MAGFIZ - FEJEZETEK
1. előadás (02. 12.)

Sátor Attila

nukleon - nukleon KH.

- EM-kh, gyenge kh, erős kh ← ezzel fogunk foglalkozni

Erős KH.
rövid hatótávolságú

A kötési energia: $E_B \approx c_1 A - c_2 A^{2/3} - \dots$

Az első tag azért arányos A és nem A^2, mert nem az összessel hat kölcsön, hanem csak a szomszédaival.
Így viszont le kell vonni a felületi effektusokat (2. tag)

továbbá konkrét csoportot vizsgáljunk konkrét atommagokat:

deuteron: n+p kötött állapot

$$E_d = 2{,}22\ \text{MeV}$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2{,}1\ \text{fm}$$ (fantomoton, de fermionok kb. 10^{-15} m)

spin $S = 1$ (érdekes, hogy 0-val nincs kötött állapot)

magneton: $\mu = 0{,}86\mu_N$ ahol $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N}$

a kvadrupól momentum: $Q = 3$ barn ahol 1 barn $= 100\ \text{fm}^2$

általában a mágneses momentum

$$\underline{\mu} = \mu_N \left(\sum_{i=1}^{A} g_i^s\, 2\underline{s}_i + g_i^\ell \underline{\ell}_i \right)$$ protonnál: $g_p^\ell = 1$ $g_p^s = 2{,}79$

$g_n^\ell = 0$ $g_n^s = -1{,}91$

ha p és n-t összeadjuk:

$$\mu_p + \mu_n = 0{,}88\mu_N \approx 0{,}86\mu_N \Rightarrow L \approx 0$$ ← relatív pálya impulzus momentum

általában a kvadrupól:

$$Q = \int \rho(\underline{r})(3z^2 - r^2)\, d^3\underline{r}$$ ← a z tengely a $\underline{s}$ irányában mutat.

pl.: homogén gömb:

$$Q_{\text{gömb}} = \rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} (3r^4 \cos^2\vartheta \sin\vartheta - r^4 \sin\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\rho \int_0^R r^4 dr \cdot \underbrace{\int_0^\pi (3\cos^2\vartheta \sin\vartheta - \sin\vartheta)\, d\vartheta}_{0} = 0$$

Deformáljuk a gömböt úgy, hogy z irányban megnyújtjuk.

a nyugalmi állapothoz z-menti r-ek nőnek $\Rightarrow$ $\boxed{Q>0 \text{ prolát}}$

Deformáljuk úgy, hogy összenyomjuk a z mentén $\Rightarrow$ $\boxed{Q<0 \text{ oblát}}$

A deuteron prolate alakú szerint.

DE azt mondjuk, hogy a hullámfv.:

$$\phi(\underline{r}) = R_L(r)\, Y_{LM}(\vartheta, \varphi) \quad \text{alakú}$$

Az $L=0$ esetben gömbszimmetrikus már, tehát a deuteron esetén az $L=0$ van ezen túl jó... ☹

feloldás: $\psi_d = c_0\,\phi_{L=0} + c_1\,\phi_{L=1} + c_2\,\phi_{L=2} + \dots$

így áll elő a hullámfv., ahol a főtag az $\phi_{L=0}$.

mely tagok maradhatnak meg?

Szimmetria miatt:

$$\phi(-\underline{r}) \overset{!}{=} R_L(r)\, Y_{LM}(\pi-\vartheta, \varphi+\pi) = R_L(r)\, Y_{LM}(\vartheta, \varphi)\, \underbrace{(-1)^L}_{\text{paritás} \equiv \Pi}$$

Mivel az erős kh őrzi a paritást csak ugyanolyan paritású tagok lehetnek

$\Rightarrow$ L páros

Tudjuk, hogy $\underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$ $\Rightarrow$ $|L-S| \leq J \leq L+S$

ha $L=0,\ S=1$ $\quad J=1$

de mi azt tudjuk, hogy $J=1,\ S=1$ $\quad L=?$

$\underline{L} = \underline{J} + \underline{S}$ (ez mi működik, nem tudom mit magyarázott)

