FOLYT. KÖZ

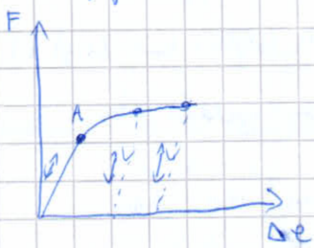
1. előadás (02.17.)

A merev-test-modell sokszor nem működik

Viszont a pontrendszer törvényei viszonylag újonnan levezetett minta rendszer minden rendszerre

Hasonlóképp kontinuummal írjuk a világot: nem látjuk az atomokat, csak az egészet és arról akarunk mondani állításokat

Drótot megnyújtunk az erő fgv.-ben



Az A kritikus pontig a megnyúlás lineáris és reverzibilis

Az A pont után megszüntetve minden lineáris, megmarad, megnőtt a madzag hossza

alakítási keménység (Kísérlet: fúrógépes fogfeszítés)

A félév során a lineáris tartománnyal fogunk foglalkozni

A Δl szerencsétlen mennyiség, mert függ a madzag teljes hosszától. Célszerű lenne az egységnyi hossz megnyúlását venni: $\frac{\Delta l}{l}$

Az erő nem jó, mert a vastagabb drót ellenállóbb. Legyen $\frac{F}{A}$.

Az $\frac{F}{A} - \frac{\Delta l}{l}$ grafikon a drót geometriájától független (anyagától, az alakjától nem!!!)

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ → deformáció $\quad \sigma = \frac{F}{A}$ → feszültség $\quad [\sigma] = \frac{N}{m^2} = Pa$

A kezdeti szakaszban ε és σ lineárisan összefügg: $\sigma = E\,\varepsilon$

E: Young modulus

ez egy anyagi állandó, de 2-es 3-as faktor erejéig nagyjából

$E \sim 100\ GPa$

A kritikus feszültségérték is kb. egyenlő $\sigma_k \sim 100\ MPa$

Emiatt a maximális megnyúlás mértéke $\boxed{\varepsilon_k \sim 10^{-3}}$

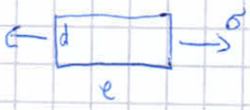
ezt sokszor kihasználják, de empirikus tapasztalatból tudjuk

Eddig nem vettük figyelembe a haránt összehúzódást: ha valami megnyúlik, a keresztmetszete csökken

kísérleti tapasztalat: $\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta e}{e}$ ν: Poisson-arány, Poisson-szám

$\nu \sim 0{,}3$

Ezek szerint megnyúlás hatására változik a térfogat



$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(d+\Delta d)^2(e+\Delta e) - e d^2}{e d^2} =$$

$$= \frac{2de\Delta d + d^2\Delta e + \overbrace{e(\Delta d)^2 + \Delta d^2 \Delta e + 2d\Delta d\Delta e}^{\text{Ezek kicsik}}}{e d^2} = 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta e}{e} =$$

$$= (1-2\nu)\frac{\Delta e}{e} = (1-2\nu)\frac{\sigma}{E}$$ sokszor úgy jelölik: $-\frac{3(1-2\nu)}{E} p$

Ebből: A térfogat változás és a nyomás között is lineáris összefüggés van

$\frac{3(1-2\nu)}{E} = \kappa$ kompressziós szám (összen)

Mi van, ha $\nu > 0{,}5$? Nyomás hatására nő a térfogat, ami miatt az anyagunk ez felrobban, vagy instabil

FOLYT. KÖZ

2. előadás (02.24)

Tiszta nyírás

γ: nyírási szög

Ez akkor lineáris lesz, hanem a felületre merőleges erő

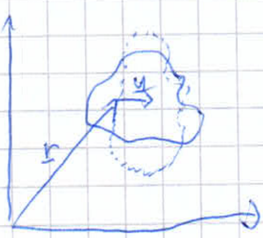
$\frac{F}{A} = \tau$: nyírási feszültség

kis szögeknél arányos a nyírási szöggel. $\tau = \mu \gamma$

μ: nyírási modulus

Bonyolultabb deformációkat is le kéne írni, de az eddigiek ezt nem tudják.
(pl. megcsavarás)

A belső erőkre vonatkozó erőtörvényt kéne megadni



Vegyünk egy alakítatlan testet és egy erővel módosítsuk az alakját
(a TKP gyorsulását most hagyjuk)

Vegyük azt az állapotot, amikor minden atom e.s.-ban van (belső erők $= 0$)

Ha külső erő ért, módosul

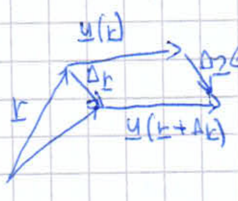
Egy alaptól $\underline{r}$ helyen lévő atom a deformáció esetén $\underline{u}$-val mozdul el. Így
adott deformációt az $\underline{u}(\underline{r},t)$-vel egyértelműen meg lehet adni (szilárd testeknél célszerű ezt)

DE az $\underline{u}(\underline{r},t) = C$ az eltolás, ami viszont nem hoz létre belső erőt

De az elforgatás, pedig $\underline{u}$ ott se C.

Akkor fog belső erő ébredni, ha két pont közti távolság megváltozik.

Ha van egy pont $\underline{r}+\Delta\underline{r}$ helyen, és transzformálódik, akkor, az érdekel, hogy a két új pont távolsága változik-e.



Ez érdekel:

$$\Delta\underline{z} = \underline{r}+\Delta\underline{r}+\underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{r} - \underline{u}(\underline{r}) =$$

$$= \Delta\underline{r} + \underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r})$$

Tudjuk, hogy $\phi(\underline{r}+\Delta\underline{r})-\phi(\underline{r})\cong(\mathrm{grad}\,\phi)\,\Delta\underline{r}$ általában ϕ skalárra, de $\underline{u}$ az vektor

De komponensenként: $u_i(\underline{r}+\Delta\underline{r})-u_i(\underline{r})\cong\frac{\partial u_i}{\partial r_j}\Delta r_j=\beta_{ij}\Delta r_j$

$\cancel{\langle a|B|c\rangle}$

$$\beta_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial r_j}\quad \text{disztorzió}\qquad \hat{\beta}=\frac{d\underline{u}}{d\underline{r}}$$

Így tehát: $\Delta s_i=\Delta r_i+\beta_{ij}\Delta r_j$

Két pont közötti távolság relatív megváltozása: $\frac{|\Delta\underline{s}|-|\Delta\underline{r}|}{|\Delta\underline{r}|}=$

$$=\frac{\sqrt{(\Delta r_i+\beta_{ij}\Delta r_j)(\Delta r_i+\beta_{ik}\Delta r_k)}-|\Delta\underline{r}|}{|\Delta\underline{r}|}=$$

$$=\frac{\sqrt{\Delta r_i\Delta r_i+\Delta r_i\beta_{ij}\Delta r_j+\Delta r_i\beta_{ik}\Delta r_k+\beta_{ij}\beta_{ik}\Delta r_j\Delta r_k}-|\Delta\underline{r}|}{|\Delta\underline{r}|}=$$

$$=\frac{\sqrt{\Delta r_i\Delta r_i+2\Delta r_i\beta_{ij}\Delta r_j+\beta_{ij}\beta_{ik}\Delta r_j\Delta r_k}-|\Delta\underline{r}|}{|\Delta\underline{r}|}=*$$

β_{ij} $\hat{\beta}$ felbontható egy szimmetrikus és antiszimmetrikus részre

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\beta_{ij}+\beta_{ji})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j}+\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)\quad\leftarrow \text{ez a szimmetrikus rész}$$

a antiszimmetrikus részt beírva a két Δr közé zérust kapunk

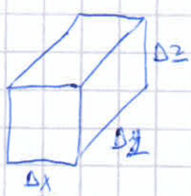
$$2\Delta r_i\beta_{ij}\Delta r_j=2\Delta r_i\varepsilon_{ij}\Delta r_j.$$

A gyökjel alatti utolsó tagot elhagyjuk, mert kisebb 10^{-3}-nál a β, de ha mellé nem hagyjuk el, akkor transzponáljuk a β_{ik}-t, de mi nem.

$$*=\sqrt{1+2\frac{\Delta r_i\varepsilon_{ij}\Delta r_j}{|\Delta\underline{r}||\Delta\underline{r}|}}-1=\sqrt{1+2k_i\varepsilon_{ij}k_j}\approx\qquad \text{ahol}\quad \underline{k}=\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

$$\approx k_i\varepsilon_{ij}k_j=\underline{\underline{k}\hat{\varepsilon}\underline{k}=\varepsilon}$$

Ez a relatív hosszúságváltozást leíró mennyiség ez.



