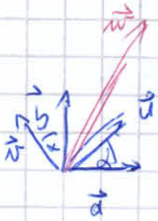
KVANTUM 1.

1. videó

Komplex vektortereket használunk (ez többet tud a valósnál)



$\vec a, \vec b$ is ortonorm és $\vec u, \vec v$ is

$$\vec u = \cos\alpha\,\vec a + \sin\alpha\,\vec b$$

$$\vec v = -\sin\alpha\,\vec a + \cos\alpha\,\vec b \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\vec u\\ \vec v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec a\\ \vec b\end{pmatrix}$$

azaz: $\begin{pmatrix}\vec a\\ \vec b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec u\\ \vec v\end{pmatrix}$

adott $\vec w$ vektor: $\vec w = w_1\vec a + w_2\vec b = w_1'\vec u + w_2'\vec v$

Ha $w(t)$, akkor: $\vec w(t) = w_1(t)\,\vec a + w_2(t)\,\vec b = w_1'(t)\,\vec u + w_2'(t)\,\vec v$

$$|\vec w|^2 = \vec w\,\vec w = w_1^2 + w_2^2 = w_1'^2 + w_2'^2$$

Ha $\vec w$ folytonos, és hossza állandó, és az egyik komponens állandó, akkor a másik is
DE ez komplexben nem!

Pl: $\vec w(t) = \cos\alpha\,\vec a + \sin\alpha\, e^{i\omega t}\,\vec b \qquad \omega\in\mathbb{R}$

$$|\vec w(t)|^2 = \vec w\,\vec w = \sum_k w_k^*(t)\,w_k(t) = (\cos\alpha)^*\cos\alpha + \left(\sin\alpha\, e^{i\omega t}\right)^*\left(\sin\alpha\, e^{i\omega t}\right) =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin\alpha\, e^{-i\omega t}\sin\alpha\, e^{i\omega t} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

itt $w_1(t)$ állandó, $|\vec w|$ is, de $w_2(t)$ nem!

Legyen $p_1 = |w_1|^2 = \cos\alpha \qquad p_2 = |w_2|^2 = \sin\alpha$ (ezek valószínűségek)
ezek időben állandóak, de

Mi van $\vec u, \vec v$ bázisban?

$$\vec w(t) = w_1'(t)\,\vec u + w_2'(t)\,\vec v \quad \Rightarrow \quad q_1 = |w_1'|^2 \qquad q_2 = |w_2'|^2$$

Azt várjuk, hogy q_1 és q_2 is állandóak

$$\vec w(t) = \cos\alpha\,\vec a + \sin\alpha\, e^{i\omega t}\,\vec b = \cos\alpha\left(\cos\alpha\,\vec u - \sin\alpha\,\vec v\right) + \sin\alpha\, e^{i\omega t}\left(\sin\alpha\,\vec u + \cos\alpha\,\vec v\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\, e^{i\omega t}\right)}_{w_1'}\vec u + \underbrace{\sin\alpha\cos\alpha\left(e^{i\omega t} - 1\right)}_{w_2'}\vec v$$

$$q_1 = |w_1'|^2 = w_1'^* w_1' = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\, e^{-iat})(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\, e^{iat}) =$$

$$= \cos^4\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\alpha\, e^{iat} + \cos^2\alpha \sin^2\alpha\, e^{-iat} + \sin^4\alpha =$$

$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(e^{iat} + e^{-iat}) =$$

$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,(\cos at - 1) = 1 - 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha\sin^2\left(\frac{at}{2}\right) =$$

$$= 1 - \sin^2(2\alpha)\sin^2\left(\frac{at}{2}\right)$$

$$q_2 = |w_2'|^2 = w_2'^* w_2' = [\sin\alpha\cos\alpha\,(e^{-iat} - 1)][\sin\alpha\cos\alpha\,(e^{iat} - 1)] =$$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(1 - e^{iat} - e^{-iat} + 1) = \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(2 - 2\cos at) =$$

$$= 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(1 - \cos at) = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\left(\frac{at}{2}\right) = \sin^2(2\alpha)\sin^2\left(\frac{at}{2}\right)$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

A vektor hossza állandó, a komponensek az egyik bázisban változnak, a másikban állandók.

KVANTUM I.

2. videó

Skalártér: $\mathbb{S} = \mathbb{C}$

Vektortér a komplex számtest fölött: $\mathbb{V}_{\mathbb{C}} \ni \vec{v}$

$|v\rangle$

$\langle a \rangle$ ez a valószínűségben az átlag jele

kvantumban a valószínűségi átlag két kifejezés szorzata: $\langle a|b\rangle$

$\langle a|$ bra

$|a\rangle$ ket (A nullvektor nem $|0\rangle$, hanem $\underline{0}$)

Összeadás: $+ : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ $\quad |u\rangle + |v\rangle \equiv |u+v\rangle$ Abel-csoport

Skalárral vt. szorzás: $\cdot : \mathbb{S}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ $\quad |w\rangle = \alpha|v\rangle$

(jelölés: $|v\rangle\alpha \equiv \alpha|v\rangle$)

Tulajdonságai: $\alpha(|v\rangle + |u\rangle) = \alpha|v\rangle + \alpha|u\rangle$

$(\alpha+\beta)|v\rangle = \alpha|v\rangle + \beta|v\rangle$

$(\alpha\beta)|v\rangle = \alpha(\beta|v\rangle)$

$1|v\rangle = |v\rangle$

Példák: ~~Eg~~ Geometriai vektorok, Számnesek, végtelen számoszlopok (sorozatok) bizonyos típusú függvények

Duális terek:

Legyen két tér: $\mathbb{V}$; $\mathbb{W}$ és egy leképezés: $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

Legyen ϕ lineáris azaz: $|v\rangle \to |w\rangle = \phi(|v\rangle) = \phi|v\rangle$

additív: $\phi(|v_1\rangle + |v_2\rangle) = \phi|v_1\rangle + \phi|v_2\rangle$

homogén: $\phi(\alpha|v\rangle) = \alpha\,\phi|v\rangle$

ϕ egy lineáris leképezés (ha $\mathbb{V}=\mathbb{W}$ akkor ϕ operátor)

Ez egy téglalap mátrixszal reprezentálható: $\phi_{kl} = \vec{f}^{(k)}(\hat{A}\ \vec{e}^{(l)})$

Spec eset: A W tér a skalárok halmaza

$f: V \to \$$ lineáris funkcionál

$\varphi(|v\rangle) \in \$ \quad : \quad \varphi(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) = \alpha\varphi(|v\rangle) + \beta\varphi(|w\rangle)$

Ilyen pl.: ha $|v\rangle = \sum_k v_k |e^k\rangle$

akkor $f_k\ |v\rangle \to v_k$

Műveletek funkcionálokkal:

Összeadás: ha $(\varphi + \chi) = \lambda$ akkor $\lambda(|v\rangle) = \varphi(|v\rangle) + \chi(|v\rangle)$

Számmal szorzás: ha $\alpha\varphi = \mu$ akkor $\mu(|v\rangle) = \alpha(\varphi(|v\rangle))$

(Szorzás nincs, mert nem lehet egymás után alkalmazni őket)

$\Rightarrow$ A funkcionálok is lineáris teret alkotnak, ez az eredeti vektortér Duális tere V^*

Minden vektortérnek van duális tere, ami vektortér, tehát annak is van:

V^{**} : A funkcionálokhoz rendel számokat

Belátható, hogy $V^{**} \cong V$

Hány dimenziós a duális tér?

Vegyünk egy bázist az eredeti térben: $|e^k\rangle \in V$

$\forall |v\rangle \in V : \exists v_k \in \$: |v\rangle = \sum_k v_k |e^k\rangle$

Legyen $\varphi \in V^*$

$$\varphi(|v\rangle) = \varphi\left(\sum_k v_k |e^k\rangle\right) = \sum_k \varphi(v_k|e^k\rangle) = \sum_k v_k \underbrace{\varphi(|e^k\rangle)}_{\varphi^k} = \sum_k v_k \varphi^k$$

A φ jellemezhető a bázishoz rendelhető számokkal $\Rightarrow$ hozzárendelhető egy szám-n-es $V^* \ni \varphi \to (\varphi^1, \varphi^2 \dots \varphi^n)$

Így a hozzárendelés egy mátrixszorzat $\Rightarrow$ $\dim V^* = \dim V$

Mi a bázis?

Vegyünk speciális funkcionálokat: $\varepsilon_{(k)} |e^{(l)}\rangle = \delta_k^{\ l}$

$$\varepsilon_k |v\rangle = \varepsilon_k\left(\sum_l v_l |e^{(l)}\rangle\right) = \sum_l \left(v_l\, \varepsilon_k |e^{(l)}\rangle\right) = \sum_l v_l \delta_k^{\ l} = v_k$$

$V^* \ni \varphi = \sum_k \varphi^k \varepsilon_{(k)}$

$\varphi|v\rangle = \sum_k (\varphi^k \varepsilon_{(k)})|v\rangle = \sum_k \varphi^k(\varepsilon_{(k)}|v\rangle) = \sum_k \varphi^k v_k = \varphi|v\rangle$

Tehát $\varphi = \sum_k \varphi^k \varepsilon_{(k)}$ azaz $\varepsilon_{(k)}$ a bázis a V^* bázis

Az $\varepsilon_{(k)}$ bázis az $|e^{(k)}\rangle$ bázis duális bázisa

DE ez eddig csak véges térre igaz, mert végtelen térnél ugye a konvergencia kérdése.

Két ugyanolyan dimenziós vektortér véges esetben izomorf, így $V \cong V^*$, de ez végtelenben nem ~~így~~ mindig igaz. Azt kell megtalálni amikor jó

1) Vegyünk egy sorozatot $a_1, a_2 \dots a_k \dots$ $\forall a_k \in \mathbb{C}$

ha $\sum_k |a_k|^p < \infty$ ez lineáris tér

V^* egy olyan $b_1, b_2 \dots b_k$ sorozat ahol

$$\sum_k |b_k|^q < \infty$$

beláttató, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

A kettő akkor izomorf, ha $p = q = 2$, vagyis, ha $\sum_k |a_k|^2 < \infty$

Ennek a térnek a neve: ℓ^2 (A négyzetesen konvergens sorozatok tere)

2) Vegyünk egy $I \to \mathbb{C}$ fgv. teret I: intervallum

úgy, hogy $\int_I |f(x)|^p \, dx < \infty$

vagy $\int_M |f(\underline{x})|^p \, d^n x < \infty$ $\mathcal{L}^p$

Ha $V \cong \mathcal{L}^p$ akkor $V^* \cong \mathcal{L}^q$ ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

akkor izomorf, ha $p = q = 2$ azaz $\int |f(\underline{x})|^2 d^n x < \infty$ $\mathcal{L}^2$

Hilbert-tér: Olyan lineáris tér, amely $\mathcal{H}_e^* \cong \mathcal{H}_e$

A kvantummechanikában olyanokkal foglalkozunk

Ez lehet véges (minden véges tér Hilbert) vagy végtelen (ℓ^2 vagy $\mathcal{L}^2$)

Állítás: $\ell^2 \cong \mathcal{L}^2$, vagyis

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \ell^2 & & \mathcal{L}^2 \end{tikzcd}$$

