KVANTUM-FEJEZETEK

1. előadás (02. 12.)

Fakovác Antal 3.81
fakovac.web.elte.hu
vizsga

Mi okozza a kvantumban a valószínűséget?
ezelőtt az emberekben van mi érvénye, vagy értelme. Itt nem.

Mi a különbség klasszikus és kvantum fizika között?

Fakovác interpretációja szerint az állapotokban van a különbség.

Klasszikus rendszerek: állapotokat a mérhető mennyiségek jellemzik
$t, \underline{r}, \underline{v}(t)$ ⇐ függvények.

Kvantum: Az állapotok elválasztva a méréstől (trafóktól)
az állapotok egy Hilbert-tér elemei: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
Hilbert-tér: olyan komplex VT, ahol értelmezve van skaláris szorzat.
(szuperpozíció)

Fizikai transzformációk: olyan $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ izomorfizmus (lin/antilin trafó)
ami fizikai állapotból fizikai állapotot csinál.

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \qquad \langle\psi'|\psi'\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle\psi|U^+U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow U^+U = \mathbb{1} \qquad \text{unitér transzformáció}$$

Ha van egy $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lin. operátor, akkor
$A' = U^+AU$ transzformáltja, mert
$$\langle\psi|A'|\chi\rangle = \langle\psi|U^+AU|\chi\rangle = \langle\psi'|A|\chi'\rangle$$

tekintsük olyan trafókat, amik egy folytonos paramétertől függenek:
$U: \mathbb{R}^n \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ folytonos, és $\mathcal{H}$-n lineáris
csoportot alkot, ha $U(\underline{c})U(\underline{c}') = U(\underline{c}'')$ $\exists c''$ minden esetén
Lie-csoport.

paraméteres: 1 változós esetben: $c \in \mathbb{R}$.

• $U(0) = \mathbb{1}$

• dc infinitezimális esetén $U(dc) = \mathbb{1} - iT\,dc + \mathcal{O}(dc^2)$
akkor $U^+U = 1$ miatt $T - T^+ = \mathcal{O}(dc^2)$
$\Rightarrow T = T^+$ hermitikus generátor.

• itt jön a választás:
$U(dc)^n \overset{!}{=} U(n \cdot dc)$

A véges trafó közelítésmódja: $U(c) = U\left(\frac{c}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{iTc}{n}\right)^n = e^{-iTc}$

Többváltozós esetén n.a. van, csak indexelve:

$$U(0) = 1 \,,\quad U(d\underline{c}) = 1 - i\, T_a\, dc_a + O(dc^2) \,,\quad U(\underline{c}) \stackrel{!}{=} U\left(\frac{c}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow U(c) = e^{-i T_a c_a}$$

infinitezimális trafó esetén:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = (1 - iTc)|\psi\rangle = |\psi\rangle - icT|\psi\rangle$$

$$d|\psi\rangle = |\psi'\rangle - |\psi\rangle \Rightarrow \quad d|\psi\rangle = -iT|\psi\rangle \cdot c$$

$$A' = U^+ A U = (1 + iTc) A (1 - iTc) = A + ic[T, A] + O(c^2) \Rightarrow dA = ic[T, A]$$

megmaradó mennyiségek:

$U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ -ra $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ megmarad, ha $A' = A$.

ha A megmarad $\Rightarrow$ $[T_a, A] = 0$ $\forall a$ -ra.

1 paraméteres trafó: $[T, A] = 0$. ez mindig igaz, ha $A = T$.

Ha létezik természetes módon a trafóhoz tartozó megmaradó mennyiség.

transzf generátor $\equiv$ a megmaradó mennyiség

Mi a tér meg az idő a kvantumelméletben?

Mivel ezek nem egyértelműek a fogalmainkban, ezt már kell képzelni a fizikai tapasztalataink alapján.

- idő: $\exists\, U(t)$ 1 paraméteres csoport (időfejlesztés)

ennek a generátora: H Hamilton-operátor $\qquad U(t) = e^{-iHt}$

$$\Rightarrow |\psi, t\rangle = e^{-iHt}|\psi, 0\rangle \rightarrow \frac{d|\psi\rangle}{dt} = -iH|\psi\rangle \qquad \text{Schrödinger-egyenlet}$$

$$A(t) = e^{iHt} A(0) e^{-iHt} \qquad \frac{dA}{dt} = i[H, A]$$

A Schrödinger-egyenlet az idő eltolásának egyenes következménye.

A megmaradó mennyiséget energiának hívjuk.

$\Rightarrow$ A Hamilton-operátor az energia kifejezése.

Az energiát klasszikusan ismert, de H kvantumosan kér.

– Tér: $\hat{q}$ legyen a helymérés operátora, amivel adott objektum valóságát meg tudjuk nézni

$\hat{p}$: helyeltolás operátora.

$\Rightarrow$ Ha dx-szel eltolom a helyet, a helymérés dx-szel változik meg.

$d\hat{q} = dx = i\,dx\,[\hat{p},\hat{q}] \Rightarrow [\hat{q},\hat{p}] = i$ Heisenberg-féle határozatlansági relációk

Melyik mennyiség az, ami a térelolás invarianciához tartozik?
ezt hívjuk impulzusnak!

Eddig kvantumelmélet volt, miért ez kvantummechanika?
$\hat{q}$, $\hat{p}$ operátorok bázisán felépülő tartalmat tekintjük.
$\hat{p}$ és $\hat{q}$ is önadjungált. Keressük meg a sajátált.: $q|x\rangle = x|x\rangle$
$|x\rangle$ folytonos bázis $\Rightarrow$ ezen $|\psi\rangle$ kifejezhető:
$\psi(x) := \langle x|\psi\rangle$ hullámfv
x sajátértékek a lehetséges helyek halmaza.
tapasztalataink szerint $x \in \mathbb{R}^3$, de ez inkonzisztens, mert...

$$[\hat{q},\hat{p}] \doteq i \Rightarrow \langle x|[\hat{q},\hat{p}]|x\rangle \doteq \langle x|i|x\rangle = i$$

$$\langle x|[\hat{q},\hat{p}]|x\rangle = \langle x|\hat{q}\hat{p}|x\rangle - \langle x|\hat{p}\hat{q}|x\rangle = x\cdot\langle x|\hat{p}|x\rangle - \langle x|\hat{p}|x\rangle\cdot x = 0$$

$\Rightarrow 0 \doteq i \Rightarrow$ finomítani kell a térről alkotott képet.

Feloldásul: i) folytonos spektrum esetén a sajátvektorok nem normálhatók
(projektor-mértékek fogalma)
$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ ortogonalitás helyett
$\int |x\rangle\langle x|\,dx = 1\!\!1$ teljesség helyett
Ezzel az a baj, hogy nehezen kiterjeszthető QFT-re.

ii)
A tér nem folytonos:
A tér rácsokkal felbontás megközelítést ad regularizációhoz, de a végtelen limit van.

KVANTUM - FEJEZETEK

1. előadás (02.19.)

Előző órából:

A transzformációk unitér trafók $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
$U^+ = U^{-1}$

Ha U folytonos differenciálható trafó, akkor paraméterezhető (Lie-csoport)

kis trafó: $U(dc) = \underbrace{U(0)}_{\mathbb{1}} - i\, dc_a T_a + \mathcal{O}(dc_a^2)$

nagy trafó: $U(c) = \left(U(\frac{c}{n})\right)^n \longrightarrow e^{-i c T}$

Ha $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U|\psi\rangle = |\psi\rangle - i\, dc_a T_a |\psi\rangle \Rightarrow d|\psi\rangle = -i\, dc_a T_a |\psi\rangle$

Ha $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ermit. op.

$A \to A'$: $\langle \psi | A' | \eta \rangle = \langle \psi' | A | \eta' \rangle \Rightarrow A' = U^+ A U \Rightarrow dA = i \cdot dc [T_a, A]$

TFH: $dA = 0$ (azaz A megmaradó mennyiség)

$[T_a, A] = 0$ ilyen pl. ha $T_a = A$

$\Rightarrow$ A transzformációs generátor $\equiv$ a trf. során megmaradó mennyiség.

Hogy vezetjük be a teret és az időt a kvantumba? Csak külső inputtal lehetséges:
Fel kell tennünk, hogy létezik idő (azaz van inkrementális 1 paraméteres trafó...)

- idő

$\exists$ valamely 1 paraméteres trf, amely a paramétere lesz az idő.

$U(t) = e^{i t \hat{H}} \Rightarrow d|\psi\rangle = -i\, dt\, H|\psi\rangle \Rightarrow \frac{d|\psi\rangle}{dt} = -i H |\psi\rangle$

$\Rightarrow$ A Schr.-egyenlet az idő létezésének következménye

- tér

$\exists$ valamely 3 paraméteres Abel-csoport: $U(\underline{a}) = e^{-i \underline{a} \underline{p}}$ ahol $[p_i, p_j] = 0$

$\hat{q}$: helyzetmérés operátora.

Ha da-val toljuk el a teret, akkor a helymérés da-val változik:

$d\hat{q} = da = i\, da [\hat{p}, \hat{q}] \Rightarrow [\hat{q}, \hat{p}] = i$

$\Rightarrow$ A Heisenberg a tér létezésének következménye

A klasszikus fizikában már elneveztük ezeket a mennyiségeket:

- Az időeltolásban megmaradó mennyiség az energia $\Rightarrow$ $\hat{H}$ = energia kifejezése
- A téreltolásban megmaradó mennyiség az impulzus $\Rightarrow$ $\hat{p}$ = impulzus kifejezése

(A Tr vége 1)

Ha a kvantumelméletet leszorítjuk a $\hat{q}, \hat{p}$ operátorok bázis fv.-ire $\Rightarrow$ QM.

A témánál gond van (múlt órán)

hullámfv.: $|\psi\rangle \to \psi(\underline{x}) = \langle \underline{x} | \psi \rangle$

$$|\psi'\rangle = \hat{q}|\psi\rangle \quad \text{hullámfv.:} \quad \underbrace{\langle x|\psi'\rangle}_{\psi'(x)} = \langle x|q|\psi\rangle = x \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)}$$

$$\delta|\psi\rangle = -ia\hat{p}|\psi\rangle = |\psi\rangle_{x\to x+a} - |\psi\rangle_x \qquad / \cdot \langle x|$$

$$-ia\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \langle x|\psi\rangle_{x\to x+a} - \langle x|\psi\rangle_x = \psi(x-a) - \psi(x) = -a\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Ez alapján:

$$\langle x|\hat{p}^n|\psi\rangle = \int \langle x|\hat{p}|y\rangle\langle y|\hat{p}^{n-1}|\psi\rangle dy = \int [(-i\partial_x)\delta(x-y)]\langle y|\hat{p}^{n-1}|\psi\rangle dy =$$

$$= -i\partial_x \langle x|\hat{p}^{n-1}|\psi\rangle$$

Egyszer nem volt elég elvárnunk, az összes kitevő kellett. Így már kijelenthető, hogy

$$\underline{\hat{p}\,\psi(x) = -i\partial_x \psi(x)}$$

Mi $\hat{p}$ sajátállapota: $\quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \qquad / \cdot \langle x|$

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\cdot\psi_p(x) \Leftrightarrow \quad p\psi_p(x) = -i\partial_x\psi_p(x)$$

$$\Rightarrow \psi_p(x) = e^{ipx} = \langle x|p\rangle$$

Ezzel tehát a Schr. egyenlet fv. reprezentációban:

$$\boxed{[i\partial_t - H(x, -i\partial_x)]\psi(t,x) = 0}$$

Ebből már lehet QM-et építeni

Így elértük tehát, megkapjuk az általános kvantumelméletből a QM-et. Mit lehet csinálni az általános kvantum esetén?

Mi van, ha nem létezik a $\hat{q}, \hat{p}$ bázisban?

Energia szintek és propagátorok

Legyen a időfejlesztő operátor: $\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t}$

ebből definiálható még 2: $i\hat{G}_{ret}(t) = \Theta(t)\, e^{-i\hat{H}t}$ retardált propagátor

$i\hat{G}_{av}(t) = -\Theta(-t)\, e^{-i\hat{H}t}$ avanszált propagátor

Nyilvánvaló módon: $(i\partial_t - \hat{H})\hat{\rho}(t) = 0$ mert $|\psi, t\rangle = \hat{\rho}(t)|\psi, 0\rangle$

Továbbá: $i\hat{G}_{ret}(t) - i\hat{G}_{av}(t) = \hat{\rho}(t) \Rightarrow |\psi, t>0\rangle = i\hat{G}_{ret}(t)|\psi, 0\rangle$

Hattassuk G-re a Schr.-t:

$$(i\partial_t - \hat{H})\, i\hat{G}_{ret}(t) = (i\partial_t \Theta(t))\, e^{-i\hat{H}t} + \Theta(t)(i\partial_t - \hat{H})\, e^{-i\hat{H}t} = i\delta(t)\mathbb{1}$$

$$(i\partial_t - \hat{H})\, i\hat{G}_{av}(t) = (i\partial_t(-\Theta(-t)))\, e^{-i\hat{H}t} - \Theta(-t)(i\partial_t - \hat{H})\, e^{-i\hat{H}t} = i\delta(t)\mathbb{1}$$

$\hat{G}$-k n.a. diffegyenletnek tesznek eleget:

$(i\partial_t - \hat{H})\, \hat{G}_{\substack{ret\\av}}(t) = \delta(t)\mathbb{1}$ ezek az időfejlesztő Green-fv-i.

Nézzük át Fourier-térbe! (még változó után).

$$\hat{\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(t)\, e^{i\omega t}\, dt = *$$

vegyük a sajátérték felbontását!

$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$* = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-iE_n t} |n\rangle\langle n|\, dt = \sum_n 2\pi\,\delta(\omega - E_n)|n\rangle\langle n|$$

ρ spektruma a lehetséges energiaszinteken lokalizált projektorokból áll.

Ezért hívják $\hat{\rho}(\omega)$-t spektrál operátornak

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}(\omega) = \sum_n 2\pi\, g_{E_n}\, \delta(\omega - E_n)$$

g_{E_n}: Az E_n szint elfajultsága

Ez már tényleg egy fv, ami az energiaszinteket adja meg

$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}(\omega)$: állapotsűrűség

$$\rho_\phi(\omega) = \langle\phi|\hat{\rho}(\omega)|\phi\rangle = \sum_n 2\pi\,\delta(\omega - E_n)\underbrace{\langle\phi|n\rangle\langle n|\phi\rangle}_{|\langle\phi|n\rangle|^2} = \sum_{n'} 2\pi\,\delta(\omega - E_{n'})\,|\langle\phi|n'\rangle|^2$$

↳ azon n', amire $\langle\phi|n'\rangle \neq 0$

ebből is kiolvashatók az E szintek, de nem mind, csak ami átfed ϕ-vel.