$\Rightarrow |J-S| \leq L \leq J+S \Rightarrow 0 \leq L \leq 2$

$\Rightarrow$ a deuteron hullámfv.-jében két tag van.

$$\underline{\phi_d = c_0\,\phi_{L=0} + c_2\,\phi_{L=2}}$$

(ezt részletesen a kövi órán vizsgáljuk, de nem most érdekesebb)

Úgy alakulnak tehát, hogy mindkét részecske csalódik.

nukleon-nukleon szórás

→ az nukleon

szóródás esetén a nukleon egy másik térrészbe megy, egy másik gömbhullámként szóródik.

$$\psi_{be} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz}$$

$$\psi_{ki} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} \cdot f(\vartheta, \varphi)$$

f: szórási amplitúdó

φ-től csak komplikált esetén függ, de mi ilyenekkel nem foglalkozunk.

Amit tudunk mérni:

$j_{be,z}$ bejövő áram sűrűség

$dN(\vartheta,\varphi)$ szórt részecske áram, adott irányba

$$dN(\vartheta,\varphi) = j_{szórt,r} \cdot r^2 \, d\Omega(\vartheta,\varphi)$$

Mivel tudjuk, hogy $\underline{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\nabla}\psi^* \cdot \psi - \psi^* \underline{\nabla}\psi\right)$

$$j_{be,z} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-ikz}\right)e^{ikz} - e^{-ikz}\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{ikz}\right)\right) = \frac{k\hbar}{m}$$

$$j_{szórt,r} = \frac{i\hbar}{2m}\left(f^*\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) f \frac{e^{ikr}}{r} - f^* \frac{e^{-ikr}}{r} f \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right) = \frac{k\hbar}{mr^2}|f|^2$$

Minden függ az energiától, k-n keresztül

A HKM:

$$dN(\vartheta,\varphi) = j_{be,z}\,\sigma(\vartheta,\varphi)\,d\Omega$$

$$|f|^2\frac{k\hbar}{mr^2}\, r^2 d\Omega = \frac{k\hbar}{m}\,\sigma\, d\Omega \Rightarrow \sigma(\vartheta,\varphi) = |f(\vartheta,\varphi)|^2$$

Olyan potenciált keresünk, ami az adott HKM-et adja vissza.

Két részecske rendszere:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_{\underline{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_{\underline{r}_2} + V(\underline{r}_1, \underline{r}_2)\right)\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = E\,\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$$

azt tudjuk, hogy:
- V eltolás inv.: azaz $V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$
- időbeli eltolás inv.
- forgás invariáns (skalár)
- tértükrözésre invariáns (paritás őrzés)
- kicserélési invariáns
- töltésfüggetlenséget tudja

Érdemes áttérni TKP rendszerre: $\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$ $\qquad \underline{R} = \dfrac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$

$$\Delta_{\underline{r}_1} = (\underline{\nabla}_{\underline{r}_1})^2$$

és mivel $\underline{\nabla}_{r_1} = \dfrac{\partial}{\partial \underline{r}_1} = \dfrac{\partial}{\partial \underline{r}} \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{r}_1} + \dfrac{\partial}{\partial \underline{R}} \dfrac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{r}_1} = -\dfrac{\partial}{\partial \underline{r}} + \dfrac{m_1}{M} \dfrac{\partial}{\partial \underline{R}}$

$$\underline{\nabla}_{r_2} = \frac{\partial}{\partial \underline{r}_2} = \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \frac{\partial \underline{r}}{\partial r_2} + \frac{\partial}{\partial \underline{R}} \frac{\partial \underline{R}}{\partial r_1} = \frac{\partial}{\partial \underline{r}} + \frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial \underline{R}}$$

