Konzultáció felh: konzultáció
jelsz: tudomány 17
K.A.–T.P.: Konzultációs...

KALKULUS II.

1. előadás (02.15.)

Improprius integrál

Motiváció: a Riemann integrál értelmezése korlátos fgv-re és korlátos intervallumon volt értelmezve

Cél: A nem korlátos fgv-k vagy nem korlátos intervallumon értelmezése

1. Nem korlátos intervallum

Def: Legyen $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ korlátos és Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon $\forall\, b>a$-ra

Az f improprius integrálja konvergens az $[a,+\infty]$ intervallumon, ha $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ létezik és véges

Jelölés: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ ha nem konvergens, akkor divergens

Pl: $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1-0=1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln b-\ln 1\right] = \infty$$ ez divergens, mert $\ln b\to\infty$

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\cos x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}(1-\cos b)$$ ez nem létezik, tehát ez is divergens

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$$

Milyen α esetén a határ?

$\alpha\neq 1$: $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{1-\alpha}+\frac{1}{b^{\alpha-1}}\right)$$ $\alpha>1$: $\frac{1}{\alpha-1}$; $\alpha<1$: ∞

Konvergens-e a $\int_0^\infty e^{-x^2}$?

$e^{-x^2} < e^{-x}$ ha $x^2>x$ (vagyis ha $x>1$), tehát

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x}\,dx < \infty$$

Egyébként $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Gondolatkísérlet: sőt

II. korlátos intervallum, de nem korlátos fgv.

Legyen $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall c\in[a,b]$-re Riemann integrálható az $\int_a^c f(x)\,dx$

Az f improprius integrálja konvergens $[a,b)$-n, ha $\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx$ létezik és véges

Ekkor $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)\,dx$

Ha nem konvergens, akkor divergens

Hasonlóan, ha az alsó határnál van a baj

Pl: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+}[\ln x]_c^1 = \lim_{c\to 0+}(\ln 1-\ln c) = \infty$

Sorok (végtelen sorok, számsorok)

Legyen egy sorozat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$! Legyen $s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$! Van-e az (s_n) sorozatnak határértéke?

Def: Legyen (a_n) egy sorozat, az ebből képzett sor az (s_n) sorozat amit így jelölünk $\sum a_n$

Ha $\exists\lim_{n\to\infty} s_n$, akkor azt nevezzük a $\sum a_n$ sor összegének: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n}$

Ha $\lim_{n\to\infty} s_n$ létezik és véges, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens

Pl.: $a_n=\frac{1}{2^n}$ $\quad s_n = \frac12+\frac14+\frac18+\dots+\frac{1}{2^n} = \frac12\cdot\frac{1-(\frac12)^n}{1-\frac12}$

ha $n\to\infty$, akkor $s_n = \frac12\cdot\frac{1-0}{1-\frac12} = 1$

Ugyanígy hogyha $a_n=\frac1n$ akkor $s_n=\infty$

$$s = \frac11+\frac12+\underbrace{\frac13+\frac14}_{\geq\, 2\cdot\frac14=\frac12}+\underbrace{\frac15+\frac16+\frac17+\frac18}_{\geq\, 4\cdot\frac18=\frac12}+\underbrace{\frac19+\frac1{10}+\frac1{11}+\frac1{12}+\frac1{13}+\frac1{14}+\frac1{15}+\frac1{16}}_{\geq\, 8\cdot\frac1{16}=\frac12}+\dots$$

Ebből $s_{2^k} > k\cdot\frac12 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} n\frac12 = \infty$

Tétel: $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bizonyítás: $a_n = s_n - s_{n-1}$ Ennek során

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = 0$$

<u>Tétel</u>: Legyen $\sum a_n$ $\sum b_n$ konv és $c \in K$. Ekkor $\sum (a_n + b_n)$ is konv és $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Valamint $\sum c a_n$ is konvergens és $\sum_{n=1}^{n} c a_n = c \sum_{n=1}^{n} a_n$

<u>Tétel</u>: Legyen $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n$

(i) Ha $\sum b_n$ konv $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konv

(ii) Ha $\sum a_n$ div $\Rightarrow$ $\sum b_n$ div

KALKULUS II.

3. videó

Függvénysorozatok, függvénysorok

<u>Def</u>: Legyenek $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$! Ezek fgv. sorozatot alkotnak

pl.: $f_n(x) = x^n$

Kérdés: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = ?$ Várhatóan egy fgv. lesz

Rögzítjük x-et és az $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \dots$ számsorozatot vizsgáljuk

<u>Def 1</u>: Legyen f_n egy fgv. sorozat!