Schrödinger $\mathcal{L}^2$-ben dolgozott

Heisenberg ℓ^2-ben

Dirac kidolgozta az $\mathcal{H}$-beli formalizmust

Vegyünk egy adott $\mathcal{H}$-t, vagyis olyan V-t, ami $V \cong V^*$

$V \ni |e^{(k)}\rangle$

$$\varepsilon_{(l)}|e^{(k)}\rangle = \delta^l_k$$

$V^* \ni \varepsilon_{(l)}$

Keressük azt a g leképezést, ami lineáris, és $V \to V^*$

Mivel lineáris, elég megadni a bázisok képét: $g|e^{(k)}\rangle = ?$

$g|e^{(k)}\rangle = \varphi^{(k)} \in V^*$ $\qquad \varphi^{(k)} = \sum_l g^{kl}\varepsilon_{(l)}$

Ha $|v\rangle = \sum_k v_k |e^{(k)}\rangle$

$\downarrow$

$$\varphi = \sum_k v_k\, g|e^{(k)}\rangle = \sum_k v_k \sum_l g^{kl}\varepsilon_{(l)} = \sum_l \left(\sum_k g^{kl} v_k\right)\varepsilon_{(l)}$$

Mivel $\varphi = \sum_l \varphi^l \varepsilon_{(l)}$ szerint $\varphi^l = \sum_k g^{kl} v_k$

g^{kl} megadása egy leképezést egyik térből a másikba (metrikus tenzor)

Ha $g^{kl} = \delta^{kl}$, ez az oszlopvektoros leképezés

Vegyünk két vektort: $|u\rangle, |v\rangle \in V$

$$\begin{tikzcd} |u\rangle \arrow[d, "g"] \\ V^* \ni \varphi_u \end{tikzcd} \qquad \varphi_u|v\rangle \in \mathbb{C}$$

Ez a művelet két vektorhoz rendel egy számot. Ezt az általános g^{kl} metrikus tenzor adja meg. Ennek spec esete a skaláris szorzás.

A funkcionál jelölése a bra vektor: $V^* \ni \varphi_u \equiv \langle u|$

$$\varphi_u|v\rangle \equiv \langle u|v\rangle \in \mathbb{C}$$

$$|u\rangle = \sum_k u_k |e^{(k)}\rangle \qquad |v\rangle = \sum_e v_e |e^{(e)}\rangle$$

$$\langle u| = \sum_k u_k \sum_e g^{ke} \varepsilon_{(e)}$$

$$\langle u|v\rangle = \left(\sum_k u_k \sum_e g^{ke} \varepsilon_{(e)}\right)\left(\sum_m v_m |e^{(m)}\rangle\right) =$$

$$= \sum_k \sum_e \sum_m u_k g^{ke} v_m \underbrace{\varepsilon_{(e)}|e^{(m)}\rangle}_{\delta_e^m} = \underline{\sum_k \sum_e u_k g^{ke} v_e}$$

KVANTUM

3. videó

$V \ni |v\rangle$ $\quad |e^{(k)}\rangle$ bázis $\quad |v\rangle = \sum_k v_k |e^{(k)}\rangle$

f funkcionál $\quad f|v\rangle = \alpha \in \mathbb{C}$ $\quad f \in V^*$

duális bázis: $\varepsilon_\ell \in V^*$ úgy hogy $\varepsilon_\ell |e^{(k)}\rangle = \delta_\ell^k$

Ha $V \cong V^*$ akkor létezik $g: V \to V^*$ bijekció

$$g|e^{(\ell)}\rangle = \sum_k g^{\ell k} \varepsilon_k \qquad \det g \neq 0$$

Kvantumban: Legyen $g: |e^{(k)}\rangle \longrightarrow \varepsilon_k$

DE! $g: |v\rangle = \sum_k v_k |e^{(k)}\rangle \longrightarrow \sum_k v_k^* \varepsilon_{(k)} \equiv \langle v|$

Vigyázat! $|v\rangle \in V$
$\langle v| \in V^*$

Skaláris szorzás:

$$\begin{array}{ccc} V \ni |u\rangle, |v\rangle & & \\ \downarrow & \searrow & \\ V^* \ni \langle u| & \longrightarrow & \langle u|v\rangle \in \mathbb{C} \end{array}$$

kiszámítás: $|u\rangle = \sum_k u_k |e^{(k)}\rangle \longrightarrow \langle u| = \sum_k u_k^* \langle e^{(k)}|$

$|v\rangle = \sum_\ell v_\ell |e^{\ell}\rangle$

$$\langle u|v\rangle = \left(\sum_k u_k^* \langle e^{(k)}|\right)\left(\sum_\ell v_\ell |e^{(\ell)}\rangle\right) = \sum_k \sum_\ell u_k^* v_\ell \langle e^{(k)}|e^{(\ell)}\rangle =$$

$$= \sum_k \sum_\ell u_k^* v_\ell \delta_{k\ell} = \sum_k u_k^* v_k$$

Tulajdonságok:

Ez ortonormált bázis mert $\langle e^{(k)}|e^{(\ell)}\rangle = \delta_{k\ell}$

(6) Klassz: $\langle v|u\rangle = \sum_k v_k^* u_k = \left(\sum_k u_k^* v_k\right)^* = \langle u|v\rangle^*$ Nem kommutatív!
(Hilbert-féle sk. szorzás)

$$\langle v|v\rangle = \sum_k v_k^* v_k = \sum_k |v_k|^2 \geq 0$$

(1) $\langle u|\left(|v\rangle + |w\rangle\right) = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$

(2) $\left(\langle u| + \langle v|\right)|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$

(3) $\langle u|\left(\alpha |v\rangle\right) = \alpha \langle u|v\rangle$

(4) $\langle \alpha u|v\rangle = \alpha^* \langle u|v\rangle$

(5) $\langle v|v\rangle \in \mathbb{R}$ $\quad \langle v|v\rangle \geq 0$, ha $\langle v|v\rangle = 0 \iff |v\rangle = \underline{0}$

Operátor: $\hat{A}: V \to V$

$$|v\rangle \to |u\rangle = \hat{A}|v\rangle \quad \equiv |Av\rangle$$

Lineáris esetben: $\hat{A}(|v_1\rangle + |v_2\rangle) = \hat{A}|v_1\rangle + \hat{A}|v_2\rangle$

$$\hat{A}(\alpha|v\rangle) = \alpha\hat{A}|v\rangle$$

Operátorok összege: $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}$ úgy, hogy $\hat{C}|v\rangle = \hat{A}|v\rangle + \hat{B}|v\rangle = (\hat{A}+\hat{B})|v\rangle$

Számmal szorzása: $\hat{D} = \alpha\hat{A}$ úgy, hogy: $\hat{D}|v\rangle = (\alpha\hat{A})|v\rangle = \alpha(\hat{A}|v\rangle)$

Szorzása: $\hat{F} = \hat{A}\hat{B}$ úgy hogy $\hat{F}|v\rangle = (\hat{A}\hat{B})|v\rangle = \hat{A}(\hat{B}|v\rangle)$

Az operátorok asszociatív algebrát alkotnak

$\hat{B} = \hat{A}^{-1}$, ha $|u\rangle = \hat{A}|v\rangle \Rightarrow B|u\rangle = |v\rangle$

Nevezetes operátorok:

$\hat{I}\,|v\rangle = |v\rangle$	identitás
$\hat{O}|v\rangle = \underline{0}$	nulloperátor
$\hat{T}^2 = \hat{I}$	tükrözés (involúció)
$\hat{P}^2 = \hat{P}$	projekció

Egy tükröző operátor meghatároz egy projektort:

ha $\hat{T}: V \to V$ és $\hat{T}^2 = \hat{I}$

akkor $\hat{P} = \frac{\hat{I}+\hat{T}}{2}$ egy projektor

$$\hat{P}^2 = \frac{\hat{I}\hat{I} + \hat{I}\hat{T} + \hat{T}\hat{I} + \hat{T}\hat{T}}{4} = \frac{\hat{I}+\hat{T}+\hat{T}+\hat{I}}{4} = \frac{\hat{I}+\hat{T}}{2} = \hat{P}$$

továbbá $\hat{Q} = \frac{\hat{I}-\hat{T}}{2}$ is projektor

$$\hat{Q}^2 = \frac{\hat{I}\hat{I} - \hat{I}\hat{T} - \hat{T}\hat{I} + \hat{T}\hat{T}}{4} = \frac{\hat{I}-\hat{T}-\hat{T}+\hat{I}}{4} = \frac{\hat{I}-\hat{T}}{2} = \hat{Q}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \hat{P}^2 = \hat{P} & \hat{P}\hat{Q} = \hat{O} & \hat{P}+\hat{Q} = \hat{I} \\ \hat{Q}^2 = \hat{Q} & \hat{Q}\hat{P} = \hat{O} & \hat{P}-\hat{Q} = \hat{T} \end{array}}$$

Sajátvektorai:

$$\hat{A}\,|v\rangle = \lambda\,|v\rangle$$

A tükrözésé: $\hat{T}\,|w\rangle = \tau\,|w\rangle$

$$\hat{T}\left(\hat{T}\,|w\rangle\right) = \hat{T}\left(\tau\,|w\rangle\right) = \tau\,\hat{T}\,|w\rangle = \tau^2\,|w\rangle$$

$$\hat{T}^2\,|w\rangle = \hat{1}\,|w\rangle = \tau^2\,|w\rangle$$

$$|w\rangle = \tau^2\,|w\rangle \quad \Rightarrow \quad \tau^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau = \pm 1$$

A $\hat{T} = \hat{P} - \hat{Q}$ a $\hat{T}$ operátor projektorfelbontása, a projektorok a sajátalterekre vetítenek

Visszafele: $V \supset W$

$\hat{P}: V \to W$ a $\hat{P}$ projektor leképezést az W altérbe

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \qquad \hat{P}\,|w\rangle \in W$$

akkor a $\hat{Q} = \hat{1} - \hat{P}$ is projektor volt

$$\hat{Q}^2 = (\hat{1}-\hat{P})^2 = \hat{1}\hat{1} - \hat{1}\hat{P} - \hat{P}\hat{1} + \hat{P}\hat{P} = \hat{1} - \hat{P} - \hat{P} + \hat{P} = \hat{1} - \hat{P} = \hat{Q}$$

$$\hat{P}\hat{Q} = \hat{P}(\hat{1}-\hat{P}) = \hat{P}\hat{1} - \hat{P}\hat{P} = \hat{P} - \hat{P} = \hat{0}$$

definiálható egy tükrözés: $\hat{T} = \hat{P} - \hat{Q} = \hat{P} - (\hat{1} - \hat{P}) = 2\hat{P} - \hat{1}$

mert $\hat{T}^2 = (2\hat{P} - \hat{1})^2 = 4\hat{P}^2 - 2\hat{P}\hat{1} - \hat{1}2\hat{P} + \hat{1}\hat{1} = 4\hat{P} - 2\hat{P} - 2\hat{P} + \hat{1} = \hat{1}$

A $\hat{T}^2 = \hat{1}$ involúció

Ha $\hat{M}^3 = \hat{M}$, de $\hat{M}^2 \neq \hat{1}$ az gyenge involúció

Operátor adjungálása:

adott: V és benne $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$

vegyünk $\hat{A}: V \to V$ -t!