$\Delta\underline{x}=(\Delta x,0,0)\quad \Delta\underline{y}=(0,\Delta y,0)\quad \Delta\underline{z}=(0,0,\Delta z)$

deformáció után: $\Delta\underline{x}'$, $\Delta\underline{y}'$, $\Delta\underline{z}'$ oldalú paralelepipedon

Mivel $\Delta\underline{s}=\Delta\underline{r}+\hat{\beta}\Delta\underline{r}=(\hat{1}+\hat{\beta})\Delta\underline{r}$, ez minden $\Delta\underline{r}$-re igaz (Δx-re, Δy-ra, Δz-re is.)

$$\Delta \underline{x}' = (\hat{I} + \hat{\beta})\Delta \underline{x} = (1+\beta_{11},\ \beta_{21},\ \beta_{31})\Delta x$$

$$\Delta \underline{y}' = (\hat{I} + \hat{\beta})\Delta \underline{y} = (\beta_{12},\ 1+\beta_{22},\ \beta_{32})\Delta y$$

$$\Delta \underline{z}' = (\hat{I} - \hat{\beta})\Delta z = (\beta_{13},\ \beta_{23},\ 1+\beta_{33})\Delta z$$

$$V' = \begin{vmatrix} 1+\beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & 1+\beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & 1+\beta_{33} \end{vmatrix} \Delta x \Delta y \Delta z \simeq (1+\beta_{11})(1+\beta_{22})(1+\beta_{33})\Delta x \Delta y \Delta z + \text{kisebb} =$$

$$= (1 + \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} + \text{kisebb})\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = Sp\,\hat{\beta} = Sp\,\hat{\varepsilon}$$

Ez jó, mert a spúr a koordinátarendszertől - független

Az offdiagonális elemek csak a tiszta nyírásnál számítanak

transzformációs szabály $\underline{r} \to \underline{r} + \underline{u}(\underline{r}) = \underline{r}'(\underline{r})$

vagyis ez egy koordináta transzformáció, vagyis a fent leírt mátrix csak a transzformációnak a Jacobi-determinánsa

Elforgatás esetén

$$\underline{u}(\underline{r}) = \Delta \underline{\varphi} \times \underline{r}$$

Az előbb számított $\hat{\beta}$ antiszimmetrikus

Tehát $\hat{\beta}$ szimmetrikus része, eltolás és elforgatás esetén 0, ez lesz a megfelelő fizikai mennyiség

ennek kell szerepelnie az erőtörvényben : $\hat{\varepsilon}$

FOLYT KÖZ

3. előadás (03.10.)

$$\underline{u}(\underline{r},t) \longrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}: \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

Az elmozdulást (tenzort ezzel jellemezzük), de az erőt

hogy miként nem tudjuk

Egy pontrendszernél van szó, amire érvényes a Newton törvénye.

Ráadásul a pontrendszer minden részében is pontrendszer

DE: Az atomok közti kölcsönhatás (általában) rövidtávú (kb. egy atomtávolság)

Így az alrendszerre ható külső erőhatások csak azok számítanak, amik a környezetben vannak

$\underline{f}$: erősűrűség $\quad \underline{f}\,\Delta V = \Delta \underline{F}_i$ ez az az erő, amit a külső erő a ΔV nagyságú térfogatra kifejt hat (pl.: nehézségi erőtérben: $\underline{f} = \rho \underline{g}$)

Az alrendszerre ható külső erők

$$\underline{F} = \int \underline{f}\, dV + \oint \underline{\quad}$$

A $\underline{\quad}$ helyén a ΔF_b-k vannak felületi integrálja

$\Delta \underline{F}_b$: a felület közelében levő atomok hatásának eredője

Mivel csak a közeli atomok hatnak egymásra: $\Delta \underline{F}_b \sim \Delta \underline{A}$

$$\Delta \underline{F}_b = \hat{\sigma}\, \Delta \underline{A}$$

$$\underline{F} = \int \underline{f} + \oint \hat{\sigma}\, d\underline{A}$$

$\sigma_{ij}\, \Delta A_j$ vágjuk ki i-nél elsőként a felületi integrált, így az lesz a erőhatás i. komponense

$$[\sigma] = Pa$$

Az impulzusváltozás: $\quad \underline{p} = \int \rho\, \underline{v}(\underline{r},t)\, dV$ $\quad$ Ha ezt deriválni akarjuk, figyelni kell arra, hogy a térfogat is változik közben, de ezt kicsit változónak, így elhanyagoljuk

$$\frac{d}{dt}\underline{p} \approx \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, dV \approx \int \rho \frac{\partial v}{\partial t}\, dV = \int \rho\, \underline{\ddot{u}}\, dV$$

Newton II. miatt $\quad \int \rho\, \underline{\ddot{u}}\, dV = \int \underline{f}\, dV + \oint \hat{\sigma}\, d\underline{A}$

A Gauss-tétel általában: $\oint \underline{g}\, d\underline{A} = \int (\operatorname{div} \underline{g})\, dV$

indexesen $\oint g_i\, dA_i = \int (\partial_j g_j)\, dV$

Tenzorra: $\oint \sigma_{ij}\, dA_j = \int (\partial_j \sigma_{ik})\, dV$ jelölés $\partial_i \sigma_{ik} = \operatorname{div} \hat{\sigma}$

Tanultak alapján: $\int \rho \ddot{\underline{u}}\, dV = \int \underline{f}\, dV + \int (\operatorname{div} \hat{\sigma})\, dV$

Mivel ez tetszőleges alrendszerre igaz, ezért az integrál eltűnik

$\rho \ddot{\underline{u}} = \underline{f} + \operatorname{div} \hat{\sigma}$

Ki kell, hogy elégítse, hogy a külső erők forgatónyomatéka egyenlő a impulzusmomentum időszerinti deriváltjával. Ennek az a feltétele, hogy $\hat{\sigma}$ szimmetrikus, ezért innentől úgy tekintjük (ha nem az, akkor egyéb dolgok jönnek.)

Mitől függ $\hat{\sigma}$? Az erő függ a helytől és a sebességtől, ennek analógiájára

$\hat{\sigma}(\hat{\varepsilon}, \dot{\hat{\varepsilon}}, t, \dots)$. A σ általában ezektől is függ anyagtól függően

Szilárd anyag, ha $\hat{\sigma}(\hat{\varepsilon})$. Folyadék, ha $\hat{\sigma}(\dot{\hat{\varepsilon}})$ (Newtoni folyadék, ha $\hat{\sigma}(\dot{\hat{\varepsilon}})$ lineáris.)