visszaírva Sch.-be:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left[\left(\frac{1}{m_1} \Delta_{\underline{r}} + \frac{m_1^2}{M^2} \Delta_{\underline{R}} - 2\frac{m_1}{M} \frac{\partial^2}{\partial \underline{r} \partial \underline{R}}\right) + \frac{1}{m_2}\left(\Delta_{\underline{r}} + \frac{m_2^2}{M^2} \Delta_{\underline{R}} + 2\frac{m_2}{M} \frac{\partial^2}{\partial \underline{r} \partial \underline{R}}\right)\right] \psi + V\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left(\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \Delta_{\underline{r}} + \frac{1}{M} \Delta_{\underline{R}}\right)\psi + V(\underline{r})\psi = E\psi$$

szétesik két egyenletre: TKP mozgás, és relatív mozgás

ha ülünk be a TKP rendszerbe: $\underline{R} = 0$

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\underline{r}} \psi(\underline{r}) + V(\underline{r})\psi(\underline{r}) = E\psi(\underline{r})}$$

Dolgozzunk [illegible] approximációval! Kezdjük centrális potenciállal:

$V_{NN}(\underline{r}) = V_c(r)$ és keressük $\psi(\underline{r}) = R(r)\, Y(\vartheta, \varphi)$ alakban.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[(\Delta_r R(r))\, Y(\vartheta, \varphi) - R(r)\left(\Delta_{\vartheta,\varphi} Y(\vartheta,\varphi)\right)\right] + V(r) R(r)\, Y(\vartheta,\varphi) = E R(r)\, Y(\vartheta,\varphi)$$

válasszuk Y-t úgy, hogy $\Delta_{\vartheta,\varphi} Y(\vartheta,\varphi) = \underline{\qquad}\, Y(\vartheta,\varphi)$ legyen.

a sajátfv. a gömbfüggvények, és a sajátérték: $\dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2}$

$\Rightarrow$ szeparálható Y-nal.

az egyenlet: $-\underbrace{\dfrac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r R}_{\frac{(rR)''}{r}} + \dfrac{\hbar}{2\mu} \dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2} R + V(r) R = ER$

legyen $u := rR$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u + Vu = Eu}$$ radiális Sch.-egyenlet

numerikus módon felírva: $u'' + \left(k^2 - \dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) u(r) - \dfrac{2\mu}{\hbar^2} V(r)\, u(r) = 0$

ez Runge-Kutta-val megoldható.

Hogyan adható meg u-ból σ?

Első körben: $l = 0$, $V = 0$

ekkor $u'' = -k^2 u \Rightarrow u = A\sin(kr) + B\cos(kr)$

hogy ne legyen szinguláris $B = 0$

második körben: $V = 0$, $l \neq 0$,

$r \to \infty$ esetén u.a. mint előbb:

$$u \xrightarrow[r\to\infty]{} \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)$$

itt hosszan magyarázott a Bessel-fv.-ről, de arra ez nem kell.
[illegible] a NIST-nél is [illegible]

harmadik körben: $V \neq 0$, $l \neq 0$, $V \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

ekkor $u \xrightarrow[r\to\infty]{} \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l(k)\right)$

de mi már tudjuk, hogy $\psi_{k,r} \to e^{ikr} + f(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$

akkor fog egyezni, ha a szórt fv. a sin-ek szup.poz.-a.

TBC...