$$\hat{A}\,|u\rangle = |v\rangle$$

szendvics

$$\alpha = \langle v|w\rangle = \langle v|\left(\hat{A}\,|u\rangle\right) = \langle v|\hat{A}|u\rangle \in \mathbb{C}$$

$$\sum_k v_k^*\, w_k = \sum_k v_k^* \left(\sum_e A_{ke} u_e\right) = \sum_k \sum_e A_{ke}\, v_k^* u_e$$

másik: $\hat{B}\,|v\rangle = |t\rangle$

$\beta\ \langle t|u\rangle \in \mathbb{C}$

TFH : $\forall$ $|v\rangle$ és $|u\rangle$ esetén $\alpha = \beta$

ilyenkor $\hat{A}$ és $\hat{B}$ nem függetlenek

$\beta^* = \langle u|t\rangle = \langle u|\hat{B}|v\rangle$; $\alpha = \langle v|\hat{A}|u\rangle$

Ilyen kapcsolat esetén $\hat{B} = \hat{A}^+$

$\beta^* = \langle u|A^+|v\rangle = \langle u|A^+v\rangle = \langle u|t\rangle$

$\beta = \langle t|u\rangle = \alpha = \langle u|s\rangle = \langle u|A|u\rangle = \langle v|Av\rangle$

Vagyis - $\langle v|\hat{A}|u\rangle = \langle v|Au\rangle$

$= \langle A^+v|u\rangle$

reprezentálva $\hat{A} \longrightarrow \underline{\underline{A}}$

$\hat{A}^+ \longrightarrow \underline{\underline{A}}^+ = \tilde{\underline{\underline{A}}}^*$

$\hat{H}$ hermitikus, ha $\hat{H}^+ = \hat{H}$ (önadjungált)

$\hat{A}$ antihermitikus ha $\hat{A}^+ = -\hat{A}$

$\hat{U}$ unitér, ha $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$

$\hat{B}$ antiunitér $\hat{B}^+ = -\hat{B}^{-1}$

Legyen $\hat{H}|s_1\rangle = \lambda_1|s_1\rangle$ adjungálva: $\langle s_1|H^+ = \lambda_1^*\langle s_1|$ $\quad / \cdot |s_2\rangle$

$\langle s_1|\hat{H}^+|s_2\rangle = \lambda_1^*\langle s_1|s_2\rangle$

$\langle s_1|\hat{H}|s_2\rangle = \lambda_1^*\langle s_1|s_2\rangle$ ha $\hat{H}|s_2\rangle = \lambda_2|s_2\rangle$

$\lambda_2\langle s_1|s_2\rangle = \lambda_1^*\langle s_1|s_2\rangle$

α) ha $|s_1\rangle = |s_2\rangle$

akkor $\langle s_1|s_1\rangle > 0$ $\overset{\text{egyszerűsítés}}{\Longrightarrow}$ $\lambda_1 = \lambda_1^*$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

Hermitikus mátrix sajátértékei valósak

β) ha $|s_1\rangle \neq |s_2\rangle$

$\lambda_2\langle s_1|s_2\rangle = \lambda_1\langle s_1|s_2\rangle \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\langle s_1|s_2\rangle = 0$

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek

Legyen $\hat{U}|v_1\rangle = \alpha_1 |v_1\rangle$ $\qquad /\cdot \langle v_1|$

$$\langle v_1|\hat{U}|v_1\rangle = \alpha_1 \langle v_1|v_1\rangle \qquad /\cdot \hat{U}^{-1}$$

$$\hat{U}^{-1}\hat{U}|v_1\rangle = \alpha_1 U^{-1}|v_1\rangle$$

$$\langle v_1|\hat{U}^+ = \alpha_1^* \langle v_1| \qquad |v_1\rangle = \alpha_1 \hat{U}^+ |v_1\rangle$$

$$\langle v_1|\hat{U}^+|v_1\rangle = \alpha_1^*\alpha_1 \langle v_1|\hat{U}^+|v_1\rangle$$

$$\alpha_1^*\alpha_1 = 1$$

Unitér operátor sajátértékei a komplex egységkörön vannak

Ha U_1 és U_2 unitér $U_3 = U_2 U_1$ is

Biz $\quad U_3^{-1} = (U_2U_1)^{-1} = U_1^{-1}U_2^{-1} = U_1^+ U_2^+ = (U_2U_1)^+ = U_3^+$

$\Rightarrow$ Az unitér operátorok csoportot alkotnak

Kvantummechanika axiómái

(1) A fizikai rendszer állapotai $\mathcal{H}$ Hilbert-teret alkotnak $\qquad \mathcal{H} \ni |\psi\rangle$

$|\psi\rangle \sim |\phi\rangle$ ha $\exists c \neq 0: |\phi\rangle = c|\psi\rangle$ (Hilbert-tér sugarai)

$\Rightarrow$ egységvektorokat keresünk, de mivel komplexben vagyunk, 1 hosszú komplexszámmal szorozhatjuk őket

$\| |\phi\rangle \| = 1 \Rightarrow \langle\phi|\phi\rangle = 1$ „állapot normálás"

A lineáris térség azt jelenti, hogy homogén lineáris diffegyenlet megoldásai lehetnek, erre vonatkozik a hullámtulajdonság

(2) Ezek függnek az időtől és diffható módon $\quad |\phi(t)\rangle$

(3) Ha $\quad t = 0 \quad |\psi_1\rangle \quad |\psi_2\rangle \qquad |\psi_3\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$

$t \quad |\psi_1(t)\rangle \quad |\psi_2(t)\rangle$ akkor $|\psi_3(t)\rangle = \alpha|\psi_1(t)\rangle + \beta|\psi_2(t)\rangle$

lineáris időfejlődés

Ekkor: $\exists \hat{G}(t): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{G}(t)|\psi(t=0)\rangle \qquad \forall |\psi(t)\rangle\text{-re}$$

Green-operátor. A feladat ennek meghatározása

t_0 : $|\psi_0\rangle$

t_1 : $|\psi_1\rangle = \hat{G}(t_1)|\psi_0\rangle$

$$\left.\begin{aligned} t_1+t_2 :\quad |\psi_2\rangle &= \hat{G}(t_2)|\psi_1\rangle = \hat{G}(t_2)G(t_1)|\psi_0\rangle \\ &= \hat{G}(t_1+t_2)|\psi_0\rangle \end{aligned}\right\} \forall |\psi_0\rangle\text{-ra}$$

$\Rightarrow$ $\hat{G}(t_1+t_2) = \hat{G}(t_2)\hat{G}(t_1)$ időfejlesztés csoporttulajdonsága (zárt rendszerre)

egyparaméteres Lie-csoport: $\hat{G}(t) = e^{t\hat{B}}$ $\hat{B}$: időfejlesztő generátor

KVANTUM 1.

4. videó

(1) Az állapotok lineáris teret alkotnak: hullámtulajdonság

$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle \neq \quad |\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle = c|\psi_1\rangle$ ahol $c \neq 0 \quad c \in \mathbb{C}$

$\{|\psi\rangle\}$ a Hilbert-tér egy sugara

Általában úgy vesszük, hogy $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, de néha ezt nem lehet megoldani

(2) az állapotok időfüggők: $|\psi(t)\rangle$ új diffható

(3) Ha $|\varphi_1\rangle \to |\psi_1(t)\rangle \quad |\psi_1(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$

$|\varphi_2\rangle \to |\psi_2(t)\rangle \quad |\psi_2(0)\rangle = |\varphi_2\rangle$

akkor $|\varphi\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle \to |\psi(t)\rangle = \alpha|\psi_1(t)\rangle + \beta|\psi_2(t)\rangle$

Ebből belátható, hogy $|\psi(t)\rangle = \hat{G}(t)|\varphi\rangle$ ahol $\hat{G}(0) = \hat{1}$ Green-operátor

$t_0 \xrightarrow{\Delta t_1} t_1 \xrightarrow{\Delta t_2} t_2$

$|\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi_1\rangle \longrightarrow |\psi_2\rangle$

$|\psi_1\rangle = \hat{G}(\Delta t_1)|\psi_0\rangle$

$|\psi_2\rangle = \hat{G}(\Delta t_2)|\psi_1\rangle = \hat{G}(\Delta t_2)\hat{G}(\Delta t_1)|\psi_0\rangle$
$= \hat{G}(\Delta t_1 + \Delta t_2)|\psi_0\rangle$ $\Big\}$ $\forall |\psi_0\rangle$-ra

$\Rightarrow \underline{\hat{G}(\tau_1)\hat{G}(\tau_2) = \hat{G}(\tau_1+\tau_2)}$ ez 1 paraméteres Lie-csoport

Ebből: $\hat{G}(0) = \hat{1}$

$\hat{G}(-\tau) = \hat{G}(\tau)^{-1}$

Ez alapján a rendszer „nem öregszik", de ha a rendszer nem zárt, akkor ez nem igaz

$\hat{G}$ exponenciális alakban írható: $\hat{G}(\tau) = e^{\tau\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau\hat{B})^n}{n!}$

Azt akarjuk, hogy $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1 \ \forall t$-re.

$|\psi(t)\rangle = \hat{G}(t)|\psi_0\rangle$

$\langle\psi(t)| = \langle\psi_0|\hat{G}(t)^+$

$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\hat{G}^+(t)\hat{G}(t)|\psi_0\rangle \overset{!}{=} 1 = \langle\psi_0|\psi_0\rangle$

$\hat{G}^+(t)\hat{G}(t) = \hat{1} \Rightarrow \hat{G}^+(t) = \hat{G}^{-1}(t) = \hat{G}(-t)$ unitér operátor

$\hat{G}(t) = e^{\hat{B}t}$

$\hat{G}(t)^{-1} = \hat{G}(-t) = e^{-\hat{B}t}$

$\hat{G}(t)^+ = e^{\hat{B}^+t}$

$e^{-\hat{B}t} = e^{\hat{B}^+t}$

$\underline{-\hat{B} = \hat{B}^+}$ antihermitikus, de ez nem szeretjük

Ha viszont $\hat{C} = i\hat{B}$ $\quad \hat{C}^+ = (i\hat{B})^+ = -i\hat{B}^+ = i(-\hat{B}^+) = i\hat{B} = \hat{C}$

akkor $\hat{C}$ hermitikus

ahol $\hat{B} = -i\hat{C}$, tehát $\boxed{\hat{G}(t) = e^{i\hat{C}t}}$ ahol $\hat{C}^{+} = \hat{C}$

$\hat{C}$: Az időfejlődés generátora $[\hat{C}] = \frac{1}{s}$

Történeti okokból $\hat{C} = \frac{1}{\hbar}\hat{H}$ így $[\hat{H}] = J$

Az időfejlődés végső alakja: $\boxed{\hat{G}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \quad \text{ahol } \hat{H}^{+} = \hat{H} \text{ és } [\hat{H}] = J}$

Az időfüggés: $|\Psi(t)\rangle = \hat{G}(t)|\Psi_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi_0\rangle$

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \frac{d\,G(t)}{dt}|\Psi_0\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi_0\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\Psi(t)\rangle \qquad / \cdot i\hbar$$

$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle}$ Schrödinger-egyenlet

Ha $\hat{H}$-t ismerjük, akkor megadja a rendszer időfüggését

az általános megoldás: $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi_0\rangle$

Honnan tudjuk $\hat{H}$-t? Általában sehonnan, de ha van klasszikus modell, akkor azt lehet kvantálni

Vegyünk egy klasszikus rendszert:

$L(q_k, \dot{q}_k, t)$; $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ (x) , $Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$

$\frac{d}{dt}p_k = Q_k$

$B = \sum p_k \dot{q}_k - L = B(q_k, \dot{q}_k, t)$

Ha $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ akkor $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$

(x)-t invertálva: $\dot{q}_k(q, p, t)$ kifejezhető, ezt beírva a $B(q_k, \dot{q}_k, t)$-ban:

$B(q, t, \dot{q}(q, p, t)) = H(q, p, t) \leftarrow$ Hamilton-fgv.