Ennek konvergenciahalmaza: $KH(f_n) = \{x \in \mathbb{R} \mid (f_n(x)) \text{ konvergens}\}$

<u>Def 2</u>: Legyen f_n egy fgv. sorozat! Ennek határfgv.-e az az $f: KH(f_n) \to \mathbb{R}$ ahol

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

pl.: $f_n(x) = x^n$ $\quad KH(f_n) =]-1; 1]$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < 1 \\ 1, & \text{ha } |x| = 1 \end{cases}$

Kérdés: A fgv. sorozat tagjainak tulajdonságai* öröklődik-e a határfgv.-re

Válasz: Általában nem, csak ha milyen plusz feltétel van.

*: 1. folytonosság
2. differenciálhatóság
3. integrálhatóság

Az öröklődést az egyenletes konvergencia biztosítja (elégséges feltétel)

<u>Def</u>: Legyen (f_n) egy fgv. sorozat és $E \subset \mathbb{R}$ halmaz.

f_n egyenletesen konvergál f-hez az E halmazon, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N, \forall x \in E$$

Eddig szokásos volt: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in E \ \exists N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \ge N$.

Fontos a $\forall x \in E$ helye, mert az alsó defben $\forall x$-re vonatkozóan különböző N-t.

Öröklődési tételek

<u>Tétel</u>: Legyen $f_n: I \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha f_n egyenletesen konvergál f-hez I-n, akkor az f is folytonos.

<u>Tétel</u>: Legyenek $f_n: I \to \mathbb{R}$ diff.ható. Ha f_n pontonként tart f-hez, és f_n' egyenletesen konvergál g-hez I-n, akkor f diff.ható, és $f' = g$

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

<u>Tétel</u>: Legyen $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrálható! Ha f_n egyenletesen tart f-hez $[a,b]$-n akkor f is Riemann integrálható és $\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$

Fgv. sorok. Végtelen összeg

Def: Legyen f_n egy fgv. sorozat és legyen $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x)$

Az S_n függvény sorozatot az f_n fgv.-ből képzett fgv. sornak nevezzük

Jele: $\sum f_n$

Def: Legyen ~~S_n~~ $\sum f_n$ egy fgv. sor. Ennek konvergencia tartománya

$$KH\left(\sum f_n\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} S_n(x) \ \exists \text{ és véges} \right\}$$

az f_n sorozat összegfüggvénye: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \qquad x \in KH\left(\sum f_n\right)$

Pl.: $f_n(x) = x^n$

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots x^{n+1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$\lim S_n(x)$ véges, ha $|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad KH\left(\sum f_n\right) = \left]-1; 1\right[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Def: A $\sum f_n$ fgv.sort a $E \subset \mathbb{R}$ egyenletesen konvergensnek nevezzük, ha az f_n fgv sorozat egyenletesen konvergens a halmazon

Öröklődési tételek

1) Legyenek a f_n fgv.-k folytonosak, és $\sum f_n$ egyenletesen konvergens E-n!

Akkor az összegfgv is folytonos az E-n

Biz: Ha (S_n) egyenl. konv, akkor S_n folyt.

2) Legyenek f_n fgv.-k differenciálhatók! Ha $\sum f_n$ pontonként konvergens és $\sum f_n'$ egyenletesen konvergens $\Rightarrow$ az összegfüggvény diffható

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

sorozat öröklődés

Biz: $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k'}_{S_n'} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

3) Legyenek $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrálhatók! Ha $\sum f_n$ egyenletesen konv $[a,b]$-n akkor az összegfgv is Riemann integrálható és

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

KALKULUS

4. előadás

a napja házilag.

Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható és $a \in \mathbb{R}$

Def: f-nek az a középpontú Taylor-sora: $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Kérdés: mi a KH.?

Pl.: $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$$f'(x) = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$$

Legyen $a = 0$!

$$f(a) = 1$$

$$f'(a) = 1$$

$$f''(a) = 2$$

$$f^{(n)}(a) = n! \quad \Rightarrow c_n = 1$$

Tehát az $\frac{1}{1-x}$ 0 középpontú Taylor sora $\sum x^n$ KH: $(-1, 1)$ és ott a

A Taylor sor nem mindenhol adja vissza az eredeti fgv.

A KH kérdés mindenhol [illegible]

Hatványsorok

Legyen $(c_n) \in \mathbb{R}$ egy sorozat

Def: A $\sum c_n (x-a)^n$ fgv sort az a középpontú hatványsornak nevezzük

Kérdés: Milyen x értékre konvergens?