MAGFIZ-FELELETEK

2. előadás (02.19.)

nukleon-nukleon kH-t vizsgálja

$$u_\ell \to \sin\left(kr - \ell\frac{\pi}{2} + \delta_\ell(E)\right)$$

itt van az infó

$$\psi_\ell = \frac{1}{r} u_\ell(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

De a HF miatt $\psi_{ki} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}$

A kettő ekvivalens kell h. a., de vegyük a ψ_ℓ-ek lineárkombját

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{1}{r}\sin\left(kr - \ell\frac{\pi}{2} + \delta_\ell\right)Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)B_{\ell m} = e^{ikz} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

Akkor lesz a bal oldal φ-től független, ha csak $m=0$ tagok vannak

$$Y_{\ell 0}(\vartheta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,P_\ell(\cos\vartheta) \qquad \text{Legendre-polinom}$$

Tehát

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(kr - \ell\frac{\pi}{2} + \delta_\ell\right)\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\vartheta)B_\ell = e^{ikz} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

exponenciális alakja:

$$\frac{1}{2ir}\sum_\ell A_\ell\left(e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2}+\delta_\ell)} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2}+\delta_\ell)}\right)P_\ell(\cos\vartheta) = f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} + \boxed{*}$$

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell Y_{\ell 0}(\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\vartheta)$$

lássuk hogyan néz ez ki-ent:

$$c_\ell = \int_{\partial S_1} Y^*_{\ell 0}\, e^{ikr\cos\vartheta}\, d\Omega = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\int_0^\pi e^{ikr\cos\vartheta}P_\ell(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, j_\ell\,\frac{2i^\ell}{(-i)^\ell\cdot i^\ell} = \sqrt{4\pi}\sqrt{2\ell+1}\, i^\ell j_\ell$$

Tehát $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^\ell j_\ell(kr)P_\ell(\cos\vartheta)$ síkhullám sorfejtés

Ha $kr\to\infty$ esetén nézzük a dolgokat:

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left((-1)^{\ell+1}e^{-ikr} + e^{ikr}\right)P_\ell(\cos\vartheta)$$

$$\frac{1}{2ir}\sum_\ell A_\ell\left(e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2}+\delta_\ell)} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2}+\delta_\ell)}\right)P_\ell(\cos\vartheta) = f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} +$$

$$+\frac{1}{2ikr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left((-1)^{\ell+1}e^{-ikr} + e^{ikr}\right)P_\ell(\cos\vartheta)$$

A_ℓ-ek és f adódnak ebből.

• e^{-ikr}-es tagokat kiegyezve

$$-\frac{1}{2ir} A_\ell\, e^{-i\left(-\ell\frac{\pi}{2}+\delta_\ell\right)} P_\ell(\cos\vartheta) = \frac{1}{2ikr}(2\ell+1)(-1)^{\ell+1} P_\ell(\cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow A_\ell = -\frac{1}{k}(2\ell+1)(-1)^{\ell+1} e^{i\left(-\ell\frac{\pi}{2}+\delta_\ell\right)} = \frac{1}{k}(2\ell+1)\, i^\ell e^{i\delta_\ell}$$

• e^{ikr}-es tagokat kiegyezve:

$$\frac{1}{r} f(\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2ikr}(2\ell+1) P_\ell(\cos\vartheta)\left(i^\ell e^{i\delta_\ell} e^{i\left(-\ell\frac{\pi}{2}+\delta_\ell\right)} - 1\right) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2ikr}(2\ell+1) P_\ell(\cos\vartheta)\, 2i \sin\delta_\ell\, e^{i\delta_\ell}$$

$$\Rightarrow f(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_\ell (2\ell+1)\sin\delta_\ell\, e^{i\delta_\ell} P_\ell(\cos\vartheta)$$

ebből $\sigma(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2$

Adott potenciál → Schr.-t megoldva kapjuk u_ℓ-t ⇒ leolvassuk δ_ℓ-t a minden szögben

⇒ ebből kiszámoljuk $\sigma(\vartheta)$-t.

Ez az egész E-függő!!! $\delta_\ell(E)$

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{k^2}\sum_{\ell\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)\sin\delta_\ell \sin\delta_{\ell'}\, e^{i(\delta_\ell-\delta_{\ell'})} \underbrace{\int P_\ell(\cos\vartheta) P^*_{\ell'}(\cos\vartheta)\, d\Omega}_{\frac{4\pi}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}} =$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$$

Ha mérünk egy adott $\sigma(\vartheta)$-t, addig kell a potenciált gyúrni, amíg jó nem lesz.