Adott Hamilton-fgv.-ből megkapható egy Hamilton-operátor

Kvantum kvantálás: $H(q, p, t) \longrightarrow \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t)$ (Mi a $\hat{q}$ és $\hat{p}$?)

(4) $[\hat{p}_k, \hat{q}_l] = \frac{\hbar}{i}\delta_{kl}\hat{1}$ Ezt végtelen féle képpen kielégíthetjük

Neumann szerint a különböző reprezentációk ekvivalensek
(véges szabadsági fokú rendszerek esetén: $k, l < \infty$)

végtelen szab. fokkal nem ekvivalensek a reprezentációk, ezért nincs kidolgozva a kvantumtérelmélet

Hasonlóképpen, legyen egy Hamilton-fgv: $H(p,q,t) = p^2 q$

Ekkor: $\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t) = \hat{p}^2\hat{q}$.

De klasszikusan $p^2 q = pqp$, míg most $\hat{p}^2\hat{q} \neq \hat{p}\hat{q}\hat{p}$

Akkor nagyon egyszerű, hogy melyik klasszikus leírást kvantáljuk? Létezik rá megoldás, de a gyakorlatban lényegtelen. (Weyl-féle-kvantálás)

Ráadásul most van egy csomó kvantumos jelenség, amiknek amúgy nincs klasszikus modellje

Ezekre nincs recept $\hat{H}$-ra, csak hasra üthetünk és vagy eltaláljuk vagy nem.

Miért kell a kvantáláshoz ∞ dim?

TFH $\hat{p}$ és $\hat{q}$ mátrixok!

$$[\underline{\underline{p}},\underline{\underline{q}}] = \underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}} - \underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{p}} = \lambda\underline{\underline{1}}$$

$$Sp(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = A_{ke}B_{ek} \qquad Sp(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}) = B_{ke}A_{ek}$$

$\Rightarrow Sp[\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}}] = 0$, de $Sp\,\underline{\underline{1}} = \dim\underline{\underline{1}}$ így nincsenek olyan véges mátrixok, amelyekkel

$\Rightarrow$ A véges mátrixokkal leírható rendszereknek nincs klasszikus megfelelője

---

Mivel az operátor hatványsora bonyolult, célszerű projektorfelbontással dolgozni, így $\hat{H}$ sajátérték-problémáját meg kell oldani

$$\hat{H}|\varphi_k\rangle = E_k|\varphi_k\rangle \qquad \text{Mivel } \hat{H}^+ = \hat{H} \text{ ezért } E \in \mathbb{R}$$

normáljuk: $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \delta_{kl}$

projektorok: $\hat{P}^k = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$

$$\hat{P}^k\hat{P}^l = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle\langle\varphi_l| = |\varphi_k\rangle\delta_{kl}\langle\varphi_l| = \delta_{kl}|\varphi_k\rangle\langle\varphi_l| = \delta_{kl}P^k$$

$$\hat{H} = \sum_k E_k|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

$f(\hat{H}) = \sum_k f(E_k)|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ minket az exp érdekel.

$$G(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar}tE_k}|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

$$\underline{|\psi(t)\rangle} = \hat{G}(t)|\psi_0\rangle = \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\psi_0\rangle = \underline{\sum_k\langle\varphi_k|\psi_0\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}|\varphi_k\rangle}$$

Ugyanez rezgéstani alapokból, nem absztraktból:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

TFH: $|\psi(t)\rangle = |\varphi\rangle e^{-i\omega t}$

akkor $\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -i\omega |\varphi\rangle e^{-i\omega t}$

$\hat{H} |\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t} \hat{H} |\varphi\rangle$

visszaírva: $i\hbar(-i\omega) \cancel{e^{-i\omega t}} |\varphi\rangle = \cancel{e^{-i\omega t}} \hat{H} |\varphi\rangle$

$\hbar\omega |\varphi\rangle = \hat{H} |\varphi\rangle$ Legyen $E = \hbar\omega$

$\hat{H} |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle$

A diffegyenlet megoldása $\hat{H}$ sajátérték problémája

A megoldás legyen $\hat{H} |\varphi_k\rangle = E_k |\varphi_k\rangle$

Így az elemi megoldások: $|\varphi_k(t)\rangle = |\varphi_k\rangle e^{-\frac{i E_k}{\hbar} t}$

Az ált. megoldás ezek lin. kombinációja: ~~|~~ $|\psi(t)\rangle = \sum_k |\varphi_k(t)\rangle$

KF: $|\psi(0)\rangle = \sum_k c_k |\varphi_k\rangle \overset{!}{=} |\phi\rangle$ $\quad / \cdot \langle\varphi_e|$

$$\sum_k c_k \underbrace{\langle\varphi_e|\varphi_k\rangle}_{\delta_{ke}} = \langle\varphi_e|\phi\rangle$$

$$c_e = \langle\varphi_e|\phi\rangle$$

Tehát a megoldás: $|\psi(t)\rangle = \sum_k \langle\varphi_k|\phi(0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}Et} |\varphi_k\rangle$ ✓

A központi probléma a $\hat{H}$ sajátérték problémája.

Függvényreprezentáció esetén ez diffegyenlet (elnevezés: időtől független Schrödinger-egyenlet)

KVANTUM I.

9. videó

A fizikai állapotok Hilbert-tér elemei $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Időbeli fejlesztés: $|\psi(t)\rangle = \hat{G}(t)|\psi(t=0)\rangle$ ahol $G(t_1+t_2) = G(t_1)G(t_2)$ zárt rendszeren esetén

Mivel $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\psi_0\rangle \Rightarrow$ $\hat{G}^+ = \hat{G}^{-1} \Rightarrow \hat{H}^+ = \hat{H}$ ahol $G(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

az időfüggés $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle$ amelyre az egyenlet: $\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle}$

időfüggő Schrödinger egyenlet

Az egyenlet megoldásához a $\hat{H}$ operátor sajátértéke kell:

$$\hat{H}|\varphi_k\rangle = E_k|\varphi_k\rangle$$

ortonormált: $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \delta_{kl}$

projektorok: $\sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \hat{I}$

A projektor felbontás: $\hat{G}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$

Honnan veszünk $\hat{H}$-t?

kanonikus kvantálás: $L(q,\dot{q})$ $\quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \to \dot{q}(q,p)$

$$B(q,\dot{q}) = \sum_k p_k\dot{q}_k - L(q,\dot{q}(q,p)) = H(p,q)$$

$$\hat{H} = H(\hat{p},\hat{q}) \quad \text{ahol} \quad [\hat{p}_k,\hat{q}_l] = \frac{\hbar}{i}\delta_{kl}\hat{I}$$

Harmonikus oszcillátor

Klasszikusan: $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$

legyen $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad L = K - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2x^2}{2}$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ $\quad G = \frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$

$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -m\omega^2 x$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ ✓

$$B = p\dot{x} - L = (m\dot{x})\dot{x} - \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2x^2}{2}$$

$\dot{x} = \frac{p}{m}$ $\quad B = \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{m\omega^2x^2}{2} = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} = H(x,p)}$

Kvantum:

$$\hat H = \frac{1}{2m}\hat p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat x^2 \quad \text{ahol} \quad [\hat p, \hat x] = \frac{\hbar}{i}\hat 1$$

meg kell oldani a $\hat H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$ egyenletet

Dimenziótlanítsunk: $[\hbar] = Js$ $[m] = kg$ $[\omega] = \frac{1}{s}$

$= \frac{kg\,m^2}{s}$

$[\frac{\hbar}{m\omega}] = m^2$ Legyen $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$p_0 = \frac{\hbar}{x_0} = \sqrt{m\omega\hbar}$$

$$\hat P = \frac{\hat p}{p_0} \qquad \hat X = \frac{\hat x}{x_0}$$

$$[\hat P, \hat X] = \frac{1}{p_0 x_0}[\hat p, \hat x] = \frac{1}{\hbar}[\hat p, \hat x] = \frac{\hat 1}{i}$$

$$\hat H = \frac{1}{2m}p_0^2\hat P^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_0^2\hat X^2 = \frac{1}{2m}m\omega\hbar\hat P^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\hat X^2 = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat P^2 + \hat X^2)$$

új operátorok:

$$\hat a = \frac{\hat X + i\hat P}{\sqrt2} \qquad \hat a^+ = \frac{\hat X - i\hat P}{\sqrt2} \quad \text{ebből} \quad \hat X = \frac{\hat a + \hat a^+}{\sqrt2}$$

$$\hat P = \frac{\hat a - \hat a^+}{i\sqrt2}$$

$$[\hat a, \hat a^+] = \left[\frac{\hat X + i\hat P}{\sqrt2}, \frac{\hat X - i\hat P}{\sqrt2}\right] = \frac12\left([i\hat P, \hat X] - [\hat X, i\hat P]\right) - \frac{i}{2}\left([\hat P, \hat X] - [\hat X, \hat P]\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\left(\frac1i\hat 1 - (-\frac1i\hat 1)\right) = \hat 1 \Rightarrow \underline{[a, a^+] = \hat 1} \quad (1)$$

$$\hat H = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat P^2 + \hat X^2) = \frac{\hbar\omega}{2}\left[\left(\frac{\hat a - \hat a^+}{i\sqrt2}\right)^2 + \left(\frac{\hat a + \hat a^+}{\sqrt2}\right)^2\right] = \frac{\hbar\omega}{2}\left[\frac{\hat a\hat a - \hat a\hat a^+ - \hat a^+\hat a + \hat a^+\hat a^+}{-2} + \frac{aa + aa^+ + a^+a + a^+a^+}{2}\right] =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat a\hat a^+ + \hat a^+\hat a) = *$$

(1) miatt $aa^+ - a^+a = 1 \Rightarrow \hat a\hat a^+ = \hat a^+\hat a + \hat 1$

$$* = \frac{\hbar\omega}{2}(2a^+\hat a + \hat 1) = \hbar\omega(a^+a + \frac12\hat 1)$$

Legyen $\hat N = a^+a$

$$\hat H = \hbar\omega(\hat N + \frac12\hat 1) \qquad \hat N^+ = (a^+a)^+ = a^+a = \hat N$$

$\hat N$ sajátértékeit keressük. Ezek valósak; a sajátvektorok pedig ortonormáltak

$$\hat N|n\rangle = n|n\rangle \qquad N^+ = \hat N \Rightarrow n \in \mathbb{R};\ \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$$

$$n = n\cdot 1 = n\langle n|n\rangle = \langle n|n|n\rangle = \langle n|\hat N|n\rangle = \langle n|\hat a^+\hat a|n\rangle = *$$

