KALKULUS I.

E1. előadás (09.12.)

Simon Péter: simonp@cs.elte.hu

Alkalmazott analízis és számítástechnikai TSZ

D-3.701

www.cs.elte.hu/~simonp (jegyzet: Faragó–Mezei–Simon)

1 db. írásbeli vizsga decemberben

Analízis koncepciója: - az egészet részekre bontva vizsgálja

- a végtelen kicsi, és a végtelen nagy fogalmát használja

Paradoxonok: Mindenkit borotválja meg, aki nem magát borotválja

$\Rightarrow$ mindent a halmazokkal kell kezdeni

Halmazok

Mi a halmaz? $\rightarrow$ alapfogalom

- Egy halmaz akkor létezik, ha tudjuk mik az elemei: $\in$

Halmazok: - üres halmaz (axióma) $\emptyset$ $\rightarrow$ 0 elemű halmaz

- halmaz az üres halmazzal: $\{\emptyset\}$ $\rightarrow$ 1 elemű halmaz
- $\{\emptyset; \{\emptyset\}\}$ $\rightarrow$ 2 elemű halmaz ($\{\emptyset; \emptyset\}$ $\rightarrow$ nem 2 elemű !!!)

Halmaz megadása: a) $\{1; 2; 3\}$ felsorolással

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ tulajdonsággal

$]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$

Russel-féle paradoxon: állítás: nem létezik ~~olg~~ az összes halmazok halmaza

Biz: TFH. van A halmaz az összes halmazok halmaza

Legyen $B = \{x \in A : x \notin x\}$

Ha $B \in B \Rightarrow B \notin B$ ↯ $\Rightarrow$ mindig meg kell adni az alaphalmazt,

Ha $B \notin B \Rightarrow B \in B$ ↯ így az $x \in A$ probléma

Logikai jelek: $\forall$ minden; $\exists$: létezik; $\Rightarrow$ következik; $\Leftrightarrow$ oda-vissza következik / ekvivalens

$\wedge$ és; $\vee$ vagy

↓ axiómát

Műveletek halmazokkal: $\cup$: unió ; $\cap$ metszet ; $\setminus$ differencia ; c: komplementer

- Unió $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Sok halmaz uniója: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : \exists i \text{ hogy } x \in A_i\}$

Még több halmaz uniója: Γ: egy ~~véges~~ indexhalmaz

A_γ egy halmaz, ha $\gamma \in \Gamma$

A_γ halmazok uniója: $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x : \exists \gamma \in \Gamma \text{ hogy } x \in A_\gamma\}$

Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer! $\cup\mathcal{A}$ az össze benne lévő halmaz uniója

$$\cup\mathcal{A} = \{x : \exists y \, (x \in y \wedge y \in \mathcal{A})\}$$

- Metszet $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma =$

- különbség $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

- komplementer (egy adott alaphalmazra vonatkozó)

X: egy halmaz $A \subset X$, ekkor A (X-re vonatkozó) komplementere!

$A^c = X \setminus A$

- Descartes-szorzat

Legyen a, b két elem! Ezekből alkotott rendezett pár: $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

$(a,b) \neq (b,a)$

Legyen 2 halmaz A és B! Ezek D. szorzata: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Pl: $A = \{1;2;3\}$ $B = \{A;B\}$

$A \times B \{(1,A);(1,B);(2,A);(2,B);(3,A);(3,B)\}$ DE $(A,2) \notin A \times B$

$(A,2) \in B \times A$

Reláció: Legyen A és B halmazok!

az $A \times B$ egy részhalmazát relációnak hívjuk

Pl: az Angol magyar szótár egy reláció

A: angol szavak halmaza

B: magyar szavak halmaza

$A \times B = \{(Dog, kutya); (Dog, híd) \cdots\}$ → Ennek részhalmaza az egymásnak megfelelő szavak

„<" is egy reláció: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: számsík $< = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y - x > 0\}$

$A < B$: a felső félsík

Osztálytárs reláció

$A = \{$ egy iskola tanulói $\}$

$r = \{(a,b) \in A \times A :$ a és b osztálytársak $\}$

<u>Függvény</u>: Legyen A és B halmazok

Egy $f \subset A \times B$ relációt függvénynek nevezünk, ha $(x,y) \in f$ és $(x,z) \in f \Rightarrow y = z$

Ennek a jele $f: A \to B$

domain

f: ÉT-je: $D(f) = \{x \in A : \exists y \ (x,y) \in f\}$

f: ÉK-ja: $R(f) = \{y \in B : \exists x \ (x,y) \in f\}$

range

$(x,y) \in f$ helyett $y = f(x)$ hozzárendelésként írjuk

<u>Függvények kompozíciója</u>: Legyen $f: B \to C$ és $g: A \to B$ fgv.