DE ℓ elvileg ∞-ig megy, ez a ∞ db Schr. megoldást jelentene

mégis jó ez.

$L^2 = p^2 b^2 \geq \hbar^2 \ell(\ell+1)$ korrespondencia miatt

$$\Rightarrow E\, 2\mu\, b^2 \geq \hbar^2 \ell(\ell+1)$$

$$\frac{2\mu c^2 b^2}{\hbar^2 c^2} E \geq \ell(\ell+1)$$

azért jó ez az alak, mert $\hbar c = 197$ MeV·fm

$$0{,}25\, \underset{\text{MeV-ban}}{E} \geq \ell(\ell+1)$$

ha $E = 1$ MeV ⇒ $\ell = 0$

10 MeV ⇒ $\ell = 0, 1$

100 MeV ⇒ $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$ ⇒ csak néhány tagot kell figyelembe venni

Mielőtt örülnénk, úgy mint jól csináltuk, ne feledkezzünk meg a spinről:

$$\Psi(1,2) = \psi_L(\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1)\,\chi_S(1,2)$$

$\chi_{s_1\nu_1}(1)$ ahol $s_1 = \frac{1}{2}$ $\nu_1 = \pm\frac{1}{2}$

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 = |\uparrow\rangle_1 \qquad \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 = |\downarrow\rangle_2$$

Teljes rendszerben: $\underline{S} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$ ahol $|s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2 \Rightarrow S \in \{0, 1\}$

a teljes rendszer spinje:

$$\chi_{S\nu}(1,2) = \sum_{\nu_1\nu_2} \langle s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 | S \nu\rangle \chi_{s_1\nu_1}(1)\cdot\chi_{s_2\nu_2}(2)$$

a lehetséges értékek:

$$\chi_{00}(1,2) = \langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}|0\,0\rangle \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2) + \langle \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|0\,0\rangle \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right) \quad \text{szinglett}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\chi_{11}(1,2) = \langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|1\,1\rangle \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2) = |\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 \\
&\chi_{10}(1,2) = \langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}|1\,0\rangle \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2) + \langle \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|1\,0\rangle \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2) = \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right) \\
&\chi_{1-1}(1,2) = \langle \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}|1\,{-1}\rangle \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2) = |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2
\end{aligned}\right\}\text{triplett}$$

A részecskék cseréje hatására a szinglett (-1)-gyel szorzódik, a triplett maradnak

$$\chi_{S=0,\nu=0}(1,2) = -\chi_{S=0,\nu=0}(2,1)$$

$$\chi_{S=1,\nu}(1,2) = \chi_{S=1,\nu}(2,1)$$

Valójában van még egy kötés, az izospin:

$$\Psi(1,2) = \psi_L(\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1)\,\chi_S(1,2)\cdot\tau_T(1,2)$$

ezt matematikailag ugyanúgy kezeljük:

$\tau_{T_1t_1}(1)$ $T_1 = \frac{1}{2}$ $t_1 = \pm\frac{1}{2}$

$$\tau_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 = |n\rangle_1 \qquad \tau_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 = |p\rangle_2$$

$$\tau_{T_1t_1T_2t_2}(1,2) = \sum_{t_1t_2} \langle T_1 t_1 T_2 t_2 | T t\rangle \tau_{T_1t_1}(1)\,\tau_{T_2t_2}(2)$$

Amikor adott típusú részecskéket adunk össze, akkor nem mi [illegible], tehát mégse teljesen olyan, mint az igazi spin

Mi van a teljes neutronrendszerrel, ha felcseréljük a részecskéket?

$$\Psi(1,2) = \Psi_L(\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2)\, \chi_S(1,2)\, \tau_T(1,2)$$

$$\Psi(2,1) = \Psi(-\underline{r}) \cdot \chi_S(2,1)\, \tau_T(2,1) = (-1)^L \Psi(\underline{r})\, (-1)^{S+1} \chi_S(1,2)\, (-1)^{T+1} \tau_T(1,2)$$

$$= (-1)^{L+S+T}\, \Psi(1,2) \overset{!}{=} -\Psi(1,2)$$

Pauli-elv miatt

Tehát $L+S+T$ páratlan

Milyen lehetséges állapotai vannak?