Ha $|u\rangle = \hat a|n\rangle \rightarrow \langle u| = \langle n|\hat a^+$

$$* = \langle u|u\rangle \geq 0$$

Legyen $|v\rangle = a^+|n\rangle$

$$\hat{N}|u\rangle = (\hat{a}^{+}\hat{a})\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^{+} - \hat{1})\hat{a}|n\rangle = \hat{a}\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = \hat{a}\hat{N}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle =$$

$$= \hat{a}n|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle = (n-1)|u\rangle$$

Egy sajátvektorból kaptunk egy újabb sajátvektort, ami az eggyel kisebb értékhez tartozik

$$\hat{N}|v\rangle = (\hat{a}^{+}\hat{a})\hat{a}^{+}|n\rangle = \hat{a}^{+}(\hat{a}\hat{a}^{+})|n\rangle = \hat{a}^{+}(\hat{a}^{+}\hat{a}+\hat{1})|n\rangle = \hat{a}^{+}(\hat{N}+\hat{1})|n\rangle = a^{+}(n+1)|n\rangle$$

$$= (n+1)\hat{a}^{+}|n\rangle = (n+1)|n\rangle$$

$\hat{a}$ és $\hat{a}^{+}$ a keltő és eltüntető operátorok

$|u\rangle = \beta_n|n-1\rangle \qquad |v\rangle = \alpha_n|n+1\rangle \qquad$ Mennyi α és β?

$$\alpha_n = \alpha_n \cdot 1 = \alpha_n\langle n+1|n+1\rangle = \langle n+1|\alpha_n|n+1\rangle = \langle n+1|v\rangle = \langle n+1|\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\alpha_n^{*} = \langle n+1|a^{+}|n\rangle^{*} = \langle n|\hat{a}|n+1\rangle = \langle n|\beta_{n+1}|n\rangle = \beta_{n+1}\langle n|n\rangle = \beta_{n+1}$$

$$n = \dots = \langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle u|u\rangle = (\langle n-1|\beta_n^{*})(\beta_n|n-1\rangle) = \beta_n^{*}\beta_n\langle n-1|n-1\rangle = |\beta_n|^2$$

$n = |\beta_n|^2 \implies \beta_n = \sqrt{n}$ (Mivel a vektorokat mindenesetre egyértelműen nagyságáig, egység hosszú komplex számmal szorozható, így β_n-nek csak az abszolút értéke számít)

$$\alpha_n = \beta_{n+1}^{*} = \sqrt{n+1}$$

Tehát

$$\boxed{\begin{aligned} |u\rangle &= \hat{a}|n\rangle = \beta_n|n-1\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ |v\rangle &= \hat{a}^{+}|n\rangle = \alpha_n|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{aligned}}$$

Ha n sajátérték, akkor $n-k$ is az $\forall k \in \mathbb{N}$-re, de $n \geq 0$ WTF?

Azt mondtuk, hogy $\hat{N}|u\rangle = (n-1)|u\rangle$, de lehet, hogy $|u\rangle = 0$, akkor $n-1$ nem sajátérték, tehát van olyan n, hogy $|u\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle = 0 \implies n = 0$

Tehát, a sajátértékek a nem negatív egészek:

$n \in \mathbb{N}$

$\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad n>0$-ra

$\hat{a}|0\rangle = 0$

Mik $\hat{H}$ sajátvektorai? $|n\rangle$-ek;

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(\hat{N}+\tfrac{\hat{1}}{2})|n\rangle = \hbar\omega(\hat{N}|n\rangle + \tfrac{1}{2}\hat{1}|n\rangle) = \underbrace{\hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})}_{E_n}|n\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})$$

Mi az $|n\rangle$ vektor?

A $|0\rangle$ existens, hogy létezik, mert a létrának van alja. Valamint $\langle 0|0\rangle = 1$

$\hat{a}|0\rangle = \underline{0}$

$\hat{a}^+|0\rangle = |1\rangle$ ez egy újabb bázisvektor

$\hat{a}|1\rangle = |0\rangle$

$\hat{a}^+|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \Rightarrow |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^+|1\rangle = \frac{1}{2}\hat{a}^+\hat{a}^+|0\rangle$ ez is bázisvektor

$\hat{a}^+|2\rangle = \sqrt{3}|3\rangle \Rightarrow |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}^+|0\rangle$ ez is

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle}$$

Tetszőleges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$: $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$

A $|0\rangle$ a vákuumállapot, az n a részecskeszám, ezért van, hogy $\hat{a}^+$ kelt, $\hat{a}^-$ elnyel.

KVANTUM I.

6. videó

4. „Mit mér a műszer?" kérdésre újabb szabályok kellenek:

(4) Ha $\hat{A}^+ = \hat{A}$ fizikai mennyiség,

$$\hat{A}|u_k\rangle = \alpha_k |u_k\rangle \quad \text{esetén } \alpha_k \in \mathbb{R}$$

$$\langle u_k | u_l\rangle = \delta_{kl} \quad \text{és} \quad \sum_k |u_k\rangle\langle u_k| = 1$$

TFH a rendszer állapota $|u_k\rangle$ ekkor a műszer az α_k-t méri

a sajátértékek halmaza: Spektrum

(5) TFH nem. ekkor $|\psi\rangle = \sum_k c_k |u_k\rangle$

A mérés ekkor is α_k-k közül kerül ki

α_k mérési valószínűsége: $W(A=\alpha_k) = |c_k|^2$ (Mérési axióma)

$$\mathbb{R} \supset [0,1] \ni \underset{\alpha_n}{W_k} \qquad \sum_k W_k = 1$$

Várható é. $\bar{A} = \bar{\alpha} = \sum_k W_k \alpha_k$

Mivel $\langle u_l | \psi\rangle = \sum_k c_k \langle u_l | u_k\rangle = \sum_k c_k \delta_{kl} = c_l$

$$c_k = \langle u_k | \psi\rangle \qquad c_k^* = \langle \psi | u_k\rangle$$

ezért $\sum_k W_k = \sum_k |c_k|^2 = \sum_k c_k^* c_k = \sum_k \langle\psi|u_k\rangle\langle u_k|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\sum_k |u_k\rangle\langle u_k|\right)|\psi\rangle =$

$$= \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$\bar{A} = \sum_k \alpha_k W_k = \sum_k \alpha_k |c_k|^2 = \sum_k \alpha_k c_k^* c_k = \sum_k \alpha_k \langle\psi|u_k\rangle\langle u_k|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|\left(\sum_k \alpha_k |u_k\rangle\langle u_k|\right)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

A szórásnégyzet az átlagtól való eltérés négyzetének várható értéke

$$\Delta A = \sqrt{\overline{(\hat{A} - \bar{A}\hat{1})^2}}$$

$$(\Delta A)^2 = \overline{(\hat{A} - \bar{A}\hat{1})^2} = \overline{\hat{A}^2 - 2\bar{A}\hat{A} + \bar{A}^2\hat{1}} = \bar{A^2} - 2\bar{A}\bar{A} + \bar{A}^2\hat{1} = \bar{A^2} - \bar{A}^2 = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2$$

Spec eset: $|\psi\rangle = |u_n\rangle$

$$\bar{A} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle u_n|\hat{A}|u_n\rangle = \langle u_n|\alpha_n|u_n\rangle = \alpha_n\langle u_n|u_n\rangle = \alpha_n$$

$$(\Delta A)^2 = \langle u_n|\hat{A}^2|u_n\rangle - (\langle u_n|\hat{A}|u_n\rangle)^2 = \langle u_n|\alpha_n^2|u_n\rangle - \alpha_n^2 = \alpha_n^2 \cdot 1 - \alpha_n = 0$$

Fordítva is igaz: ha a rendszer sajátállapotban van, a szórás 0

$$|\psi(t)\rangle = \hat G(t)|\psi_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H t}|\psi_0\rangle$$

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi_0|\hat G(t)^+ = \langle\psi_0|\hat G^{-1} = \langle\psi_0|\, e^{\frac{i}{\hbar}\hat H t}$$

$$\bar A(t) = \langle\psi(t)|\hat A|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\hat G^+(t)\,\hat A\,\hat G(t)|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\hat A(t)|\psi_0\rangle$$

$$\frac{d\hat A(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat G^+(t)\hat A\hat G(t)\right) = \underbrace{\frac{d\hat G^+}{dt}}_{GG^+}\hat A\hat G + \hat G^+\underbrace{\frac{d\hat A}{dt}}_{0}\hat G + G^+\hat A\underbrace{\frac{d\hat G}{dt}}_{GG^+} =$$

$$= \frac{d\hat G^+}{dt}\hat G\, G^+AG + \hat G^+\hat A\hat G\,\hat G^+\frac{d\hat G}{dt} = \frac{d\hat G^+}{dt}\hat G\hat A + \hat A\hat G^+\frac{d\hat G}{dt} \qquad (1)$$

Ha G és G^+ ismert, akkor ez diffegyenlet $\hat A$-ra

$$\hat G = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H t} \qquad \frac{d\hat G}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\hat H e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H t} = -\frac{i}{\hbar}\hat H\hat G = -\frac{i}{\hbar}\hat G\hat H$$

$$\hat G^+\frac{d\hat G}{dt} = \hat G^+\hat G\hat H\left(-\frac{i}{\hbar}\right) = -\frac{i}{\hbar}\hat H$$

$$\hat G^+ = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat H t} \qquad \frac{d\hat G^+}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat H e^{\frac{i}{\hbar}\hat H t} = \frac{i}{\hbar}\hat H G^+$$

$$\frac{dG^+}{dt}G = \frac{i}{\hbar}\hat H G^+G = \frac{i}{\hbar}\hat H$$

(1): $$\frac{d\hat A}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat H\hat A + \hat A\left(-\frac{i}{\hbar}\hat H\right) = \frac{i}{\hbar}\left(\hat H\hat A - \hat A\hat H\right)$$

$$\boxed{\frac{d\hat A}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat H, \hat A\right]}$$

Harmonikus oszcillátor : $\hat H = \frac{1}{2m}\hat p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat x^2$ ahol $[\hat p, \hat x] = \frac{\hbar}{i}\hat 1$

(Jelölés: az alsó index H a Heisenberg-féle jelölés)

$$\hat p_H = G^+ p\, G$$

$$\hat x_H = G^+ x\, G$$

$$[p_H, x_H] = G^+pG\,G^+xG - G^+xG\,G^+pG = G^+[px - xp]G = \frac{\hbar}{i}\hat 1$$

(Általánosan, ha $[\hat a, \hat b] = \hat c$ akkor $[\hat a_H, \hat b_H] = \hat c_H$)

