV+(1-p)\frac{v}{2}$ \ $(1-p)\frac{v}{2}$
	D	0 \ E	$E/2$ \ $E/2$

ahol E az átlagos forrás:

$E = pV + (1-p)v$

Feltételezzük, a betolakodó H-t játszik, mit érdemes a tulajnak játszani:

$H_T \mid H_B$:

$$\left.\begin{array}{l} xE-(1-x)C > p[xV-(1-x)C] \\ xE-(1-x)C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > \frac{C}{v+C} \\ x > \frac{C}{E+C} \end{array}\right\}$$

mivel $E > v$, ezért a szűkebb feltétel: $x > \frac{C}{v+C}$

$CH_T \mid H_B$

$$\left.\begin{array}{l} p[xV-(1-x)C] > xE-(1-x)C \\ p[xV-(1-x)C] > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \frac{C}{v+C} \\ x > \frac{C}{C+V} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C}{C+V} < x < \frac{C}{C+v}$$

$D_T \mid H_B$

$$\left.\begin{array}{l} 0 > xE-(1-x)C \\ 0 > p[xV-(1-x)C] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x < \frac{C}{E+C} \\ x < \frac{C}{C+V} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x < \frac{C}{C+V}$$

Tehát H-val szemben a tulaj stratégiája x fv.-ében:

$H_T \mid D_B$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} E > pV + (1-p)\frac{v}{2} \\ E > \frac{E}{2} \end{array}\right\}$ ← ez mindig teljesül

Nézzünk néhány valós adatot

$$p = \frac{1}{4} \qquad v = \frac{1}{2}c \qquad V = 2c$$

$H_B \mid H_T$ $\quad$ $(1-x)E - xc > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{7}{15}$

$H_B \mid CH_T$ $\quad$ $p[(1-x)V - xc] + (1-p)v > (1-p)\frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{11}{12}$

$H_B \mid D_T$ $\quad$ $E > E/2$ $\quad$ mindig teljesül

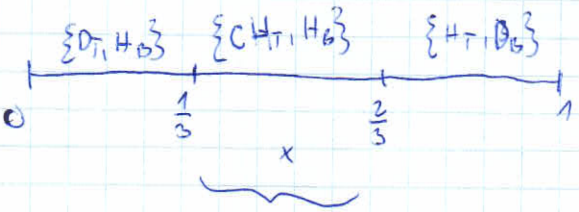
---

ez már a kövi órai de ide tartozik

Mindkét szereplőre meg kell keresni a kölcsönös optimális helyzetet.

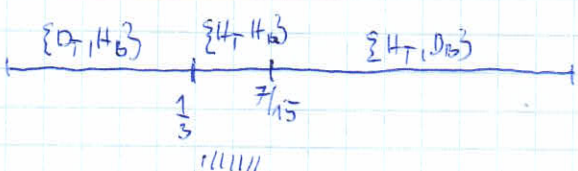
Az egyik fa-ban a másikat tudjuk, össze kell fésülni, ugyanis vannak párok, amik együtt ESS

T-csoportjában végeztünk



Nem egészen u.a.m.a kísérletben, de szerint kvalitatív igen.

ez a B csoportjára ugyanez



itt van összecsapás, akkor, ha a T kicsit kisebb, mint a betolakodó

⇒ 2 lehetséges ESS, és a második az, amit megfigyeltek. Hogy miért, azt a dinamika dönti el.

Intuíció szerint jobb a második, mert itt kisebb a harc esélye.

EVOL JÁTELM

7. előadás (10.20.)

Játék a populáció ellen

Eddig a konfliktus alapja a forrás megszerzése volt.

DE sokszor a siker attól függ, hogy a környezetem mit játszik.

Példa: nemek aránya.

A legtöbb faj esetében 1:1, de elég lenne kevés hím is. Miért nem mégis több?

Szülői érvelés: Minden szülő sok nőstény és kevés hím utódot hoz létre. Ha megjelenik egy sok hímet szülő mutáns, akkor annak gyerekei vagy többen lesznek ⇒ terjedni fog.
Ugyanez fordítva.

Megjegyzés: • A méheknél a rokonsági fok $♀ : ♀ = \frac{3}{4}$
$♀ : ♂ = \frac{1}{4}$

De a királynő mindkettővel $\frac{1}{2}$. ⇒ A királynő ösztönzi a hím utódok nevelését

- Vannak baktériumok (pl.: wolbachia) amik a nőstényen terjednek, ezért az utódok arányát eltorzítják.
- Bár a befektetendő energia egyenlő, de ha az egyik nem sérülékenyebb, érdemes abból többet létrehozni.

Definíció: I akkor ESS, ha J mutáns esetén

populáció $= \left((1-\varepsilon)I, \varepsilon J\right)$ ahol $\varepsilon \ll 1$

$W(I, pop) > W(J, pop)$

Becsüljük a nemek arányát. Feltevések: • A ♂ és ♀ utódok felnevelése egyenlő.
• mindenki m arányban hoz létre ♂ és $(1-m)$ arányban ♀.