Gyökkritérium a $\sum |c_n (x-a)^n|$ sorra

$$a_n = |c_n (x-a)^n|$$

$$\sqrt[n]{|c_n (x-a)^n|} = \sqrt[n]{|c_n|}\ |x-a|$$

KH-n belül

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x-a| < 1$$

Jelölés: $R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} & \text{ha } \limsup \neq 0 \\ \infty & \text{ha } \limsup = 0 \\ 0 & \text{ha } \limsup = \infty \end{cases}$

konvergencia sugár

ha $|x-a| < R \Rightarrow \sum c_n (x-a)^n$ konvergens

Tétel: Legyen $\sum c_n(x-a)^n$ egy hatványsor és R a konvergencia sugara

ha $|x-a| < R \Rightarrow \sum c_n(x-a)^n$ konv

ha $|x-a| > R \Rightarrow \sum c_n(x-a)^n$ div

Azaz $(a-R, a+R) \subset KH\left(\sum c_n(x-a)^n\right) \subset [a-R, a+R]$

Cauchy-Hadamard-tétel

Pl: $\sum x^n \qquad a=0, \; c_n = 1$

$\sqrt[n]{|c_n|} = 1 \Rightarrow R = 1$

végpontok: $x=-1 \quad \sum(-1)^n$ div
$x = 1 \quad \sum 1^n$ div $\Rightarrow KH(\sum x^n) = (-1, 1)$

Pl: $\sum \frac{x^n}{n} \qquad a=0 \quad c_n = \frac{1}{n}$

$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \Rightarrow R = 1$

végpontok: $x=-1 \quad \sum \frac{(-1)^n}{n}$ Leibniz-sor konvergens

$x = 1 \quad \sum \frac{1^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ div

$KH\left(\sum \frac{x^n}{n}\right) = [-1, 1)$

Def: Legyen $\sum c_n(x-a)^n$ egy hatv. sor, ennek összegfgv.-e:

$f: KH\left(\sum c_n(x-a)^n\right) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

Pl.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ha $x \in (-1, 1)$

Abel-tétel: Egy hatványsor a KH $\forall$ korlátos zárt részintervallumán egyenletesen konvergens

következmény:

Tétel: Egy hatványsor összegfüggvénye a KH belsejében diffható, és

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1}$ (ennek konv sugara u.a.)

emiatt akárhányszor diffható

$x = a$-t helyettesítve $f(a) = c_0$

$f'(a) = c_1$

$f''(a) = 2c_2$

$f^{(n)}(a) = n!\, c_n$

$\boxed{\text{Szügletes népz.}}$

Pl.: $f(x) = e^x \qquad a = 0$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1, \qquad c_n = \frac{1}{n!}$

e^x Taylor sora: $\sum \frac{x^n}{n!}$

KH: $\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \Rightarrow R = \infty$

Elégséges hanem mutatni is $\sum \frac{x^n}{n!}$ minden x-re konv:

D'A $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 \quad$ ✓

Általában a Taylor-sor első n tagja alkotja a Taylor-polinomot

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ez a Taylor sor S_n-je

A maradék-tag: $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$

A Taylor-sor összegfgv-je f, ha $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \to 0$

Lagrange maradéktag: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ahol c az a és x között van

Alkalmazzuk e^x-re:

$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow e^x$ Taylor sora minden x-re konvergens.

Def: Az f fgvt Taylor-sorba fejthetőnek nevezzük, ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ilyen pl. $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\cos x$, $\sin x$

Nem ilyen a $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Új Taylor sorok gyártása ~~[illegible]~~

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad x \in (-1, 1)$

$\frac{1}{1+x} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \xrightarrow{\text{integrálva}} \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Ebből kiszámolható pl.: $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

KALKULUS II.

5. videó

Trigonometrikus és Fourier-sorok

Ismétlés hatványsorok: ① Mi a hatványsor: $\sum c_n (x-a)^n$

② Mi a konvergencia halmaz: $KH = [a-R, a+R]$, $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$

③ Az összegfgv. kifejezése az együtthatókkal: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

④ Adott f fgv.-hez előállítjuk c_n-eket, és $\sum c_n (x-a)^n$-t azt mondjuk, hogy az f Taylor-sora.

Ha a KH-ban a sor határértéke egyenlő f-fel, akkor az f Taylor-sorba fejthető.

⑤ Néhány fontos fgv Taylor-sora: $\dfrac{1}{1-x}$; exp; sin; cos

A Fourier-sort ugyanígy vezetjük be.