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

f és g kompozíciója: $f \circ g : A \to C$ melyre $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

összetett függvény

<u>Függvények tulajdonságai</u>: - Az f fgv injektív (kölcsönösen egyértelmű), ha

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- Az f fgv szürjektív, ha $R(f) = B$
- Ha f injektív és szürjektív $\Rightarrow$ f bijektív

<u>Függvény „megfordítása"</u>: Legyen $f: A \to B$ fgv. Ennek inverze $f^{-1}: B \to A$ és $f^{-1}(y) = x$ ha $f(x) = y$

Őskép: Legyen $f: A \to B$ és $H \subset B$.

H ősképe: $f^{-1}(H) = \{x \in A : f(x) \in H\}$

Legyen $f(x) = x^2$ és $H_1 = [-1, 4]$ ~~[illegible]~~

$H_2 = [-2, 4]$ M $f^{-1}(H)$

KALKULUS

Számhalmazok

Fontos számhalmazok

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ természetes számok

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \ldots\}$ egész számok

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0\}$ racionális számok

$\mathbb{R} =$? valós számok → erről lesz szó

$\mathbb{C} =$ komplex számok → jövőhéten

Felépítésük. - $\mathbb{N}$ elemei: vannak

műveletek: $+, \cdot$ kétváltozós függvények $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$+(5,8) \to 13$ helyett $5+8=13$

Két tulajdonság: $a+b = b+a$ kommutatív

$(a+b)+c = a+(b+c)$ asszociatív

- Hogyan lesz a $\mathbb{Z}$? $a+x=b$ $x=?$

$2+x=1$ ilyen x nincs

új jeleket kell kitalálni → az mesterséges

$a+x=0 \to x=-a$

Így az összes $a+x=b$ egyenletet meg tudom oldani
a műveleteket definiálni kell.

$\mathbb{Z}$ ~~az~~ összeadással csoport

Vannak véges kommutatív csoportok - 1, 2, 3 eleművel csak 1 db létezik

egyáltalán nem 4-től már 2, utána több

$\mathbb{Z}$ a szorzással ~~[illegible]~~ csoport, de a 0-nak nincs inverze, és nem zárt $5 \cdot x = 4$ → nincs megoldás

- $\mathbb{Q}$ → itt is új jelek kellenek $a \cdot x = b$

az új jelek $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ számok Ha $p \cdot r = q \cdot s$, akkor a $(p,q) = (r,s)$

pl: $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

újra definiáljuk a műveleteket

$\mathbb{Q}$ csoport a $+$-szal és $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ csoport a $\cdot$-val ⇒ test

Mit tud a $\mathbb{Q}$? Van $+$ és $\cdot$, ezek tulajdonságai

a1: $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{Q}$

a2: $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

a3: $\exists 0 \in \mathbb{Q}$ amire $a+0=a \quad a \in \mathbb{Q}$

a4 $\forall a \in \mathbb{Q} \; \exists b \in \mathbb{Q}: a+b=0$

m.1: $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{Q}$

m.2: $a(bc) = (ab)c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

m.3: $\exists 1 \in \mathbb{Q}: a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{Q}$

m.4 $\forall a \in \mathbb{Q} \; \exists b \in \mathbb{Q}, \; a \cdot b = 1$

d: $(a+b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

ezeket tudja, az a test

Rendezési reláció Q-n $\leq$ (reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív)

r.1: $\forall a,b \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \vee b \leq a$

r.2: $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$ => emiatt nem lehetnek a véges testek rendezettek

r.3: $a,b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$

- Hogyan születik az $\mathbb{R}$?

$x \cdot x = 2$ ilyen Q-ban nincs (Q-dave)

Hiányok vannak a számegyenesen (pl. $\sqrt{2}$, π, e) . . .

Vegyük ezt a halmazt: $\{x \in \mathbb{Q} \; x^2 \leq 2\}$

Felső korlát: olyan szám, aminél a halmaz elemei $\leq$-ek. jele: sup

Van-e legkisebb felső korlát? Q-ban nincs, de R-ben van

Felső határ-axióma: $\forall$ felülről korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja.