Kezdetben N_0 egyed. Utána $N_1, N_2 \dots$

N_1 megoszlása: $N_1 m, N_1(1-m)$. Az egyik unokát kiválasztva mennyi az esélye, hogy kiválasztjuk az apját és az anyját? $\frac{1}{mN_1}$ és $\frac{1}{(1-m)N_1}$

⇒ A sikeresség: $\frac{N_2}{mN_1}$ ♂-nak és $\frac{N_2}{(1-m)N_1}$ ♀-nek.

jöjjön egy mutáns p és $(1-p)$ valószínűséggel itt a nőben

$$\frac{N_2}{mN_1}p \text{ ♂-ra és } \frac{N_2}{(1-m)N_1}(1-p) \text{ ♀-re.}$$

$$\Rightarrow W(p,m) = \frac{N_2}{mN_1}p + \frac{N_2}{(1-m)N_1}(1-p)$$

(elhanyagoltuk a mutáns esetét a populációban)

Mivel N_1 és N_2 konstans, ezért ami érdekel minket:

$$W(p,m) = \frac{p}{m} + \frac{1-p}{1-m} = \frac{1}{1-m} + \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{1-m}\right]p$$

ha $m < \frac{1}{2}$ akkor $\frac{\partial w}{\partial p} > 0$. ha $m > \frac{1}{2}$ $\frac{\partial w}{\partial p} < 0$.

ha $m = \frac{1}{2}$, akkor $\frac{\partial w}{\partial p} = 0$.

TFH $m > \frac{1}{2}$, $r := (1-\varepsilon)m + \varepsilon p$

$\Rightarrow \exists p: \frac{1}{2} < p < m \Rightarrow r > \frac{1}{2}$

$w(p,r)$ és $W(m,r)$ közül a p-s a nagyobb, mivel $r > \frac{1}{2}$ miatt csökkenő

ugyanígy $m < \frac{1}{2}$ esetén.

$\Rightarrow$ csak $m = \frac{1}{2}$ az ESS.

TFH a mutáns közel van az elterjedthez $\Rightarrow$ lokális ESS-t kell keresni

azaz $w(x,x^*) < w(x^*,x^*)$, azaz $\left.\frac{\partial w(x,x^*)}{\partial x}\right|_{x=x^*} = 0$

és $\left.\frac{\partial^2 w(x,x^*)}{\partial x^2}\right|_{x=x^*} < 0$

A nemek arányánál a 2. derivált nem teljesül, mert kihagytuk a kvadratikus nagyságrendűeket.

Általános kérdés: Milyen arányban keltet az ESS stratégia a nemekbe, ha a költség nem = ?

Feltevés. A szülők R_{tot} erőforrással rendelkeznek. A szükséges anyagi R_h és R_n

$c(m)$: A felnevelt utódok száma m fv-ben.

$$R_{tot} = c(m)\left[R_h m + R_n(1-m)\right]$$

$$\Rightarrow c(m) = \frac{R_{tot}}{mR_h + (1-m)R_n}$$

Legyen a mutáns p és $(1-p)$ arányú.

$$w(p,m) = \frac{c(p)}{c(m)}\left(\frac{p}{m} + \frac{1-p}{1-m}\right)$$

TFH $p \approx m$

$$\left.\frac{\partial w(p,m)}{\partial p}\right|_{p=m} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{mR_h + (1-m)R_n}{pR_h + (1-p)R_n}\left(\frac{p}{m} + \frac{1-p}{1-m}\right)\right]_{p=m} = 0$$

$$\left.\frac{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{1-m}\right)\left(pR_h + (1-p)R_n\right) - (R_h - R_n)\left(\frac{p}{m} + \frac{1-p}{1-m}\right)}{\left(pR_h + (1-p)R_n\right)^2}\right|_{p=m} = 0$$

$$\frac{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{1-m}\right)\left(mR_h + (1-m)R_n\right) - (R_h - R_n)(1+1)}{\left(mR_h + (1-m)R_n\right)^2} = 0$$

$$R_h + \frac{1-m}{m}R_n - \frac{m}{1-m}R_h - R_n - 2R_h + 2R_n = 0$$

$$R_h\left(1 - \frac{m}{1-m} - 2\right) = R_n\left(\frac{m-1}{m} + 1 - 2\right)$$

$$\frac{R_h}{1-m} = \frac{R_n}{m} \quad \Rightarrow$$ egyenlő erőforrásbefektetés kell.

EVOL JÁTELM

8. előadás (11.03.)

Fegyverkezési verseny

Kivárásos háború: nem az nyer aki erősebb, hanem aki többet fektet be

pl.: legyek hímjei a tehénlepény körül. Aki többet vár, az nagyobb eséllyel találkozik nőstényekkel.

feltevések:
- A forrás nem felosztható vagy nem éri meg felosztani
- A befektetés költséges
- A játék költsége a kisebb befektetést vállaló egyed költsége ~~(folytonos)~~
- folytonosan választható költség ⇒ megszámlálhatatlan stratégia
- Mindenki a saját befektetését ismeri, a másikét nem.

Két egyed: A, B.

költségük: m_A, m_B, forrás: V.

esetek:

	A	B
$m_A > m_B$	$V - m_B$	$-m_B$
$m_A = m_B$	$\frac{V}{2} - m_A$	$\frac{V}{2} - m_A$
$m_A < m_B$	$-m_A$	$V - m_A$

Lehet-e tiszta ESS?

TFH M egy ESS! Ha megjelenik egy $M + \Delta M$ értékű mutáns, akkor a terjedni fog, ha $V - M > 0$.

Ha $V - M < 0$, akkor is jobb a mutáns, ha $M + \Delta M < |V - M|$

⇒ M nem ESS

⇒ Az ESS nem lehet tiszta stratégia

Hogy lehet a folytonos M-ekre stratégiát definiálni? Valószínűségi eloszlás fv.-el.