① Trigonometrikus sor: Adott (a_n) és (b_n) sorozat. A trigonometrikus sor

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

② Konvergencia: Nehéz ügy (18+)

③ Legyen $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum(\ldots)$ $\forall x$-re!

f 2π szerint periodikus, hiszen minden tagja is periodikus

Cél: képlet a_n-re és b_n-re f segítségével

Előkészületek:

Ⓐ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx = 0$ $\quad k \in \mathbb{Z}^+$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Ⓑ

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} \end{aligned}$$

$k, n \in \mathbb{N}$

(c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(k+n)x + \sin(k-n)x\right)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k-n)x - \cos(k+n)x\right]dx = \begin{cases} \xrightarrow{k=n\neq 0} = \pi \\ \xrightarrow{\text{else}} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]dx = \begin{cases} \xrightarrow{k=n=0} = 2\pi \\ \xrightarrow{k=n\neq 0} = \pi \\ \xrightarrow{\text{else}} = 0 \end{cases}$$

Az $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$ fgv. (a_k) és (b_k)-ra keressük összefüggéseket

Ötlet: szorozzuk meg $\sin(nx)$-szel, és integráljuk:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\sin(nx) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)\sin(nx) + b_k \sin(kx)\sin(nx)\right]\right)dx =$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(nx)\,dx}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)\,dx}_{\substack{\pi \text{ ha } k=n \\ 0 \text{ ha } k=\text{más}}} = b_n \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \xrightarrow{\text{ha } n=0} a_0\pi + 0 + 0 = a_0 \pi \\ \xrightarrow{\text{else}} = 0 + a_n\pi + 0 = a_n \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}$$

(4)

Def: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus fgv. és elsői rendszerthatók szép

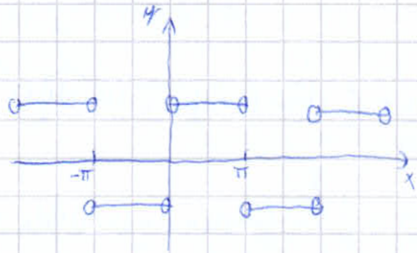
Legyen $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ és $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

Az f $(-\pi, \pi)$ intervallumhoz tartozó F-sora: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$

Az f fgv. F-sorba fejthető, ha az f egyenlő a F-sorával $\forall x$-re.

⑤ Néhány fgv Fourier-sora:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ ha } x \in (0, \pi) \\ -1 \text{ ha } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$



$a_n = 0$, mert a fgv páratlan

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right] = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{?}{=} \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots\right)$$ A múlt óra alapján ez igaz

KALKULUS II.

6. videó

Többváltozós fgv-k

Bevezetés: $\mathbb{R}^n$ tér a számú n-esek halmaza

$x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ ahol $x_i \in \mathbb{R} \ \forall i$

Ezek nem csak halmazok, hanem algebrai struktúrájuk is van:

- összeadás: $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

- számmal szorzás: $x \in \mathbb{R}^n \quad c \in \mathbb{R}$

$$cx = (cx_1, cx_2 \dots c_n)$$

Van topológiai struktúrájuk is:

$x \in \mathbb{R}^n$ hossza (abszolút értéke): $|x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots x_n^2}$

x és y távolsága: $|x-y|$

~~Többváltozós~~ fgv-k határértéke

Déf: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$! Az f fgv határértéke $a \in \mathbb{R}^n$-ben $A \in \mathbb{R}^k$ ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |x-a| < \delta, \ x \neq a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Jele: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Def: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $a \in D(f)$! Az f fgv folytonos a-ban, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Többváltozós differenciálás

Def: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$! Az f fgv. i. változó szerinti parciális deriváltja a-ban, ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 \dots a_i + h, \dots a_n) - f(a_1, a_2 \dots a_n)}{h}$$ létezik és véges

jele: $\partial_i f(a)$ v. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Derivált mátrix (Jakobi mátrix): Cél: $f'(x)$ általánosítása

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

a gond, hogy vektorral kéne osztani

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h}{h}$$ $\Rightarrow$ Ha valami limesz 0, akkor abszolútértéke limesz is 0.

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x) h|}{|h|}$$

~~Itt $f: \mathbb{R}^n$~~

Def: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $x \in \mathbb{R}^n$! D(f) tartalmazza egy x környezetét.

Az f fgv differenciálható x-ben, ha $\exists A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - A \cdot h|}{|h|} = 0.$$ Ekkor $f'(x) = A$

Kérdés: hogyan találjuk meg?

Nézzük az $k = 1$ esetet: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Legyen h olyan: $h = (h_1, 0, 0, \dots, 0)$ $h_1 \to 0$ ilyenkor:

$$\lim \left| \frac{f(x_1+h_1, x_2, x_3 \dots x_n) - f(x_1, x_2 \dots x_n) - A_1 h_1}{h_1} \right| = 0$$

Ha valami abs. értékének limesze 0, akkor annak limesze is 0.