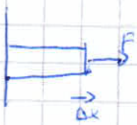
Konstitutív-egyenlet adja meg $\hat{\sigma}$ függését. Ehhez kísérletek kellenek

Rugalmas anyag: olyan szilárd test, ahol a $\hat{\sigma}(\hat{\varepsilon})$ összefüggés lineáris

Kell egy referenciahelyzet: az ahol $\hat{\sigma} = 0$

$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$ általánosított Hooke-törvény

- Mivel $\hat{\varepsilon}$ szimmetrikus, ezért C utolsó két indexe nem lehet antiszimmetrikus, sőt szim.
- Mivel $\hat{\sigma}$ is szimmetrikus ezért $i\, j$ is szimmetrikus



$W = \frac{1}{2} F \Delta x = \frac{1}{2} A l \frac{F}{A} \frac{\Delta x}{l} = \frac{1}{2} A l \sigma \varepsilon$

$w = \frac{W}{Al} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon E \varepsilon$

rugalmas energiasűrűség

Általánosan is igaz, hogy $\boxed{w = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}}$

A cél, hogy ha tudjuk az energiát, akkor a fenti képlettel minden ki lehessen számolni, ami egyenértékű az 1. főtétellel is (létezik egy sk. fgv. ami mindent megad)

Ez alapján: $\sigma_{op} = \frac{dw}{d\varepsilon_{op}} = C_{opij} \varepsilon_{ij}$

Ha C első két indexe nem felcserélhető a 2. kettővel, akkor ez a energiában „nem ad járulékot"

Hány független eleme van C-nek?

Ha van egy 3×3-as szimmetrikus tenzor, 6 független eleme van. Ez megfeleltethető egy vektornak

Így a $\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta ij} \varepsilon_{ij}$ -nél a ε 6 dimenziós vektorhoz σ 6 dim vektort

rendelünk, ekkor egy 6-szor 6-os szimmetrikus mátrix: 21 független elem

Kirchhoff

FOLYT KÖZ

9. előadás (03. 17.)

$w = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{dw}{d\varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \Rightarrow$ C-nek 21 paramétere van

Találni szimmetriákat, végtelen csökkentik a 21-et

- köbös rendszerben 3 van

jelölés: $\hat{\sigma} = \hat{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}$ két pont, mert két indexre összegzünk

izotróp rendszer: minden irányban ugyanolyan (bárhogy nézve a Young modulus egyenlő)

ε azon mennyiségeit keressük, amik négyzetesen függnek ε-tól, és koordinátarendszertől függetlenek

pl.: $(\varepsilon_{ll})^2$; $(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji})$ összesen csak kettő van ilyen ↑.

Így izotróp rendszerek energiája: $w = \mu (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{ll})^2$

μ, λ: Lamé állandók

deriválás: $\sigma_{op} = \frac{dw}{d\varepsilon_{op}} = 2\mu \delta_{oi} \delta_{pj} \varepsilon_{ij} + 2\frac{\lambda}{2} \delta_{oq} \delta_{pq} \varepsilon_{ll} =$

$= 2\mu \varepsilon_{op} + \lambda \delta_{op} \varepsilon_{ll}$

Ha $\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ll}$ akkor $\varepsilon^*_{ll} = 0$, így ez csak nyírással kapcsolatos deformáció vagy mi ilyesmi

$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ll}\right) + \underbrace{\left(\frac{2\mu}{3} + \lambda\right)}_{K} \delta_{ij} \varepsilon_{ll}$

Az első tagban nincs ΔV, a másodikban van, így μ a nyírásra jellemző.

K → kompresszió modulus

σ spúrja: $\sigma_{ll} = (2\mu + 3\lambda) \varepsilon_{ll} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ll} = \frac{\sigma_{ll}}{2\mu + 3\lambda}$

Ezt a másikba visszaírva: $\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij} \sigma_{ll} = 2\mu \varepsilon_{ij}$

vagyis $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij} \sigma_{ll}\right)$

Olyan σ-t alkalmazva, aminek csak egyik komponense nem 0 (egyirányú feszítés):

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ebből felírható ε:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu}\left(1-\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\right)\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\mu}\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\mu}\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\sigma \end{pmatrix}$$

Mivel a ε_{11} írja le a megnyúlást: $\frac{1}{E} = \frac{1}{2\mu}\left(1-\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\sigma\right)$

A Poisson-szám pedig: $\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}}{1-\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}}$

⇒ Az első órán bevezetett rugalmas állandók és a most Lamé-állandók közötti összefüggés az izotróp rendszerben

Mivel $\rho\ddot{\underline{u}} = \underline{f} + \operatorname{div}\hat{\sigma}$ ezt kell felírni.

illetve, ugye: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$

továbbá: $\frac{\partial}{\partial r_i}\sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_e}{\partial r_e}\right] =$

$$= \mu\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}u_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r_j}(\operatorname{div}\underline{u})$$

indexelésmentesen: $\operatorname{div}\hat{\sigma} = \mu\Delta\underline{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\underline{u})$

Ezekből a mozgásegyenlet: $\rho\ddot{\underline{u}} = \underline{f} + \mu\Delta\underline{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\underline{u})$

Példa

Mennyire nyúlik meg egy test a saját súlya és a ráakasztott [illegible] test hatására

$$\rho \underline{\ddot{u}} = \underline{f} + \operatorname{div} \hat{\sigma}$$

$$\rho g + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} E = 0 \quad (1)$$

u pontos megadásához kellenének még kezdeti feltételek is, de az itt nincs.

$\Rightarrow$ határfeltételek: $u(0) = 0$ (2)
(peremfeltétel)

Továbbá, M nyugalomban van: $Mg - A\sigma(l) = Mg - AE \frac{du}{dx}(l) = 0$

FOLYT. KÖZ.

5. előadás (04.24.)

$u(x)$: csak a hosszirányú megnyúlással foglalkozunk

$$\rho g + E\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$ ez a mozgásegyenlet

peremfeltételek: $u(0)=0$

$$Mg = AE\frac{du}{dt}(l)$$

A második derivált konstans. Keressük a megoldást $u(x)=a+bx+cx^2$ alakban

visszaírva: $\rho g + E\cdot 2c = 0 \;\rightarrow\; u(x) = a + bx - \frac{\rho g}{2E}x^2$ Ez az ált. megoldás

Mivel $u(0)$ szerint $a=0$

A másik miatt: $Mg = AE\left(b - \frac{\rho g}{E}\cdot l\right) \;\rightarrow\; b = \frac{Mg}{AE} + \frac{\rho g l}{E}$

A megoldás: $u(x) = \left(\frac{Mg}{AE} + \frac{\rho g}{E}l\right)x - \frac{\rho g}{2E}x^2 = \underline{\frac{g}{AE}(M+m)x - \frac{mg}{2EA}\frac{x^2}{l}}$

Spec. eset: $m=0$ $\quad u(x) = \frac{Mg}{AE}x$ $\quad$ (rugó megoldása)

$$M=0 \quad u(x) = \frac{gm}{AE}\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) \qquad u(l) = \frac{gm}{AE}\frac{l}{2}$$

Henger síkjának tetejét elfordítjuk. Hol milyen a feszültség és milyen deformáció jön létre

φ szöggel forgatunk, mennyi a függőleges egyenes γ elfordulása

$\gamma(\varphi) = ?$

Az ívhossza: $\gamma l = r\Delta\varphi \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{r}{l}\Delta\varphi$

$$\tau = \mu\frac{r}{l}\Delta\varphi$$ A nyíró feszültség a sugárral kifelé egyenesen arányos

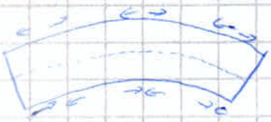
Minden kis részre erő hat, ez forgató nyomatékot okoz, ezek összege lesz az eredő $\underline{M}$.