$p(x)\,dx$: Annak a valsége, hogy x és $x + dx$ közötti m-t választunk

$p(x)$: sűrűségfv. Ez érdekel minket.

BK tétel alapján $G(m, I) =$ áll minden m-re az I-ben.

$$E(m,I) = \int_0^m (V-x)\,p(x)\,dx + \int_m^\infty (-m)\,p(x)\,dx = \text{áll}$$

Ez egyben független m-től, tehát $\dfrac{\partial E(m,I)}{\partial m} = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial m} = (V-m)\,p(m) - \int_m^\infty p(x)\,dx + m\,p(x) = V p(m) - 1 + \int_0^m p(x)\,dx = 0$$

$$\underline{\int_0^m p(x)\,dx = 1 - V p(m)} \qquad (*)$$

Keressük a megoldást $p(x) = a\,e^{bx}$ alakban! Beírva:

$$\frac{a}{b}\left(e^{bm} - 1\right) = 1 - V a\, e^{bm}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = a\left(\frac{1}{b} + V\right) e^{bm} \quad \forall m\text{-re} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{a}{b} + 1 &= 0 \\ \frac{1}{b} + V &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{1}{V} \\ b &= -\frac{1}{V} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{p(x) = \frac{1}{V}\, e^{-\frac{x}{V}}}$$ Ha van ESS, ilyen kell legyen.

Nem látjuk be, de valóban az.

$(*)$ felírható differenciálegyenletté: $p(m) = -V \dfrac{d\,p(m)}{dm} \Rightarrow \dfrac{dp(m)}{p(m)} = -\dfrac{dm}{V}$

Ebből a szemlélet:
- Az állat minden idő után eldönti, hogy elmegy-e vagy nem és $\frac{1}{V}$-re csökkenti az időt
- Annak az esélye, hogy az állat elmegy $\sim \frac{1}{V}$

  Az, hogy 2-ből legalább az egyik elmegy $\sim \frac{2}{V}$

  $\Rightarrow$ A kiválasztási tendencia az időt fele annyit kap.

Végig feltettük, hogy a várakozási idő arányos a költséggel. A eloszlás valójában a költségre igaz:

$p(q) = \frac{1}{V}\, e^{-\frac{q}{V}}$ $\quad$ q költség szerint ahol van valami $q(m)$ összefüggés

Mivel a valószínűség $p(x)\,dx = p(q)\,dq \Rightarrow p(x) = p(q)\dfrac{dq}{dx}$

Ha pl. $q(x) = x^2$, akkor $p(x) = \dfrac{2x}{V}\, e^{-\frac{x^2}{V}}$

Általánosítások.

1) A forrást $f(x)$ írja le, általában az időben csökken az értéke (addig V)
A költség $g(x)$ az időben növekszik. (addig x)

...

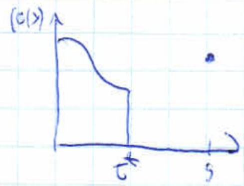
Levezethető az eredmény: $p(x) = \frac{g'(x)}{f(x)} e^{-\int_0^x \frac{g'(y)}{f(y)} dy}$

2) Mi van, ha x korlátos azaz $x \in [0,s]$

i) $-g(0) > \frac{f(s)}{2} - g(s)$ tehát nem érné meg feladni, mint s-ig várni

Ekkor van t^* ahol $-g(t^*) = \frac{f(t^*)}{2} - g(t^*)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{g'(x)}{f(x)} e^{-\int_0^x \frac{g'(y)}{f(y)} dy} & x \in [0, t^*) \\ 0 & x \in [t^*, s) \\ e^{-\int \frac{g'(y)}{f(y)} dy} & x = t^* \end{cases}$$



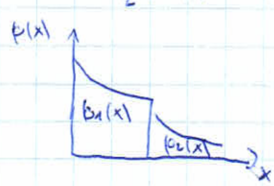
⇒ csak addig t^*-ig várnak, és utána akár s-ig.

ii) $-g(0) < \frac{f(s)}{2} - g(s)$ tehát a kiszállás költsége nagyobb, mint a kivárás, ezért mindenki kivárja a várakozást.

+ érdekesség: ha $x \in [0,s)$ akkor nincs ESS. pl.: · diamant játék
· első órai autós játék.

3) Aszimmetria a forrás értéke egyedenként különböző (pl.: idősek, fiatalok)

$V_2 > V_1$



N csoport esetén N-1 levágás
⇒ Azok mindig kilépnek, akiknek kevesebbet ér

információátadás: ha van lehetőség elmondani, hogy én mennyit fektetek be, akkor
sikeresen lesznek

⇒ Nem szabad elhinni azt, amit a másik mond ⇒ a beszélés haszontalan,
mert ideális az ESS-t érdemes
játszani, mint infót gyűjteni.

EVOL JÁTELM

9. előadás (11.10.)

Kommitment az állatvilágban

A legnyomósabb rezsimben nincs értéke az kapott információnak.

Mégis láttunk, hogy van néha információ. (pl. összecsapás előtt, hecceli)

Dawkins, Krebs: „A kommunikáció célja a csalás"

pl.: Bates-féle valami (lepke). A lepke úgy néz ki, mint a másik faj, ami mérgező.