Ebből: $$A_1 = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1+h_1, x_2 \dots x_n) - f(x_1, x_2 \dots x_n)}{h_1} = \partial_1 f$$

Ez tetszőleges i-re jó $\Rightarrow$ $A_i = \partial_i f$

Most legyen k tetszőleges $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. f koordináta fgv.-ei $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Ezt kapjuk:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_k(x) & \dots & & \partial_n f_k(x) \end{pmatrix}$$

KALKULUS II.

7. videó

Lokális szélsőérték

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eset: értelmezés: ha a környezetében van olyan intervallum, ahol $f(a)$ szé.

szükséges feltétel: $f'(a) = 0$

elégséges feltétel: $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0 \Rightarrow$ lok min

$f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0 \Rightarrow$ lok max

$f'(a) = 0$ és $f''(a) = 0 \Rightarrow$?

Cél: ezt kiterjeszteni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ esetre

Értelmezés:

Def: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$! Ennek $a \in \mathbb{R}^n$ pontban minimum van, ha $\exists r > 0$:

$|x - a| < r \Rightarrow f(a) \leq f(x)$

Def: " A f-nek $a \in \mathbb{R}^n$ pontban szigorú lokális minimum van ha "

$f(a) < f(x)$

van még maximum és szigorú lokális maximum

Szükséges feltétel: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható és legyen a-ban lok max v. min!

Legyen $g(t) = f(t, a_2, a_3 \dots a_n)$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Mivel a-ban lok szé van, g-nek a_1-ben lok szé van, tehát $g'(a_1) = 0 \Rightarrow \partial_1 f(a) = 0$

Ez minden i-re működik tehát $\partial_i f(a) = 0 \quad \forall i$-re

Tétel: ~~Ha~~ Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható $a \in \mathbb{R}^n$-ben! Ha f-nek a-ban lok szé-e van, akkor $f'(a) = 0$, azaz $\partial_i f(a) = 0 \quad \forall i$

Elégséges feltétel

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix. A pozitív definit, ha $\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x$-re

A negatív definit, ha $\langle Ax, x \rangle < 0 \quad \forall x$-re

A indefinit, ha egyik sem

Az alábbi elégséges feltételt kell igazolni:

Tétel: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a-ban differenciálható és $f'(a) = 0$!

Ha $f''(a)$ pozitív definit, akkor f-nek a-ban szig lok min-a van

Ha $f''(a)$ negatív definit akkor f-nek a-ban szig lok max-a van.

Ha $f''(a)$ indefinit, akkor nincs szé.

Állítás: Legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$!

Ha $\det A > 0$ és $A_{11} > 0$ akkor pozitív definit

Ha $\det A < 0$ és $A_{11} < 0$ akkor negatív definit

Ha $\det A < 0$ akkor indefinit

Legkisebb négyzetek módszere:

Adott $(x_1, y_1), (x_2, y_2) - (x_n, y_n)$ pontok, és olyan egyenest keresünk, ami legjobban illeszkedik rájuk. Legyen ez $Ax + B$.

$$f(A, B) = (Ax_1 + B - y_1)^2 + (Ax_2 + B - y_2)^2 + \cdots (Ax_n + B - y_n)^2$$

ez az eltérések négyzetösszege

A legjobb közelítésnél f-nek min-je van: $\partial_1 f = 0$ és $\partial_B f = 0$

amiből ki lehet fejezni A, és B-t, és automatikusan minimum lesz

Primitív függv keresés (rotáció)

Definíció: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$! Ennek primitív függv-e $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ha $F' = f$

Young-tétel: Ha $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-en 2-szer diffható, és F'' folytonos, akkor

$$\partial_e \partial_k F = \partial_k \partial_e F$$

Szükséges feltétel primitív függv $\exists$-re:

Tétel: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenciálható, és a parciális deriváltjai folytonosak!

Ha f-nek van primitív függvénye, akkor f' szimmetrikus mátrix

Bizonyítás: Young-tétel

KALKULUS II.

8. videó

Ívhossz

Def: Egy $r : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ folytonos fgv-t görbének nevezünk

(egy görbe értékkészletét nyomát vagy értékkészletet is.)