Egy r sugarú gyűrűre ható nyomaték: $\Delta M(r) = 2\pi r\Delta r\cdot r\cdot\mu\frac{r}{l}\Delta\varphi$

$$\Delta M = \mu\frac{\Delta\varphi}{l}2\pi r^3\Delta r$$

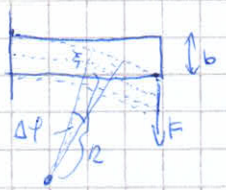
$$M_{teljes} = \int_0^R \mu\frac{\Delta\varphi}{l}2\pi r^3 dr = \mu\frac{\Delta\varphi}{2l}\pi R^4 = \mu\frac{\pi}{2}\frac{R^4}{l}\Delta\varphi$$

Rudak hajlítása:



A tetején nyújtás, alul összenyomás van

Ez alapján kell lennie egy olyan vonalnak, aminek a hossza nem változik meg: neutrális zóna



Kicsiny $\Delta\varphi$ távolságra a n. z.-tól ξ magasságra milyen lesz a megnyúlás

$$\varepsilon(\xi) = \frac{(R+\xi)\Delta\varphi - R\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{\xi}{R}$$

Ébredő feszültség: $\sigma = E\frac{\xi}{R}$

Milyen erők hatnak a rúd jobb oldalára? F és a középső felületen ható erő

F_b majdnem vízszintes

$\underline{F_b} = \int_{\square} \sigma \, d\underline{A} = -\underline{F}$ $\quad$ $\underline{F}$ függőleges, de az integrál majdnem vízszintes

Ez azt jelenti, hogy $\underline{F}$ elhanyagolható, de nincs vízszintes irányú erő, nagyjából

$$\int_{\square} \sigma \, d\underline{A} \approx 0 \rightarrow a\int_0^b E\,\frac{y-y_0}{R}\,dy = 0$$

Ebből kijön, hogy a neutrális zónának a súlypontban kell lennie.

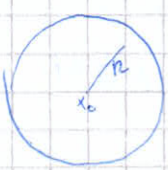
A forgató nyomatéknak is 0-nak kell lennie

$\Delta F = \sigma a \xi \qquad \Delta M = \frac{E}{R} a \xi^2 \Delta\xi$

$$M_b = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{E}{R} a \xi^2 d\xi = \frac{E}{R} a \frac{b^3}{12} = \frac{E}{R} I$$ $\quad$ I: hajlítási nyomaték

$$\frac{EI}{R} = F(l-x) \qquad (A\ \Sigma M = 0 \text{ miatt})$$

$y(x)$ lehajlás a kérdés, de ez nem szerepel az egyenletben, hanem a görbületi sugár



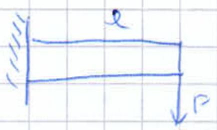
$$(x-x_0)^2+y^2=R \rightarrow y = \pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{-2(x-x_0)}{2\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{\pm 1}{\sqrt{R^2+\text{kicsi}}} + \text{kicsi} = \frac{\pm 1}{R}$$

Vagyis $\frac{1}{R} \approx \pm\frac{d^2y}{dx^2}$

Visszaírva: $\boxed{EI\frac{d^2y}{dx^2} + F(l-x) = 0}$ $\quad$ ezt kell majd megoldani

FOLYT KÖZ

6. előadás (03.31.)



$$EI \cdot \frac{1}{R} - F(l-x) = 0$$

Kis hajlítás esetén $\frac{1}{R} = -\frac{d^2y}{dx^2}$

tehát
$$\boxed{\begin{aligned} & EI\frac{d^2y}{dx^2} + F(l-x) = 0 \\ & y(0) = 0 \\ & \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{aligned}}$$

Keressük a megoldást $y(x) = a + bx + \frac{c}{2}x^2 + \frac{d}{6}x^3 + \dots$ alakban

KF miatt $a = b = 0$
$$\frac{dy}{dx} = cx + \frac{d}{2}x^2$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = c + dx$$

Visszaírva: $EI(c+dx) + F(l-x) = 0$

$$\Rightarrow EIc = -Fl \quad \text{és} \quad EId = F$$

Ebből: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{EI}\left(-Flx + \frac{F}{2}x^2\right)$ (Ezt nem lett volna muszáj leírni)

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{l}{2}x^2\right)}}$$

Egy álló oszlopot terhelünk, ki törik-e?

$$EI\frac{1}{R} - Fy = 0$$
$$-EI\frac{d^2y}{dx^2} = Fy$$

Keressük a mo-t: $y(x) = A\sin(kx+\varphi)$ alakban

Visszaírva: $+EIk^2 = F \Rightarrow k^2 = \frac{F}{EI}$

KF: Mivel $y(0) = 0$ ezért $\varphi = 0$

Ugyanakkor $y(l) = A\sin(kl) \stackrel{!}{=} 0$ ehhez az kell, hogy $kl = n\pi$

Ez elég érdekes, ezért alapesetben csak összenyomódni a rúd, de kísérletileg van egy F_c, aminél kihajlás történik

Ha $n=1$ $k = \frac{\pi}{l}$ $\Rightarrow$ $F_c = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot EI$

Folyadékok és gázok

Mi az a mennyiség, ami kulcsfontosságú? Nem jó a σ vagy az ε, mert itt nincsenek más jellemzőségei

Eddig $\Delta\underline{F} = \hat{\sigma}\,\Delta\underline{A}$, de most azt látjuk, hogy most az irány nem tenzor, hanem szám, mert az erő mindig ph a felület normálisával (Pascal-kísérlet)

$$\hat{\sigma} = -p\,\hat{I} \qquad E = -p\,\Delta A$$

Pascal-tenzor

a lényeg, hogy az erő ph. a felülettel és arányos vele, nem pedig a közegben mindenütt azonosan továbbterjedés stb.

Minket a Div $\hat{\sigma}$ érdekel

$$\mathrm{Div}\begin{pmatrix} -p & & \\ & -p & \\ & & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\,\mathrm{grad}\,p$$

Tehát a egyensúly feltétele: $\mathrm{Div}\,\hat{\sigma} + \underline{f} = 0$

felírva: $\boxed{-\mathrm{grad}\,p + \underline{f} = 0}$

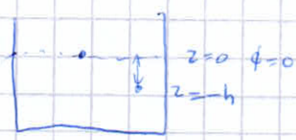
Súlytér esetén: $\underline{f} = \rho\underline{g} = -\rho\,\mathrm{grad}\,\phi$

Tehát $\mathrm{grad}\,p + \rho\,\mathrm{grad}\,\phi = 0$ Folyadékok esetén jó közelítés, hogy $\rho = \text{áll}$

ilyenkor $\mathrm{grad}(p + \rho\phi) = 0 \Rightarrow p + \rho\phi = \text{áll}$

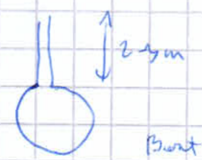
vagyis az izobár felületek egybeesnek az ekvipotenciális felületekkel $\Rightarrow$ A víz vízszintes

Ha a víz felszínén $\phi = 0$



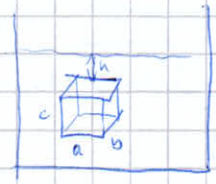
$$p + \rho g z = p_0$$

$$\underline{p = p_0 + \rho g h}$$



Bort értve oldotta, szétrobban a hordó
így nevezett párat Pascal

Tegyünk folyadékba egy téglatestet:



Az oldalára ható erők kiegyenlítődnek, a többi

$$F = -\rho g h\, ab + \rho g (h+c)\, ab = \rho g\, abc = \rho g V$$

Archimédesz törvénye

Másik bizonyítás általános testre

$$F_{fel} = \oint \hat{\sigma}\, d\underline{A} = \int \mathrm{Div}\, \hat{\sigma}\, dV = \int -\rho \underline{g}\, dV = -\rho \underline{g} V$$

Ezzel élhetünk, mert a integrált a vízre írjuk fel ($\mathrm{Div}\, \hat{\sigma}$), hiszen ott van a test is a felület határán.