Mivel $GH = HG$ ezért $H_H = H$

$$\frac{dx_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat H, \hat x] = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2m}[\hat p^2, \hat x] + \frac{m\omega^2}{2}\overbrace{[\hat x^2, \hat x]}^{0}\right) = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\left(\hat p\hat p\hat x - \hat x\hat p\hat p\right) = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\left(\hat p\underbrace{(\hat p\hat x - \hat x\hat p)}_{\frac{\hbar}{i}\hat 1} + \underbrace{(\hat p\hat x - \hat x\hat p)}_{\frac{\hbar}{i}\hat 1}\hat p\right) = \frac{p}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\hat x}{dt} = \frac{1}{m}\hat p}$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{p}] = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2m}\underbrace{[\hat{p}^2,\hat{p}]}_{0} + \frac{m\omega^2}{2}[\hat{x}^2,\hat{p}]\right) = \frac{i}{\hbar}\frac{m\omega^2}{2}\left(xxp - pxx\right) =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\frac{m\omega^2}{2}\left[x\underbrace{(xp-px)}_{-\frac{\hbar}{i}\hat{1}} + \underbrace{(xp-px)}_{\frac{\hbar}{i}\hat{1}}x\right] = -m\omega^2\hat{x}$$

tehát $\boxed{\frac{d\hat{p}}{dt} = -m\omega^2\hat{x}}$

Ezek voltak a Hamilton-féle kanonikus egyenletek:

$H(q,p)$ $\qquad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$

$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ $\qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$

$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ $\qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x$

„Az operátorokra vonatkozó diffegyenletek megegyeznek a klasszikus törvényekkel" Ehrenfest-tétel

A klasszikus megoldás: $\quad x = x_0\cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t$

$\qquad p = -m\omega x_0\sin\omega t + p_0\cos\omega t$

elvárttanszin: $\quad \hat{x}(t) = \hat{x}_0\cos(\omega t) + \frac{\hat{p}_0}{m\omega}\sin(\omega t)$

$\qquad \hat{p}(t) = -m\omega\hat{x}_0\sin(\omega t) + \hat{p}_0\cos(\omega t)$

$$\bar{p}(t) = \langle\psi_0|\hat{p}(t)|\psi_0\rangle = -m\omega\sin(\omega t)\langle\psi_0|\hat{x}_0|\psi_0\rangle + \cos(\omega t)\langle\psi_0|\hat{p}_0|\psi_0\rangle$$

KVANTUM I.

7. videó

$\hat{A}^+ = \hat{A}$ egy fizikai mennyiség sajátértékei: $\hat{A}|\varphi_k\rangle = \alpha_k|\varphi_k\rangle$

Ha $\hat{A}$-t mérjük, α_k értékeket kaphatjuk.

Mivel $\hat{A}^+ = \hat{A}$, ezért $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \delta_{kl}$ és $\sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \hat{I}$

így $|\psi\rangle = \sum_k c_k|\varphi_k\rangle$ $\forall\psi$-re

Ha a rendszer $|\psi\rangle$ állapotban van, és $\hat{A}$-t mérjük, akkor $W(A = \alpha_k) = |c_k|^2$

ha α_k-t mérünk akkor a rendszer $|\psi\rangle$-ből beugrik $|\varphi_k\rangle$-ba

várható érték: $\bar{A} = \sum_k \alpha_k W_k = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

szórás négyzet: $\Delta A^2 = \overline{(\hat{A} - \bar{A}\hat{I})^2}$

spec eset: $|\psi\rangle = |\varphi_k\rangle \to c_k = 1$

$c_l = 0 \ \forall l \neq k$

$\bar{A} = \alpha_k$

$\Delta A = 0$

klasszikus fizikában minden mennyiség szórása 0. (elvileg)

kvantumban nem: határozatlansági reláció

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség:

V tér és $V \times V \to S$ sk. szorzás

akkor $|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$

Bizonyítás:

$$\left.\begin{array}{l}\langle f|(\alpha|g\rangle + \beta|h\rangle) = \alpha\langle f|g\rangle + \beta\langle f|h\rangle \\ \langle f|f\rangle \geq 0 \text{ és } \langle f|f\rangle = 0 \Rightarrow |f\rangle = 0\end{array}\right\} \text{sk. szorzás tulajdonságai miatt}$$

Legyen $|h\rangle = |f\rangle + \alpha|g\rangle$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle h|h\rangle = (\langle f| + \alpha\langle g|)(|f\rangle + \alpha|g\rangle) = \langle f|f\rangle + \alpha\langle f|g\rangle + \alpha\langle g|f\rangle + \alpha\alpha\langle g|g\rangle =$$

$$= \alpha^2\langle g|g\rangle + \alpha(\langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle) + \langle f|f\rangle \geq 0$$

ez α-nak egy valós eh.-s polinomja

mivel ez nemnegatív, ezért a diszkrimináns nem pozitív

$$(\langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle)^2 - 4\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \leq 0$$

$$(2\,\mathrm{Re}\langle f|g\rangle)^2 \leq 4\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$$

ebből CBS szinte következik

(valódi bizonyítás a wikin)

Legyen $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ állapot $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$ hermitikus operátorok

$[\hat{A},\hat{B}]^+ = (\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{B}^+ = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = [B,A] = -[A,B]$

Legyen $i\hat{C} = [\hat{A},\hat{B}]$ ez már $\hat{C}^+ = \hat{C}$

Legyen $\{A,B\} = AB + BA$ $\quad \{A,B\}^+ = \{A,B\}$ ez már jó $\quad \hat{D}$

$AB = \frac{AB-BA}{2} + \frac{AB+BA}{2} = \frac{1}{2}(\hat{D} + i\hat{C})$

$\bar{A} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \qquad \Delta A^2 = \overline{(\hat{A}-\bar{A})^2} = \langle\psi|(\hat{A}-\bar{A})^2|\psi\rangle$

$\hat{A}' = \hat{A} - \alpha\hat{1}$ akkor $\bar{A}' = \bar{A} - \alpha\bar{1} = \bar{A} - \alpha$

$(\Delta A')^2 = \overline{(A' - \bar{A}')^2} = \overline{[(\hat{A}-\alpha\hat{1}) - (\bar{A}-\alpha)]^2} = \overline{(\hat{A}-\bar{A})^2} \Rightarrow$ (Egy operátor szabadon eltolható)

TFH $\hat{A}$ és $\hat{B}$ már el van tolva úgy, hogy $\bar{A} = \bar{B} = 0$

Legyen $|f\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$

$|g\rangle = \hat{B}|\psi\rangle$

$\langle f|f\rangle = (\langle\psi|\hat{A}^+)(\hat{A}|\psi\rangle) = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle = (\Delta A)^2$

$\langle g|g\rangle =$ ugyanúgy $= (\Delta B)^2$

$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 = \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$

$\langle f|g\rangle = (\langle\psi|A^+)(B|\psi\rangle) = \langle\psi|AB|\psi\rangle \; \langle\psi|\frac{\hat{D}+i\hat{C}}{2}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|\hat{D}|\psi\rangle + \frac{i}{2}\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle =$

$= \frac{1}{2}\bar{D} + \frac{i}{2}\bar{C}$

Emiatt $(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq |\frac{1}{2}(\bar{D} + i\bar{C})|^2 \geq |\frac{\bar{C}}{2}|^2$

$\boxed{\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\bar{C}|}$ ahol $\hat{C} = \frac{1}{i}[\hat{A},\hat{B}]$ $\qquad$ határozatlansági reláció

Spec eset: $\hat{A} = \hat{p}, \hat{B} = \hat{q}$ akkor $[\hat{p},\hat{q}] = \frac{\hbar}{i}\hat{1} \Rightarrow \hat{C} = -\hbar\hat{1} \Rightarrow |\bar{C}| = \hbar$

így $\Delta p \Delta q \geq \frac{\hbar}{2}$ $\qquad$ „vagy tudom hol van, vagy tudom mennyivel megy"

$$|\psi(t)\rangle = G(t)\,|\psi_0\rangle$$

$$\bar{A}(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\underbrace{\hat{G}^{\dagger}(t)\,\hat{A}\,\hat{G}(t)}_{A_H(t)}|\psi_0\rangle$$

amiből beláttuk: $\dfrac{d\hat{A}_H}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}_H]$ ahol $\hat{G} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ így $\hat{H}_H = \hat{H}$

Mi van, ha $[\hat{H}, \hat{A}_H] = 0$? ekkor $\dfrac{d\hat{A}_H}{dt} = 0$, így $\bar{A} = \text{const}$

Mivel H-val kommutál, G-vel is: $\bar{A} = \langle\psi_0|G^{\dagger}\hat{A}G|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\hat{A}|\psi_0\rangle$

Hogy lehet könnyen kitalálni egy operátort? Szimmetria segítségével

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_4"] \arrow[rrr, bend right=50, "T_6"] & \boxed{x'} \arrow[r, "T_2"] \arrow[rr, bend right, "T_5"] & \boxed{x''} \arrow[r, "T_3"] & \boxed{x'''} \end{tikzcd}$$

$x' = T_1 x$

$x'' = T_2 x' = T_2(T_1 x) = (T_2 T_1)x$

$= T_4 x \Rightarrow T_4 = T_2 T_1$

a trafók csoportot alkotnak, a fizikusok viszont méréseket végeznek

ha rendszeren transzformációt végzek, akkor a adatok megváltoznak, de a transzformációhoz elvileg hozzárendelhető az új mérés

$G \ni T_1, T_2 \dots$

$M \ni S(T_1), S(T_2) \dots$ $\quad S(T_2T_1) = S(T_1)S(T_2)$

Tétel: mindig létezik olyan homomorfizmus, ahol a kép mátrix (ábrázolás)

Ábrázolás alaptétele: a fizikai rendszer szimmetriái ábrázolódnak a rendszerhez rendelt fizikai mennyiségek lineáris terén ható operátoraival.

ez a klasszikus fizikára igaz, de nem érdekes, mert másképp is lehet kezelni

a kvantummechanikában a szimmetriák nem csak a mennyiségeken, hanem az állapotok terén is ábrázolódnak:

$$x \xrightarrow[T_1]{} x' \Longrightarrow |\psi\rangle \xrightarrow{\hat{R}(T_1)} |\psi'\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \hat{R}(T_1)|\psi\rangle$$

Klasszikusan az volt, hogy $\ddot{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t)$ ha $\underline{u}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{u}$

és $(\underline{\underline{T}}\,\underline{u})'' = \underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{T}}\,\underline{u})$ akkor $\underline{\underline{T}}$ szimmetriája a rendszernek

$T\ddot{u} = ATu$

$TAu = ATu$

$TA = AT \Rightarrow$ A dinamikai mátrix kommutál a szimmetriával u.e. kvantumban

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{\Omega}} |\psi'\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{G}(t)\,|\psi_0\rangle \qquad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle$$

ha $\quad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi'(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi'(t)\rangle$

akkor $\quad i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\Omega}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,\hat{\Omega}\,|\psi(t)\rangle$

$$\hat{\Omega}\underbrace{\left(i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right)}_{\hat{H}\,|\psi(t)\rangle} = \hat{H}\,\hat{\Omega}\,|\psi(t)\rangle$$

$$\boxed{\hat{\Omega}\hat{H} = \hat{H}\hat{\Omega}}$$

Ha egy operátor kommutál a Hamiltonival, akkor az szimmetria, vagyis az megmarad, mert

$$[\hat{H},\hat{\Omega}] = 0 \quad \text{és} \quad i\hbar\frac{d\hat{\Omega}}{dt} = [\hat{H},\hat{\Omega}]$$

DE a szimmetria operátorok uniterek, a Heisenberg kép szerint a [illegible]

akkor most mi van?