$\langle\phi|n'\rangle \neq 0$ az ilyen állapotok a ϕ kvantumcsatornái

$\rho_\phi(\omega)$: ϕ spektrálfv-e

Konklúzió: ha $\hat{\rho}$-t tudjuk, mindent tudunk a rendszerről, az állapotok teljes időfejlesztését.

Elég az spektrál operátorral és a propagátorral dolgozni.

ha megnézzük az alábbi integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\phi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \sum_n 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - E_n) \langle \phi | n \rangle \langle n | \phi \rangle \frac{d\omega}{2\pi} = \sum_n \langle \phi | n \rangle \langle n | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\phi(\omega)\, d\omega = 1} \qquad \text{Sum-rule}$$

$\rho_\phi(\omega)$ mint valószínűségi eloszlást is értelmezhető.

A G-k Fourierje:

$$(i\partial_t - \hat{H})\hat{G}(t) = \delta(t)\,\mathbb{1} \quad \leftarrow \text{ezt vigyük át } \omega\text{-ba}$$

$$(\omega - \hat{H})\hat{G}(\omega) = \mathbb{1} \Rightarrow \hat{G}(\omega) = (\omega - \hat{H})^{-1}$$

$$\hat{G}(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - E_n} |n\rangle\langle n|$$

mivel $\hat{\rho}(\omega) = \sum_n 2\pi\, \delta(\omega - E_n) |n\rangle\langle n|$ volt, ezért

$$\boxed{G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - \omega'} \sum_n 2\pi\, \delta(\omega' - E_n) |n\rangle\langle n| \frac{d\omega'}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\rho}(\omega')}{\omega - \omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}}$$

Kramers–Kronig-reláció

$G(\omega)$ pólusai az energiaszintek

Az előzőek érvényesek:

$$G_\phi(\omega) = \langle \phi | \hat{G}(\omega) | \phi \rangle = \sum_n \frac{1}{\omega - E_n} |\langle \phi | n \rangle|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_\phi(\omega')}{\omega - \omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}$$

$G(\omega)$: általános propagátor

milyen itt ret/av különbség?

$$i\hat{G}_{ret}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) e^{-i\hat{H}t} e^{i\omega t}\, dt = \text{szorzat trafója konvolúció} = *$$

A $\tilde{\Theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) e^{i\omega t}\, dt$ bajos kiszámolni, ezért azt mondjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\varepsilon t}\, dt \Big|_{\varepsilon \to 0} = \frac{-1}{i\omega - \varepsilon} e^{(i\omega - \varepsilon)t} \Big|_{\varepsilon \to 0} = \frac{i}{\omega + i\varepsilon}$$

$$* = \int \frac{i}{\omega - \omega' + i\varepsilon} \hat{\rho}(\omega') \frac{d\omega'}{2\pi} = \int \frac{\rho(\omega')}{\omega - \omega' + i\varepsilon} \frac{d\omega'}{2\pi}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Tehát} \quad \hat{G}_{ret}(\omega) = \hat{G}(\omega + i\varepsilon) \\ &\text{ugyanilyen módon:} \quad \hat{G}_{av}(\omega) = \hat{G}(\omega - i\varepsilon) \end{aligned}\right\} \text{Landau-előírás}$$

Az elején levő összefüggés miatt: $i\hat{G}_{ret}(\omega) - i\hat{G}_{av}(\omega) = \hat{\rho}(\omega) \Rightarrow i\hat{G}(\omega + i\varepsilon) - i\hat{G}(\omega - i\varepsilon)\Big|_{\varepsilon \to 0} = \hat{\rho}(\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\omega) = \mathrm{Disc}\; i\hat{G}(\omega)} \qquad \text{ahol} \quad \mathrm{Disc}\, f(x) = \big(f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)\big)\Big|_{\varepsilon \to 0}$$

KVANTUM FEJEZETEK

5. előadás (03. 05.)

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t} \longrightarrow \hat{\rho}(\omega) = \sum_n 2\pi\,\delta(\omega - E_n)\,\hat{P}_n$$

$$\hat{P}_n \hookrightarrow |n\rangle\langle n|$$

$$\hat{G}_{ret}(t) = \Theta(t)\,\rho(t) \longrightarrow \hat{G}(\omega) = \int \frac{\rho(\omega')}{\omega - \omega'}\,\frac{d\omega'}{2\pi}$$

$$(i\partial_t - \hat{H})\,\hat{G}_{ret} = \delta(t)\,\mathbb{1} \longrightarrow \hat{G}_{r/a}(\omega) = G(\omega \pm i\varepsilon)$$

$$iG_{ret} - iG_{av} = \rho \longrightarrow \hat{\rho}(\omega) = \mathrm{Disc}\; i\,\hat{G}(\omega)$$

$$\rho_\phi(\omega) = \langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle = \sum_n 2\pi\,\delta(\omega - E_n)\,|\langle n|\phi_n\rangle|^2$$

$$\int \rho_\phi(\omega)\,\frac{d\omega}{2\pi} = 1$$

Eddig a múltkorról

Vegyünk egy A operátort és képezzük az alábbit:

$$\rho_{AA^+}(t) = \langle 0|[A(t), A^+(0)]|0\rangle = \langle 0|A(t)A^+(0) - A^+(0)A(t)|0\rangle =$$

$$= \langle 0|e^{iHt}Ae^{-iHt}A^+ - A^+e^{iHt}Ae^{-iHt}|0\rangle = \text{mivel } H|0\rangle = E_0|0\rangle = 0 =$$

$$= \langle 0|Ae^{-iHt}\Big(\sum_n |n\rangle\langle n|\Big)A^+ - A^+e^{iHt}\Big(\sum_n |n\rangle\langle n|\Big)A|0\rangle =$$

$$= \sum_n \Big[e^{-iE_nt}\langle 0|A|n\rangle\langle n|A^+|0\rangle - e^{iE_nt}\langle 0|A^+|n\rangle\langle n|A|0\rangle\Big] =$$

$$= \sum_n \Big[e^{-iE_nt}|\langle 0|A|n\rangle|^2 - e^{iE_nt}|\langle 0|A^+|n\rangle|^2\Big]$$

TFH.: $A = A^+$

$$= \sum_n |\langle 0|A|n\rangle|^2\left(e^{-iE_nt} - e^{iE_nt}\right)$$

Fourier-ben:

$$\rho_{AA^+}(\omega) = \sum_n 2\pi\big(\delta(\omega - E_n) - \delta(\omega + E_n)\big)\,\overbrace{|\langle 0|A|n\rangle|}^{A \text{ form faktora}}{}^2$$

amit látunk: $\rho_{AA^+}(-\omega) = -\rho_{AA}(\omega)$

$\rho_{AA}(\omega > 0) > \phi$

tulajdonképpen $\rho_\phi = \rho_{AA^+}$ u.a. ha $|\phi\rangle = A^+|0\rangle$

ρ_{AA} A operátorokra kiterjesztett spektrálfv.

Ez még később kell...

QM-ban megszoktuk, hogy véges, diszkrét E szintek vannak
De nagy térfogat esetén az E szintek besűrűsödnek, és új jelenségek lesznek.

Mi a jellemző energiaszintek távolsága:

szabadelektrongáz esetén: $\psi(x) \sim e^{ikx}$ $\qquad E=\frac{k^2}{2m}$

per. HF: $\psi(x+L)=\psi(x)$

$$e^{ikL}=1 \Rightarrow kL = 2\pi n \Rightarrow k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

$$\delta E = E_{k+\delta k} - E_k = \frac{dE}{dk}\delta k = v_E \frac{2\pi}{L}$$

$\delta E \sim \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{\delta E} \sim \frac{L}{v_E} \sim t$ az az idő, ami alatt a [illegible] át [illegible] a rendszeren.

gömb esetén (csak most eddig 1D-ben volt, nagyjából)

$\delta k = \frac{2\pi}{L}$, $\delta E = \frac{2\pi v_E}{L}$ de az energiaszintek elfajultak

Az elfajultság abból van, hogy $E=\frac{k^2}{2m}$ és a $|k|$ sugarú gömb felülete ugyanahhoz az E-hez tartozik

$\Rightarrow$ Az elfajultság mértéke k^2-tel arányos

konkrétan: $\frac{4\pi k^2 \delta k}{\delta k^3} \approx \left(\frac{k}{\delta k}\right)^2 \sim (kL)^2$

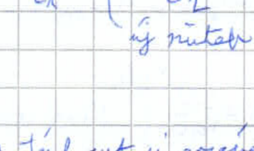
héjak térfogat

két szint távolság

Mi van deformált (általános) rendszerekben?

Feltételezzük, hogy az elfajultságok feloldódnak (a döntő többség)

$\Rightarrow \delta E = \frac{\delta E_{gömb}}{g_E} \sim$ (mert ami eddig egyben volt, az beront a két szint közé)



$$\sim \frac{v_E}{L}\frac{1}{k^2L^2} \sim \frac{v_E}{k^2 V} \sim \frac{v_E \lambda^2}{V}$$

Tehát ált. esetben nem az átfutás idejével, hanem a térfogat inverzével arányos
(így 3D-ben ez nagyon nagy lehet)

Az energiaszintek megkülönböztethetősége

$$|n,t\rangle = e^{-iE_n t}|n,0\rangle \quad \to \quad \langle n,t|\hat{T}|n,t\rangle = \langle n,0|\hat{T}|n,0\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|n_1\rangle + \beta|n_2\rangle$$

$$|\psi,t\rangle = \alpha e^{-iE_1 t}|n_1\rangle + \beta e^{-iE_2 t}|n_2\rangle$$

$$\langle\psi,t|\hat{T}|\psi,t\rangle = \left(\alpha^* e^{iE_1 t}\langle n_1| + \beta^* e^{iE_2 t}\langle n_2|\right)\hat{T}\left(\alpha e^{-iE_1 t}|n_1\rangle + \beta e^{-iE_2 t}|n_2\rangle\right) =$$

$$= |\alpha|^2\langle n_1|\hat{T}|n_1\rangle + |\beta|^2\langle n_2|\hat{T}|n_2\rangle + \alpha^*\beta e^{i(E_1-E_2)t}\langle n_1|\hat{T}|n_2\rangle +$$
$$+ \alpha\beta^* e^{-i(E_1-E_2)t}\langle n_2|\hat{T}|n_1\rangle$$

Jelölés: $\alpha^*\beta\langle n_1|T|n_2\rangle = A e^{i\varphi}$

Tehát $\langle\psi,t|\hat{T}|\psi,t\rangle = \underline{\qquad} + A\left(e^{i(E_1-E_2)t+i\varphi} + e^{-i(E_1-E_2)t-i\varphi}\right) =$

$$= \langle\psi,0|\hat{T}|\psi,0\rangle + 2A\underbrace{\left(\cos(\delta E t+\varphi) - \cos\varphi\right)}_{\text{lebegés}}$$

Addig nem tudjuk, hogy egy vagy több E szint van, amíg ki nem várjuk a lebegésre jellemző időt.

Ennek alapján van jelentősége, $t \sim \frac{1}{\delta E} \sim \frac{V}{v_E \lambda^2} > \frac{V}{c d^2} \Rightarrow \frac{ct}{d} = \frac{V}{d^3}$

ez a feltétele annak, hogy megkülönböztessük két szintet

látható fényre, $1\,m^3$-es rendszerre $\frac{V}{d^3} \simeq 10^{19}$

időben $t \simeq 1$ nap

pl.: egy üregrezonátorban 1 napig kéne várni, hogy megkülönböztessük az energiaszintet. Ez lehetetlen!

Sőt, a kezdeti lokalizált gerjesztések $\left(\frac{V^{1/3}}{c} \sim t\right)$ rengeteg energiaszintet gerjesztenek

$\Rightarrow$ Teljesen irreleváns számunkra a diszkrét energia kép $\Rightarrow$ folytonos energiával kell dolgozni

$$\bar{\rho}(E) = \frac{1}{V}\frac{1}{dE}\int_E^{E+dE}\rho(\omega)\,d\omega$$ (ez egységnyi folytonos fv-e E-nek)

$$g_\psi(t) = \langle\psi|e^{-iHt}|\psi\rangle = \sum_n e^{-iE_n t}|\langle n|\psi\rangle|^2$$

ha az egy kezdeti lokalizált állapot, akkor sok n-nel van átfedése

$|\langle n|\psi\rangle|^2 =$ [illegible] $= \frac{f(E_n)}{V}$ ez kb. folytonos

$$g_\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\sum_n 2\pi\delta(\omega-E_n)e^{-i\omega t}\frac{f(\omega)}{V} = \sum_j \delta E\frac{1}{V\,dE}\int_E^{E+dE}\frac{d\omega}{2\pi}\sum_n 2\pi\delta(\omega-E_n)e^{-i\omega t}f(\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\underbrace{\bar{\rho}(E)f(E)}_{g(E)\text{ folytonos fv.}}e^{-iEt}$$

$g(E)$ tipikus alakjai:

1) egy ideig nulla, és utána nő:

E_t

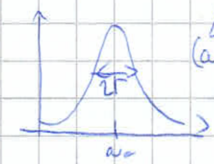
Ekkor $\rho_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{E_t}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$

sorbafejtve g-t: $g(\omega) = (\omega - E_t)^\alpha \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell (\omega - E_t)^\ell$

ezzel: $\rho_+(t) = \int_0^{\infty} \omega^\alpha e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \left[\int_0^{\infty} e^{-ix} x^\alpha \frac{dx}{2\pi} \right] \cdot \frac{1}{t^{1+\alpha}}$

Mindkét állapota hatványszerű lecsengés van

2)



$\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \Gamma^2}$

Ekkor $\rho_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} =$

$= \frac{i}{2\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega-\omega_0+i\Gamma} - \frac{1}{\omega-\omega_0-i\Gamma} \right) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} =$

$= \frac{\pi}{\Gamma} e^{-i\omega_0 t} e^{-\Gamma |t|}$

Az állapottal való átfedés itt is lecseng. (exponenciálisan)

Persze ez ρ_+-t számolja, nem a t normáját:

$$\| |\psi,t\rangle \|^2 = \sum_n |\langle n|\psi,t\rangle|^2 = \sum_n |\underbrace{\langle n| e^{-iHt}}_{e^{-iE_n t}\langle n|} |\psi\rangle|^2 = \sum_n |\langle n|\psi\rangle|^2 = 1$$

A norma időfüggetlen, de más állapottal való átfedés lecseng

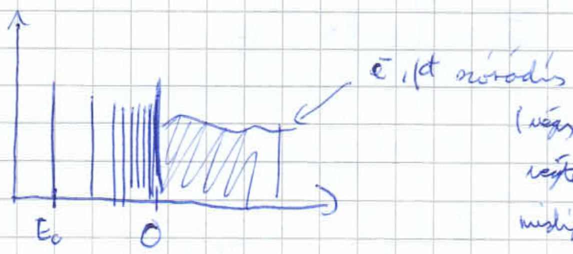
(hiányos példa)

KVANTUM FEJEZETEK

4. előadás (03.12.)