De vannak ellenpéldák: pávakakas farktolla (meg minden szexuális jel)

Miért nyelnek ilyen költséges jelet, ha meg se tévesztenek?

Fisher: TFH megjelennek azok a nőstények, akik preferálják a hosszú farktollat

$\Rightarrow$ A hosszú farktollú hímek fognak terjedni. Ez addig tart, amíg a nőstények előnye már kisebb lesz a farktoll költségénél

„elszabadó evolúció"

Zahavi: Nem tipikusan olyan dolgokat preferálnak a nők, amik hasznosak, hanem, amik kifejezetten költségesek, mert az jó genetikai állományra utal
„hátrányelv"

Grafen 1990-ben adott egy formális leírást a hátrányelvre.

Mi a feltétel arra, hogy a kommunikáció őszinte legyen az érdekellenfelek között

i) A kommunikáció átlagban őszinte

ii) A szignál a minimálisnál költségesebb

iii) A rosszabb számára nagyobb a relatív költség

szignál: egy fenotípusos mutatót, amelyet a fogadó értelmez és ez úgy változtatja a viselkedését, hogy az a szignált adó számára kedvező

Példa: kovásinges légy. A rosszabb genetikai állományú egyednek tényleg költségesebb a távoli nem.

Sir Philip Sidney game:

donor (D), kedvezményezett (B)

A donor adhat vizet, de nem tudja, hogy B szomjas-e, csak B jelezhet.

Mi a feltétele annak, hogy
- D csak akkor adjon, ha B jelez
- B csak akkor jelezzen, ha szomjas.

Életesélyek: D
- Ad, $0 < s < 1$ túlélés
- Nem ad, 1 valószínűséggel túlél

B
- Szomjas, kap 1
- Szomjas, nem kap 0
- nem szomjas, kap 1
- nem szomjas, nem kap $0 < V < 1$

Eddig adni egyoldalú nem előnyös, de kérni mindig. (ez nem őszinte, és nem befolyásoló)

TFH a D és B között r rokonsági fok van.
- p a B szomjasságának a valószínűsége
- A jelzés költsége $t > 0$.

Mikor lesz igaz, hogy a D és B között érdekellentét van, de a $\{B_0, D_0\}$ lesz az ESS akkor

D_0 = akkor ad, ha B jelez

B_0 = akkor jelez, ha szomjas.

továbbá D_{m1} = mindig ad

D_{m2} = sosem ad

$$W(D_0, B_0) = \underset{\text{nem szomjas}}{(1-p)}\,(\underset{\text{D túlél}}{1} + \underset{\text{B V-vel él}}{rV}) + \overset{\text{szomjas}}{p}\,(\underset{\text{D s-sel él}}{s} + \underset{\text{B túlél, de fizet}}{r(1-t)})$$

$$W(D_{m1} B_0) = (1-p)(s+r) + p(s + r(1-t))$$

$$W(D_{m2}, B_0) = (1-p)(1+rV) + p(1 + r \cdot 0)$$

Akkor, hogy D_0 ESS legyen $W(D_0, B_0) > W(D_m, B_0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + rV > s + r \\ s + r(1-t) > 1 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Fordítva: B_{m1} = mindig kér

B_{m2} = soha nem kér

$W(B_0, D_c) = (1-p)(V+r) + p((1-t)+rs)$

$W(B_{m_1}, D_c) = (1-p)((1-t)+rs) + p((1-t)+rs)$

$W(B_{m_2}, D_c) = (1-p)(V+r) + p(0+r)$

megint az ESS-ség feltétele $W(B_0, D_c) > W(B_m, D_c)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V+r > 1-t+rs \\ 1-t+rs > r \end{array}\right\} \quad (**)$$

nézzük így az érdekellentétet: A D-nek ne legyen érdeke adni a nem rászorulónak:

$1-s > (1-v)r \quad (\Delta)$

A nem rászorulónak legyen érdemes kérni:

$1-v > (1-s)r \quad (\Delta\Delta)$

A (Δ) és $(\Delta\Delta)$ csak együtt igaz, ha $0<r<1$.

Mégis miért el, hogy a nem rászoruló B kérjen? A $(**)$ első egyenleténél.

$\Rightarrow$ Ha t elég nagy, akkor őszinték lesznek.

Ha a belátható, hogy
- a többi egyenlet így teljesíthető
- ha nincs érdekellentét, t lehet 0 is.

- -

A valóságban láttunk olyat is, hogy van érdekellentét, mégis költségtelen a jelzés

pl.:
- A rossz kvalitásúaknak költséges a jelzés, de a jóknak nem.
- Olyan fajú galamb, ahol sokszor nagy gyerekek és az erősebbektől kilopni költségesebb.

  Ha sok a gyenge, érdemes erősnek tettetni magukat, de ha sok a gyenge akkor az igazat érdemes kérni.

Mi itt a lényeg? Nem a kommunikáció a költséges, hanem a csalás következménye van beleépítve a költség.

EVOL JÁTELM

10. előadás (11.17.)

Térbeli játékok

Eddig végig feltettük, hogy a populáció jól kevert, de ez általában nem így

A jól kevert modellben két feltevés van:
- a játékosok száma $N \to \infty$
- a párkeresés mérete $k \to \infty$

DE $\frac{k}{N} \to 0$

$\Rightarrow$ Mindenki olyan arányban talál partnereket, mint amilyen a teljes populáció aránya

A legtöbb élőlény viszont csak a szomszédaival lép interakcióba.