KVANTUM I.

8. videó

Ha van egy G csoport $G \ni g(\alpha)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Ha $g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma)$ akkor $\gamma = f(\alpha, \beta)$, ahol f csoportképző függvény

Ha $f(\alpha,\beta) = \alpha + \beta$, az kanonikus paraméterezés

Állítás: minden 1 paraméteres Lie-csoportnak van kanonikus paramétere

akkor $g(\alpha)g(\beta) = g(\alpha+\beta)$

$g(\alpha)$ felírható $g(\alpha) = e^{B\alpha}$ B: infinitezimális generátor

A szimmetria ábrázolódnak a Hilbert-tér operátorain

$\hat{R}(g(\alpha)) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$\hat{R}(\alpha)\hat{R}(\beta) = \hat{R}(\alpha+\beta) \quad \Rightarrow \quad R(\alpha) = e^{\hat{C}\alpha}$

Ha $\hat{R}^+ = \hat{R}^{-1}$ akkor $\hat{C}^+ = -\hat{C}$ ezért van értelme legyen $\hat{C} = i\hat{D}$

akkor $\hat{D}^+ = \hat{D}$

Ha $\hat{R}(g)$ szimmetria, akkor $[\hat{H}, \hat{R}] = 0$, így $[\hat{H}, \hat{D}] = 0$, tehát $\bar{D}(t) = \text{const}$

Ha $\mathcal{H} \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \ni f(x)$ azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Az eltolás: $T_a f(x) = f(x-a) = f(x) + f'(x)(-a) + \frac{1}{2} f''(x)(-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(-a)^n =$

$$= \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n\right]}_{\hat{T}_a} f(x) = \left(e^{-a\frac{d}{dx}}\right) f(x) =$$

$$= \left(e^{-\frac{i}{\hbar} a \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)}\right) f(x) = \left(e^{-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}}\right) f(x)$$

$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ a transzláció infinitezimális generátora

$[\hat{p}, \hat{x}] f(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x f(x)) - x\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\hbar}{i}(x' f + x f' - x f') = \frac{\hbar}{i} f = \frac{\hbar}{i} \hat{I} f(x)$

Tehát ez a $\hat{p}$ és $\hat{x}$ operátorok valóban jó reprezentációja reprezentáció - elmélet

$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle \qquad \hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad |\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$

reprezentáció: első lépésben vegyünk diszkrét bázist

$|e^k\rangle$ bázis $\qquad \langle e^k|e^l\rangle = \delta_{kl}$

$\forall |\psi\rangle \ \exists c_k \in \mathbb{C} \ ; \ |\psi\rangle = \sum_k c_k |e^k\rangle$

$\langle e^l|\psi\rangle = \sum_k c_k \langle e^l|e^k\rangle = c_l$

$|\psi\rangle = \sum_k \langle e^k|\psi\rangle\, |e^k\rangle = \sum_k |e^k\rangle\langle e^k|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \sum_k |e^k\rangle\langle e^k| = \hat{1}$

másik bázis $|f^k\rangle$

$\langle f^k|f^l\rangle = \delta_{kl} \ ; \ \sum_k |f^k\rangle\langle f^k| = \hat{1}$

ua. ψ: $|\psi\rangle = \sum_k c_k |e^k\rangle = \sum_k c'_k |f^k\rangle \qquad /\cdot \langle e^l|$

$$\langle e^l|\psi\rangle = \sum_k c_k \underbrace{\langle e^l|e^k\rangle}_{\delta_{lk}} = \sum_k c'_k \underbrace{\langle e^l|f^k\rangle}_{S_{lk}} \quad \Rightarrow \quad c_l = \sum_k S_{lk} c'_k$$

$/\cdot \langle f^l|$

$$\langle f^l|\psi\rangle = \sum_k c_k \underbrace{\langle f^l|e^k\rangle}_{R_{lk}} = \sum_k c'_k \underbrace{\langle f^l|f^k\rangle}_{\delta_{lk}} \quad \Rightarrow \quad c'_l = \sum_k R_{lk} c_k$$

egymásba helyettesítve:

$$c_l = \sum_k S_{lk} c'_k = \sum_k S_{lk} \sum_m R_{km} c_m = \sum_m \Big(\sum_k S_{lk} R_{km}\Big) c_m$$

$$\Rightarrow \sum_k S_{lk} R_{km} = \delta_{lm} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$$

$S_{lk} = \langle e^l|f^k\rangle \qquad S^*_{lk} = \langle e^l|f^k\rangle^* = \langle f^k|e^l\rangle = R_{kl}$

$\underline{\underline{S}} = \tilde{\underline{\underline{R}}}^* \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{R}}^+ = \underline{\underline{R}}^{-1}$ unitér mátrixok

operátorok: $|\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \qquad |\psi\rangle = \sum_k c_k |e^k\rangle$

$|\phi\rangle = \sum_k d_k |e^k\rangle$

$$d_k = \langle e^k|\phi\rangle = \langle e^k|\hat{A}|\psi\rangle = \langle e^k|\hat{A}\,|\sum_l c_l|e^l\rangle = \sum_l \underbrace{\langle e^k|\hat{A}|e^l\rangle}_{A_{kl}} c_l$$

$d_k = \sum_l A_{kl} c_l$

$\underline{d} = \underline{\underline{A}}\,\underline{c} \qquad$ új bázis: $\underline{d}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{d} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{c} = \underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}}_{\underline{\underline{A}}'}\,\underline{c}' = \underline{\underline{A}}'\underline{c}'$

$|\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$

$\underline{d} = \underline{\underline{A}}\,\underline{c} \qquad \underline{d}' = \underline{\underline{A}}'\underline{c}'$

és $\underline{c}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{c}$

$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$

Folytonos bázis: $|\varphi(\alpha)\rangle \equiv |\alpha\rangle$

$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta(\alpha-\beta)$

$\forall\, |\psi\rangle\ \exists\, c(\alpha):\qquad |\psi\rangle = \int c(\alpha)\,|\alpha\rangle\, d\alpha$

$$\langle\beta|\psi\rangle = \int c(\alpha)\,\langle\beta|\alpha\rangle\, d\alpha = \int c(\alpha)\,\delta(\alpha-\beta)\, d\alpha = c(\beta) \quad\Rightarrow\quad c(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = \int \langle\alpha|\psi\rangle\,|\alpha\rangle\, d\alpha = \int |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle\, d\alpha = \int\left(|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d\alpha\right)|\psi\rangle \;\Rightarrow\; \int |\alpha\rangle\langle\alpha|\,d\alpha = \hat{1}$$

Ha $\hat{A}$ fizikai mennyiség $\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, akkor a mérési valség 0, de a sűrűség-fgv: $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |c(\alpha)|^2\, d\alpha = W\left(\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]\right)$

Ha helykoordináta: $|x\rangle \qquad \langle x|y\rangle = \delta(x-y)$

$|\psi\rangle = \int \psi(x)\,|x\rangle\, dx$ ahol $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$

és $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2\, dx = W\left(x \in [x_1, x_2]\right)$

$\psi(x)$: Schrödinger-féle hullámfgv. és ennek négyzete a valsz.

bázisváltó: $|p\rangle \qquad \langle p|q\rangle = \delta(p-q)\,;\quad \int |p\rangle\langle p|\, dp = \hat{1}$

$$|\psi\rangle = \int \psi(x)\,|x\rangle\, dx = \int c(p)\,|p\rangle\, dp \qquad /\cdot\langle y|$$

$$\langle y|\psi\rangle = \int \psi(x)\,\underbrace{\langle y|x\rangle}_{\delta(y-x)}\, dx = \int c(p)\,\underbrace{\langle y|p\rangle}_{S(y,p)}\, dp \quad\Rightarrow\quad \psi(x) = \int c(p)\,S(x,p)\, dp$$

$/\cdot\langle q|$

$$\langle q|\psi\rangle = \int \psi(x)\,\underbrace{\langle q|x\rangle}_{R(q,x)}\, dx = \int c(p)\,\underbrace{\langle q|p\rangle}_{\delta(q-p)}\, dp \quad\Rightarrow\quad c(p) = \int \psi(x)\,R(p,x)\, dx$$

Egymásba helyettesítve $\psi(x) = \int c(p)\,S(x,p)\, dp = \iint \psi(y)\,R(p,y)\,dy\; S(x,p)\, dp =$

$$= \int\Big(\underbrace{\int S(x,p)\,R(p,y)\, dp}_{\delta(x-y)}\Big)\,\psi(y)\, dy \quad\Rightarrow\quad \int S(x,p)\,R(p,y)\, dp = \delta(x-y)$$

operátor: $|\phi\rangle = \hat{A}\,|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \int \psi(x)\,|x\rangle\,dx \quad \text{ahol} \quad \psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

$$|\phi\rangle = \int \varphi(x)\,|x\rangle\,dx \quad \text{ahol} \quad \varphi(x) = \langle x|\phi\rangle$$

$$\varphi(x) = \langle x|\phi\rangle = \langle x|\hat{A}|\psi\rangle = \langle x|\hat{A}\int\psi(y)\,|y\rangle\,dy = \int \psi(y)\,\underbrace{\langle x|\hat{A}|y\rangle}_{A(x,y)}\,dy$$

$$\varphi(x) = \int A(x,y)\,\psi(y)\,dy$$

bázistrafó:

$$|\psi\rangle = \int c(p)\,|p\rangle\,dp \qquad c(p) = \langle p|\psi\rangle$$

$$|\phi\rangle = \int d(p)\,|p\rangle\,dp \qquad d(p) = \langle p|\phi\rangle$$

$$d(p) = \langle p|\phi\rangle = \langle p|\hat{A}|\psi\rangle = \langle p|\hat{A}|\int c(q)\,|q\rangle\,dq = \int \underbrace{\langle p|\hat{A}|q\rangle}_{A(p,q)}\,c(q)\,dq = \int c(q)\,A(p,q)\,dq$$

$$\varphi(x) = \int A(x,y)\,\psi(y)\,dy = \int A(x,y)\int S(y,q)\,c(q)\,dq\,dy$$

$$d(p) = \int R(p,x)\,\varphi(x)\,dx = \int R(p,x)\int A(x,y)\int S(y,q)\,c(q)\,dq\,dy\,dx =$$

$$= \int\Big(\underbrace{\iint R(p,x)\,A(x,y)\,S(y,q)}_{A'(p,q)}\,dy\,dx\Big)\,c(q)\,dq = \int A'(p,q)\,c(q)\,dq$$

Mi van pl. a deriváló operátorral?

Ha $\int \delta(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(x)$

akkor vegyük δ deriváltját

Legyen $A(x,y) = -\delta'(x-y)$

$$\varphi(x) = \int \left(-\delta'(x-y)\right)\psi(y)\,dy = \underbrace{\Big[-\delta(x-y)\,\psi(y)\Big]_{y=-\infty}^{\infty}}_{0} + \int \delta(x-y)\,\psi'(y)\,dy = \int \delta(x-y)\,\psi'(y)\,dy = \psi'(x)$$

Hogy kell a diszkrétről folytonos esetre áttérni? Ezt mutatta meg Schrödinger a [illegible] algebra. (később)

KVANTUM I.