Ez Q-ban nem teljesül

Belátható, hogy van olyan rendezett test, ami tartalmazza Q-t, és teljesül benne a felső határ-axióma

Ez az $\mathbb{R}$

Erre nincs univerzálisan elfogadott jelölés

szuprémum, infimum $\quad \sup\{x \in \mathbb{R}: x^2 < 2\} = \sqrt{2}$

$\inf\{\frac{1}{n} \; n \in \mathbb{N}\} = 0$

sok esetben $\inf H = \min H$, de előfordul, hogy $\inf H \notin H$, akkor $\min H$ nincs

$x^k = a$ megoldható $\forall a \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ esetén

$x = \sup\{y \in \mathbb{R} \; y^k = a\}$ → ennek jele $\sqrt[k]{a}$

$a^x \quad a > 0$

$n \in \mathbb{N}: \; a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$ n-szer $\qquad x \in \mathbb{R}: \; a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \; r < x\}$

$n \in \mathbb{Z}: \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad$ igazolható, hogy $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \; a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

abszolútérték $\mathbb{R}$-en: $|x| = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

tulajdonság: $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ háromszög egyenlőtlenség

intervallum jelölések: $(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \;\; a < x < b\}$

Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

Legyen $a_1, a_2 \dots a_n \geq 0$ Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n}$$

$n = 2$-re a bizonyítás:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \to ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \Rightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 0 \leq (a-b)^2 \checkmark$$

KALKULUS

3. előadás

Komplex számok: $\mathbb{C}$

$x^2 = -1 \rightarrow x \notin \mathbb{R}$ új jel: i $i^2 = -1$ $i \in \mathbb{C}$

minnyi új jel kell? Legyen $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ számpárok
Ami fontos: hogyan működnek a műveletek

Összeadás: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ Miért pont ez?

Három ~~Két~~ dolog: – Legyen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Az $(a,0)$, ahol $a \in \mathbb{R}$ felel meg a régi $\mathbb{R}$-nek

– $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$

– Ezek is tudják a $\mathbb{R}$ műveleti tulajdonságait

Olyan jelölés kell, amely könnyűvé teszi a számolást:

$(a,b) = a + ib$ mert $(a,b) = a\underbrace{(1,0)}_{\text{régi } 1} + b\underbrace{(0,1)}_{\text{új } i}$

Komplex szám trigonometrikus alakja

$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $a = r\cos\varphi$
$b = r\sin\varphi$

Milyen egyenletnek van megoldása?

$z^n = w$, ahol $w, z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ belátható, hogy mindig van megoldás

Spec. eset: $z^3 = 1$ keressük z-t trigonometrikus alakban!

$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3 = 1$

$r^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 1 \rightarrow$ Ez akkor lehet 1, ha $r^3 = 1$ és
$3\varphi = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$

Ez látszólag végtelen sok lehetőség.
Mivel $r \in \mathbb{R}^+$, ezért $r = 1$ minden esetben.
Mi lehet φ? $\rightarrow$ Lehet $\varphi = 0 \rightarrow k = 0$
$\varphi = \frac{2\pi}{3} \rightarrow k = 1$
$\varphi = \frac{4\pi}{3} \rightarrow k = 2$

ha $k = 3$-t megnézzük $\varphi = \frac{6\pi}{3} = 2\pi \rightarrow$ ez u.a., mint a $\varphi = 0$
Minden k-ra megfelelnek ezek

$\Rightarrow$ 3 db megoldás van: $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$

<u>Állítás</u>: $z^n = w$ egyenletnek n db megoldása van.

KALKULUS I.

4. előadás

Sorozatok és határérték

Sorozat: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény

jelölés: ha $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, akkor $a(n)$ helyett a_n

Tulajdonságok: – Def: $\{a_n\}$ sorozat korlátos, ha $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{R}$: $\forall n$ $K_1 \leq a_n \leq K_2$

– Def: egy $\{a_n\}$ sorozat monoton nő, ha $\forall n$ $a_n \leq a_{n+1}$

– Def: egy $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő, ha $\forall n$ $a_n \geq a_{n+1}$

+ szigorúság

Határérték: Egy $\{a_n\}$ sorozat konvergens, ha $\exists A \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n \geq N$.

Ez az A szám a sorozat határértékének nevezik: $A = \lim_{n \to \infty} a_n$

Pl: $a_n = \frac{1}{n}$ $\to$ van olyan érzésünk, hogy $A = 0$

Kell találnunk minden ε-hoz N-t találni. $\varepsilon = 0{,}1$-hez $N = 11$

$\hookrightarrow$ ez kisebb 0,1-nél vagy

Ha $N > \frac{1}{\varepsilon}$, akkor működik, mert $a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

Tehát $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Pl2: $a_n = (-1)^n$ Esetleg $A = 0$

Ha $\varepsilon = 2$, akkor $N = 1$-re jó

De $\varepsilon = 0{,}9$-hez nincs $\Rightarrow a_n = (-1)^n$ sorozatnak $A \neq 0$

Próbálkozzunk mással A-val!