Mi kell egy térbeli játékhoz:

- Σ a stratégiák halmaza
- $E(i,j)$ nyereségi mátrix elemei $\forall\, i,j \in \Sigma$ -ra.
- Λ gráf a síkban (vagy térben) aminek a csúcsain helyezkednek el az egyedek

  (ez valójában a kapcsolati hálózat, csak nem ismeri a fogalmak jelentését)
- szomszédság (tényleg nincs mutatva a fogalmakkal) $N(Q)$

$$S_t(\sigma_t(Q)) = \sum_{P \in N(Q)} E(\sigma_t(Q), \sigma_t'(P))$$

A Q egyed kifizetése, aki a t pillanatban σ stratégiát játszik.

- frissítési szabály

  Ettől kevésbé függenek a dolgok, mert sokféle lehetséges választás van, de általában nem az érdekes

  pl.: szinkron és aszinkron update. (aszinkront szeretjük alkalmazni)

  pl.: halálozás-születés vagy születés-halálozás

Frissítési szabályok: 1) A legnagyobb fitnesszű egyed kerül az üres helyre.

(determinisztikus szabály $\Rightarrow$ nem szeretjük)

2)
$$F(p^*) = \frac{S_t(p^*)}{\sum_{P \in N(Q) \setminus P^*} E(\sigma_t(Q), \sigma_t'(P))}$$
a p^* nyerésének a valószínűsége.

A valóságban ezek a szabályok, hogy amit a $N \to \infty$ limeszben nem adja vissza a populációs dinamikát

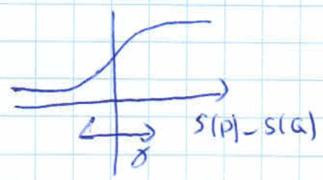
3)

P és Q esetén $F(Q \to P) = \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \frac{S_t(P) - S_t(Q)}{\max(\Delta S)}$ ahol $s \in [0,1]$ az szelekció erőssége

és ΔS: A lehetséges egyenlegek különbsége 2 strat. között

4)

$$F(Q \to P) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma (S_t(P) - S_t(Q))}}$$



„Fermi szabály"

Mi legyen a szélekben? Periodikus határfeltétel.

Ez szerencsénkre jól működik, de sok kisebb rácsméretnél hat a szél olyan érdekes effektust.

PPT vetítés...

EVOL JÁTELM

11. előadás (11.24.)

Adaptív dinamika

Feltevések:
- aszexuális, haploid egyedek
- fenotípikus jellegek végtelen génektől kivül a mutáció csak kicsit változtat
  - ⇒ A fenotípus csak kicsit változik, így a fenotípus meghatározza a stratégiát
- A mutációk ritkák
- A fenotípusok arányában egyértelműen meghatározza a népállapotot
- A mutáns sorsát a relatív fitnesz határozza meg
- A relatív fitnesz a stratégiának folytonos fv-e. (sima)

A modell elírja a kölcsönös terjedést. Azaz:

Van-e olyan x_1 és x_2 stratégiapár, amelyek kölcsönösen terjednek egymásba

$x :=$ rezidens ; $y :=$ mutáns

⇒ $S_y(x)$: Az y relatív fitnesze az x populációban

(nyilván $S_x(x)=0$)

Mivel x és y nem megyen távol el, mert $|x-y| \ll 1$ ⇒ $S_y(x)$ sorba fejthető

$$S_y(x) = \underbrace{S_x(x)}_{0} + \underbrace{\left.\frac{\partial S_y(x)}{\partial y}\right|_{y=x}}_{D(y)} (y-x) + \text{kicsi}$$

$$S_x(y) = \text{u.a.} = S_y(y) + \left.\frac{\partial S_x(y)}{\partial x}\right|_{x=y} (x-y) + \text{kicsi}$$

A kölcsönös terjedés feltétele, hogy mindkettő > 0.

DE $(y-x)$ és $(x-y)$ ellentétes előjelűek, $D(x) \approx D(y)$ mert $x \simeq y$

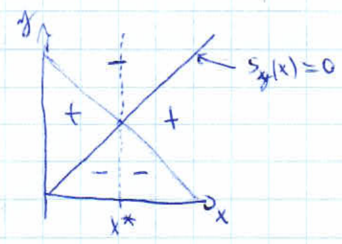
Tehát csak csak ott lehet ahol $D(y)=0$ ⇒ $y = x^*$ szinguláris pont.

⇒ A sorfejtés magasabb rendű tagjai is kellenek

Mikor ez x^* ESS?

Belátható, hogy akkor amikor $\left.\frac{\partial^2 S_y(x)}{\partial y^2}\right|_{y=x^*} < 0$ (lokális maximum)

Ábrázolás:



Az ESS-eken a függőleges egyenes nem megyen át.
(WTF???)

Mi a feltétele annak, hogy x^* konvergenciastabil?

belátható $\left.\frac{\partial^2 s_y(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x^*} > \left.\frac{\partial^2 s_y(x)}{\partial y^2}\right|_{y=x^*}$

[Ábrát újrarajzolni]

ha egy pont ESS + konvergenciastabil, az folytonosan stabil

Mi a feltétele, hogy az x^*-alatt stratégiák kölcsönös terjedése ugyanakkor

$$\left.\frac{\partial^2 s_y(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x^*} > -\left.\frac{\partial^2 s_y(x)}{\partial y^2}\right|_{y=x^*}$$

Következmény:
- Ha x^* ESS, és kölcsönös terjedés van, akkor konvergencia stabil
- Ha x^* nem ESS, de konvergenciastabil, akkor kölcsönös terjedés van.