J	S	L	T	
$J=0$	0	0	1	$^1S_0$
	1	1	1	$^3P_0$
$J=1$	0	1	0	$^1P_1$
	1	0	0	$^3S_1$
	1	1	1	$^3P_1$
	1	2	0	$^3D_1$

$J=2$:

$J=3$: HF feladat

Spektroszkópiai jelölés: $^{2S+1}L_J$

ahol $L = 0, 1, 2, 3, 4$

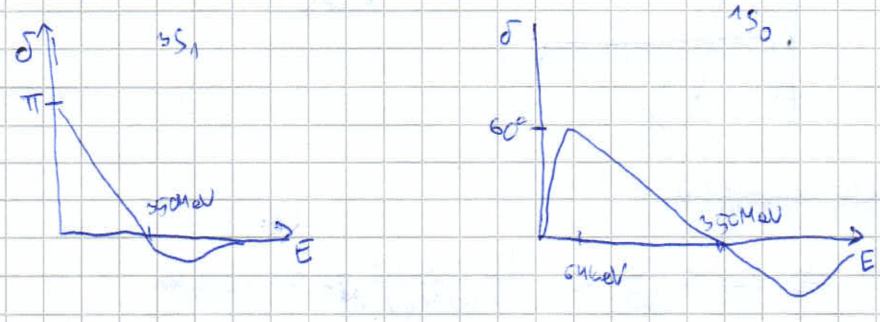
S P D F G

Ezen kívül mi van a deuteron hullámfv-a?

Tudjuk, hogy két komponens van: $L=0, S=1$

$L=2\ S=1$ Tehát a hullámfv: $^3S_1 - {}^3D_1$

Hogy néz ki a kísérletileg [illegible] elvárnánk:



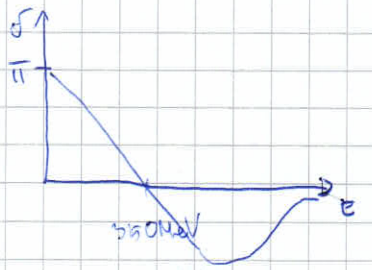
A taszító potenciális hullámhossz a kísérletileg mérttel [illegible] ([illegible])

MAGFIZ FEJEZETEK

5. előadás (02.26.)

A [illegible].

$^1S_1$



Mi a szerepe a fázistolásnak?

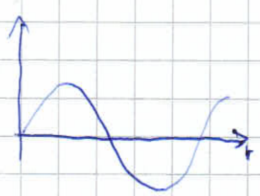
sin(

A hullámfv: $u = \sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta)$

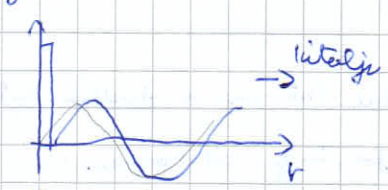
ha kisebb r-nél éri el az adott értéket $\delta > 0$
ha nagyobb r-nél $\delta < 0$

A negatív fázistolás kifelé tolja a fv-t.

Ha nincs potenciál, akkor a hullámfv oszcillál mindenhol.

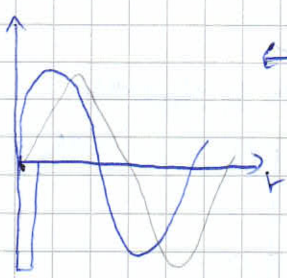


Ha beteszünk egy nagy taszító potenciált:



⇒ A taszító potenciálnál $\delta < 0$ tartozik

A vonzó potenciál:



← behúzza.