Olyan ε-ra, amelyben $[A-\varepsilon, A+\varepsilon]$ ne legyen benne a -1 és az 1 is!

Ennek feltétele, hogy $\varepsilon < 2$. Ilyenkor nincs $N \Rightarrow a_n = (-1)^n$ nem konvergens

$\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ nem jelent semmit

Def. Egy $\{a_n\}$ sorozat $+\infty$-hez tart, ha $\forall k \in \mathbb{R}$-hez $\exists N \in \mathbb{N}$ $a_n > k$, ha $n \geq N$

Def: Egy $\{a_n\}$ sorozat $-\infty$-hez tart, ha $\forall k \in \mathbb{R}$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$: $a_n < k$

Def: Ha egy sorozat nem konvergens, akkor divergens

Ez 3 féle képpen lehet: vagy $+\infty$-hez, vagy $-\infty$ tart, vagy nem tart semmihez

Állítás: TFH. $\exists \lim a_n$ és $\exists \lim b_n$. Ha $\forall n$ $a_n \le b_n$ $\Rightarrow$ $\lim a_n \le \lim b_n$

Állítás: FF H: TFH. $\exists \lim a_n$ és $\exists \lim c_n$ és $a_n \le b_n \le c_n$ és $\lim a_n = \lim c_n$

Ekkor $\exists \lim b_n$ és $\lim b_n = \lim a_n$

Rendőr - szabály

műveletek: Legyen $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens, akkor a_n

- $\{a_n \pm b_n\}$ is konvergens és $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

/ -nál feltétel: $b_n \neq 0$ és $\lim b_n \neq 0$

Pl: $\lim \frac{2}{n} = \lim\left(2 \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim 2 \cdot \lim \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0$

megjegyzés: ez lehetne $\lim \frac{2}{n} = \frac{\lim 2}{\lim n}$ de $a_n = n$ nem konvergens

Az állítás kiterjesztése $\lim a_n = \infty$ vagy $\lim b_n = \infty$ esetre

- Ha $\lim a_n = \infty$ és $\lim b_n = \infty$ akkor $\lim(a_n + b_n) = \infty$
- Ha $\lim a_n = n \in \mathbb{R}$ és $\lim b_n = \infty$ akkor $\lim(a_n + b_n) = \infty$
- De ha $\lim a_n = -\infty$ és $\lim b_n = \infty$ akkor $\lim(a_n + b_n)$ nem felt. 0 vagy ∞

Fontos határértékek:

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha > 0 \\ 0 & \text{ha } \alpha < 0 \\ 1 & \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{ha } q > 1 \\ 1 & \text{ha } q = 1 \\ 0 & \text{ha } -1 < q < 1 \\ \text{nincs} & \text{ha } q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Igazoljuk, hogy $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konv.

Igazolni lehet, hogy ① $a_n < a_{n+1}$ } nehezebb
② $\{a_n\}$ korlátos

③ ha egy sorozat ↑ és felülről k., akkor konvergens és $\lim a_n = \sup a_n$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 1} \le \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) n + 1}{n+1}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) 1} \le \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{2}$$

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2} \frac{1}{2}} \le \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) n + 1}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4} \le 1$$

$\frac{-0,39}{-0,1} = 3,9$

KALKULUS I.

5. előadás

Függvények határértéke

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$

Az f határértéke a-ban A, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, hogy $|x-a| < \delta$ és $x \neq a \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

jelölés: $A = \lim_{x \to a} f(x)$

A lim bevezetésének fő motivációja a derivált $f'(x) = \lim_{h \to} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Pl.: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

$f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \to 0} \sin x \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{\cos h + 1}}_{0} + \lim \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1} = \cos x$$

$f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

A végtelen, mint határérték

Def.: f határértéke a-ban $+\infty$, ha $\forall \omega \in \mathbb{R}$ $\exists \delta$, hogy $|x-a| < \delta$ akkor $x \neq a$
$f(x) > \omega$. jelölés: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Határérték a végtelenben:

f határértéke $+\infty$-ben A, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $x > K$-ra $|f(x) - A| < \varepsilon$

jele: $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$

További: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ . . .

Határértékek és műveletek

Tétel: legyen $f, g: \mathbb{R} - \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$! legyen $\lim_{x - a} f(x)$ és $\lim_{x \to a} g(x)$ véges!