$\Rightarrow$ Egy adott pont után a stratégiák szétágaznak és utána a két stratégia párhuzamosan van jelen.

Ez magyarázza, hogy miért lehet a természetben annyi faj.

<u>Fajkeletkezés és adaptív dinamika</u>

a fajkeletkezés két fajtája:
- allopatrikus, amikor különböző szeparáció térségére vannak
- szimpatrikus, amikor a közösségen v.a.

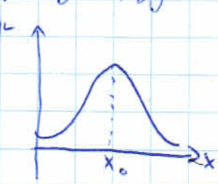
Az előbb látott elmélet a szimpatrikusba tartozik.

A probléma, hogy ha véletlenszerű párosodás van, akkor a génállomány viszonylag az átlagban.

1999-ben magyarázták meg.

TFH van egy faunás, ahol a $K(x)$ eltartó képesség függ a fenotípustól.

Egyszerűség kedvéért harangalakú



$$K(x) = K_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_K^2}}$$

Az egyedek száma: $N(x,T)$

Logisztikus egyenletlen környezetben:

$$\frac{dN(x,t)}{dt} = r\,N(x,t)\left(1-\frac{N(x,t)}{K(x)}\right)$$

az egyensúly $N(x,t)=K(x)$

ha megjelenik y mutáns

$$\frac{dN(y,t)}{dt} = r\,N(y,t)\left(1-\frac{N(y,t)}{K(y)}-\frac{C(|y-x|)\,N(x,t)}{K(y)}\right)$$ ahol C egy távolságtól függő fv.

Legyen C is harang görbe: $C = C_c\, e^{-\frac{|y-x|^2}{2\sigma_c^2}}$ $\qquad C_c = 1$

$\Rightarrow$ Minél távolabb vannak, annál kisebb a kompetíció

A növekedés akkor lesz, ha a rezidenssel versenyzik, de mivel y ritka, ezért a második tag $\ll 1$.

$$\Rightarrow\ S_y(x) = r\left(1-\frac{C(|y-x|)\,N(x,t)}{K(y)}\right)$$

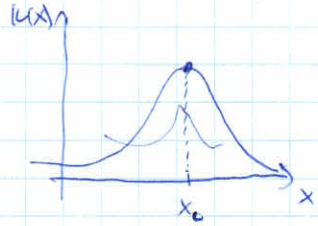
A szinguláris pont:

$$\left.\frac{\partial S_y(x)}{\partial y}\right|_{y=x} = r\left.\frac{C'(|y-x|)K(x)K(y) - C(|y-x|)\,K(x)\,K'(y)}{K^2(y)}\right|_{y=x} \overset{!}{=} 0$$

Az $y=x$ miatt $C'(|y-x|)=0$, így az első tag kiesik.

A második tag: $$\left.\frac{\partial S_y(x)}{\partial y}\right|_{y=x} = -r\left.\frac{C(|y-x|)\,K'(y)}{K(y)}\right|_{y=x} \overset{!}{=} 0$$

Ez akkor 0, ahol $K'(y)=0 \;\Rightarrow\; y = x_0$.



Befog vinni a populáció a csúcsra, ami logikus hiszen itt a legjobb az eltartó képesség.

DE elképzelhető, hogy ez nem ESS mégis konv stabil. Ennek feltétele

$$\sigma_c < \sigma_K$$

Vagyis az eltartó képesség szélesebb legyen, mint a kompetíció.

Ha aszexuális populáció van, akkor az 'szétválást' eredményez:
távolodnak egymástól a kompetitorok, de nem annyira amennyire az eltartás engedi.

Ha szexuális populáció van, és keveredhet a gének, akkor más van. TBC...

EVOL JÁTELM

12. előadás (12.01.)

Az előző órán látott elválás akkor működik, ha a fenotípus aszexuális módon öröklődik, de a szexuális keveredés miatt újra összeolvadhat a egyensúlyi helyzete

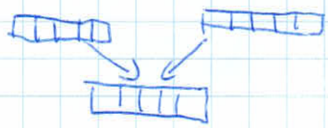
Egyed alapú modell

minden egyednek tetszőleges hosszú bites génje

$\boxed{+|-|+|-} = \sum_{+-}$ ⇐ ökológiai karakter

- Minden egyednek v rátával, mínusz a kompetíció miatti veszteség: $\frac{1}{K(x)} \sum_{z} N(x(t)) C(x-z)$ } szelekció
- minden egyednél valamely p valószínűséggel megváltozik az egyik gén } mutáció

Mi van szexuális modell esetén



Amikor a fenotípus téren kezdenek szétválni az ágak, a két ágra induló egyedek keverednek.

Hogy lehet kezelni?

TFH az ökológiai karakter mellett van egy másik fenotípus jelleg, ami alapján párosodnak. Vannak akik random párosodnak, vannak, akik a hasonlóakat, vagy az ellentétet kedvelik.

„Van 3D-s ábra arról, hogy a párosodási kísérlet nagyon sikeres."