Egy QM rendszer mindig energiasajátértékből áll, de ezek tipikusan egymáshoz közel vannak.

Pl. H atom



(véges V esetén diszkrét végtelen sok szint folytonos, de mindig folytonosnak kezeljük)

Egy fizikailag létező állapotot több energiaszintet ölel fel.

$\Rightarrow$ folytonos G állapot közelítés

$\rho_f(\omega) = \sum_n 2\pi\,\delta(\omega - E_n)$ ← nem folytonos, de így kezeljük

(f-től az indexelést elhagyjuk, ...)

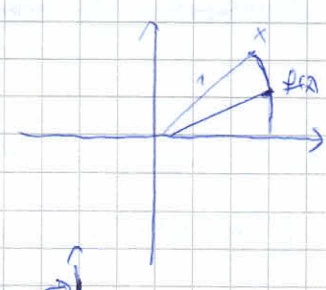
Tudjuk, hogy $\rho(\omega) = G(\omega + i\varepsilon) - G(\omega - i\varepsilon) \Rightarrow G(\omega + i\omega) = G(\omega - i\varepsilon) + \rho(\omega)$

G olyan, hogy bizonyos helyeken van neki „vágása"

<u>Vágások a komplex fv-eknél</u>

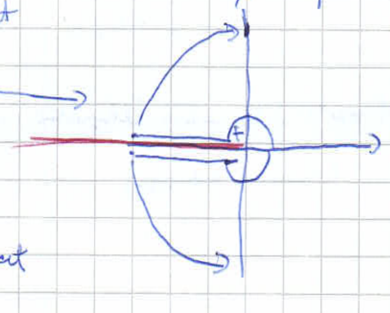
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \sqrt{x}$

ha $x = r e^{i\varphi}$ $\quad f(x) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$



Mivel a szög körbemegy, kell egy kezdőpont

általában hagyomány: $\varphi \in [-\pi, \pi]$



A $\sqrt{x}$ fv-nek a negatív valós tengelyen vágása van, mert a közeli számokat egymástól messze képzi.

$\mathrm{Disc}\sqrt{x} = \sqrt{x + i\varepsilon} - \sqrt{x - i\varepsilon} = 2i\sqrt{x}\cdot\Theta(-x)$

Mondhatnánk, hogy $\varphi \in [-2\pi, 2\pi]$, mert amíg x 0-tól különbözik, addig $\sqrt{x}$ egyértelmű lesz. Ekkor viszont egy számot több szög is jellemez.

szemléletes: amikor átmegyünk a vágáson, akkor a másik tartományban kötünk ki

<u>Riemann - levelek</u>

mint példa diszkontinuitásra

$f(x) = \ln x$

ha $x = r e^{i\varphi}$: $f(x) = \ln r + i\varphi$

$\mathrm{Disc}\, \ln x = \ln(x+i\varepsilon) - \ln(x-i\varepsilon) = 2\pi i\,\Theta(-x)$

itt az ajtón mindig új világba érkezem. Az előbb az ajtón átmenve mindig visszaértem az előzőbe.

Spektrálfv. eltolásinvariáns esetben

$[\hat{k}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow \exists$ közös s.f. rendszer: $|E, k\rangle$

QM esetén ez azt jelenti, hogy $\hat{H}(\hat{p})$ (azaz $\hat{q}$-tól nem)

$\Rightarrow E(k)$

A Schr.-egyenlet F-trf-ja: $(\omega - E)\,G(\omega, E, k) = 1$

$$\Rightarrow G(\omega, k) = \frac{1}{\omega - E(k)}$$

$$\hat{\rho}(t) = e^{i\hat{H}t} \rightarrow \hat{\rho}(\omega) = \sum_n 2\pi\delta(\omega - E_n)\,|k\rangle\langle k|$$

Állapotsűrűség: $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = \sum_n 2\pi\,\delta(\omega - E_n)$

fajl. $\bar{\rho}(\omega) = \frac{1}{V}\sum_k 2\pi\delta(\omega - E_k) \Rightarrow \int 2\pi\delta(\omega - E_n)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$

nem relativisztikus esetben $E(k) = \frac{k^2}{2m}$

ekkor $\bar{\rho}_1(\omega) = \int 2\pi\delta\left(\omega - \frac{k^2}{2m}\right)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{8\pi^3}4\pi\cdot 2\pi\int_0^\infty \delta\left(\omega - \frac{k^2}{2m}\right)k^2\,dk =$ $\quad x = \frac{k^2}{2m}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \delta(\omega - x)\frac{m}{\sqrt{2mx}}\,2mx\,dx = \frac{m}{\pi}\sqrt{2m\omega}$$

E szintek

E szintek sűrűsége $\longrightarrow$

Egy tipikus H-atom spektrum tehát:

[relativisztikusan: $E = \sqrt{k^2 + m^2} \Rightarrow \bar{\rho}(\omega) = \frac{\omega}{\pi}\sqrt{\omega^2 - m^2}\,\Theta(\omega - m)$]

Mi van térbeli eltolásinvariáns esetben?

A helyzet hasonló, de van némi gyenge x függés

$$\underset{V}{\bar{\rho}(\omega)}\quad \underset{V'}{\bar{\rho}'(\omega)}\quad \underset{V''}{\dots}\quad \dots$$

Pl. mit látunk elektronmikroszkóp esetén?

Palagát $\sim \sum_i \rho^{(i)}_{\text{állapot}}$ $\Rightarrow$ $I \sim T(\omega, x)\, \bar{\rho}(\omega, x)$

T: transzmissziós valószínűség; $\bar{\rho}$: lehetséges állapotok száma

$\Rightarrow$ Tehát ezzel ki lehet mérni a helyfüggő állapotsűrűséget
ami tulajdonképpen az atomok detektálása

Mi van két részecske esetén?

$$\hat{H} = \hat{H}_1(\hat{k}_1) + \hat{H}_2(\hat{k}_2)$$

$$\frac{k_1^2}{2m_1} \qquad \frac{k_2^2}{2m_2} \quad \text{az egyszerűség kedvéért.}$$

Ilyenkor

$$\bar{\rho}(\omega) = \iint 2\pi\,\delta\big(\omega - \underbrace{E(k_1,k_2)}_{\frac{k_1^2}{2m_1}+\frac{k_2^2}{2m_2}}\big)\,|k_1,k_2\rangle\langle k_1,k_2|\,\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}$$

TFH: összimpulzus rögzített (pl. bomlástermékek): $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{p}$ $\rightsquigarrow$ parciális Trace

$$\operatorname*{Tr}_{\underline{k}_1+\underline{k}_2=\underline{p}} \bar{\rho}(\omega) = \int 2\pi\,\delta\big(\omega - E(\underline{k}_1, \underline{p}-\underline{k}_1)\big)\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}$$

Meg ezt: $\underline{p} = 0$. Ekkor az integrál u.a. mint előbb.

$$E(k_1, -k_1) = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_1^2}{2m_2} = \frac{k^2}{2M} \qquad M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{\rho}(\omega, \underline{p}=0) = \frac{M}{\pi}\sqrt{2M\omega}$$

Képzeljünk el egy rendszert, aminek van egyrészecske és kétrészecske állapota

$|\underline{k}\rangle \to H_0^{(1)}$

$|\underline{k}_1, \underline{k}_2\rangle \to H_0^{(2)}$

TFH van olyan Ham op, ami a kettőt összekeveri

$\hat{H}_{int} \to \langle \underline{k}| H_{int} |\underline{k}_1, \underline{k}_2\rangle \neq 0$

Ekkor a másodrendű perturbációszámítás során $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}$

itt volt némi a Feynman diagramokkal
WTF

Perturbációszámítás

eredetileg E_n, $|n\rangle$ volt – hogyan lehet $\hat G(\omega)$-ra?

$\hat H = \hat H_0 + \hat V$

$(\omega - \hat H)\, G(\omega) = 1\!\!1$ ← Sch-egyenlet

$(\omega - \hat H_0 - \hat V)\,\hat G = 1\!\!1$ és TFH $(\omega - \hat H_0) G_0 = 1\!\!1$ megoldását ismerem

$$\hat G^{-1} = \omega - H_0 - \hat V = \hat G_0^{-1} - \hat V \Rightarrow \hat G_0 = \hat G - \hat G_0 \hat V \hat G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\hat G = \hat G_0 + \hat G_0 \hat V \hat G}$$ innen sorfejt. approx.

Dyson–Schwinger-sor.

„propagátorokkal a perturbáció triviális"

$$\hat G(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - \bar E_n} |\bar n\rangle\langle \bar n|$$

$$\hat G_0(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - E_n} |n\rangle\langle n|$$ ebből próbáljuk meg felírni legalább a 1. rendet!

DS-sor:

$$G(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - E_n}|n\rangle\langle n| + \sum_{nm} \frac{1}{\omega - E_n} |n\rangle\langle n|\hat V|m\rangle\langle m| \frac{1}{\omega - E_m} + \dots$$

$$= \sum_n \frac{1}{\omega - E_n}|n\rangle\langle n| + \sum_{nm} \frac{V_{nm}}{(\omega - E_n)(\omega - E_m)} |n\rangle\langle m| + \dots$$

$$= \sum_n \underbrace{\left(\frac{1}{\omega - E_n} + \frac{V_{nn}}{(\omega - E_n)^2} + \dots\right)} |n\rangle\langle n| + \sum_{n\neq m} \frac{V_{nm}}{(\omega - E_n)(\omega - E_m)} |n\rangle\langle m| =$$

= akkor, ugye ha egy duplapólus elképzelhető egy pólus felbontásaként.

$$\to \frac{1}{\omega - \bar E_n} = \frac{1}{\omega - E_n - \delta E_n} = \frac{1}{\omega - E_n} + \frac{\delta E}{(\omega - E_n)^2} + \dots$$

Tehát:

$$G(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - \bar E_n} |n\rangle\langle n| + \sum_{n\neq m} \frac{V_{nm}}{(\omega - E_n)(\omega - E_m)} |n\rangle\langle m| + \dots =$$

$$= \sum_n \frac{1}{\omega - \bar E_n} \left(|n\rangle + \sum_{n\neq m} c_{nm} |m\rangle\right) \otimes \left(\langle n| + \sum_{m\neq n} c^*_{nm} \langle m|\right)$$

Vagyis az állapot: $$|\bar n\rangle = |n\rangle + \sum_m \frac{V_{nm}}{E_n - E_m} |m\rangle$$ (most ugyanaz, mint a reziduumoké)

Pályaintegrál - reprezentáció

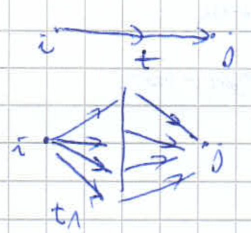
$$\langle\psi|e^{-i\hat H t}|\varphi\rangle = \sum_i \langle\psi|e^{-i\hat H t_1}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|e^{-iH(t-t_1)}|\varphi\rangle$$

$$e^{-iHt_1}\,e^{-iH(t-t_1)}$$

$$\mathbb{1} = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

Legyen $\rho_{ij}(t) := \langle\psi_i|e^{-iHt}|\psi_j\rangle$ akkor $\rho_{ij}(t) = \sum_\ell \rho_{i\ell}(t)\rho_{\ell j}(t)$

szemléltetés:



az időt feloszthatjuk
ott bázisban meghatároztjuk.

$$\rho_{ij}(t) = \sum_{i_1\dots i_n} \rho_{ii_1}(dt)\,\rho_{i_1i_2}(dt)\cdots\rho_{i_nj}(dt)$$ = Mivel ezek u.a. mátrixok, ez csak hatványozás. $T_{ij} := \rho_{ij}(dt)$

$$\Rightarrow \hat\rho = \hat T^n$$

Mi van, ha $dt \to 0$

$$\rho_{ij}(dt) = \langle\psi_i|e^{-iHdt}|\psi_j\rangle = \langle\psi_i|\mathbb{1} - i\hat H dt + O(dt^2)|\psi_j\rangle =$$

$$= \langle\psi_i|\psi_j\rangle - i\,dt\,\langle\psi_i|H|\psi_j\rangle + O(dt^2) =$$ $\qquad H_{ij} := \frac{\langle\psi_i|H|\psi_j\rangle}{\langle\psi_i|\psi_j\rangle}$

$$= \langle\psi_i|\psi_j\rangle(\mathbb{1} - i\,dt\,H_{ij} + \cdots)$$ $\qquad R_{ij} := -i\frac{\ln\langle\psi_i|\psi_j\rangle}{dt}$

$$= e^{i(R_{ij}-H_{ij})dt}$$ $\qquad L_{ij} = R_{ij} - H_{ij}$

$$= e^{iL_{ij}dt}$$ általánosított Lagrange-fv.

$$\rho_{ij}(t) = \sum_{i_1\dots i_n} e^{i(L_{ii_1}+L_{i_1i_2}+\dots L_{i_nj})dt}$$ konkrét esetben ezt számoljuk ki, csak az a baj, hogy nem egy csomó Σ.

Jelölés: $dt \to 0$ esetén: $\sum_{i_1\dots i_n} e^{i\int L dt} = e^{iS}$ általánosított hatás.

QM-ben hogy változik a propagátor? $\quad \frac{\langle x|e^{-iHdt}|p\rangle}{\langle x|p\rangle} =: e^{-iH(p,x)dt}$

$$\rho_{xy}(dt) = \langle x|e^{-iHdt}|y\rangle = \langle x|e^{-iHdt}|p\rangle\langle p|y\rangle = e^{-iH(p,x)dt}\langle x|p\rangle\langle p|y\rangle =$$

$$= e^{-iH(p,x)dt + ip(x-y)} = e^{i(p\dot x - H(p,x))dt}$$ $\qquad$ ez $\dot x := \frac{x-y}{dt}$

Ez az ugye a klasszikus Lagrange.