Ekkor $\exists \lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} (f(x) \pm \lim_{x \to a} (g(x))$

Egyoldali határérték:

A $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ nem létezik, mert jobbról és balról más a határérték

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ Az f jobb oldali határértéke a-ban A, ha

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, hogy $a < x < a + \delta$ $|f(x) - A| < \varepsilon$

jele: $\lim_{x \to a^+} f(x) = A$.

Folytonos függvény

Def: legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$! $f(x)$ folytonos a-ban, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Ekkor $\lim_{x \to a} f(x) = f(x)$

KALKULUS I.
6. előadás

Elemi függvények $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Def: folytonos, ha $\forall x \in D(f)$ és $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, hogy $|y-x| < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon$

Def: korlátos, ha $\exists k_1$ és k_2, hogy $\forall x \in D(f)$ $k_1 \le f(x) \le k_2$

Def: monoton nő, ha $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

monoton csökken: ... + szigorúság

1) hatványfüggvények: adott $a \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^a$

- A $D(f)$ nem mindig $\mathbb{R}$, ez a értékétől függ
- mind folytonosak (még az $\frac{1}{x}$ is!!!)
- egyik sem korlátos. kiv: $a = 0$
- monotonitás: ha $a > 0$ szig monoton nő $x > 0$-ra; ha $a < 0$ szig mon csökken
- Sokan $x < 0$-ra is értelmezve vannak

2) Exponenciális függvények: adott $a \in \mathbb{R}^+$: $\exp_a(x) = a^x$

- folytonosak
- alulról korlátosak
- mon: ha $a > 1$ szig mon $\uparrow$; ha $a < 1$ szig mon $\downarrow$
- Fontos tul: $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$
  ez a tul csak az exp. függvényekre igaz.
  Ha $f(x_1+x_2) = f(x_1) f(x_2)$ akkor $f(x) = a^x$, ahol $a = f(1)$
- a legfontosabb: $a = e$ (itt $\exp(x) = e^x$)
  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3) Logaritmus függvény: Adott $a > 0$, $a \neq 1$: $\log_a = \exp_a^{-1}$
(az invertáláshoz kell az injektivitás $\exists$ mivel $\exp_1(x)$ nem injektív, ezért $\log_a$-nál $a \neq 1$) az exp. fgv. inj, mert szig mon.

4) trigonometrikus függvények: Geometriai értelmezés az egységkörön
- általánosan kiszámolni minden értékét lehetetlen, de
  néhány értéket tudunk: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin\pi = 0$; $\cos\pi = -1$
- spec értékek: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$

5) Trigonometrikus „inverzek"

- egyik trigonometrikus függvény sem injektív, így nincs inverzük

De bizonyos részeken szig. mon., és itt lehet ért. inv.

Ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x$ szig. mon. $\uparrow$

Jelölés: $\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$ $\to$ a függvény leszűkítése, vagy megszorítása

$$\arcsin = \left(\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} \qquad \arccos = \left(\cos\Big|_{[0;\pi]}\right)^{-1}$$

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}\Big|_{\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}\right)^{-1} \qquad \operatorname{arcctg} = \left(\operatorname{ctg}\Big|_{]0;\pi[}\right)^{-1}$$

6) hiperbolikus függvények

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

7) hiperbolikus inverzek

$\operatorname{arsh} = ?$ képlet HF $\qquad \operatorname{arch} = \left(\operatorname{ch}\Big|_{[0;\infty[}\right)^{-1}$

KALKULUS I.

7. előadás

Def: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Az f differenciálható a-ban, ha

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ Ekkor $f'(a)$ ez.

Például:

$$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = \underline{3x^2}$$

vagy $\ln(x^e)$

$$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x} \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{x} \left(\lim_{z \to 0} \frac{z}{(1+z)^{\frac{1}{z} z} - 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{z \to 0} \frac{z}{z} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

Alternatív def: f differenciálható a-ban, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x - a} = 0 \qquad \text{Ekkor } f'(a) = A$$

Vagyis: $f(x) = f(a) + A(x-a) + r(x)$

a deriválhatóság: $r(x)$: $\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$

ebből következik, hogy egy differenciálható függvény folytonos

Eddig a képletet számoltuk, de összetett függvényekre tanultuk

$\Rightarrow$ <u>deriválási szabályok</u>

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

inverz: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad f(f^{-1}(x)) = x$

$$\Rightarrow f'(f^{-1}(x)) (f^{-1})'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

KALKULUS

8. előadás (11.14)

Monotonitás:

észrevétel: ha a függvény meredeksége ⊕, egyébként ⊖

Def: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

f az a-ban lokálisan növő, ha $\exists\, r > 0$, hogy ~~ha x∈...~~ $\Rightarrow f$

$x \in (a-r, a) \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

és ha $x \in (a, a+r) \Rightarrow f(a) \leq f(x)$

+ szigorúság + csökkenés

az a megfogalmazás röviden: növő, ha $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$

Tétel: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és deriválható a-ban

Ha $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ szig ~~(mon)~~ lok nő a-ban

Biz: Ha $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ azt tudjuk

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ hogy $x \in (a-r, a+r)$, $x \neq a$ $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$

$\Rightarrow f$ szig lok. nő

(Ha az egyenlőséget engedném, akkor nem jó, mert úgy $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ lehetne 0.)