Az eredmény: hogy így is szétválnak.

a: az ökológiai karakterre válogatnak

b: nem az ökológiai karakterre, hanem egy „random" válogatnak

Kölcsönös altruizmus

példák: • vámpírdenevérek: a vadászat után éhesen maradt egyedek nyalogatják a többieket, akik visszaöklendezik a vért(?)

• prérikutya: vannak egyedek, akik nem esznek, hanem figyelik a ragadozókat és jelet adnak.

sok példa van még

ellenpélda: [illegible]: csapatban vadásznak, és ha találnak egy nagyobb zsákmányt, szól a többieknek, de ez nem önzetlen, mert a többi nélkül jobban lebontaná(?) a zsákmány nagyját.

valószínű magyarázat: rokonszelekció, azaz hogy nagy rokonsági fokú egyedek élnek együtt

Ha $rb > c$ akkor az altruista viselkedés terjed.

r: rokonsági fok

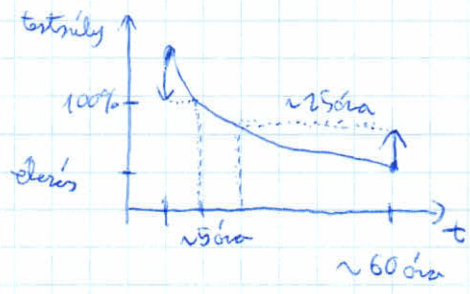
b: haszon

c: költség.

Mivel $0 < r < 1$ ezért szükséges $b > c$.

ha $r \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{32}$ $\Rightarrow$ b tipikusan nagyságrenddel nagyobb kell legyen.

Vámpírdenevéreknél



Az altruista 5 órával került közelebb az éhezéshez, de az éhező 25 órával került messzebb.

minimális modell a fogolydilemma

	C	D
C	$b-c$ / $b-c$	b / $-c$
D	$-c$ / b	0 / 0

C: altruista D: önző

b: nyereség az altruizmus miatt

c: költség

$b > c$

1 db ESS van: (D, D)

ez nem magyarázza az altruizmust

DE! ha többször is játszunk a játékot, amelyben mi történt korábban

iterált fogolydilemma

a legjobb a TFT (tit for tat) stratégia: azt a stratégiát kell választani, amit a másik játszott az előző körben

- C-vel indít

úgy fogjuk tudni mutatni, hogy ez egy ESS

Ha mindenki tudja, hogy mikor lesz vége, akkor nem éri meg az altruizmus.

„A jövő árnyéka"

ω = annak az esélye, hogy a játék folytatódik.

Ha minden körben a modellben az időeltolás invariáns, ezért elég egy időpillanatot nézni.

Vizsgáljuk az első kört egyenként, és TFH M az optimális stratégia:

1. lehetőség
$\overline{\text{TFT}}$: $C \to C \to C \to \cdots$
M: $C \to C \to C \to \cdots$ „all C", mert C-re C a legjobb

2. lehetőség
$\overline{\text{TFT}}$: $C \to D \to D \to \cdots$
M: $D \to D \to D \to \cdots$ „all D"

3. lehetőség
TFT: $C \to D \to C \to \cdots$
M: $D \to C \to D \to \cdots$ „alt DC"

Összesen 3-féle olyan mutáns lehet, ami jobb, mint a TFT, de hosszútávon egyik sem különböztethető meg a TFT-től.

Mikor igaz, hogy a TFT ESS? Akkor, ha $W(TFT, TFT) > W(M, TFT)$

$$W(TFT, TFT) = b - c + \omega(b-c) + \omega^2(b-c) + \cdots = \frac{b-c}{1-\omega}$$

$$W(\text{All } D, TFT) = b + \omega \cdot 0 + \omega^2 \cdot 0 + \cdots = b$$

Akkor, hogy all D-re teljesüljön az kell, hogy $\frac{b-c}{1-\omega} > b \Rightarrow \underline{\omega > \frac{c}{b}}$

Ez nagyon analóg a Hamilton-egyenlőtlenséggel.

$$W(\text{alt } DC, TFT) = b - \omega c + \omega^2 b - \omega^3 c + \cdots = \frac{b - \omega c}{1-\omega^2}$$

EVOL JÁTELM

13. előadás (12.08.)

A mindenki árulót játszó világban terjed-e a tit-for-tat?

$$W(AllD, AllD) \overset{?}{<} W(TFT, AllD)$$

$$0 > -c \quad \Rightarrow \quad \text{ez alapján a TFT nem terjed}$$

Sőt, ha megnézzük a AllD-t, látjuk hogy ESS

Akkor miért terjed? Képzeljük el, hogy a TFT-k nagyon olyan helyzetben, amelyben térben közel vannak!

Modell:
- négyzetrácsban vannak
- 8 szomszéddal van kapcsolatban
- AllD vagy TFT
- determinisztikus szabály
- iterált fogolydilemma ω újratalálkozási eséllyel.

2 egymás melletti TFT-vel mi történik:

$$W_{TFT} = \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{b-c}{1-\omega}}_{\text{Az 1 db TFT szomszédtól}} + \underbrace{\frac{7}{8}(-c)}_{\text{A 7 db AllD-től}}$$

$$W_{AllD} = \frac{2}{8} b + \frac{6}{8} \cdot 0$$

A terjedés feltétele: $\frac{1}{8} \frac{b-c}{1-\omega} + \frac{7}{8}(-c) > \frac{2}{8} b \quad \Rightarrow \quad \omega > \frac{b+8c}{2b+7c} = 1 - \frac{b-c}{2b+7c}$

ez hasonló a rokonszelekciós elmélethez, lehet, hogy térben is az!