Általános: $\rho_{xy}(t) = \int dx\,dp\,dy\,p_n\, e^{i(p_1\dot x_1 - H(p_1,x_1))dt}\dots = \int e^{i\left(p\dot x - \frac{p^2}{2m}\right)}dp \sim e^{\frac{i}{2}m\dot x^2} \Rightarrow \rho_{xy}(t) = \int_{x=x}^{x=y} e^{iS(\dot x,x)}\mathcal{D}x$

majd később órán úgyis elhanyagoljuk.

KVANTUM FEJEZETEK

9. előadás (03.19.)

$e^- + p^+$ rendszer KH nélkül

Ha van KH, akkor megjelennek diszkrét nívók a negatív tartományban

A valóságban ezenkívül fotonok is vannak, és ezek a E-nívókat kiszélesítik.

A közel lévő energiákon csak együtt tudja gerjeszteni ⇒ a fotonok szétszóródnak, az abszorbciós kötési együttható ⇒ elbomlik

Az előző órán bevezettük a Schr.-egy.-pályaintegrált:

$$\rho_{xy}(t) = \int_{\substack{x(0)=x \\ x(t)=y}} e^{iS[x]}\, \mathcal{D}x$$

de ez csak, ha $H \sim p^2$

Mi van, ha $H \nsim p^2$: ekkor a pályaintegrál és a e^{-iHt} időfejlődés nem ekvivalens.

Melyik az „igazi" kvantummechanika definíciója? nem tudjuk, mert a valódi rendszerekben $H \sim p^2$.

Lehet, hogy a pályaintegrál jobban kifejezi a tér nem folytonosságát, de attól még a kérdés nincs válasz.

Sokrészecske rendszerek

A „részecske" fogalmának a klasszikus rendszerben van értelme,
de a kvantumosak azonosíthatatlanok, és értelme a részecskének
Valahogy definiálni kéne mint is részt

Problémák:

- atomokban az e^--ok feltöltik az E-szinteket
  mivel ezek fermionok és nem lehetnek u.a. állapotban $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ a szabad elektron rendszer erősen korrelált
  $\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$ antiszimmetrikus kell legyen! Ez nem lokális korreláció
  ami problémás. ☹

- gázoknál tudjuk, hogy $Z = \sum_\sigma e^{-\beta E_\sigma} = e^{-\beta F}$

  független rendszerekre: $E(\sigma_1, \sigma_2) = E_{\sigma_1} + E_{\sigma_2} \Rightarrow Z = Z_1 Z_2$

  Ideális gáz: $Z_1 = \int e^{-\frac{p^2}{2mT}} \frac{d^3x\, d^3p}{(2\pi)^3} = V\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2}$

  $$Z_N = Z_1^N = \text{tudjuk} = e^{-\beta F}$$

  $$\Rightarrow F = -NT \ln Z_1 = -NT \ln V - \frac{3}{2} NT \ln \frac{mT}{2\pi}$$

  Ennél viszont $F(2N, 2V) = 2F(N,V) - 2NT \ln 2$

  tehát a termodinamika nem extenzív

  Mivel $\frac{\partial F}{\partial T} = -S$ kiszámolható az entrópia korrekció ebből

  $$\delta S = 2N \ln 2 \quad \text{keverési entrópia}$$

  feloldás: A részecskék valójában nem korrelálatlanok, legyen:

  $$Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N = -NT \ln \frac{V}{N} - \frac{3}{2} NT \ln(c \cdot mT)$$

  KH mentes, de nem korrelálatlan!

  ha térfogatelemek már függetlenek voltak – korreláltságot, az már független

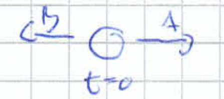
  $$Z = \prod_{\delta V} Z_{\delta V} = e^{\int \beta f\, dV}$$

  Gibbs-paradoxon és részecskék:
  a részecske folytonosan eltüntethető, de a kvantumszámokkal nem.
  a tömeg szerint igen!
  A feloldás itt az azonosságok kiszelektálása, így a tömeggel arányos tételeken az energiacserére folyamatosan olvadnak össze

A Problémák mindig ott bújnak meg, hogy a részecskék még KH vállaltak is korreláltak.

EPR-kísérlet (Einstein - Podolsky - Rosen):

egy részecske elbomlik, és két bomlástermék van.



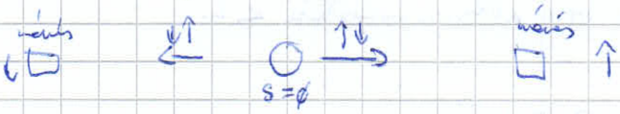
A-nak mérjük a helyét

B-nek az impulzusát

Ebből elvileg kiszámolhatjuk egyszerre helyét és impulzusát.

Feloldás: nem tudom biztosítani, hogy az eredeti részecske álljon,
így azért a mérésnél is van bizonytalanság.

Továbbfejlesztés: 0 spinű részecske elbomlik azonos spinű részecskékre



Az egyik mérés innentől
biztos eldönti a másik eredményét is.
De honnan tudja egyik mérés a másik eredményét?
Az információnak gyorsabban kell mennie c-nél.

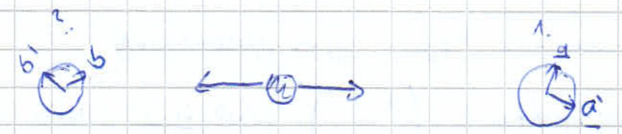
[másik példa: honnan tudja az anyag egyik vége,
hogy egy másik most már felvillant?]

EPR magyarázata: A mérés eredménye már korábban eldőlt (már úgy keletkezik
kapcsolatban voltak) csak később mérünk meg.
Mint amikor megkaptam a lottó egyik felét postán.

„rejtett paraméter" v. „lokális realizmus"

Ezen 1935 óta vitatkoztak, és Bell 1964-ben jött újabb ötlettel

Bell:



korrelációs méréseket végzünk:

a	b	$x_a x_b$
+	+	+
−	+	−
−	−	+
⋮	⋮	⋮

A várható érték: $S_{ab} := \langle x_a x_b \rangle$

$S_{a'b} := \langle x_{a'} x_b \rangle$

$S_{ab'} := \langle x_a x_{b'} \rangle$

$S_{a'b'} := \langle x_{a'} x_{b'} \rangle$

Nézzük a $S = |S_{ab} + S_{a'b} - S_{ab'} + S_{a'b'}|$ mennyiséget, és ez jó lesz nekünk

Miért? Nézzük meg mit várunk a különböző esetekben

Klasszikus eset: korábban beállt a spin és később mérünk

$$S = |\langle x_a x_b + x_{a'} x_b - x_a x_{b'} + x_{a'} x_{b'} \rangle| =$$

$$= |\langle x_a (x_b - x_{b'}) + x_{a'} (x_b + x_{b'}) \rangle|$$

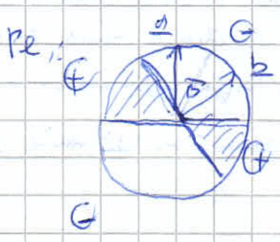
$x_a = \pm 1$, $x_{a'} = \pm 1$

ha $x_b = x_{b'} = \pm 1 \Rightarrow x_b - x_{b'} = 0 \Rightarrow S = |2\langle x_{a'} x_b \rangle| < 2$

ha $x_b = -x_{b'} \Rightarrow x_b + x_{b'} = 0 \Rightarrow S = |2\langle x_a x_b \rangle| < 2$

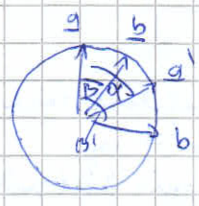
Tehát ha EPR-féle magyarázat igaz, akkor a mérés értéke < 2.

Pl.:

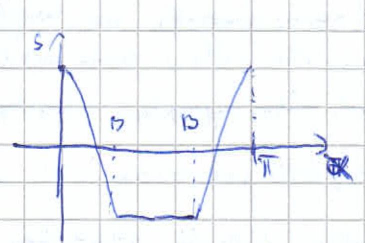


$P_+ = \frac{\beta}{\pi}$ $\quad P_- = 1 - \frac{\beta}{\pi}$

$\langle x_a x_b \rangle = P_+ - P_- = \frac{2\beta}{\pi} - 1$



$$S = \frac{2\beta}{\pi} - 1 + \frac{2(\alpha+\beta)}{\pi} - 1 + 1 - \frac{2\beta'}{\pi} + \frac{2(\beta'-\alpha)}{\pi} - 1 = -2$$



Kvantumos eset: a méréskor kapjuk meg az információt

spinmérés z-irányban: $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{a}\hat{\sigma}$ tetsz. irányban

Legyen $\underline{a} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \to \underline{a}\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \cos\varphi + i\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$

A teljes mérési operátor: $(\underline{a}\hat{\sigma}_1)(\underline{b}\hat{\sigma}_2) =: \hat{\underline{M}}$

$$\hat{M} |\uparrow\downarrow\rangle = |\underline{a}\hat{\sigma}\uparrow\rangle \otimes |\underline{b}\hat{\sigma}\downarrow\rangle$$

A kibocsátott részecskék szinglet állapotban van, ennek várható értéke:

$$\left\langle \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \right| M \left| \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\uparrow\downarrow|M|\uparrow\downarrow\rangle + \langle\downarrow\uparrow|M|\downarrow\uparrow\rangle - \langle\uparrow\downarrow|M|\downarrow\uparrow\rangle - \langle\downarrow\uparrow|M|\uparrow\downarrow\rangle\right) =$$

$$= \langle\uparrow|\underbrace{\underline{a}\underline{\sigma}}_{\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}}|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\underline{b}\underline{\sigma}|\downarrow\rangle + \dots \quad + \langle\uparrow|\underbrace{\underline{a}\underline{\sigma}}_{e^{-i\varphi_a}}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\underbrace{\underline{b}\underline{\sigma}}_{e^{i\varphi_b}}|\uparrow\rangle - \dots$$

$$\| \qquad 0$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{i(\varphi_b - \varphi_a)} + e^{-i(\varphi_b - \varphi_a)}\right] = -\cos(\varphi_b - \varphi_a) = -\underline{a}\underline{b}$$

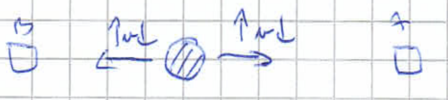
Behelyettesítve S-be akkor ha csak $45°$ van:

$$S = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}'\underline{b} - \underline{a}\underline{b}' + \underline{a}'\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2.$$

KVANTUM FEJEZETEK

8. előadás (03.26.)

EPR-paradoxon



A és B biztos egy mást mér, de akkor az információ több mint c-vel terjed.

Einstein sz. a mérés már a kezdetben megtörténik

Bell.: $A: \underline{a}, \underline{a}'$ $\quad B: \underline{b}, \underline{b}'$

$$S := S_{a,b} + S_{a',b} - S_{a,b'} + S_{a',b'} \qquad \text{ahol } S_{a,b} = \langle x_a^{(A)}, x_b^{(B)} \rangle$$

Einstein-féle megfogalmazás: $|S| < 2$

Oparatum játékvá: $|S| > 2$ (Bell-egyenlőtlenség)

$$\hat{M}_a = \underline{\sigma}\,\underline{a} = \begin{pmatrix} & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & \end{pmatrix}$$

$$S_{ab} = \langle \psi | \hat{M}_a^{(A)} \otimes \hat{M}_b^{(B)} | \psi \rangle \qquad \text{ahol } \psi = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{2}$$

és

$$\langle \alpha\beta | M_a \otimes M_b | \alpha'\beta' \rangle = \langle \alpha | M_a | \alpha' \rangle \langle \beta | M_b | \beta' \rangle$$

$\Rightarrow$ az offdiagonális elemek lesznek nem 0-k.

Kiszámolva: $S_{ab} = -\underline{a}\,\underline{b}$ ...

Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}', \underline{b}'$ 45°-onként vannak, akkor $S = -2\sqrt{2}$

Az egészben a szingulettség miatt kapunk mást.

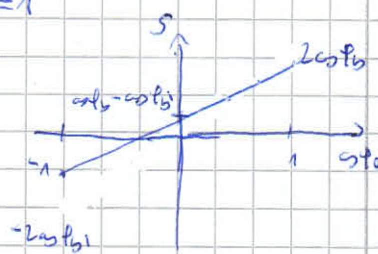
Ha $|\psi\rangle = |\uparrow_x \downarrow_x\rangle$ lenne kvantált x irányú –

$$\langle \psi | M_a \otimes M_b | \psi \rangle = \underbrace{\langle \uparrow_x | M_a | \uparrow_x \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\,1)\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi_a} \\ e^{i\varphi_a} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \underbrace{\langle \downarrow_x | M_b | \downarrow_x \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\,-1)\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi_b} \\ e^{i\varphi_b} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} = \cos\varphi_a \cos\varphi_b$$

Ekkor az eredmény $S = \cos\varphi_a \cos\varphi_b + \cos\varphi_{a'} \cos\varphi_b - \cos\varphi_a \cos\varphi_{b'} + \cos\varphi_{a'} \cos\varphi_{b'}$

lenne. Ha $\cos\varphi_b > \cos\varphi_{b'}$, akkor S max, ha $\cos\varphi_a = 1$

$$S_{max} = \cos\varphi_b - \cos\varphi_{b'} + \cos\varphi_{a'}(\cos\varphi_b + \cos\varphi_{b'})$$



Tehát a $S > 2$ azt jelenti, hogy számolásnál nincs meghatározva a spin. Se klasszikusan, se kvantumosan.