Ugyanakkor, ha a testet kicseréljük folyadékra, akkor már jó lenne, mert a nyomás ugyanakkora

FOLYT KÖZ
7. előadás (04.07.)

$$\boxed{-\text{grad}\, p + \underline{f} = 0}$$

forgó koordinátarendszerben figyeljük: áll ami a tehetetlenségi erőt

$$\underline{f} = \rho \underline{g} + \rho\omega^2 \underline{r} \qquad \text{ahol} \quad \underline{r} = (x, y, 0)$$

g előállítható egy potenciál gradienseként.

Állítás: $\underline{r}$ is: $\quad \phi_c = -\frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) \qquad -\text{grad}\,\phi_c = \rho\omega^2 \underline{r}$

így $\phi_t = \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2)$ potenciál: $-\text{grad}\,\phi_t = \underline{f}$

Az alapegyenlet alakja:

$$p + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) = \text{konst}$$

Legyen az origó a felület legalsó pontján

$$p + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) = p_0$$

A szabad felületen $p = p_0$, így annak egyenlete:

$$\underline{\underline{\rho g z = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2)}} \quad \Leftarrow \text{ Egzaktul parabola}$$

Mi van, ha gázról van szó? összenyomható

$$-\text{grad}\, p - \rho\, \text{grad}\,\phi = 0 \qquad \rho \text{ függ a } p\text{-től}$$

Kéne egy $p(\rho)$ függv. gázokra: $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$

így be jött a hőmérséklet is, amire nem tudunk mit mondani

lehetőségek: – állandó T (lassú folyamatok, így a T kiegyenlítődik)

– ~~mag~~ adiabatikus folyamat (gyors folyamat, így nincs idő kiegyenlítésre)

$$\boxed{\text{grad}\, p + \frac{M}{RT}\, p\, \text{grad}\,\phi = 0}$$

Nehézségi erőtér esetén

$$\operatorname{grad} p - \frac{M}{RT} p \, \underline{g} = 0 \qquad \text{ahol} \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\frac{dp}{dz} + \frac{M}{RT} p g = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

$$\text{Mivel } p \sim \rho \qquad \rho = \rho_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

Barometrikus magasságformula

Ez csak közelítés, hiszen a T valójában nem állandó

$$M = m N_A \qquad \frac{R}{N_A} = k_B$$

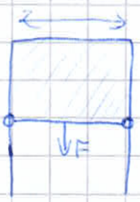
$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} = \rho_0 e^{-\frac{E_h}{k_B T}}$$

$$e^{-\frac{E_1}{k_B T}} \qquad \text{Boltzmann - faktor}$$

A ρ arányos azzal, hogy milyen valószínűséggel van ott egy részecske. Erre utal a B-faktor

A ρ & h-függése függ a gázatom tömegétől, a nehezebb gáz gyorsabban csökken,
így a különböző szinteken más a [illegible] - arányú $\Delta\rho$, ezért [illegible] válik ki, és [illegible] ég

Felületi feszültség



Kísérletileg: $F \sim \ell$

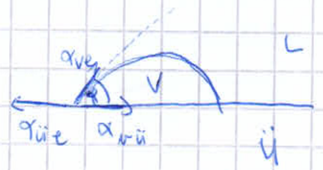
az arányossági tényező függ az anyagi minőségtől

$$F = 2\alpha\ell \qquad \alpha: \text{ felületi feszültség} \qquad [\alpha] = \frac{N}{m}$$

$$\Delta W = F \Delta x = \alpha \cdot 2\ell \Delta x = \alpha \Delta A$$

$$\frac{dW}{dA} = \alpha$$

Mindenhol jelen vannak az effektusok, ahol különböző anyagi felületek találkoznak !!!



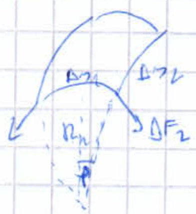
Mekkora φ szöggel illeszkedik a csepp az asztalra?

Vízszintes irányban nincs gyorsulás, így
ezzel a komponensre írhatunk fel összefüggést

$$\alpha_{vü} + \alpha_{ve}\cos\varphi = \alpha_{üe} \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\alpha_{üe} - \alpha_{vü}}{\alpha_{ve}}$$

Ha a jobboldal > 1, akkor nincs megoldás, a helyzet nem egyensúlyi $\Rightarrow$ szétfolyik

Így tudunk írni tollal, ceruzával : tinta – filc – levegő : van egyensúly
tinta – filc – papír : nincs egyensúly $\rightarrow$ folyik



$\Delta F_2 = \alpha \Delta s_2$

$$\Delta F_{2\perp} = 2\alpha\Delta s_2 \sin\varphi \approx 2\alpha\Delta s_2\varphi \approx 2\alpha\Delta s_2 \frac{\Delta s_1 \cdot \frac{1}{R_1}}{2} = \alpha\Delta s_1\Delta s_2\frac{1}{R_1}$$

$$\Delta F_\perp = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Delta s_1 \Delta s_2 \quad \leftarrow \text{összesen}$$

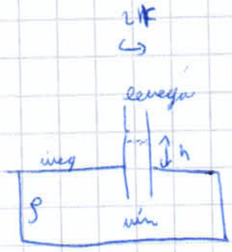
Az egyensúlyhoz tartozóan kell $\Delta F = p\,\Delta s_1 \Delta s_2$ erő a túlnyomásból

$$\Rightarrow \quad p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \leftarrow \text{görbületi nyomás}$$

Kisebb gömbben nagyobb nyomás, mint a nagyobban (kisebb fújja fel a nagyobbat)

FOLYT KÖZ

8. előadás (04.21.)



kapillárisban a víz megemelkedik.

$$\Delta E_h = r^2 \pi h \rho g \frac{1}{2} h$$

$$E(h) = r^2 \pi h \rho g \frac{h}{2} + (\alpha_{üv} - \alpha_{üe}) 2\pi r h$$

Egyensúly feltétele: $\frac{dE}{dh} = 0$

$$r^2 \pi \rho g h + (\alpha_{üv} - \alpha_{üe}) 2\pi r = 0 \Rightarrow h = \frac{2(\alpha_{üe} - \alpha_{üv})}{r \rho g}$$

Áramló folyadékok (hidrodinamika)

Szólajóbető mennyiségek: ρ; p; $\underline{v}$

Kontinuitás alapján:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t = \rho(t+\Delta t, \underline{r}) - \rho(t, \underline{r})$$ ← $\underline{r}$ helyen a sűrűség változás

$$\Delta m = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Delta t$$

Ugyanakkor a Δm tömegnek be kellett lépnie a $v \Delta t$ vastagságú hártyába

Elemi térfogat $\Delta V = \underline{v} \Delta \underline{A} \Delta t$, amiben a tömeg $\Delta m = \oint \rho \underline{v} \, d\underline{A} \, \Delta t \quad (-1)$

A (-1) azért, mert az anyag befelé áramlik, de a $d\underline{A}$ vektor kifelé mutat.

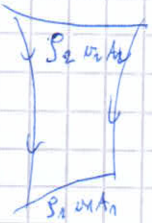
$$\boxed{\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint \rho \underline{v} \, d\underline{A} = 0}$$ kontinuitási egyenlet

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) \right) dV = 0$$ Bármely térfogatra, tehát

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0}$$

Ha $\underline{v}$ nem függ az időtől, ρ se függhet, ilyenkor stacionárius áramlás van.

$\underline{v}(\underline{r})$, $\rho(\underline{r})$ ⇒ Minden helyen megmondható a sebesség ⇒ áramvonalak



Mivel az anyag megmarad

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$\Delta m = \rho_1 v_1 A_1 \Delta t = \rho_2 v_2 A_2 \Delta t$ Ha behozunk Δm anyagot

De mi van a munkatétellel?