Biológiai példák:
- 3 tüskés pikó.
  Amikor jön egy nagyobb ragadozó hal, akkor kettesével kiúsznak a csapattól, hogy megnézzék veszélyes-e. Ezek ilyen felváltva úsznak, mint a TFT
  Ezt lehet egy tükrös megtévesztéssel figyelni, mert attól függ, hogy lehagyja a tükör egy milyen gyorsan megy a hal.
- Kormos légykapó
  Amikor jött a ragadozó, attól függően, hogy valamelyik szomszéd jött segíteni, akkor mennek az övékhez is segíteni

Probléma a TFT-vel:

Ha valaki egy lépésben [illegible], akkor átáll D-re és alternálni fognak

$\Rightarrow$ zajra nem jól reagál

Feloldás: sztochasztikus TFT

minden stratégiát 3 paraméter jellemez: (y, p, q)

y: A kezdeti kooperáció esélye

p: A kooperáció utáni kooperáció esélye

q: Az árulásra kooperálás esélye

tiszta TFT: $(1,1,0)$

all D: $(0,0,0)$

Modell: kezdetben a paraméterek véletlenszerűek, majd az alapján szaporodnak, hogy mennyi pontot gyűjtenek. Ki nyer?

eredmény: a) sokszor az all D győz

b) egy másik stabil állapot: $y \approx 1$, $p \approx 1$, $q \approx \frac{1}{3}$

GTFT generous tit for tat.

Ide akkor jut a rendszer, ha kezdetben van elég „TFT-szerű" stratégia

Még egy bonyolítás: (y, p_1, p_2, p_3, p_4)

y: u.a.

p_1: $\{D, D\}$-re C

p_2: $\{D, C\}$-re C

p_3: $\{C, D\}$-re C

p_4: $\{C, C\}$-re C

tehát számít az én múltam is

Az AllD $\rightarrow$ TFT $\rightarrow$ GTFT sorozat megjelenik, de ezt is leváltja egy újabb

$\approx (1,1,0,0,1)$ ha jól jártam folytatom, ha nem, váltok.

„Pavlov-stratégia"

Példa: $\Phi 6$-fág, és néha megjelenik $\Phi H1$ és $\Phi H2$ fág.

Ez azért kifizetődőbb és nem is nagyon számít, mikor lépjük.

„bátorság játék"

A bátrabb játék megoldása, hogy a kooperáció az elterjedt, de fele az világ csaló

Tudunk-e erre választ ?

- emberi társadalom
- valami intézményes érintkezésen (vagy gyakran : verseny)

Ezek a valós életben N-személyes kooperatív dilemmák, ahol több szereplő van.

<u>N-személyes fogolydilemma</u>

C: beadja a közösbe a részét, és részesedik a bevételből

D: nem ad be semmit, de részesedik

befektetés : c | C-t játszók száma : k

nyereség : rc $(r>1)$ | teljes populáció : N

$$\Rightarrow \quad W_C = \frac{rck}{N} - c$$

$$W_D = \frac{rck}{N}$$

$\Rightarrow W_D > W_C$ mindenképpen

A teljes népességet csoportokra osztjuk, majd időnként újraalakítjuk.

x: kooperációs gyakoriság

N: csoportok nagysága

$$W_C = \sum_{i=0}^{N-1} f_{i,N-1}(x) \left(\frac{rc(i+1)}{N} - c \right)$$

Az a valószínűség, hogy $N-1$-ből i db kooperátor van x esetén (pl.: binomiális eloszlás)

$$W_D = \sum_{i=0}^{N-1} f_{i,N-1}(x) \frac{rci}{N}$$

Mikor lesz W_C és W_D ugyanakkora?

Azt tudjuk, hogy $\sum_{i=0}^{N-1} f_{i,N-1}(x) = 1$. Emiatt

$$W_C = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{rci}{N} + \frac{rc}{N} - c$$

$$\Rightarrow \quad W_C - W_D = \frac{rc}{N} - c \sqcup 0 \Rightarrow \frac{r}{N} \sqcup 1$$

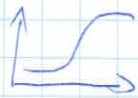
ha az egy főre jutó nyereség > 1, akkor mindenki kooperál.

ha '' < 1, akkor senki sem kooperál.

A tapasztalat az, hogy • $\frac{r}{N}$ általában nem tud > lenni, mint 1.

• C és D általában együtt él.

Feloldás a nyereség a csoportlétszámmal:

 vagy 

Ezért van egy nemnulla szakasz, ahol r/N nagyobb tud lenni, mint 1.

$\Rightarrow$ ez van egy olyan nemlinearitás a rendszerben ahol van olyan tartomány, ahol a kooperálók és a csalók együtt élnek

A legegyszerűbb eset amikor a nyereség hirtelen ugrik.

„önkéntesek dilemmája"

elég 1 önkéntes, hogy mindenki megkapja a nyereséget.

$W_C = c(r-1)$

$W_D = (1-x)^{N-1}\cdot 0 + (1-(1-x)^N)\cdot rc$ ahol x a kooperálás esélye.

Mikor lesz $W_C = W_D$?

Az egyensúlyi helye $\hat{x} = 1-\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{N-1}}$

Minél nagyobb az N, annál kisebb a $\hat{x}$.