Ahhoz, hogy $S > 2$ legyen, az kell hogy hatékony legyen az elrendezés.

ha valahol kiszórva vesztünk az egyiket, az S leesik 2 alá ⇒ fotonokkal célszerű mérni

Aspect (1982) már szignifikánsan 2 fölött mért.

még mindig vannak loophole-ok, amik megfertőzik a méréseket.

a fel-le irány: $|S-2| \geq 11{,}5\,\sigma$ (Annak valószínűsége, hogy QM nem igaz $P_{EPR} \sim 10^{-31}$)

Az A és B detektorok nem külön vannak, az az egész 1 rendszer

A QM-ben nincs térbeli lokalitás

„Filozofálgatás a mérésről”

Koppenhágai értelmezés:

$\hat{M} = \hat{M}^+$, $\hat{M}|m\rangle = m|m\rangle$

$|\psi\rangle = \sum_m |m\rangle\langle m|\psi\rangle$ $\hat{M}$-mel mérés után értéke m és ennek valószínűsége $|\langle m|\psi\rangle|^2 = P_m$

$|\psi\rangle \longrightarrow |m\rangle$ hullámfüggvény-redukció

„Isten [illegible] kockázik”

A vetítő operátor $P_m = |m\rangle\langle m|$ ⇒ megsérti az unitaritást
sérti a kauzalitást ↖ ez zavaró

Everett:

A világban ~~[illegible]~~ létezik lefelé és felfelé álló spin is

A mérés elválasztja egymástól a különböző eseteket ⇒ sokvilág elmélet

Ezt nem lehet ellenőrizni

Diósi - Penrose:

A QM valójában nem lineáris, emiatt van hullámfv-redukció

A Hilbert-tér bázisai nem ekvivalensek a léptékben

3. út ([illegible] tudatelmélettel foglalkozók):

A QM-mel az a baj, hogy a mérés nem része a rendszernek

Deus ex machina (Wigner sz. a mérést a „tudat” határozza meg, de ez elég elavult. Schrödinger: mi van a macskával?)

Jakóék: nemcsak az egész rendszert egyben kell kezelni ⇒ A mérés determinisztikus

Ahol a mérés determinisztikus, mi a helyzet az egész kvantumelmélettel

Az EPR azt mondja, hogy nincs lokális valóság (rejtett paraméter)

DE a gyakorlatban realizmust nem zárja ki: (egész rendszernek van rejtett paramétere)

Az egész mérési rendszer (A+B detektor) egy gyakorlati rendszer, és azután ugrik be egy sajátállapotba

Jelenleg viszonylag egyetértés van, de vannak elképzelések.

Jakó elképzelése:

tetszőleges hermitikus operátorral végzett mérést és utána klasszikusan olvassuk ki.

kellene létezni sokféle $\hat{E}$-nak, aszerint, hogy mely sajátállapotokban vannak.

Valójában szinte minden mérés során helyzetmérést végzünk.

A mérés során egy kis mintaszámú halmazt beágyazunk egy nagy mintaszámúba
spektrum és nem spektrum ... sérül.

⇒ A mérésben a Hilbert-térből átugrunk egy altérbe (ezt hívják a „vastagságnak")
és az altér a mi fizikai terünk
(a helyzetmérés eredménye)

„vastagság": a szuperpozíciók kioltódnak, de ott mégis..."
Ordó amennyire klasszikus a rendszer.

kellően nagy számú részből ki tudunk lépni: bele a kvantumvilágba.

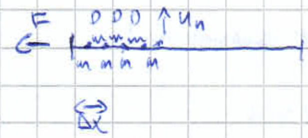
Az elektron egy pont, de nem a mi világunk, hanem a kvantumé.
Miután mérünk, utána is egy pont marad, de már a mi világunkban.
Minden Hilbert-térben mérés után tárolódik, mint a mérés, és a lebegés pillanatszerűen megjelenik.
„Példa: Teniszlabda és a labda.

Szerkesztve vagyok - a nagy hullám?
Az általános Hilbert-tér elemei hullámok. A mi alterünkben csak részecskék léteznek

KVANTUM-FEJEZETEK

7. előadás (04.02.)

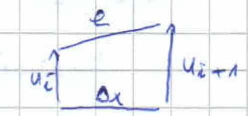
1D-s húr kvantálása



Δx_0: nyugalmi hossz

$\Delta x_0 = (1-\alpha)\Delta x$

$F = D(\Delta x - \Delta x_0) = \alpha D \Delta x$



$$L = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i \dot{u}_i^2 - \frac{1}{2} D \Delta e_i^2 - V(u_i)\right]$$

$$\Delta e_i = \left(\Delta x^2 + (u_{i+1}-u_i)^2\right)^{1/2} - \Delta x_0 = \Delta x \left(\sqrt{1+\frac{\Delta u^2}{\Delta x^2}} - 1 + \alpha\right) \approx \Delta x \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \alpha\right)$$

$$L = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i \dot{u}_i^2 - \frac{1}{2} D \Delta x^2 \left(\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\right)^2 - V(u)\right] = \Delta x \sum_i \left[\frac{1}{2}\underbrace{\rho_i}_{\frac{m_i}{\Delta x}} \dot{u}_i^2 - \frac{F}{2\alpha}\left(\underbrace{\alpha^2}_{\text{konstans (nem érdekel)}} + \alpha\left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x}\right)^2 + \dots\right) - \underbrace{v(u_i)}_{\frac{V(u_i)}{\Delta x}}\right] =$$

A Lagrange-sűrűség: $L = \int \mathcal{L}\, dx$. Jelen esetben tehát $\mathcal{L} = \frac{L_i}{\Delta x}$ folytonos limesszel

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2}F(\partial_x u)^2 - v(u) \quad + \text{ konstans}$$

EL egyenlet:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu u)}$$

$$-v'(u) = \rho\,\partial_t^2 u - F \partial_x^2 u$$

Ha $v=0 \Rightarrow u = u_0 e^{-i\omega t + ikx}$ ahol $\rho\omega^2 - Fk^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$

Skálázzuk át az egészet: $\phi := \sqrt{F}\, u$, $\tau := ct = \sqrt{\frac{F}{\rho}}\, t$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \sqrt{F}\sqrt{\frac{\rho}{F}}\, \partial_t u \Rightarrow (\partial_\tau \phi)^2 = \rho(\partial_t u)^2 \text{ és } (\partial_x \phi)^2 = F(\partial_x u)^2$$

$$L = \int \left[\frac{1}{2}(\partial_\tau \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - v(\phi)\right] dx \quad \Leftarrow \text{ ezt kvantáljuk}$$

Klasszikusan van $u_i \to p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = m \dot{u}_i$ mennyiségek.

QM-ben az állapotok $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ elemei jelennek meg és $u_i \to \hat{u}_i$ kitérés operátora, $p_i \to \hat{p}_i$ kitérés operátor

ahol $[u_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$

Most azonban át van skálázva, tehát nem ilyen egyszerű

$$\phi = \sqrt{F}\, u \Rightarrow \pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{F}}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{\sqrt{F}}\, p \Rightarrow \hat{\phi} = \sqrt{F}\,\hat{u} \text{ és } \hat{\pi} = \frac{1}{\sqrt{F}}\,\hat{p}$$

$\sqrt{F}$ kiesik, így $[\hat{\phi}_i, \hat{\pi}_j] = i\delta_{ij}$

Az átskálázás nem változtatja meg a dolgokat de a folyt. limeszt igen.

$\Delta x \to 0$ határesetben minden f_n függvény $f(x)$ folyt. fv. lesz.

$$\hat{\phi}(x) \to \hat{\Pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = \frac{1}{\Delta x}\, i\, \delta_{ij}$$ (Itt i, j indexek az $x = y$ relációt fejezik ki.)

Továbbá $\Delta x \sum_i \frac{i}{\Delta x}\delta_{ij} = i \Rightarrow \int i\,\delta(x-y)\,dx = i$

Tehát δ_{ij} limesze valóban a Dirac-δ.

$$\Rightarrow [\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = i\,\delta(x-y) \leftarrow$$ Ez a kvantálási feltétel.

A Hamilton operátor:

$$H = \sum_i p_i \dot{u}_i - L = \sum_i \left[\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} D\Delta e^2 + V(u)\right] \to \int \left(\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi)\right) dx$$

Legyen $V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2$ ekkor teljesen kvadratikus az alak

mozgásegyenlet: $\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi - M^2\phi = 0 \Rightarrow \phi = \phi_0 e^{-i(\omega t - kx)}$

$$\omega^2 = k^2 + M^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{k^2 + M^2}$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}$$

olyan mint relativisztikus részecske

A Hamilton-fv hasonlít a QM-beli harmonikus oszcillátorra

$$\hat{H}_{HO} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2\hat{q}^2}{2} \qquad \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a}) \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \Rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^+] = \mathbb{1}$$

$$H_{HO} = \omega\left(\hat{a}^+ a + \frac{1}{2}\right) \qquad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \text{ keressük}$$

Észrevesszük, hogy $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$-ra: $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \geq 0$

speciálisan: $\langle n|\hat{H}|n\rangle = E_n \geq 0$

Mivel azonban: $[a^+a, a] = -a \qquad H a|n\rangle = aH|n\rangle + [H, a]|n\rangle = (E_n - \omega)a|n\rangle$

azaz $a|n\rangle$ sajátvektor, $E_n - \omega$ sajátértékkel $\Rightarrow E_n$ lehetne negatív.

$\Rightarrow \exists E_0$ legkisebb energia, ami $H|0\rangle = E_0|0\rangle$ és $\hat{a}|0\rangle = \emptyset$

Ez alapján $\hat{H}|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle \Rightarrow E_0 = \frac{\omega}{2}$

$$H a^{+n}|0\rangle = (E_0 + n\omega)a^{+n}|0\rangle = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)a^{+n}|0\rangle \Rightarrow E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^{+n}|0\rangle$$

$$H = \int \left(\frac{1}{2}\hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 \right) dx$$

Fourier-ra:
$$\hat{\phi}(\tau, x) = \int \left(a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx} \right) \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{dk}{2\pi}$$
$$\hat{\Pi}(\tau, x) = \int \left(\hat{a}_k e^{ikx} - \hat{a}_k^+ e^{-ikx} \right) (-i) \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \frac{dk}{2\pi}$$

Fejezzük ki $\hat{a}_k$-kat:

A $\hat{a}^+_k$-k helyett a^+_{-k}-kat használjuk, hogy e^{ikx} kiemelhető legyen.

$$\hat{\phi}(\tau, x) = \int \left(\hat{a}_k + \hat{a}^+_{-k} \right) e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{dk}{2\pi}$$
$$\hat{\pi}(\tau, x) = \int \left(\hat{a}_k - \hat{a}^+_k \right) e^{ikx} (-i) \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \frac{dk}{\pi}$$

invertálva és kifejezve $\hat{a}$-kat:

$$\hat{a}_k = \int \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\hat{\phi}(\tau, x) + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}(\tau, x) \right) e^{-ikx} dx$$
$$\hat{a}^+_{-k} = \int \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\hat{\phi}(\tau, x) - \frac{i}{\omega_k} \hat{\pi}(\tau, x) \right) e^{ikx} dx$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}^+_q] = \int\int \sqrt{\frac{\omega_k \omega_q}{4}} \underbrace{\left[\phi(\tau, x) + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}(\tau, x), \hat{\phi}(\tau, y) - \frac{i}{\omega_q} \hat{\Pi}(\tau, x) \right]}_{\frac{1}{\omega_q}\delta(x-y) + \frac{1}{\omega_k}\delta(x-y)} e^{-ikx} e^{iqy} dy\, dx$$
$$= \sqrt{\frac{\omega_k \omega_q}{4}} \int \left(\frac{1}{\omega_k} + \frac{1}{\omega_q} \right) e^{-i(k-q)x} dx = 2\pi \delta(x-y)$$

A H új alakja:

$$\hat{H} = \int \Bigg[\frac{1}{2} \int (-1) \frac{\sqrt{\omega_k \omega_q}}{2} \left(\hat{a}_k e^{ikx} - a^+_k e^{-ikx} \right) \left(\hat{a}_q e^{iqx} - \hat{a}^+_q e^{-iqx} \right) \frac{dk}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int \frac{(-kq)}{2\sqrt{\omega_k \omega_q}} \left(a_k e^{ikx} - a^+_k e^{-ikx} \right) \left(\quad \text{''} \quad \right) +$$
$$+ \frac{M^2}{2} \int \frac{1}{2\sqrt{\omega_k \omega_q}} \left(a_k e^{ikx} + a^+_k e^{-ikx} \right) \left(\text{''} \quad + \quad \text{''} \right) \Bigg] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \hat{a}_k \hat{a}_q \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{\omega_k \omega_q}}{2} e^{i(k+q)x} - \frac{kq}{2\sqrt{\omega_k \omega_q}} e^{i(k+q)x} + \frac{M^2}{2\sqrt{\omega_k \omega_q}} e^{i(k+q)x} \right)}_{\frac{1}{2} 2\pi \delta(k+q) \left(-\omega_k + \frac{k^2 + M^2}{\omega_k} \right) \xrightarrow{\text{ha } \omega_k = \sqrt{k^2 + M^2}} 0} \frac{dk}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} dx + \dots$$

$$= \dots + \frac{1}{2} \int \hat{a}_k \hat{a}^+_q \left(\frac{\sqrt{\omega_k \omega_q}}{2} e^{i(k-q)x} + \frac{kq}{2\sqrt{\omega_k \omega_q}} e^{i(k-q)x} + \frac{M^2}{2\sqrt{\omega_k \omega_q}} e^{i(k-q)x} \right) dx \frac{dk}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} + \dots =$$
$$2\pi \delta(k-q) \left(\frac{\omega_k}{2} + \frac{k^2 + M^2}{2\omega_k} \right) = \omega_k 2\pi \delta(k-q)$$

= Mivel H hermitikus, ezért a tagok két fajta, ezeket kiírtam. =

$$= \int \frac{\omega_k}{2} \left(\hat{a}_k \hat{a}^+_k + \hat{a}^+_k \hat{a}_k \right) \frac{dk}{2\pi} = \int \omega_k \hat{a}^+_k \hat{a}_k \frac{dk}{2\pi} + \underbrace{\int \frac{\omega_k}{2} 2\pi \delta(k=0) \frac{dk}{2\pi}}$$

a diszkrét esetben $\sum_n \frac{\omega_n}{2}$ lenne, vagyis ez a nullponti energiák összege. Klasszikusan ez nincs, végtelen tekintjük

KVANTUM-FEJEZETEK

8. előadás (04.09.)

Az 1 dim-s húr nagyjából nézzük kvantum.