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = W_b + W_k = \underbrace{\underbrace{p_1 A_1 v_1 \Delta t}_{\text{Energiát végzek, hogy benyomjam}} - \underbrace{p_2 A_2 v_2 \Delta t}_{\text{Energiát nyerek, hogy a túloldalt kijön}} + \underbrace{\Delta m (U_1 - U_2)}_{\text{Potenciális erőtér munkája}}}_{\text{Külső erők}} + \underbrace{\Delta \delta W_b}_{\text{Belső erő munkája}}$$

Összenyomhatatlan folyadékok esetén az atomok távolsága állandó, így ezen a belső erők mind kényszererők, tehát $\Delta \delta W_b = 0$ és $\rho = \text{áll}$

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta m} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta m} + U_1 - U_2$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + U_1 - U_2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{áll}}$$ Bernoulli-törvény

(Magnus-hatás: Meg lehet csavarni a labdát a sorfal mellett)

Mi van, ha mégis összenyomható a közeg?

$dU_b = \delta Q + \delta W$ ahol δW a közeg munka de minket belső erő érdekel, úgyhogy előjelesen kell

$\delta W_b = \delta Q - dU_b$ TFH: nincs hőcsere (gyors változások esetén)

$$\delta W_b = -dU_b$$

Termodinamikából tudjuk, hogy $\frac{U_b}{m} = c_v T = \frac{M}{R} c_v \frac{p}{\rho}$

mivel $c_p - c_v = \frac{R}{M}$ $\quad \frac{M}{R} c_v = \frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} = \frac{1}{\kappa - 1}$

Így a munkatétel:

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + U_1 - U_2 - \left(\frac{1}{\kappa-1}\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{1}{\kappa-1}\frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

tehát: $\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho} + U = \text{áll}}$

$\longrightarrow$ értsd: $A(\underline{v})$ ismert

Mi van adott keresztmetszetű cső esetén (legyen κ = áll)

$$\left.\begin{aligned} \rho v A &= \text{áll} \quad (1) \\ \frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho} &= \text{áll} \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

Ez nem elég, de mivel adiabatikust feltételeztünk

$$pV^\kappa = \text{áll} \Rightarrow \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll} \quad (3)$$

(1) miatt

$$d(\rho v A) = 0 = d\rho \cdot vA + dv \cdot \rho A + dA \cdot \rho v$$

mivel $\rho v A$ áll, ezzel leosztható $\Rightarrow \dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{dv}{v} + \dfrac{dA}{A} = 0 \quad (4)$

(2) miatt

$$d\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}\right) = dv \cdot v + \frac{\kappa}{\kappa-1}\left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2}d\rho\right) = *$$

Ha van egy $p(\rho)$ összefüggés (pl. (3)) akkor

$$dp(\rho) = \frac{dp}{d\rho}d\rho = c^2 d\rho$$

$$* = dv \cdot v + \frac{\kappa}{\kappa-1}\left(c^2\frac{d\rho}{\rho} - \frac{c^2}{\kappa}\cdot\frac{d\rho}{\rho}\right) = *$$

~~mert~~ $\cancel{\dfrac{dp}{d\rho}} =$

mert (3) miatt $\dfrac{dp}{d\rho} = \kappa \cdot \text{áll} \cdot \rho^{\kappa-1} = \kappa\dfrac{\text{áll}\,\rho^\kappa}{\rho} = \kappa\dfrac{p}{\rho} = c^2$

továbbá

$$* = dv \cdot v + c^2\frac{d\rho}{\rho}\frac{\kappa}{\kappa-1}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = dv \cdot v + c^2\frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (5)$$

(4) és (5) már két egyenlet két ismeretlennel:

$$\frac{dv}{v}v^2 - c^2\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right) = 0$$

$$(v^2 - c^2)\frac{dv}{v} - c^2\frac{dA}{A} = 0 \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{v^2 - c^2}{c^2}\frac{dv}{v} \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dv}{v}$$

~~[illegible]~~: $\cancel{\dfrac{dA}{A} = -\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\dfrac{dv}{v}}$

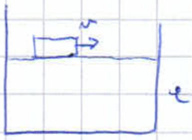
Ha A csökken és $v < c$ akkor v nő, de ha v eléri c-t akkor A-t növelni kell v növeléséhez (c a hang terjedési sebessége)

FOLYT KÖZ

9. előadás (04. 28.)

ideális esetben $\hat\sigma = -p\hat I$

általában van súrlódás, de extrém körülmények között elhanyagolható súrlódás nélküli áramlás folyás.



A vízben úszó falap egyenletes mozgatásához erő kell

kísérlet alapján $F \sim A$; $F \sim v$; $F \sim \frac{1}{l}$

és függ az anyagi minőségtől $\quad F = \eta \frac{A v}{l}$

az nyírófesz., mert $\underline{f} \perp \underline{v}$. $\tau = \eta \frac{d v_x}{d y}$ Newton-féle viszkozitási törvény

Ha a deformációs tenzor: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$

annak deriváltja: $\dot\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right)$

azt sejtjük hogy a τ az $\dot\varepsilon_{ij}$ mint komponensekre összefügg.

végén azt mondjuk, hogy $\hat\sigma(\hat\varepsilon, \dot{\hat\varepsilon}, \dots)$ ha csak $\hat\varepsilon$-tól függ az a rugalmasságtan, de most a sebességtől is függ

Mivel $\hat\sigma = -p\hat I$, ezért a nyomás is függ a sebességtől

izotróp anyagok esetén $\hat\sigma = 2\mu\hat\varepsilon + \lambda(Sp\,\hat\varepsilon)\hat I$ volt

A folyadék $\hat\sigma = -p\hat I + \hat\sigma'(\dot{\hat\varepsilon})$ ahol $\hat\sigma'$ $\dot{\hat\varepsilon}$-tól lineáris, de van szerencsénk kvadratikus a lineárisnál sem. Az ~~xxxx~~ előző analógia alapján: $\hat\sigma' = 2\eta\dot{\hat\varepsilon} + \eta'(Sp\,\dot{\hat\varepsilon})\hat I$

$Sp\,\dot{\hat\varepsilon} = \mathrm{div}\,\underline{v}$ mert $Sp\,\hat\varepsilon$ a ΔV volt

Ha összenyomhatatlan, akkor a kontinuitás miatt $\mathrm{div}\,\underline{v} = 0$, tehát $Sp\,\dot{\hat\varepsilon} = 0$

$\mathrm{div}\,\hat\sigma' = ?$

$$(\mathrm{div}\,\hat\sigma')_j = \frac{\partial}{\partial r_i}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right) + \eta'\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial r_k}\right] =$$

$$= \eta\Delta v_j + \eta\frac{\partial}{\partial r_j}(\mathrm{div}\,\underline{v}) + \eta'\frac{\partial}{\partial r_j}(\mathrm{div}\,\underline{v}) =$$

$$= \eta\Delta v_j + (\eta + \eta')\frac{\partial}{\partial r_j}(\mathrm{div}\,\underline{v})$$

vektoriálisan: $\mathrm{div}\,\hat\sigma' = \eta\Delta\underline{v} + (\eta+\eta')\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{v})$

Hogy írjuk fel a folyadékok mozgásegyenletét?