$\delta > 0$.

Mi a helyzet a potenciál nagyságával?

$$\Delta E \cdot \underbrace{\Delta t}_{\frac{\Delta s}{c}} \approx \hbar \Rightarrow \Delta s \approx \frac{\hbar c}{\Delta E} \approx \frac{197\ \text{MeV fm}}{350\ \text{MeV}} \approx 0{,}5 - 0{,}6\ \text{fm}$$

⇒ 0,5 fm-nél kisebb távolságon taszító, annál nagyobb távolságon vonzó a potenciál.

Milyen alakja van az erős KH-nak?

Yukawa: Nem lehet $\frac{1}{r}$-nek az hosszú hatótávolsága => javasolt egy ilyen alakot

$$V_Y(r) = V_0 \frac{1}{r} e^{-\mu r} = V_0 \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{r_0}}$$

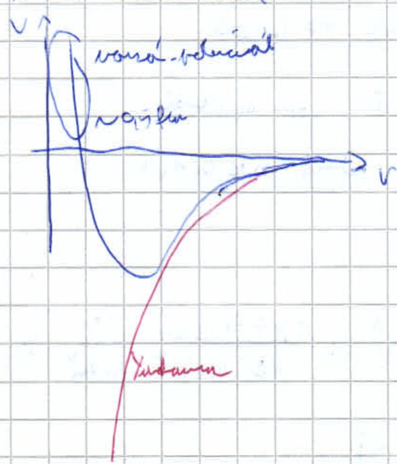
Yukawa rávezetése ideológiája: két részecske úgy hat kölcsön, hogy egy 3. részecskét átadnak

De itt sérül az energiamegmaradás.
A Heisenberg miatt ez lehetséges.

$$\Delta s \approx \frac{\hbar c}{\Delta E} = \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} \approx 1{,}4\ \text{fm}$$ => A Yukawa potenciál hatótávolsága 1,4 fm

=> $\mu \approx 0{,}7\ \text{fm}^{-1}$

A KH lesz tehát



A Pauli-elv miatt két tökéletesen egyforma
1db ↑ és 1db ↓ spinű nukleon lehet.

=> Minden nukleon csak a szomszédjával egy kölcsönhat,
és ha távolabb van, átlagosan kisebb ez.

Ha egy tudjuk analitikusan előállítani a potenciált
Próbáljuk Yukawából előállítani:

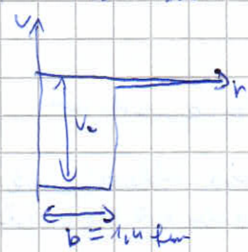
$$V_0 \frac{1}{r} e^{-\mu r} - V_1 \frac{1}{r} e^{-2\mu r} + V_2 \frac{1}{r} e^{-3\mu r} + \dots$$

Ez egy ilyet állít elő

Aki a sok adat alapján ezt végigszámolta, az Rodrigues Reid volt (1968)

Cikkeket a DOI szám alapján kell keresni

Keressük a deuteron kötött állapotát:
A tenzor részt hanyagoljuk el, a Yukawát pedig közelítsük négyszög potenciállal



$$V = \begin{cases} -V_0 & r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Keressük a $E<0$ kötött állapotokat

A Schr.-egyenlet

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} u + V u = E u$$

Nézzük a $\ell=0$ esetet:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}u_<'' - V_0 u_< = E u_< \quad ; \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu}u_>'' = E u_>$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$u_<'' = \underbrace{-\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0+E)}_{k^2} u_< \qquad\qquad u_>'' = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}u_>$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$u_<'' = -k^2 u_< \qquad\qquad u_>'' = k^2 u_>$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$u_< = A\sin(kr) + B\cos(kr) \qquad\qquad u_> = Ce^{-kr} + De^{kr}$$