Cél: A görbe hosszának értelmezése és kiszámítása

Def: Legyenek t_i pontok $a < t_1 < t_2 < \dots t_{n-1} < t_n < b$! A görbe hosszának közelítő összege: $\sigma(t_1, t_2 \dots t_n) = \sum_{i=2}^{n} |r(t_i - t_{i-1})|$ A r görbe hossza:

$\ell(r) = \sup\{\sigma(t_1, t_2 \dots t_n)$ összes felosztás$\}$

Kiszámítás alapgondolata: $f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y)$ ahol $c \in (x, y)$

azaz: $r(t_i) - r(t_{i-1}) = r'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$

$\sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})| = \sum_{i=2}^{n} |r'(t_i)| (t_i - t_{i-1})$ Ez egy integrál közelítő összeg

ennek: $\int_a^b |r'(t)| dt$

Ezeket nyomolható az alábbi:

Tétel: Ha $r : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ diffható és r' folytonos, akkor $\ell(r) = \int_a^b |r'(t)| dt$

megj: Ezt tekinthetjük definíciónak is egy működő görbeértelmezés lehetett

Pl: kör hossza: $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\ell(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$

Megj: Egy görbe hossza független a paraméterezéstől:

Ha $r : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ és $g : [c,d] \to \mathbb{R}^k$ és injektívek

és $\{r(t) : t \in [a,b]\} = \{g(s) : s \in [c,d]\}$

akkor: $\int_a^b |r'(t)| dt = \int_c^d |g'(s)| ds$

Vonalintegrál:

Legyen $r:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ görbe és $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ erőtér

Cél: f integráljának értelmezése az r görbe mentén

Ennek értelme: a görbe mentén végzett munka

Def: Legyen r és f a fenti! ~~A f vonalintegráljának közelítő összege~~

Legyenek t_i pontok: $a<t_1<t_2<\dots t_{n-1}<t_n<b$ és $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$!

Az f vonalintegráljának közelítő összege:

$$\sigma(t_1,t_2\dots t_n,\tau_1,\tau_2,\dots\tau_n)=\sum_{i=1}^{n}\langle f(r(\tau_i)), r(t_i)-r(t_{i-1})\rangle.$$

Az f vonalintegrálja az r görbe mentén az a szám, melyhez a σ közelít, a felosztás finomításakor. Azaz

$\exists I\in\mathbb{R}$ hogy $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ úgy, hogy

$$t_i-t_{i-1}<\delta\ \forall i \Rightarrow |\sigma(t_1\dots t_n,\tau_1,\dots\tau_n)-I|<\varepsilon\quad \forall\tau_i\in[t_{i-1},t_i]\text{-re}$$

Jelölés: $I=\int_r f$

Kiszámítás: ismét az $r(t_i)-r(t_{i-1})\approx r'(t_i)(t_i-t_{i-1})$ közelítést használjuk

$$\sum\langle f(r(\tau_i)), r(t_i)-r(t_{i-1})\rangle\approx\sum\langle f(r(\tau_i)), r'(t_i)\rangle(t_i-t_{i-1})$$

Ez egy hagyományos integrál közelítő összege, annak: $\int_a^b\langle f(r(t)),r'(t)\rangle dt$

Ebből igazolható az alábbi:

Tétel: Legyen $r:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ diffható, r' folytonos és $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ folytonos! Ekkor

$$\int_r f=\int_a^b\langle f(r(t)),r'(t)\rangle\, dt$$

vagy: inkább tekinthető definíciónak

A vonalintegrál és a potenciál kapcsolata

Legyen $r:[a,b]\to\mathbb{R}^k$, $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$, $F:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ és $F'=f$!

VÉ: $f(r(t))=F'(r(t))$. Ezért: $\langle f(r(t)),r'(t)\rangle=F'(r(t))\,r'(t)=(F\circ r)'(t)$

Tétel: Legyen r, f, F a fentiek szerint! Ekkor $\int_r f=F(r(b))-F(r(a))$

Bizonyítás: $\int_r f=\int_a^b\langle f(r(t)),r'(t)\rangle\, dt=\int_a^b(F\circ r)'(t)\,dt\overset{\text{NL miatt}}{=}F(r(b))-F(r(a))$

Megjegyzés: Ha zárt a görbe, tehát $r(a)=r(b)$ akkor $\int_r f=0$

KALKULUS II.

9. videó

Többváltozós fgv. integrálja

Feladat: $f: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ korlátos

Cél: A függvény alatti térfogat kiszámítása

Felosztás: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m < d$

Legyen x Legyen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ és $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$

Közelítő összeg: $\sigma(x,y,\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Def: A f fgv integrálható az $[a,b]\times[c,d] = T$ téglalapon, ha $\exists I$ szám, hogy $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy ha $x_i - x_{i-1} < \delta$ és $y_j - y_{j-1} < \delta$ $\forall i,j$-re, akkor $|\sigma(x,y,\xi,\eta) - I| < \varepsilon$ $\forall \xi,\eta$-ra

Jelölés: $\int_T f = I$

Kérdés: hogy kell egyáltalán kiszámolni?