9. videó

2D-s térrel leírható rendszerek

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \underline{f} = \frac{\partial \underline{e}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \underline{g} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \underline{e}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|e_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad \langle e_+| = \left(\cos\frac{\vartheta}{2}, \sin\frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi}\right)$$

$$|e_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\vartheta}{2} \\ -\cos\frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad \langle e_-| = \left(\sin\frac{\vartheta}{2}, -\cos\frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi}\right)$$

$\langle e_+|e_+\rangle = \langle e_-|e_-\rangle = 1$

$\langle e_+|e_-\rangle = 0$

$\underline{e}, \underline{f}, \underline{g}$ a gömbi polárkoordináta bázisa

---

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

múlt óráról: $\langle e_+|\sigma^1|e_+\rangle = \sin\vartheta\sin\varphi$

$\langle e_+|\sigma^2|e_+\rangle = \sin\vartheta\cos\varphi$

$\langle e_+|\sigma^3|e_+\rangle = \cos\vartheta$

Tehát: $\langle e_+|\underline{\sigma}|e_+\rangle = \underline{e}$

$\langle e_-|\underline{\sigma}|e_-\rangle = -\underline{e}$

$\langle e_-|\underline{\sigma}|e_+\rangle = -\underline{f} - i\underline{g}$

$\langle e_+|\underline{\sigma}|e_-\rangle = -\underline{f} + i\underline{g}$

Legyen $\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}$! Mindig felírható az egység és a pauli lin. kombinációjaként

$\underline{\underline{A}} = a_0\underline{\underline{1}} + \underline{a}\,\underline{\sigma} \qquad a_0 \in \mathbb{R},\ \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \qquad$ ha $\underline{n} = \frac{\underline{a}}{a}$ akkor $\underline{\underline{A}} = a_0\underline{\underline{1}} + a(\underline{n}\,\underline{\sigma}) = *$

Kaj-ot: $(\underline{e}\,\underline{\sigma})|e_+\rangle = |e_+\rangle$

$(\underline{e}\,\underline{\sigma})|e_-\rangle = -|e_-\rangle$ Tehát $(\underline{e}\,\underline{\sigma})$ projektorai:

$P_+ = |e_+\rangle\langle e_+| = P$

$P_- = |e_-\rangle\langle e_-| = Q$

akkor $PP = P$; $QQ = Q$; $PQ = 0$; $P + Q = 1$

$T = (\underline{e}\,\underline{\sigma}) \quad T^2 = 1$

Mivel $T = P - Q$; $(\underline{e}\,\underline{\sigma}) = |e_+\rangle\langle e_+| - |e_-\rangle\langle e_-|$

$* = a_0\underline{\underline{1}} + a\left(|n_+\rangle\langle n_+| - |n_-\rangle\langle n_-|\right) = a_0\left(|n_+\rangle\langle n_+| + |n_-\rangle\langle n_-|\right) + a\left(|n_+\rangle\langle n_+| - |n_-\rangle\langle n_-|\right) =$

$= (a_0 + a)|n_+\rangle\langle n_+| + (a_0 - a)|n_-\rangle\langle n_-| \leftarrow$ ez az $\underline{\underline{A}}$ projektorfelbontása

$$\bar{A}_{e_+} = \langle e_+|\hat{A}|e_+\rangle = \langle e_+|(a_0 \underline{1} + a_k \sigma^k)|e_+\rangle = a_0 \langle e_+|\hat{1}|e_+\rangle + a_k \langle e_+|\sigma^k|e_+\rangle =$$

$$= a_0 + (\underline{a}\,\underline{e})$$

$$\hat{A}^2 = (a_0 \hat{1} + (\underline{a}\underline{\sigma}))^2 = a_0^2\, 1^2 + 2a_0 \hat{1} (\underline{a}\underline{\sigma}) + (\underline{a}\underline{\sigma})^2 = *$$

$$(\underline{a}\underline{\sigma})^2 = (a_k \sigma^k)(a_e \sigma^e) = a_k a_e \sigma^k \sigma^e = a_k a_e (\delta_{ke} 1 + \varepsilon_{kem} \sigma^m) = a^2 1$$

$$* = (a_0^2 + a^2) 1 + 2a_0 (\underline{a}\underline{\sigma})$$

$$\overline{A^2} = (a_0^2 + a^2)\bar{1} + 2a_0 a_k \overline{\sigma^k} = a_0^2 + a^2 + 2a_0 (\underline{a}\,\underline{e})$$

$$(\Delta A)^2 = \overline{(\hat{A} - \bar{A})^2} = \overline{A^2} - \bar{A}^2 = (a_0^2 + a^2 + 2a_0 (\underline{a}\,\underline{e})) - (a_0 + ((\underline{a}\,\underline{e}))^2 =$$

$$= a_0^2 + a^2 + 2a_0 (\underline{a}\,\underline{e}) - (a_0^2 + 2a_0 (\underline{a}\,\underline{e}) + (\underline{a}\,\underline{e})^2) = a^2 - (\underline{a}\,\underline{e})^2 = |\underline{a} \times \underline{e}|^2$$

Tehát $\boxed{\Delta A = |\underline{a} \times \underline{e}|}$ A szórás akkor 0, ha $\underline{a} \parallel \underline{e}$, vagyis, ha a sajátállapotban van

Másik operátor: $\hat{B} = b_0 1 + \underline{b}\underline{\sigma}$

ennél $\Delta B = |\underline{b} \times \underline{e}|$

a határozatlansági reláció alapján: ha $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$

akkor $\Delta A\, \Delta B \geq \frac{1}{2}|\bar{C}|$

itt: $[\hat{A}, \hat{B}] = [a_0 1 + (\underline{a}\underline{\sigma}), b_0 1 + (\underline{b}\underline{\sigma})] = [(\underline{a}\underline{\sigma}), (\underline{b}\underline{\sigma})] = [a_k \sigma^k, b_e \sigma^e] = a_k b_e [\sigma^k, \sigma^e] =$

$$= a_k b_e\, 2i\, \varepsilon_{kem} \sigma^m = i 2\, \varepsilon_{kem} a_k b_e \sigma^m = i \cdot 2 (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{\sigma}$$

$$\hat{C} = 2 (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{\sigma}$$

$$\bar{C} = 2 (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{e}$$

Tehát $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\bar{C}|$

$\boxed{|\underline{a} \times \underline{e}|\, |\underline{b} \times \underline{e}| \geq |(\underline{a} \times \underline{b}) \underline{e}|}$ ez egy vektoralgebrai tétel

Legyen $\hat{H}$ Hamilton-operátor $\hbar \doteq 1$

$\hat{H} = \Omega \hat{I} + \frac{\omega}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})$ $(\underline{n}\underline{\sigma}) = |n_+\rangle\langle n_+| - |n_-\rangle\langle n_-|$

$\hat{I} = |n_+\rangle\langle n_+| + |n_-\rangle\langle n_-|$

$\hat{H} = \Omega(|n_+\rangle\langle n_+| + |n_-\rangle\langle n_-|) + \frac{\omega}{2}(|n_+\rangle\langle n_+| - |n_-\rangle\langle n_-|) = (\Omega + \frac{\omega}{2})|n_+\rangle\langle n_+| + (\Omega - \frac{\omega}{2})|n_-\rangle\langle n_-|$

A két sajátérték között ω van, az átlaguk Ω.

Ha $|\psi(t=0)\rangle = |e_+\rangle =$

akkor $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|n_+\rangle + \beta(t)|n_-\rangle$

Schrödinger: $i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$

$i\dot{\alpha}(t)|n_+\rangle + i\dot{\beta}(t)|n_-\rangle = \alpha(t)(\Omega + \frac{\omega}{2})|n_+\rangle + \beta(t)(\Omega + \frac{\omega}{2})|n_-\rangle$

Mivel a kérisfelbontás egyértelmű:

$i\dot{\alpha}(t) = (\Omega + \frac{\omega}{2})\alpha(t)$ és $i\dot{\beta}(t) = (\Omega - \frac{\omega}{2})\beta(t)$

$\alpha(t) = A e^{-i(\Omega + \frac{\omega}{2})t}$ $\beta(t) = B e^{-i(\Omega - \frac{\omega}{2})t}$

$|\psi(t)\rangle = A e^{-i(\Omega + \frac{\omega}{2})t}|n_+\rangle + B e^{-i(\Omega + \frac{\omega}{2})t}|n_-\rangle$

ebből $|\psi(t=0)\rangle = A|n_+\rangle + B|n_-\rangle$ $/\cdot \langle n_+|$ és $\cdot\langle n_-|$

$A = \langle n_+|\psi(0)\rangle = \langle n_+|e_+\rangle$

$B = \langle n_-|\psi(0)\rangle = \langle n_-|e_+\rangle$

Másik leírás: $|e\rangle$ bázisban

$\hat{G}(t) = e^{-i\hat{H}t} = e^{-i(\Omega + \frac{\omega}{2})t}|n_+\rangle\langle n_+| + e^{-i(\Omega - \frac{\omega}{2})t}|n_-\rangle\langle n_-| = e^{-i\Omega t}\left[(\cos\frac{\omega t}{2} - i\sin\frac{\omega t}{2})|n_+\rangle\langle n_+| + (\cos\frac{\omega t}{2} + i\sin\frac{\omega t}{2})|n_-\rangle\langle n_-|\right] =$

$= e^{-i\Omega t}\left[\cos\frac{\omega t}{2}(|n_+\rangle\langle n_+| + |n_-\rangle\langle n_-|) - i\sin\frac{\omega t}{2}(|n_+\rangle\langle n_+| - |n_-\rangle\langle n_-|)\right] =$

$= e^{-i\Omega t}\left[\cos\frac{\omega t}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\omega t}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right]$

$\hat{G}^+(t) = e^{i\Omega t}\left[\cos\frac{\omega t}{2}\hat{I} + i\sin\frac{\omega t}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right]$

$|\psi(t)\rangle = \hat{G}(t)|\psi_0\rangle = e^{-i\Omega t}\left(\cos\frac{\omega t}{2}|e_+\rangle - i\sin\frac{\omega t}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})|e_+\rangle\right) =$

$= e^{-i\Omega t}\left[\cos\frac{\omega t}{2}|e_+\rangle - i\sin\frac{\omega t}{2}\left((\underline{n}\underline{e})|e_+\rangle + \underline{n}(-\underline{f} - i\underline{g})|e_-\rangle\right)\right] =$

$= e^{i\Omega t}\left[\left(\cos\frac{\omega t}{2} - i(\underline{n}\underline{e})\sin\frac{\omega t}{2}\right)|e_+\rangle + (i\underline{n f} - \underline{n g})\sin\frac{\omega t}{2}|e_-\rangle\right]$

$W(|\psi(t)\rangle \to |\psi(0)\rangle) = \left|e^{-i\Omega t}\left[\cos\frac{\omega t}{2} - i(\underline{n}\underline{e})\sin\frac{\omega t}{2}\right]\right|^2 = \cos^2\frac{\omega t}{2} + (\underline{n}\underline{e})^2\sin^2\frac{\omega t}{2} = 1 - \sin^2\frac{\omega t}{2}(1 - (\underline{n}\underline{e})^2) =$

$= 1 - (\underline{n} \times \underline{e})^2\sin^2\frac{\omega t}{2}$