Bevezettük $\hat\phi, \hat\Pi$ mezőket, amik: $\left[\hat\phi(t,\underline{x}), \hat\Pi(t,\underline{y})\right] = i\,\delta(\underline{x}-\underline{y})$

A harm. osz. mintájára keltő és eltüntető operátorral:

$$\phi(t,x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx}\right) \frac{dk}{2\pi}$$

$$\Pi(t,x) = \int -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\hat a_k e^{ikx} - \hat a_k^+ e^{-ikx}\right) \frac{dk}{2\pi}$$

Ezekkel:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 \quad . \quad \text{ahol} \quad H = \int \mathcal{H}\, dx$$

$$\hat H = \int \omega_k \hat a_k^+ \hat a_k \frac{dk}{2\pi} + \text{konst}$$

(a konst H deriválásakor kiesik)

a konst eltüntetésére lehet normálrendezésre is.

normál rendezés:

$$:\hat a \hat a^+: = \hat a^+ \hat a$$

$$:\hat a^+ \hat a: = \hat a^+ \hat a$$

$$:\hat a^{m} \hat a^{+m_1} \hat a^{n_i} \cdots \hat a^{m_i}: = \hat a^{+m} \hat a^{n} \quad \text{ahol} \quad m = \sum_i m_i, \quad n = \sum_i n_i$$

az új $\hat H$ az eredeti normál rendezése. (Ez egy régi fajta [illegible])

Ha $\hat H = \omega \hat a^+ \hat a$

létezik vákuum: $|0\rangle$ ami $\hat a|0\rangle = 0$

és $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat a^{+n} |0\rangle \longrightarrow \hat H|n\rangle = \omega n |n\rangle$

A fenti $\hat H$ sok, független harmonikus oszcillátor összege.

$\Rightarrow$ A húr spektruma:

$\exists$ alapállapot (térelméleti vákuum) $\hat a_k |0\rangle = 0 \quad \forall k \Rightarrow \hat H|0\rangle = 0$, $E_0 = 0$

a többi állapot előállítása a megfelelő $\hat a_k^+$ adott számú alkalmazásával

$$|k_1 n_1, k_2 n_2 \cdots k_a n_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots n_a!}} \left(\hat a_{k_1}^+\right)^{n_1} \left(\hat a_{k_2}^+\right)^{n_2} \cdots \left(\hat a_{k_a}^+\right)^{n_a} |0\rangle$$

Mi a sajátértéke: $\hat H |k_1 n_1, \dots k_a n_a\rangle = \int \omega_k \hat a_k^+ \hat a_k \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \hat a_{k_1}^{+n_1} |k_2 n_2 \cdots k_a n_a\rangle \frac{dk}{2\pi}$

$$= \int \frac{\omega_k}{\sqrt{n_1!}} \left[2\pi\delta(k-k_1) \hat a_{k_1}^{+n_1-1} n_1 + \hat a_{k_1}^{+n_1} \hat a_k^{+} a_k\right] |k_2 n_2 \cdots k_a n_a\rangle = \omega_{k_1} n_1 |k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle + \frac{\hat a_{k_1}^{+n_1}}{\sqrt{n_1!}} \hat H |k_2 n_2 \cdots k_a n_a\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \omega_{k_i} n_i |k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle + \frac{a_{k_1}^{+n_1}}{\sqrt{n_1!}} \cdots \frac{a_{k_a}^{+n_a}}{\sqrt{n_a!}} \underbrace{\hat H |0\rangle}_{0} \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{a} \omega_{k_i} n_i$$

kihasználva, hogy $[\hat{a}_k, \hat{a}_q] = \phi$

$$[\hat{a}^+_k, \hat{a}^+_q] = \phi$$

$$[\hat{a}^+_k, \hat{a}_q] = 2\pi\delta(k-q)$$

$$[\hat{a}^+_k \hat{a}_k, \hat{a}^n_q] = \text{előzőekből felhasználva} = -2\pi\,\delta(k-q)\, n\, \hat{a}^n_q$$

$$[\hat{a}^+_k \hat{a}_k, \hat{a}^{+n}_q] = 2\pi\,\delta(k-q)\, n\, \hat{a}^n_q$$

Ezek kellenek hozzá, amit elfelejtette ☺

Tehát $E = \sum_{i=1}^{a} \omega_{k_i} n_i$ és $\omega_k^2 = k^2 + M^2$

mindegy k-k sorrendje, mert $|k_1 n_1\, k_2 n_2 \cdots k_a n_a\rangle$ és $|k_2 n_2\, k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle$

miel $a^{+n_1}_{k_1} a^{+n_2}_{k_2} = a^{+n_2}_{k_2} a^{+n_1}_{k_1}$ ezért a két állapot u.a.

Tehát a kvázi független "részecskék" függetlenek és megkülönböztethetetlenek.

$\Rightarrow$ jó matematikai leírása lehet az ismert részecskéknek.

mádiosal...ata dsz... valjon van.

Általában is ezt szeretnénk, ha a fizikai részecskék leírására térelméletet használnánk

1 részecske állapot adott hullámszámmal: $|k\rangle = \hat{a}^+_k |0\rangle$

$\rightsquigarrow \hat{H}|k\rangle = \omega_k |k\rangle$

de általában a részecskék NEM energia-sajátállapotok

Próbáljuk meg a részecskék számát meghatározni!

$k_i \to n_i$ Tartozik, tehát a részecske számláló operátor:

$\hat{N}_k = \hat{a}^+_k \hat{a}_k$ mert:

$$\hat{N}_k |k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle = n_i\, 2\pi\,\delta(k_i - k)\, |k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle$$

Az összrészecskeszám: $\hat{N} = \int \hat{N}_k \frac{dk}{2\pi}$

$$\hat{N}|k_1 n_1 \ldots k_a n_a\rangle = \sum_i n_i 2\pi\,\delta(k_i - k)\, |k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle$$

Az egész Hilbert-tér a megszámlálhatatlan részecske van, ezért ez nem bázis, de napolódnak. Gradálás:

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_0$ $N|\psi\rangle = 0 \to \mathcal{H}_0 = \{|0\rangle\}$; $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $N|\psi\rangle = |\psi\rangle \to \mathcal{H}_1 = \{|k\rangle\}$

$\to |\psi\rangle \in \mathcal{H}_n$: $N|\psi\rangle = n|\psi\rangle$

A teljes Hilbert-tér az összes n-részecskeállapot direkt-összege:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \cdots \quad \Leftarrow \text{Fock-tér konstrukció.}$$

Mi a fizikai impulzus?

Ehhez elég visszaemlékeznünk, hogy generátor $\equiv$ megmaradó mennyiség

Milyen operátor valósítja meg ϕ-n a téreltolást?

$$\phi(x) \to \phi(x+\Delta x) = \phi(x) + \Delta x\, \partial\phi(x) + \cdots \Rightarrow \delta\phi = \Delta x\, \partial\phi(x)$$

ez nem lehet lineáris

Azt reméljük, hogy $\delta\phi$-t mi generálja:

$$\delta\hat{\phi} = i[\hat{P}, \hat{\phi}(x)]\,\Delta x \stackrel{!}{=} \Delta x\, \partial\hat{\phi}(x)$$

megsejtjük, hogy $\quad \hat{P} = \int \hat{\Pi}(y)\, \partial\phi(y)\, dy$

itt kihasználtuk, hogy $[\partial\phi, \phi] = 0$.

bizonyítás:

$$i[\hat{P}, \phi(x)] = i\int [\hat{\Pi}(y)\partial\phi(y), \phi(x)]\, dy = i\int [\hat{\Pi}(y), \phi(x)]\,\partial\phi(y)\, dy =$$

$$= i\int (-i)\delta(x-y)\,\partial\phi(y)\, dy = \partial\phi(x) \qquad \square$$

klasszikus bizonyítás:

megnéznénk az energia-impulzus tenzort, ebből a megmaradó mennyiséget ugyanazt kapnánk

Könnyen mutatható: $\quad \hat{P} = \int k\, \hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k \frac{dk}{2\pi} = \int k\, \hat{N}_k \frac{dk}{2\pi}$

ebből: $\quad \hat{P}\,|k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle = \sum_{i=1}^{a} k_i n_i\, |k_1 n_1 \cdots k_a n_a\rangle$

Mi a klasszikus erő kvantum megfelelője?

 klasszikus forrás (villanykörte) milyen állapotot hoz eredményül?

mín esetén kitérés volt.

az erő: $L + \sum_i f_i q_i$

tehát: $L = \int \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{M^2}{2} \phi^2 + J\phi \right] dx$

külső árammal gerjesztett ϕ.

klasszikus mozgás egyenlet: $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Rightarrow \underline{(\partial^2 + M^2)\phi = J}$

ezt kéne megkvantálni.

2 fajta kvantálás létezik. Mat. ekvi, de fizikailag nagy eltérés.

① kezeljük be

$\phi(x) := \phi_0(x) + \varphi(x)$ beírva $\mathcal{L}$-be:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)(\partial^\mu \phi_0) - \frac{M^2}{2}\phi_0^2 + J\phi_0 -$

$- \varphi\left((\partial^2 + M^2)\phi_0\right)$ ← itt addig variáltam, amíg jó nem lett

$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{M^2}{2}\varphi^2 + J\varphi$

válasszuk meg ϕ_0 úgy, hogy a klasszikus m.e.-t teljesítse: $(\partial^2 + M^2)\phi_0 \stackrel{!}{=} J$

$\Rightarrow$ φ-ben lineáris tagok kiesnek és J is eltűnik

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_0) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{M^2}{2}\varphi^2.$

kvantálás: $\hat{\varphi}$ bevezetjük és ugyanaz lesz a m.e. mint eddig. $\hat{a}_k$ helyett $\hat{b}_k$

②

brute force kvantálás: $\phi \to \hat{\phi}$

$$\int J(x)\hat{\phi}(x)\,dx = \int J(x) \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{a}_k^+ e^{-ikx}\right) \frac{dk}{2\pi}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}_k J_k^* + \hat{a}_k^+ J_k\right) \frac{dk}{2\pi}$$

Ezért a Hamilton: $\hat{H} = \int \left(\omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k - \frac{J_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_k - \frac{J_k}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_k^+\right) \frac{dk}{2\pi} =$ $\quad \bar{a}_k = a_k - \underbrace{\frac{J_k}{\sqrt{2\omega_k}}}_{\eta_k}$

$$= \int \left(\omega_k \hat{\bar{a}}_k^+ \hat{\bar{a}}_k + |\eta_k|^2\right) \frac{dk}{2\pi}$$

itt tehát $\bar{a}_k$ felel meg b_k-nak.

Két vákuum van: $|0\rangle_{①}$: a klasszikushoz képesti vákuum

$|0\rangle_{②}$: klasszikus vákuum, amikor nincs kitérés. kérdés: hogy fejezünk ki egyiket a másikkal?

KVANTUM IV.

9. előadás (04. 16.)

múlt óráról:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\mu^2}{2}\phi^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi^2}{2} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2$$

$$[\hat{\phi}(t,\underline{x}), \hat{\Pi}(t,\underline{y})] = i\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

$$[\hat{\phi}(t,\underline{x}), \hat{\phi}(t,\underline{y})] = [\hat{\Pi}(t,\underline{x}), \hat{\Pi}(t,\underline{y})] = 0$$

$$\hat{\phi}(t,\underline{x}) = \int \left(\hat{a}_{\underline{k}}(t)e^{+i\underline{k}\underline{x}} + \hat{a}^+_{\underline{k}}(t)e^{-i\underline{k}\underline{x}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}$$

$$\hat{\Pi}(t,\underline{x}) = \int (-i)\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\left(\hat{a}_{\underline{k}}(t)e^{i\underline{k}\underline{x}} - \hat{a}^+_{\underline{k}}(t)e^{-i\underline{k}\underline{x}}\right)\frac{d^dk}{(2\pi)^d}$$

$$[\hat{a}_{\underline{k}}(t), \hat{a}^+_{\underline{q}}(t)] = (2\pi)^d\delta(\underline{k}-\underline{q})$$

$$[\hat{a}_{\underline{k}}(t), \hat{a}_{\underline{q}}(t)] = [\hat{a}^+_{\underline{k}}(t), \hat{a}^+_{\underline{q}}(t)] = 0$$

$$\hat{H} = \int \omega_k \hat{a}^+_k \hat{a}_k \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \quad \Rightarrow \quad \omega_k^2 = \underline{k}^2 + \mu^2$$

Hilbert-tér a Fock-tér konstrukcióval:

$$\hat{N} = \int \hat{a}^+_k \hat{a}_k \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \quad \text{és} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \dots = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n$$

ahol $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_n \Rightarrow \hat{N}|\psi\rangle = n|\psi\rangle$

ilyenkor $|\psi\rangle = |\underline{k}_1 n_1\, \underline{k}_2 n_2 \cdots \underline{k}_a n_a\rangle \Rightarrow n = \sum_a n_a$

és ez részecskeszám n. á., G n. á. stb…

Olyan mintha n_1 db $\underline{k}_1$ részecske lenne, n_2 db $\underline{k}_2$ részecske … n_a db $\underline{k}_a$ részecske.

Összességében relativisztikus n-részecske állapot.

A felcserélés miatt

$$|\dots \underset{i.}{q} \dots \underset{j.}{k} \dots\rangle = |\dots \underset{i.}{k} \dots \underset{j.}{q} \dots\rangle$$

és $|\underline{k}, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^{+n}_k|0\rangle$

Eddig a múlt óra volt.

Gerjesztett húr

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{M^2}{2}\phi^2 + J\phi$$

két féle módon operátorosíthatunk:

- $\hat\phi = \hat\phi_0 + \hat\varphi$ ahol $(\partial^2 + M^2)\phi_0 = J$

  Ekkor $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_0) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\hat\varphi)(\partial^\mu\hat\varphi) - \frac{M^2}{2}\hat\varphi^2$

  Ekkor a φ-vákuum: $\overline{|0\rangle} \rightsquigarrow \hat\varphi \to \hat b\,\hat b^+$ $\quad \hat b\overline{|0\rangle} = \phi$ és $\hat H = \hat H_0 + \int \omega_k \hat b_k^+ \hat b_k \frac{d^dk}{(2\pi)^d}$

- Eredeti ϕ-vel képezzük a [illegible]:

  $$\hat\phi \to \hat a\,\hat a^+ \Rightarrow \hat H = \int \left(\omega_k \hat a_k^+ \hat a_k - \omega_k \eta_k^* \hat a_k - \omega_k \eta_k \hat a_k^+\right) \frac{d^dk}{(2\pi)^d}$$

  ahol $\eta_k = \frac{J_k}{\sqrt{2\omega_k^3}}$ és $\hat a|0\rangle = \phi$

a két kvantálás közötti kapcsolat:

$$\hat b_k = \hat a_k - \eta_k$$

és a vákuumok:

$$\hat b_k\overline{|0\rangle} = \phi$$

$$\hat a_k\overline{|0\rangle} = \eta_k\overline{|0\rangle} \neq \phi \quad \text{koherens állapotok}$$

Az „új vákuum" nem üres, hanem sok részecske gerjesztést tartalmaz.