$\rho \ddot{\underline{u}} = \mathrm{div}\,\hat{\sigma} + \underline{f}$ DE a S_{ij}-tal gond van, mert változik a anyag alakja meg amúgy is $\underline{u}$ a deformálatlan állapothoz számít, ami itt nincs

Ami számunkra releváns, a áramlási sebesség mezője: $\underline{v}(\underline{r},t)$

$\underline{v}(\underline{r}(t),t) \rightarrow \underline{a} = \frac{d}{dt}\underline{v}(\underline{r}(t),t)$

$$\frac{d}{dt}v_i(\underline{r}(t),t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial r_j}v_j =$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\,v_i$$

Így a mozgásegyenlet: $\boxed{\rho\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{v} = -\mathrm{grad}\,p + \eta\,\Delta\underline{v} + (\eta+\eta')\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{v}) + \underline{f}}$

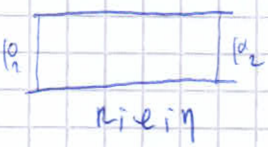
Navier-Stokes-egyenlet

A bal oldalon a 2. tagban $\underline{v}$ nem lineáris, és ez okozza a sok gondot. (pl.: meteorológia)

Csőben való folyadék áramlása

TFH: a folyadék összenyomhatatlan, és áramlása stacionárius

ilyenkor $\oint \hat{\sigma}\, d\underline{A} = \underline{0}$



Vegyünk venni egy r sugarú hengert
az alaplapon a $\hat{\sigma}$-nak csak a nyomásból van komponense
a paláston csak a nyírásból: $\tau = \eta\frac{dv_x}{dr}$

Elég a x irányú komponenssel foglalkozni, a többi a hengerfeltételek miatt jónak kell lenni

$$\left(\oint \hat{\sigma}\, d\underline{A}\right)_x = 2\pi r \ell \eta \frac{dv_x}{dr} + r^2\pi(p_1 - p_2) = 0$$

$$2\pi r \ell \eta \frac{dv_x}{dr} = r^2\pi(p_2 - p_1)$$

$$\boxed{\frac{dv_x}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{2\ell\eta}\, r} \Rightarrow v(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\ell\eta}\, r^2 + C$$

Hogyan állapítsuk meg C-t? TFH: $v(R) = 0$

ezzel: $v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\ell\eta}(R^2 - r^2)$

a vízhozam: $\Phi = \int \rho v\, dA = \int_0^R 2\pi r\, \rho\, \frac{p_1 - p_2}{4\ell\eta}(R^2 - r^2)\, dr = \rho\frac{p_1 - p_2}{2\ell\eta}\pi\int_0^R r(R^2 - r^2)\, dr =$

$$= \rho\frac{p_1 - p_2}{2\ell\eta}\pi\cdot\frac{R^4}{4} = \rho\frac{p_1 - p_2}{8\ell\eta}\pi R^4$$ Hagen-Poiseuille-törvény

Vegyünk egy összenyomhatatlan folyadék-áramlást stacionárius

$$\rho (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{v} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \underline{v}$$ karakterisztikus sebesség v, méret l

$$\sim \rho \frac{v^2}{l} \qquad\qquad \sim \eta \frac{v}{l^2}$$

$$R = \frac{\rho \frac{v^2}{l}}{\eta \frac{v}{l^2}} = \frac{\rho}{\eta} v l$$ Reynolds-szám

Minél nagyobb R, annál inkább számít a nem lineáris tag

FOLYTKÖZ

10. előadás (05.09.)

Hangtan

Milyen egyenletek vannak: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0$ kontinuitás

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho (\underline{v} \underline{\nabla}) \underline{v} = -\mathrm{grad}(p) + \eta \Delta \underline{v} + (\eta + \eta') \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \underline{v})$$

múlt órán

Találni kell egy $p(\rho)$ összefüggés

Ha a tagokat összehasonlítjuk, akkor a (2) alapján megoldható $\underline{v}$-re, de ez nem biztos, hogy teljesül az (1), hogy $\mathrm{div}\, \underline{v} = 0$, vagyis a (1) alapján ez kell.

$\Rightarrow$ Olyan p-t kell választani, amire $\mathrm{div}\, \underline{v} = 0$ (olyan, mint a kényszererő)

A továbbiakban ne legyen súrlódás, így a (2) utolsó 2 tagja eltűnik

Így a egyenletek:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho (\underline{v} \underline{\nabla}) \underline{v} = -\mathrm{grad}\, p \\ p(\rho) \end{cases}$$

triviális megoldás:

$$\underline{v} = \underline{0}$$
$$\rho = \rho_0$$
$$p = \text{áll}$$

De mi van, ha $\underline{v} \neq 0$ és $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ $\delta\rho \ll \rho_0$

akkor $\delta p = \frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho_0} \delta\rho = c^2 \delta\rho$

Mivel $\delta\rho$ kicsi, az egyenletekből hagyjuk ki a nem lineáris tagokat:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho + \rho_0\, \mathrm{div}\, \underline{v} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$ (a $\mathrm{div}(\rho v)$-nél $\delta\rho$ elhagytuk ρ_0-t kiemeltük)

*

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -c^2\, \mathrm{grad}\, \delta\rho \quad \Big| \cdot \mathrm{div}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\rho + \rho_0\, \mathrm{div} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$$
$$\rho_0\, \mathrm{div} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -c^2 \Delta \delta\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\rho - c^2 \Delta \delta\rho = 0}$$ hullámegyenlet

Ha a * rotját vesszük: $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathrm{rot}\, \underline{v}) = 0$

A hullámegyenlet egy megoldása $\delta\rho = \delta\rho_0 \, e^{i(\omega t + \underline{k}\,\underline{r})}$ ha $\frac{\omega}{k} = c$

A * miatt $\underline{v} = \underline{v}_0 \, e^{i(\omega t + \underline{k}\,\underline{r})}$ megoldás

$$\text{rot}\,\underline{v} = i(\underline{k}\times\underline{v}_0)\, e^{i(\omega t + \underline{k}\,\underline{r})}$$

Ha rot $\underline{v}$ kezdetben 0 volt, ennek mindig 0-nak kell lennie, az csak akkor lehet, ha $\underline{k}\times\underline{v}_0 = 0 \Rightarrow \underline{k}\parallel\underline{v}_0$ a terjedés ~~longitudinális~~ longitudinális

Milyen $p(\rho)$ összefüggés van? $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T$ megjelenik T amivel nem tudunk mit kezdeni

ha adiabatikus $\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll} \Rightarrow c^2 = \kappa\rho^{\kappa-1}\cdot\text{áll} = \kappa\frac{\rho^\kappa}{\rho}\text{áll} = \kappa\frac{p}{\rho} = \kappa\frac{R}{M}T$

ha izoterm $T = \text{áll} \Rightarrow c^2 = \frac{R}{M}T$

Nagy frekvencián az adiabatikus a jó, kis frekvencián az izotermikus
$\Rightarrow$ a terjedési sebesség függ a frekvenciától: <u>Diszperzió</u>

A hullámegyenlet megoldása a síkhullám, mert a $\delta\rho(t, \underline{r})$ képletben az azonos fázisú helyek egyenlete:
$\underline{k}\,\underline{r} = \text{áll} \rightarrow$ sík

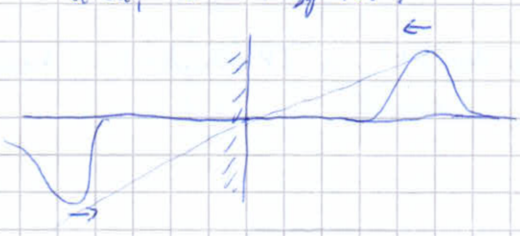
Mi van a síkhullámmal 1D-ben?

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f = 0$$

ennek megoldása bármilyen $f(x \pm ct)$ alakú függvény

tehát a zavar megtartja alakját

Mi van, ha van egy fal?



Az igazi hullámot tükrözzük a fal mögé és a kettő szuperpozíciója számít

Ha szabad a vége, tengelyre, ha rögzített, pontra tükrözünk

Mi van, ha $A\sin(\omega t + kx + \varphi) + A\sin(\omega t - kx - \varphi)$ van?