Máshogy nézve σ-t:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\underbrace{\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)(y_j - y_{j-1})}_{\text{ez az } \int_c^d f(\xi_i,y)\,dy\ \sigma\text{-ja}} \approx \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})S(\xi_i)$$

Legyen $S(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})S(\xi)}_{\text{ennek } \int_a^b S(x)dx\ \sigma\text{-ja}} \approx \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Tétel: (Fubini-tétel): Ha $f: T \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_T f = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Általánosítás több irányban:

1) Többváltozós függvényekre

2) Téglalap helyett más halmazon integrálni

Több változó esete:

Legyen $f:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]\to\mathbb{R}$ korlátos

felosztás: $x_0=a_1<x_1<\dots<x_n<b_1$, y_j és z_k hasonlóan

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$; $\eta_j\in[y_{j-1},y_j]$, $\zeta_k\in[z_{k-1},z_k]$

közelítő összeg $\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})(z_k-z_{k-1})$

$\int_T f$ az a szám amihez a σ közelít a felosztás finomításával.

Tétel: Ha $f:T\to\mathbb{R}$ folytonos akkor

$$\int_T f=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Integrálás nem téglalap alakú tartományon

Legyen $D\subset\mathbb{R}^2$ korlátos, $f:D\to\mathbb{R}$ korlátos

Cél: $\int_D f$ értelmezése és kiszámítása

Legyen $T\supset D$ téglalap és legyen $\tilde f:T\to\mathbb{R}$ olyan hogy $\tilde f(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{ha } (x,y)\in D\\ 0 & \text{ha } (x,y)\notin D\end{cases}$

Def: f integrálható D-n, ha $\tilde f$ integrálható T-n és

$$\int_D f=\int_T \tilde f$$

megj: Ez jól értelmezett, azaz független T választásától

megj: Ez megszorítva D-n is jó definíció

Kérdés: Milyen fgv-ek lesznek integrálhatóak?

$\tilde f$ nem folytonos, de integrálható-e?

Jordan mérték: Terület, térfogat értelmezése
akkor lehet integrálni, ha a határ kicsi v. nem ilyen mi

Fontos speciális tartomány, ahol az integrál kiszámítható: normáltartomány

Legyen $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos és $\alpha(x)\leq\beta(x)$ $\forall x\in[a,b]$

Def: Az $N=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b],\ \alpha(x)\leq y\leq\beta(x)\}$ halmazt normáltartománynak nevezzük

Legyen: c,d olyan: $c\leq\alpha(x)$ $\forall x$ és $d\geq\beta(x)$ $\forall x$

Legyen $T=[a,b]\times[c,d]$ Ekkor $\int_N f=\int_T\tilde f=\int_a^b\int_c^d\tilde f(x,y)\,dy\,dx=$

$$=\int_a^b\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{mert a többi helyen } 0$$

KALKULUS II.

10. videó

Integráltranszformáció (helyettesítéses integrál)

Egyváltozóval: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\, dt = \dots$

miről van szó: $\int_a^b f(x)dx$ -t akarjuk kiszámolni. Legyen $x = g(t)$ $\quad g: [c,d] \to [a,b]$

ekkor $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))|g'(t)|dt$

itt van egy előjel eltérés

bizonyítás: $F' = f$ $\quad$ ekkor $\int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt = \int_c^d (F\circ g)'\,dt = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$

2 változós eset:

Legyen $f: [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \to \mathbb{R}$ integrálható

$g: [c_1,d_1]\times[c_2,d_2] \to [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$

levezetés spec esetben: ha $g_1: [c_1,d_1]\times[c_2,d_2] \to [a_1,b_1]$ csak a 1. változótól függ $g_1(t)$

$g_2: [c_1,d_1]\times[c_2,d_2] \to [a_2,b_2]$ csak 2. változótól függ $g_2(s)$

Legyen $Q = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ és $T = [c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$

$$\int_Q f = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_1}^{b_1}\int_{c_2}^{d_2} f(x, g_2(s))|g_2'(s)|\,ds\,dx =$$

$$= \int_{c_1}^{d_1}\int_{c_2}^{d_2} f(g_1(t), g_2(s))\,|g_2'(s)|\,|g_1'(t)|\,ds\,dt = \int_T (f\circ g)(t,s)\,|\det g'(t,s)|\,ds\,dt$$