Tétel: ha f növő a-ban $\Rightarrow f'(a) \geq 0$

Biz: $\exists\, r > 0$ ha $x \in (a-r, a+r) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \Rightarrow f'(a) \geq 0$

Az állítás nem megfordítható

A lokális monotonitás más, mint a globális.

(g: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$)

Lagrange-féle középérték tétel

X X

Szélsőérték:

Def: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f fgvnek a-ban maximuma van, ha $\exists r > 0$, hogy ha $x \in [a-r, a+r] \Rightarrow f(x) \le f(a)$

Tétel: Ha f-nek a-ban lok. szé-je van, akkor $f'(a) = 0$

Biz: $f'(a)$ nem lehet >0 se <0, mert ekkor szig lok növő lenne, vagy szig lok csökkenő

Konvexitás

Geometriában egy halmaz konvex, ha bármely 2 pontját összekötő szakasz benne van a halmazban

Függvényekre:

Def: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $I \subset D(f)$ intervallum

f I intervallumon konvex, ha $\forall x_1, x_2 \in I$-re az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van.

képlettel: $\forall \lambda \in [0;1]$-re $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

+ konkáv, szigorúság

Észrevétel: ha f konvex, akkor f' nő. Ez alapján $(f')' > 0$

Def: Ha f differenciálható és f' is, akkor f 2-szer differenciálható, és $(f')' = f''$

Tétel: Legyen f kétszer deriválható

$f''(x) > 0$ $\forall x \in I$-n akkor f szigorúan konvex

Ezt nem lehet Lagrange nélkül bizonyítani

Def: infl. pont, ha $(a-r, a)$-n konvex $(a, a+r)$-en konkáv, vagy fordítva

KALKULUS I.

9. előadás (11.21.)

Taylor-polinom:

Cél: függvény közelítése polinommal

$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots c_n x^n \qquad c_k \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{N}$

Észrevétel: $p(0) = c_0$; $p'(0) = c_1$; $p''(0) = 2c_2$; $p'''(0) = 6c_3$

Általában: $p^{(k)}(0) = k!\, c_k$

Tétel: Legyen p egy n-ed fokú polinom

$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2} x^2 + \dots \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$\Rightarrow$ Egy tetszőlegesen kicsi 0 körüli intervallumban meghatározható a fgv

nem csak 0 körül: $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots c_n(x-a)^n$

$p(a) = c_0 \quad p'(a) = c_1 \dots$

Általánosan: $p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Vegyünk egy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem polinomot, ami sokszor deriválható

Def: Legy f n-szer deriválható a-ban!

f fgv. a középpontú n-ed fokú Taylor polinomja:

$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$

Ha f egy polinom, akkor $T_n(x) = f(x)$.

$T_1(x)$ az f fgv érintője x-ben

Belátható, hogy $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ ha $k \leq n$

Milyen pontosan közelíti a T_n az f-t?

Lagrange középérték tétel: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ deriválható

Ekkor $\exists\, c \in [a,b]$, hogy $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Bizonyítás: Legyen $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$g(a) = 0$ és $g(b) = 0$ és $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Mivel $g(a) = g(b) = 0 \Rightarrow \exists\, c$, ahol $g'(c) = 0$ (lok max, lok min) [Rolle-tétel]

Ilyenkor $0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$ QED

$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ Mennyi $f(x) - T_1(x)$?

$f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

Lagrange miatt $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$, ahol $c \in [a, x]$, így

$f(x) - T_1(x) = (x-a)\left(f'(c) - f'(a)\right)$ ha $x \to a$, akkor $T_1(x) \to f(x)$

Legyen $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

Tétel (Taylor-polinom Lagrange-féle maradéktaggal): Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$-szer deriválható a pont körül.

Ekkor $\exists c \in [a, x]$ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Mennyire jó ez?

L'Hospital-szabály: Legyen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható a körül.

Legyen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim g(x) = 0$ vagy ∞

Ha $\exists \lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$, akkor $\exists \lim\limits_{a} \dfrac{f}{g}$ és $= \lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$

KALKULUS

10. előadás (11. 28.)