Mik a k. á-k:

$$\hat a|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle \qquad \text{ahol} \quad |\eta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$

Állítás: $|\eta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$

Biz: $\hat a|\eta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}\underbrace{\hat a|n\rangle}_{\sqrt{n}|n-1\rangle} = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle =$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}\eta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \eta|\eta\rangle \qquad \square$$

Továbbá, normált is:

$$\langle\eta|\eta\rangle = e^{-|\eta|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\eta^{*m}}{\sqrt{m!}}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}\underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}} = e^{-|\eta|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\eta|^{2n}}{n!} = e^{-|\eta|^2}e^{|\eta|^2} = 1 \quad ✓$$

Tehát $|\eta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat a^{+n}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}e^{\eta\hat a^+}|0\rangle$

Milyen fizikai állapotban van a koherens állapot?

Hány részecske van benne:

$$|c_n|^2 = e^{-|\eta|^2}\frac{|\eta|^{2n}}{n!}$$ Ez egy Poisson-eloszlás.

De! Attól függ, hogy definiálja a „részecskét"

Ha a vákuum fölött, akkor Poisson.

Ha a klasszikus háttér fölött, akkor 0.

Tanulság: kvantumban lehet hülye interpretációkra, ezért az egyetlen értelmes kérdés: „Mit mérsz, és hogyan?"

Pontrészecske

Ez is egy kevésbé definiált dolog.

~~Am~~ Amit akarunk: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ (egy darab legyen)

$|x\rangle = \hat\phi(x)|0\rangle$ (egyen helye)

Ezzel tudjuk értelmezni a hullámfv-t:

$|k\rangle$ állapot Hf-e:

$$\langle x|k\rangle = \langle 0|\hat\phi(x)|k\rangle = \int\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\langle 0|\left(\hat a_p e^{ipx} + \hat a_p^\dagger e^{-ipx}\right)|k\rangle\frac{d^dp}{(2\pi)^d} =$$

$$= \frac{N_k}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ikx}$$ itt az $N e^{ikx}$ miatt nem normálható, de általában $N_k = \sqrt{2\omega_k}$ a szokásos.

Időfüggés:

Sch-kép: $|k_1 n_1 \dots k_a n_a, t\rangle = e^{iEt}|k_1 n_1 \dots k_a n_a, t\rangle$ ha $|k_1 n_1 \dots k_a n_a\rangle$ G-sajátáll

H-kép: $\dot{\hat a}_k = i[\hat H, \hat a_k] = -i\omega_k \hat a_k \Rightarrow \hat a_k(t) = e^{-i\omega_k t}\hat a_k$

Nézzük az időfejlesztő operátor mátrixelemeit:

$$\langle x|e^{-iHt}|y\rangle = \langle 0|\phi(x)e^{-iHt}\phi(y)|0\rangle = \langle 0|\hat\phi(t,x)\phi(y)|0\rangle$$

$e^{iHt}e^{-iHt}$ és $\langle 0|e^{iHt} = \langle 0|$

Ha eltolás invariáns is van: $= \langle 0|\hat\phi(t, x-y)\hat\phi(0)|0\rangle = i\Delta(t, x-y)$

ahol $i\Delta$ a vákuum várható értéke:

$$i\Delta(t,x) = \langle 0|\int\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(\hat a_k e^{-ikx} + \underbrace{\hat a_k^\dagger e^{ikx}}_{\text{kiesik}}\right)\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int\frac{1}{\sqrt{2\omega_q}}\left(a_q^\dagger + \underbrace{a_q}_{\text{kiesik}}\right)\frac{d^dq}{(2\pi)^d}|0\rangle =$$

$a_k a_q^\dagger$ marad: $= \underbrace{[a_k, a_q^\dagger]}_{(2\pi)^d\delta(k-q)} + a_q^\dagger a_k$ ez is kiesik

$$= \int e^{-ikx}\frac{1}{2\omega_k}\frac{d^dk}{(2\pi)^d} \Rightarrow i\Delta(t,k) = \frac{e^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} \Rightarrow i\Delta(k_0,k) = \frac{2\pi}{2\omega_k}\delta(k_0-\omega_k)$$

visszaértünk a félév elejére ☺

Mivel

$$|E,p,t\rangle = e^{-iEt} e^{-iE_p t} |E,p,\emptyset\rangle = e^{-iE_p t} \hat{a}^+_p |E,t\rangle$$

az értelmezésé úgy, hogy:

$$|E,t\rangle = e^{iE_p t} \hat{a}_p |E,p,t\rangle$$

Tehát $e^{-iE_p t}$ a részecske időfüggése, míg $e^{iE_p t}$ mintha a részecske hiány időfüggése lenne

interpretációk:

- A részecskehiány negatív energiás állapot.
- A részecskehiány időben visszafelé haladó állapot

Legyen $\overline{|p\rangle}$ a részecskehiány állapota!

akkor $|p,t\rangle \rightsquigarrow \langle p,t|$ -t kapunk a visszafelé idő miatt

ezt $\overline{|p\rangle} \equiv \langle p|$

Különféle operátort lehet bevezetni:

- időtükrözés operátor: $t \to -t$, $p \to -p$ $\quad T|p\rangle \sim \langle -p|$

ez egy antilineáris operátor

- tértükrözés: $x \to -x$, $p \to -p$ $\quad P|p\rangle \sim |-p\rangle$

- töltéstükrözés: $C|p\rangle \to \overline{|p\rangle}$

mivel tükrözések $T^2 = P^2 = C^2 = \mathbb{1}$

Ezek szerint

$$\langle p| \sim T|-p\rangle \sim TP|p\rangle \sim TPC\overline{|p\rangle}$$

Mivel feltételezés $\langle p| \sim \overline{|p\rangle}$, ezért nyilván, hogy $\underline{TCP \sim \mathbb{1}}$

„A három tükrözés hatása az egység" TCP-tétel

Ha a hiányt is propagáló entitásként akarjuk leírni, akkor ki kell terjeszteni a spektrumot negatív energiákra is.

valamint:

$$\rho(t,k) = i\Delta(t,k) - i\Delta^*(t,k) = \frac{e^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} - \frac{e^{i\omega_k t}}{2\omega_k} = -i\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}$$

spektrálfv.

továbbá:

$$\rho(t, x-y) = \langle x|e^{-iHt}|y\rangle - \langle y|e^{iHt}|x\rangle = \langle 0|\left(\phi(t,x)\,\phi(y) - \phi(y)\,\phi(t,x)\right)|0\rangle =$$

$$= \langle 0|\,[\hat{\phi}(t,x), \phi(0,y)]\,|0\rangle \qquad \text{erre hajtottam}$$

Spektrál propagátor.

Feynman vezetett valamit:

$$\Theta(t)\langle x,t|y\rangle + \Theta(-t)\langle y|x,t\rangle = \langle 0|\underbrace{\left(\Theta(t)\hat{\phi}(x,t)\phi(y) + \Theta(-t)\hat{\phi}(y)\phi(t,x)\right)}_{T\,\hat{\phi}(t,x)\phi(y) \quad \text{idő rendezés}}|0\rangle$$

Az egész kiintegrálás tárgyalását, ezt le lehet tudni egy rövidséggel:

Tudjuk, hogy

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{M^2}{2}\phi^2$$

A mozgásegyenletek: $\dot{\Pi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = +\Delta\phi - M^2\phi \qquad = \{H,\Pi\}$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Pi} = \Pi \qquad = \{H,\phi\}$$

Mivel $\{\}$ és $[\,]$ matematikailag u.a. ezért kvantum mintán a mozgásegyenletek u.a. lesznek mint klasszikusan.

pl.: $(\partial^2 + M^2)\hat{\phi} = 0$

$$\rho(t,x) = \langle 0|[\hat{\phi}(t,x), \phi(0)]|0\rangle \Rightarrow (\partial^2 + M^2)\rho = 0$$

$$\rho(t=0,\underline{x}) = 0, \quad \dot{\rho}(t=0,\underline{x}) = \langle 0|[\Pi(0,x), \hat{\phi}(0)]|0\rangle = -i\delta(0)$$

Tehát ezek kijöttek mindenféle léptető konstans nélkül is.

és a mozgásegyenlet:

$$(\partial_t^2 + \omega_k^2)\rho(t,k) = 0 \qquad \text{megoldás} \quad \rho(t,k) = i\,\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}$$

KVANTUM-FEJEZETEK

10. előadás (04.30.)

Olyan Hamiltont szerettünk látni, hogy $H=\int a^\dagger_{k\alpha}\,\omega_{k\alpha\beta}\,a_{k\beta}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$

és az állapotok $|0\rangle$ képeztük:

$$|\ldots n_i k_i \alpha_i \ldots\rangle = \ldots \frac{1}{\sqrt{n_i!}}\left(a^\dagger_{k_i}\right)^{n_i}_{\alpha_i} \ldots |0\rangle$$

A kommutátor:

$[a_k^\dagger, a_q^\dagger]=0 \Rightarrow |k,q\rangle = |q,k\rangle$ de ezt csak a bozonok tudják.

A fermionokra akarjuk, hogy

$|k\alpha, q_\beta\rangle = -|q_\beta\, k\alpha\rangle$ ehhez az kell, hogy $a^\dagger_{k\alpha}\, a^\dagger_{q\beta}|0\rangle = -a^\dagger_{q\beta}\, a^\dagger_{k\alpha}|0\rangle$

$$\Rightarrow \{a^\dagger_{k\alpha}, a^\dagger_{q\beta}\} = 0$$

Hogyan lehetséges ez? QM-ben ilyen nem volt!

A fizikai impulzust felírva:

$P_i = \int \Pi_\alpha(x)\,\partial_i\,\psi_\alpha(x)\,d^3x$ (A bozonokra így van, és most csak alapvetően írjuk, akkor így van.)

def szerint ez a térbeli eltolást generálja:

$\delta\psi_\beta(x) = \partial_i\psi_\beta(x)dx \doteq i[P_i, \psi_\beta(x)]\,dx$ (QM-ben ebből jött ki Heisenberg)

felírva ezt: $i\int[\Pi_\alpha(y)\,\partial_i\psi_\alpha(y), \psi_\beta(x)]\,d^3y\cdot dx$

Azonosság: $[AB,C] = ABC - CAB = A(BC - kCB) + (kAC - CA)B$

$k=1$ esetén ez: $A[B,C]+[A,C]B$ az ismert, itt $\Pi\underbrace{[\partial_i\psi(y),\psi(x)]}_{\doteq 0}+\underbrace{[\Pi(y),\psi(x)]}_{\doteq i\delta(x-y)}\partial_i\psi(y)$

de $k=-1$-re: $A\{B,C\}-\{A,C\}B$ ez is igaz!

felírva ezt: $\Pi\underbrace{\{\partial_i\psi(y),\psi(x)\}}_{\doteq 0}-\underbrace{\{\Pi(y),\psi(x)\}}_{\doteq i\delta(x-y)}\partial_i\psi(y)$

Tehát létezik olyan kvantálás, amiben az antikommutátor ismert.

De hogy döntsük el egy adott térelmélet esetén?

<u>Spin-statisztikai tétel</u>: $\dot{1}\;\dot{2} \to \dot{2}\;\dot{1}$ itt van egy ± 1 szorzó

A csere leírható egy félkörös forgatás általi összevetéssel.

Nézzük most meg az elektronok átforgatását:

Alapállapot: $|\uparrow\rangle \psi_S(x-x_0, y, z)$

A teljes Hf: $|\psi_{12}\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \psi_S(x_1-x_0, y_1, z_1)\, \psi_S(x_2+x_0, y_2, z_2)$

A $180°$-os forgatással: $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$

úgy van a spinnel: $\hat{O} = e^{-\frac{i}{2}\sigma_a \omega_a}$ jelenleg $\omega = (0,0,\pi) \Rightarrow \hat{O} = e^{-\frac{i}{2}\pi\sigma_3} =$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\pi} & \\ & e^{\frac{i}{2}\pi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}$$

$$\hat{O}|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i|\uparrow\rangle$$

Az új Hf:

$$|\psi_{12}'\rangle = |\psi_{21}\rangle = (-i)^2 |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \psi_S(-x_1-x_0, -y_1, -z)\psi_S(-x_2+x_0, -y_2, z_2) =$$

mivel ψ_S gömbszimmetrikus, ezért

$$= -|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \psi_S(x_1+x_0, y_1, z_1)\psi_S(x_2-x_0, y_2, z_2) = -|\psi_{21}\rangle$$

A csere hatására -1-gyel szorzódik.

Állítás: s spinű részecske esetén a faktor $(-1)^{2s}$

$\Rightarrow$ A feles spinű részecskék fermionok, az egész spinűek bozonok. (3D-ben)

Mi van 1D-ben? itt nincs tér, ahol forgassunk $\Rightarrow$ át kell menni őket egymáson

$\Rightarrow$ szórással kell számolni: unitér folyamat.

ha a szórás mátrix $\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & e^{i\varphi_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A kicserélés során valamilyen fázist felvehet.

$\left[|x_1, x_2\rangle = e^{i\varphi} |x_2, x_1\rangle \quad \text{„anyon”} \right]$

Ha a világ Lorentz-inv., akkor $|\psi\rangle \to U(\underline{\underline{\Lambda}})|\psi\rangle$

milyen struktúrájú $U(\underline{\underline{\Lambda}})$?

tetszőleges alapú állapot, amik egymásba transzformálódnak: $|\psi'\rangle_\alpha = U_{\alpha\beta}(\underline{\underline{\Lambda}})|\psi\rangle_\beta$ $\forall \underline{\underline{\Lambda}}$-ra.

Érdemes a legkisebbeket megkeresni: irreducibilis ábrázolásokat.

Minden Lorentz-inv. operátor (azaz amit $[\hat{O}, U(\Lambda)] = 0$) ugyanolyan blokkdiagonált, mint $U(\underline{\underline{\Lambda}})$, de az 1l-ekkel, ill. a sok. értékkel más

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} \boxed{a1} & & \\ & \boxed{b1l} & \\ & & \boxed{c1l} \end{pmatrix}$$

Állítás: A Lorentz csoport $SL(2,\mathbb{C}) \cong SU(2) \otimes SU(2)$

$\Rightarrow$ Az ábrázolás 2 db feles spinű csoport ábrázolása

A lehetséges ábrázolások: $(0,0)$: skalár (ϕ)

$SU(2)\times SU(2)$ $\quad (\frac{1}{2},0)$: spinorok vagy $(0,\frac{1}{2})$

$\hat{P}$ tértükrözéssel cserélhetjük ki

$(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)$: bispinor (ahol van tértükrözés pl.: elektron) (ψ)

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$: vektorok (pl.: A_μ [illegible]) (A)

Általában a bispinor az „anyag" a vektorok pedig a „közvetítő részecskék"

Mi a hatás?