$= 2A\cdot\sin(\omega t)\cos(kx + \varphi)$ ← állóhullám

Spec esetben: $2A\sin(\omega t)\sin(kx)$ ekkor levágtuk a végét, és ott csak 0 lehet

ha a másik végét is levágtuk: $kL = n\pi \Rightarrow$ adott hosszúságú húron nem lehet akármilyen hang

Mi van anyagban hang esetén?

azt az volt, hogy $\rho \ddot{\underline{u}} = \mu \Delta \underline{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{u})$ ez a mozgásegyenlet

rotálva: $\rho \frac{\partial}{\partial t^2}(\mathrm{rot}\,\underline{u}) = \mu\, \Delta(\mathrm{rot}\,\underline{u})$ rot $\underline{u}$ egy hullámegyenletet elégít ki, ahol

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

divergálva: $\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathrm{div}\,\underline{u}) = \mu\, \Delta(\mathrm{div}\,\underline{u}) + (\lambda+\mu)\,\Delta(\mathrm{div}\,\underline{u})$

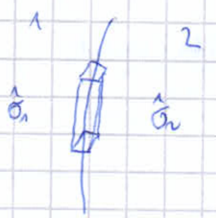
$\rho \frac{\partial}{\partial t^2}(\mathrm{div}\,\underline{u}) = (\lambda+2\mu)\,\Delta(\mathrm{div}\,\underline{u})$ ez is hullámegyenlet

$$c_L = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$$

$\underline{u}$ mindig felbontható egy rot és egy div mentes részre. Az egyik adja a long a másik a transz hullámot. (Mivel div $\underline{u} = \Delta V$, és transz nem lehet ΔV, ezért ez a long)

$\Rightarrow$ Szilárd anyagban két féle terjedési sebesség van: long és transz

Mi történik közeghatáron?:



Mivel a két közegben van feszültség tenzor, és a ... feltétel miatt a felületen merőleges komponens folytonosan megy át.

Egyik anyag belüli rezgés átmegy a másikba

ezért halljuk a hangszerben keltett rezgést a levegőn át

Kristályos anyag esetén minden más van.

Mi van ha különböző frekik vannak? itt számít a $c(\omega)$

$$A \sin(\omega_1 t + k_1 x) + A\sin(\omega_2 t + k_2 x) = 2A \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{k_1-k_2}{2}x\right)$$

Ha ω_1 és ω_2 közeli akkor lebegés van. A cos-os tag maximuma ott van, ahol:

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{k_1-k_2}{2}x = 0 \rightarrow c_{cs} = \frac{d\omega}{dk}$$ (csoportsebessége)

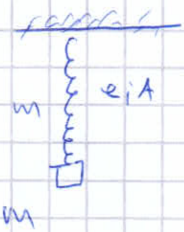
A sin-os tag csúcsa ott van

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{k_1+k_2}{2}x = 0 \rightarrow c_f = \frac{\omega}{k}$$ (A fázis sebessége)

$\sim\omega$ $\quad\sim k$

FOLYT KÖZ

11. előadás (09. 19.)



$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cancel{\rho g} + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Az egyensúlyi helyzetet véve a ρg-t elhagyhatjuk

HF: $u(0) = 0$

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\ell) = \cancel{Mg} - AE \frac{\partial u}{\partial x}(\ell)$$

keressük a megoldást $u(x,t) = u_0 \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(kx)$ (A c. esetben nincs tag, az első HF miatt)

beírva: $-\rho \omega^2 u = -E k^2 u \Rightarrow \omega^2 = \frac{E}{\rho} k^2$

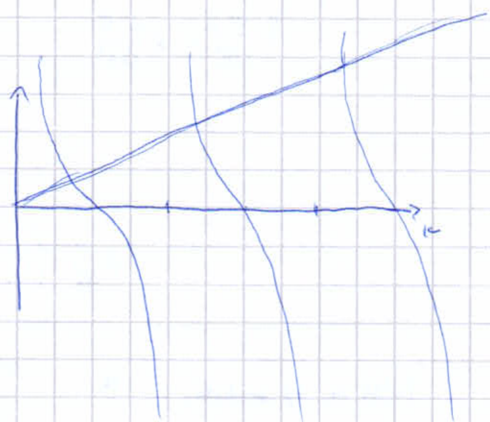
másik: $M \omega^2 u_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(k\ell) = -AE k\, u_0 \sin(\omega t + \varphi) \cos(k\ell)$

$$\Rightarrow M\omega^2 \sin(k\ell) = AEk \cos(k\ell)$$

$$M \frac{E}{\rho} k^2 \sin(k\ell) = AEk \cos(k\ell)$$

$$M \frac{1}{\rho A \ell} (\ell k) = \mathrm{ctg}(k\ell)$$

$$\frac{M}{m} k\ell = \mathrm{ctg}(k\ell)$$



Ha $M = 0$, akkor az egyik végén nyitott nádban.

Ha $M > 0$ akkor végtelen sok ω-k $n\pi$-k.
A teljes megoldás az egyes megoldások szuperpozíciója, de a nagy k-t elhagyjuk, mert a nagyfrekvenciájú komponensek hamarabb csillapodnak.

Ha $\frac{M}{m} \gg 1$, akkor már az első módus is közel van 0-hoz

A ctg sorfejtése $\mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \simeq \frac{1 - \frac{x^2}{2}}{x - \frac{1}{6}x^3} = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - \frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{6}}\right) \approx \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$

$$\frac{M}{m}(k\ell) = \frac{1}{k\ell} - \frac{k\ell}{3}$$

$$(k\ell)^2 \left(\frac{M}{m} + \frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{E}{\ell^2 \rho} k^2 \ell^2 = \frac{E}{\ell^2 \rho} \frac{1}{\frac{M}{m} + \frac{1}{3}} = \frac{EA}{\ell \cdot \ell \rho A} \frac{1}{\frac{M}{m} + \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{EA}{\ell} \frac{1}{M + \frac{m}{3}}$$ A jól ismert eredmény

Leejtett súly

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho g + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

HF: $\frac{\partial u}{\partial x}(\ell) = 0$

TEH: $u(x,t) = u_\infty(x) + \tilde{u}(x,t)$ ahol u_∞ a statikus megoldás:

$$\rho g + E \frac{d^2 u_\infty}{dx^2} = 0$$ ahol $u_\infty(0) = 0$

$$\frac{du_\infty}{dx}(\ell) = 0$$

$u_\infty = a + bx + \frac{c}{2}x^2$ HF miatt $c = -\frac{\rho g}{E}$

$b = \frac{\rho g}{E}\ell$

$$u_\infty = \frac{\rho g}{E}\ell x - \frac{\rho g}{2E}x^2 = \frac{\rho g}{E}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$$

és HF-ben marad a $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(\ell) = 0$

+ elengedés után: $\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0$

azaz $\underbrace{\frac{du_\infty}{dx}(0)}_{\frac{\rho g}{E}\ell} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0) = 0$

Tehát az új probléma:

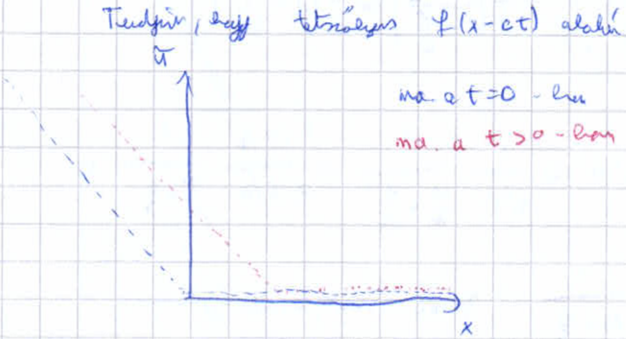
$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$$

HF: $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0) = -\frac{\rho g}{E}\ell$

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(\ell) = 0$

$\tilde{u}(t=0) = 0$

Tudjuk, hogy tetszőleges $f(x-ct)$ alakú lesz megoldás. Legyen egy olyan, ami $x<0$-ra lineáris



lökéshullám: az alja addig áll, amíg a lökés el nem ér oda