Ez az eredmény a nem spec esetben is igaz

Tétel (integrál trafó tétele): Legyen $f: Q \to \mathbb{R}$ integrálható és $g: T \to Q$ diffható és bijektív

Ekkor $\int_Q f = \int_T (f\circ g)|\det g'|$

Három speciális trafó: polár, henger, gömb

Polártranszformáció:

Legyen $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad g(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$

ilyenkor $g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$|\det g'(r,\varphi)| = |r\cos^2\varphi - (-r)\sin^2\varphi| = |r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)| = r$$

Hengertranszformáció

Legyen $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad g(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$

$$g'(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\varphi,z) = 1 \cdot \det g'(r,\varphi) = r$$

Gömbtranszformáció

Legyen $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad g(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta)$

$$g'(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\vartheta,\varphi) = \cancel{r\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta\sin\varphi} + r^2\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varphi$$

$$+ r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi = r^2\sin^3\vartheta + r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta$$

KALKULUS II.

11. videó

Integrálás felületen

Áttekintés, módszer, integrál értelmezése és kiszámítás

Görbeintegrál és vonalintegrál összefoglalása:

Mi a görbe: $r:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ folytonos fgv.

A görbe hossza: közelítő összeg: $\sum_{i=1}^{n} |r(t_i)-r(t_{i-1})|$

kiszámítás $\int_a^b |\dot r(t)|\,dt$

Vonalintegrál: $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$

közelítő összeg: $\sum_{i=1}^{n} \langle f(r(t_i)), r(t_i)-r(t_{i-1})\rangle$

kiszámítás $\int_r f = \int_a^b \langle f(r(t)), \dot r(t)\rangle\, dt$

Cél: Ezt kiterjeszteni felületekre

Mi a felület: $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ folytonos fgv.

paraméterezés $\phi(u,v) = c_0 + ua + bv$ (sík)

Felszíne: legyen $x_0=a<x_1<x_2\dots<x_n=b$

$y_0=c<y_1<y_2\dots<y_n=d$

A kis darabokat paralelogrammákkal közelítjük: $u\to\phi(u,y_j)$, $v\to\phi(x_i,v)$

$\phi(x_i,y_j)-\phi(x_{i-1},y_j)\approx \partial_u\phi(x_i,y_j)(x_i-x_{i-1})$

$\phi(x_i,y_j)-\phi(x_i,y_{j-1})\approx \partial_v\phi(x_i,y_j)(y_j-y_{j-1})$

A terület közelítése: $|\partial_u\phi(x_i,y_j)\times\partial_v\phi(x_i,y_j)|(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$

Felszín közelítő összege: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\quad '' \quad)$

A felszín az a szám, amihez a közelítő összeg közelít a felosztás finomításával

Kiszámítás: $\int_\Omega |\partial_u\phi(u,v)\times\partial_v\phi(u,v)|\,du\,dv$

Felszíni integrál (skalár fgv)

Adott $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ felület és $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folyt fgv

Értelmezzük $\int_\phi u$ -t

Közelítő összeg: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u(\phi(\xi_i, \eta_j)) |\partial_u \phi(x_i, y_j) \times \partial_v \phi(x_i, y_j)| (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Az integrál az a szám, amihez ez közelít a felosztás sűrítésével

Kiszámítás: Ha ϕ diffható és ϕ' és u folytonos, akkor:

$$\int_\phi u = \int_\Omega u(\phi(u,v)) |\partial_u \phi(u,v) \times \partial_v \phi(u,v)| \, du \, dv$$

Felületi integrál (vektor fgv.)

Adott $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ felület és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Közelítő összeg: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle F(\phi(\xi_i, \eta_j)) \mid \partial_u \phi(x_i, y_j) \times \partial_v \phi(x_i, y_j) \rangle (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

$\int_\phi F$ az a szám, amihez ez közelít a felosztás sűrítésével

Kiszámítás: Ha ϕ diffható, ϕ' és F folytonos, akkor

$$\int_\phi F = \int_\Omega \langle F(\phi(u,v)) \mid \partial_u \phi(u,v) \times \partial_v \phi(u,v) \rangle \, du \, dv$$

Integrálátalakító tételek:

1D-ben: Newton-Leibniz-tétel: $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$

2D-ben: Legyen $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ felület, és annak határoló görbéje $r\,[a,b] \to \mathbb{R}^3$

Stokes-tétel: Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diffható! Ekkor $\int_\phi \operatorname{rot} F = \int_r F$

3D-ben: Legyen $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ zárt felület, ami egy $V \subset \mathbb{R}^3$ halmaz határa

Gauss-tétel: Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diffható! Ekkor $\int_V \operatorname{div} F = \int_\phi F$