Integrálás: Primitív függvény keresés

Def: Legyen $f: I \to \mathbb{R}$

$F: I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye a f-nek ha $F' = f$. Jele: $\int f = F$

Hány db primitív függvény van?

ellenpélda: $f(x) = \cos x$

$F(x) = \sin x$ jó, de az $F(x) = \sin x + C$ is jó tetszőleges C-re

van-e más?

Tétel: Legyen $f: I \to \mathbb{R}$ és $F: I \to \mathbb{R}$ a primitív függvénye. Ha $G: I \to \mathbb{R}$ is primitív függvény akkor $\exists C \in \mathbb{R}$ hogy $G(x) = F(x) + C$

Bizonyítás: Legyen $H(x) = G(x) - F(x)$, $H: I \to \mathbb{R}$ diff és $H'(x) = 0$ $\forall x$ mert

$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Legyen $x_1, x_2 \in I$ alkalmazzuk a Lagrange középértéktételt $[x_1, x_2]$

$\exists c \in [x_1, x_2]$ hogy $H(x_2) - H(x_1) = H'(c)\,(x_2 - x_1) = 0$

$\Rightarrow H(x_2) = H(x_1) \Rightarrow H$ egy konstans

Így az $\int f$ jelölhet egyet a családból, vagy jelölheti a családot

Milyen függvényeknek van primitív függvénye?

bonyolult megadni, nincs szép képlet

Vannak egzisztencia tételek

pl. Tétel: Ha $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor létezik primitív függvény

Bizonyítás: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ a jövőheten belátjuk, hogy ez deriválható és deriváltja $f(x)$

Mi van, ha nem folytonos? Vannak nem integrálható függvények? Mit értünk?

Módszerek a F meghatározására

0. megkeressük a deriválttáblázat alapján

1. összeg és konstansszoros primitív függvénye

Állítás: Legyen f, g olyan fgv-ek amiknek van primitív függvénye.

Ekkor $f+g$-nek és $c\cdot f$-nek is van,

$$\int(f+g)=\int f+\int g \quad \text{és} \quad \int(cf)=c\cdot\int f$$

Bizonyítás: deriválás

2. A szorzásra, az osztásra és a kompozícióra nincs ilyen szép szabály

Helyette van a parciális integrálás szabálya:

Mivel $(fg)'=f'g+fg' \Rightarrow fg=\int(f'g)+\int(fg')$

Tétel: Legyen f és g $I\to\mathbb{R}$ diffható.

Ha az egyiknek van primitív függvénye, akkor a másiknak is:

$$\int(f'g)=fg-\int(fg')$$

Pl. Mennyi $\int xe^x$? ha $f'(x)=e^x \to f(x)=e^x$

$g(x)=x \to g'(x)=1$

$$\int xe^x=e^x\cdot x-\int e^x\cdot 1=e^x(x-1)+C$$

$$\int \ln x=\int \underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{\ln x}=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}=x(\ln x-1)+C$$

3. A kompozíció helyett van a helyettesítéses integrálás

$$(F\circ g)'=(F'\circ g)g'$$

$$F\circ g=\int(f\circ g)g'$$

$$\int f\circ g=\int(f\circ g)g'$$

Tétel: Legyen $f: I\to\mathbb{R}$ és $g: J\to I$ és diffható.

Ekkor $(f\circ g)g'$-nek van primitív függvénye

$$\int[(f\circ g)g']=\int f\circ g$$

Pl. $\int 2x e^{x^2+1}\, dx$

felismerem, hogy $g(x) = x^2+1$ és $f(x) = e^x$

$g'(x) = 2x \qquad f'(x) = e^x$

$$\int 2x e^{x^2+1} dx = \int (f \circ g) g' = \int f \circ g = e^{x^2+1}$$

$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ ha $x = g(u) = \sin u$

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

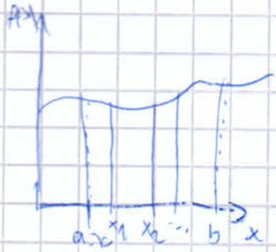
$$\int \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u\, du = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{2x \cos(\arcsin x)}{4} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$$

KALKULUS
11. előadás (12.05.)

Határozott integrál:

Cél: Adott $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv. grafikonja alatti területet értelmezzük és kiszámítsuk



$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_{n-1} < x_n = b$$

$$\tau = \{x_0; x_1 \dots x_n\}$$

Felosztás   Legyen $y_i \in [x_{i-1}; x_i]$ és az i. téglalap teteje itt lesz

Az integrál közelítő összege: $\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{N} f(y_i)(x_i - x_{i-1})$

Remény: a finomításnál $\sigma(\tau)$ közeledik valahova, ha az [illegible] lesz a T.