$S[\phi]$, $S[\psi]$, $S[A]$ az egyetlen megkötés, hogy legyenek Lorentz-invariánsak

egyszerűsítés: csak kvadratikus alakot keresünk

ϕ: $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)-\frac{m^2}{2}\phi^2$ csak ezek a tagok lehetnek (plusz tényezők ϕ átskálázásával)

ψ: itt az adjungált: $\bar{\psi}=\psi^+\gamma_0$ ahol $\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad \gamma_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}$ Dirac-repr.

$\gamma_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \gamma_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}$ Weyl-repr.

$\mathcal{L}=\bar{\psi}i\partial_\mu\gamma^\mu\psi-m\bar{\psi}\psi$ itt is csak ez a két tag lehet.

A:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu-\frac{\alpha}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu-\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$$

Bevezetve $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu$$

épp ezt α [illegible] kapjuk 1-nek választva.

Fourier-térben:

$$S[A]=\int(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu-\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu)d^4x=\iiint\Big[\left(\partial_\mu e^{-ikx}A_\nu(k)\right)\left(\partial^\mu e^{-iqx}A^\nu(q)\right)-\left(\partial^\mu e^{-ikx}A_\mu(k)\right)\left(\partial^\nu e^{-iqx}A_\nu(q)\right)\Big]\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}d^4x$$

$$=\int\left(A_\nu(k)(-k^2)A^\nu(-k)-A_\mu(k)k^\mu k^\nu A_\nu(-k)\right)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}=A_\mu^*(k)\left(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu\right)A_\nu(k)$$

ez a skalárok $\phi^*(k)(k^2-m^2)\phi(k)$ analogiája.

De ebből a tagból nem lehet propagátort csinálni $\Rightarrow$ megsérti a mérték inv.-t

$\Rightarrow$ kézzel beteszünk egy mértékrögzítést.

Feltételes mértékrögzítés:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \leftarrow \text{Lorentz-mérték}$$

bizonyos esetben (pl.: eldiv) be lehet írni a Lagrange-ba.

$\Rightarrow$ Sok azt kérni. Ami marad:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_0 \partial^\mu A_0 + \frac{1}{2}\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i$$

következmény: · tömegtelen skalár

· A_0-nál rossz az előjel

Tehát 2-féle tér létezni: · Dirac-féle spinor tér $\rightarrow$ fermionok

· skalártér $\rightarrow$ bozonok

Milyen részecskét kapunk? Ehhez fel kell írni a Hamiltont:

$$H = p_i \dot{q}_i - L \Rightarrow \mathcal{H} = \Pi(x)\partial_0 \psi(x) - \mathcal{L}$$

fermionra: $\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\left(\psi^+ \partial_0 i \partial_0 \partial_0 \psi\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\left(\psi_\alpha^+ i \partial_0 \psi_\alpha\right) = i\psi_\alpha^+$

$$\mathcal{H} = \Pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} = \cancel{i\psi_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha} - \cancel{i\psi_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha} + \underbrace{\bar{\psi}_\alpha i\partial_i \partial_i \psi_\alpha + m\bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha}$$

$$= \psi_\alpha^+ h_{\alpha\beta}(i\partial)\psi_\beta \qquad (1)$$

Belátható ha $\psi_\alpha = \sqrt{\frac{h}{2}}\,\phi + \frac{i}{\sqrt{2h}}\Pi$ ahol $h^2 = -\Delta + m^2$

akkor $\mathcal{H} = \psi^+ h \psi$

vagyis (1) egy teljesen generikus alak.

Fourier trafóban:

$$\mathcal{H} \rightarrow \psi_\alpha^+ h_{\alpha\beta}(k)\psi_\beta(k) \qquad \text{ahol } \psi_\alpha(k) = \sum_r u_{\alpha r}(k) a_r(k)$$

A megoldandó egyenlet $h_{\alpha\beta}(k) u_{\alpha r}(k) = E_r(k) u_{\alpha r}(k) \quad \rightsquigarrow u(t) = e^{-iEt}u$

Ez a Dirac-egyenlet a Fourier-térben.

ezzel diagonalizáltam a Hamilton operátort

KVANTUM-FEJEZETEK

11. előadás (05.14)

3 fajta mező fontos első alternatívák:

- ϕ skalártér (gyakorlatilag teszteljük, a valóságban csak a Higgs ilyen, elég sok gond van vele)

$$\hat\phi(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx} \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad \rightsquigarrow \quad \hat H = \int \omega_k \hat a_k^+ \hat a_k \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

spektrum: $|0\rangle \rightsquigarrow a_k|0\rangle = 0$

$|k\rangle = a_k^+ |0\rangle$

- $\psi(x)$ spinortér

úgy kéne bevezetni, hogy mindig Hamiltonnal legyen a D.e.-i.

$$\mathbb{C}^4 \leftarrow \hat\psi_\alpha(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{r=1}^{2} \left(e^{ikx} a_{kr} u_{\alpha kr} + e^{-ikx} b_{kr} v_{\alpha kr} \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

ahol a Dirac-egyenlet: $(\not\partial - m)\psi = 0 \xrightarrow{F} (\not p - m)u = 0$ $\quad p_0 \equiv E$

$(\not p - m)v = 0$ $\quad p_0 \equiv E$

$\not p = p^\mu \gamma_\mu$

Ez alapján az EM tér:

$$\hat A_i(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{t=1,2} \left(e^{ikx} a_{kt} \varepsilon_{itk} + e^{-ikx} a_{kt}^+ \varepsilon_{itk}^* \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

t: polarizáció

$$\hat H = \sum_t \int k a_{kt}^+ a_{kt} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

itt van még nálunk Hamilton, amit tudunk:

$$\hat H = \int \left(E_k a_{kr}^+ a_{kr} - E_k b_{kr}^+ b_{kr} \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

ez lehetővé teszi negatív E-re, de akkor nem tudjuk, hogy mi, és akkor nincs alsó határa sem.

TFH: A negatív energiák már be vannak töltve.

Ezekre nem kommutátor, hanem antikommutátor kell:

$$\{a_{kr}, a_{k'r'}^+\} = \delta_{rr'} (2\pi)^3 \delta(\underline{k} - \underline{k}')$$

$$\{a_{kr}, a_{k'r'}\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{kr}^2 = 0 \quad \leftarrow \text{fermion}$$

Ez alapján az „új vákuum”: $|0\rangle_D = \prod_k \hat b_k^+ |0\rangle \longrightarrow a_k |0\rangle_D = 0$

Na de mit csinálnak b-k?

$$b_k^+ |0\rangle_D = \pm \prod_{q \neq k} b_q^+ \, b_k^2 |0\rangle_D = \emptyset$$

$$b_k |0\rangle_D = \pm \prod_{q\neq k} b_q^+ \underbrace{b_k b_k^+}_{-b_k^+ b_k + \{b_k, b_k^+\}} |0\rangle_D = \prod_{q \neq k} b_q^+ |0\rangle_D$$

eltűntet — ad δ-t

Tehát itt b_k^+ a eltüntető és b_k a „keltő" operátor.

$\bar{b}_k := \pm b_k^+$, $\bar{b}_k^+ := \pm b_k$

A Hamiltonban: $-E_k b_{kr}^+ b_{kr} = -E_{kr} \bar{b}_{kr} \bar{b}_{kr}^+ = +E_{kr} \bar{b}_{kr}^+ \bar{b}_{kr}$

$$H = \int E_k \left(a_{kr}^+ a_{kr} + \bar{b}_{kr}^+ \bar{b}_{kr} \right) \frac{d^3 k}{(2\pi)}$$

Tehát kétféle részecskénk van, ugyanolyan tulajdonságú, de ellentétes töltésű

$\Rightarrow$ antirészecskék.

$\uparrow$ ez még a szabadterekben

Az eddigi eddigiek alakú kaptunk, egy mindent kvadratikus. De ez sohasem van így

pl.: az e- ki tud sugározni fotont $\Rightarrow$ kölcsönhat.

A teljes Hamilton:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$$

$\hat{H}_0$: kvadratikus tagokban (részecskék); $\hat{H}_{int}$: nem kvadratikus (kH.)

Mit tudunk mondani a kH.-ról? Alapvetően semmit, de a fundamentális van egy elv.

pl.: eddig: a mozgásegyenlet (Maxwell): $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ ahol $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

A Lagrange: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$

Klasszikusan j a pontöltésekből jön, de a kvantumban:

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \rightsquigarrow \quad \rho = en = e\psi^+\psi = e\bar{\psi}\gamma^0 \bar{\psi}$$

boost esetén: $j^\mu = (\rho, \underline{v}\rho)$ módon, de γ-k szépen lesznek.

Tehát a QED valódi $\mathcal{L}$-a:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi$$

A $\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$ esetén minden változó után u.a. marad.

Mi van, ha ψ operátorok?

$$\hat{\psi}' = e^{i\alpha}\hat{\psi}$$

$$\hat{\bar{\psi}}' = \hat{\psi}^{+\prime}\gamma^0 = e^{-i\alpha}\bar{\psi}$$

Tehát $\mathcal{L}_{QED}$ invariáns.

Mi van ha α lokális?

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$$

Az $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ tag inv.

A másik tag nagyjából...

$$\mathcal{L}'_{QED} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \ldots = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)e^{i\alpha(x)}\psi + \ldots =$$

$$= \mathcal{L}_{QED} + e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu(-1)(\partial_\mu\alpha\, e^{i\alpha})\psi =$$ az új tag olyan, mint az utolsó.

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu(A'_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha)\psi$$

ha pont úgy van, hogy $A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$ (mértéktransz.)

akkor $F' = F$ a utolsó pedig eltűnik.

Ekkor pedig $\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}_{QED}$.

Tanulság:
- az $e^{i\alpha(x)}$ transzformáció tagja megváltoztatja a hullám fv.-t, de egy mértéktranszformációval kitranszformálható $\Rightarrow$ A fizikát nem változtatja meg.
- Az invariáns fizikát nem sérti a mértéktransz. alatt, ezen gauge + phase $\equiv$ mértéktr.
- A szabad $\mathcal{L}$ nem volt mértékinvariáns (az új értelemben), de azzá tehető az új taggal, ami egyértelmű $\Rightarrow$ kitalálható a KH. tagja

Ez az elv próbálva tehető más KH-ra (csoportra) is.

A $\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi$ transzf. $U(1)$-nek felelt meg.

pl.: spinor indexes trafó:

$\psi'_{\beta\ddagger} = U_{\ddagger\ddagger'}\psi_{\beta\ddagger'}$ ahol $U \in SU(2)$. Ilyen pl.

$$\mathcal{L}_{szabad} = \bar{\psi}_1(i\partial\!\!\!/ - m_1)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\partial\!\!\!/ - m_2)\psi_2$$

Ez akkor inv., ha $m_1 = m_2$. és ha $\underline{\psi} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{L} = (\bar{\psi}_1\ \bar{\psi}_2)(i\partial\!\!\!/ - m)\mathbb{1}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$

transzf.-ban: $\mathcal{L}' = \underline{\bar{\psi}}\,\underline{\underline{U}}^+(i\partial\!\!\!/ - m)\mathbb{1}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\psi} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\mathbb{1}\psi$

$\Rightarrow$ kell legyen 2 azonos tömegű részecske (p^+, n^0)

a megmaradó mennyiség: izospin.

„gauge-olás”: nézzük meg milyen tagot kell hozzáadni, és az lesz a KH.

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}\, \underline{U}\, (i\partial\!\!\!/ - m)\, \underline{U}\, \psi = \mathcal{L} + \bar{\psi} \underline{U}^+\, i(\partial_\mu \underline{U})\gamma^\mu\, \psi$$

Ezt úgy lehet kikompenzálni, ha bevezetünk egy mátrix alakú mezőtelatet

$$\bar{\psi}\gamma^\mu \underline{A}_\mu \psi \xrightarrow{\text{trf}} \bar{\psi}\, \underline{U}^+ \gamma^\mu \underline{A}'_\mu\, \underline{U}\, \psi$$

Az összegtranszformáltja:

$$\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu \underline{A}_\mu \psi \xrightarrow{\text{trf}} \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\psi}(U^+ i\partial_\mu U)\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}(\underline{U}^+ \underline{A}'_\mu \underline{U})\gamma^\mu \psi$$

$$\Rightarrow \underline{A}_\mu = \underline{U}^+ \underline{A}'_\mu \underline{U} + i\, \underline{U}^+ \partial_\mu \underline{U} \Rightarrow \underline{A}'_\mu = \underline{U}\, A_\mu \underline{U}^+ - i(\partial_\mu \underline{U})\underline{U}^+$$

(nem tettük fel, hogy $SU(2)$, tetszőleges mátrixra igaz)

Konstrukció:
- felírjuk a szabad elméletet globális szimmetriára (G csoport)
- a globálisból lokálisat teszünk ($\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - i\underline{A}_\mu$, ahol $\underline{A}_\mu \in G$) és $A' = G A G^+ - i(\partial_\mu G)G^+$
- A mezőt így kapjuk a kH
- dinamikát kell adni a mezőknek

$F_{\mu\nu} \sim [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ választás

$\nabla'_\mu = \underline{G}\, \nabla_\mu G^+ \Rightarrow \mathrm{Tr}(\nabla_\mu \nabla_\nu) = \mathrm{Tr}(\nabla'_\mu \nabla'_\nu)$ alkalmazni

emiatt mérjük így $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$

és a kH Lagrange-sűrűsége: $\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\text{szabad}}(\partial_\mu \to \nabla_\mu)}$

A tapasztalat, hogy ezzel az összes fundamentális kH leírható.

Elektro: $U(1)$

gyenge kH: $SU(2)$

erős kH (QCD): $SU(3)$

gravitáció: $SL(2, \mathbb{C})$

A_μ szerepe a csoportalgebra generátorai

$U(1) \to$ 1 generátor $\to$ foton

$SU(2) \to$ 3 generátor $\to W^\pm, Z^0$

$SU(3) \to$ 8 generátor $\to$ 8 db gluon

$SL(2,\mathbb{C}) \to$ graviton.