Def. Legyenek f, τ, y_i, σ definiálva! f integrálható (Riemann-integrálható) ha $\exists I \in \mathbb{R}$ amihez $\sigma(\tau)$ közelít a finomítás során. Pontosabban:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x_i - x_{i-1} < \delta \ \forall i \Rightarrow |\sigma(\tau) - I| < \varepsilon$ az y_i-től függetlenül.

Jelölés $\int_a^b f(x)dx$

Tétel: Riemann-kritérium: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv. Riemann integrálható, ha
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau \Rightarrow S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$

Tétel Ha $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow$ Riemann integrálható

Tétel: Ha $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, véges pont kivételével $\Rightarrow$ R. integrálható

Az integrál kiszámítása:

Ismeretek: – ha $f < g$ akkor $\int_a^b f < \int_a^b g$

Tétel: Integrál középérték-tétel: f integrálható $[a,b]$-n

Ekkor $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Biz: $\min_{a,b} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max_{a,b} f (b-a)$

Legyen $T(x) = \int_a^x f(x)\,dx$:

Tétel: ha f folytonos $\Rightarrow$ T differenciálható és $T' = f$

Biz: $\left(T(x+h) - T(x)\right)\frac{1}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(c_h)$ $\longrightarrow$ mert $T(x+h) = \int_a^{x+h} f$, $T(x) = \int_a^x f$

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$$

N-L - formula: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $F(x)$ a primitív függvénye

Ekkor: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Biz: Legyen $T(x) = \int_a^x f$. Ekkor $T' = f$. Viszont F' is f, így $F(x) = T(x) + c$

$x = a$-ban $F(a) = \overset{=0}{T(a)} + c = c$

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(b) = F(b) - c = F(b) - F(a)$$

KALKULUS 1.

12. előadás (11. 12.)

Racionális törtfüggvények integrálása

Rac. törtfv.: két polinom hányadosa : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Két alapeset: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$ és $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$

(Van kiterjesztés trigonometrikus törtekre

I. elsőfokú nevező: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$; $\int \frac{1}{x+6}\,dx = \ln|x+3|$; $\int \frac{1}{2x-5}\,dx = \ln|2x+6|$

$\int \frac{c}{ax+b}$ ✓

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{3x+1}{2x+3}\,dx = \int \frac{(2x+3)\cdot\frac{3}{2} - \frac{7}{2}}{2x+3}\,dx = \int\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4x+6}\right)dx = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}\ln\left|\frac{4}{7}x + \frac{6}{7}\right| + c$$

Ugyanígy már tudjuk : $\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx$ ✓

II. Számláló másodfokú:

$$\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)^2 - 2x+1}{x+1}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{1-2x}{x+1}\,dx$$

általánosan $\int \frac{p(x)}{ax+b}$ ahhoz p-t alakítjuk ilyen alakban

$$p(x) = q(x)(ax+b) + c$$

III. Másodfokú nevező

gyöktényezős

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{3}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}\right)dx$$

parciális törtekre bontás

$$= \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x-1| - \ln|x+2|$$

$$\int \frac{5x-2}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{5x-2}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}\right)dx = \dots$$

b) 1 gyök

$$\int \frac{2x+3}{x^2} = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right)dx$$

c) nincs $\mathbb{R}$ gyök

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x-1)$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln|1+x^2|$$

$$\int \frac{2x+3}{1+x^2}\,dx = \int\left(\frac{2x}{1+x^2}+\frac{3}{1+x^2}\right)dx = \ln|1+x^2| + 3\operatorname{arctg}(x)$$

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,dx$$

2 gyök

$$\int\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)dx$$

1 gyök

$$\frac{a(x-x_0)+b+ax_0}{(x-x_0)^2}$$

$$\frac{(2cx+d)\frac{a}{2c}+b-\frac{da}{2c}}{cx^2+dx+e}$$

$$\frac{p(x)}{cx^2+dx+e} = \frac{q(x)(cx^2+dx+e)+fx+g}{cx^2+dx+e}$$

Minden valós polinom előáll első és másodfokú polinomok szorzataként

Gyökös függvények integrálása

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,dx$$

$\sqrt{\text{másodfokú}}$ → $\sqrt{1-t^2}$-re arcsin

→ $\sqrt{t^2-1}$-re ch

lehet visszavezetni

→ $\sqrt{t^2+1}$-re sh

$\int \sqrt{\text{harmadfokú}}$ → hopeless ☹

elliptikus integrálok