Akkor lesz az $\psi = \frac{u}{r}$ L^2-es, ha $D=0$, $B=0$

folytonosság miatt:
$$\left.\begin{aligned} A\sin(kb) &= Ce^{-kb} \\ Ak\cos(kb) &= -Cke^{-kb} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k\,\mathrm{ctg}(kb) = -k$$

Mivel kis kb. energiájú kötött állapotot keresünk $E \approx 0 \Rightarrow k \approx 0$

vagy $k=0$ vagy ctg. Ha $k=0$, az konstans fv, nem értelmes

Ha $\mathrm{ctg}(kb)=0 \Rightarrow kb = \frac{\pi}{2}+n\pi = \frac{\pi}{2}(1+2n)$ ahol $n \in 0,1,2\ldots$

$$k^2b^2 = \frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}V_0 b^2 = \frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2 \Rightarrow V_0 = \frac{\hbar^2c^2}{2\mu c^2}\frac{\pi^2}{4b^2}(1+2n)^2 \approx \frac{4\cdot 10^4\,\mathrm{MeV}^2\mathrm{fm}^2}{10^3\,\mathrm{MeV}}\cdot\frac{10}{2\,\mathrm{fm}^2} \approx$$

$$\approx 50\,\mathrm{MeV}\cdot(1+2n)$$

Egy mentemmel nagyjából, hogy 50 MeV-es gödörben van egy $\ell=0$-ás deuteron kötött állapot

Mi van $n=1$-re? $9V_0^{n=0} = V_0^{n=1}$

Ha a gödör mélyét lehúzzuk, az eredeti kötött állapot már nagyon mélyen van, akkor megjelenik egy új kötött állapot

Ugyanez: $V_0^{\ell=1,n=0} = 4\cdot V_0^{\ell=0,n=0}$ (a jegyzetben benne van, de nem kell tudni)

Miért csak 1 kötött állapota van a deuteronnak?

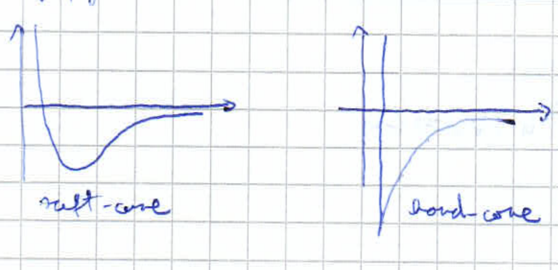
mert akkor, egy ilyen esetben, 9-szer akkorának kéne lennie a KH-nak

Miért az $\ell=0$ a fő komponens?

mert akkor, egy $\ell=1$ esetén 4-szer akkorának kéne lennie a KH-nak

Reid két fajta potenciált nézett:

Reid illesztéséből is kb. 50 MeV jött ki.



V_{NN} potenciált eddig centrálisnak tekintettük, de ez nem megfelelő, nagy, egy mért a különbség szinglett és triplett között

$\Rightarrow$ kell spinfüggő rész.

$$V_{NN} = V_c(r) + V_S(r) \underline{\quad}$$

ide kell egy spinfüggő operátor

Az kell, hogy skalár legyen és invariáns legyen a részecske cserére

$\underline{\sigma}_1 \underline{\sigma}_2$ jó ez

Mi ez a tétel a Schr.-re:

$$(\hat{T} + \hat{V}_c)\,|\psi\rangle|\chi_S\rangle|\tau\rangle + \hat{V}_{spin}\,|\psi\rangle|\chi_S\rangle|\tau\rangle = E\,|\psi\rangle|\chi_S\rangle|\tau\rangle \qquad /\cdot\langle\tau|$$

semmi nem függ τ-tól, tehát azzal kiejtjük egyszerűt: $\qquad /\langle\chi_S|$

$$(\hat{T} + \hat{V}_c)\,|\psi\rangle + \langle\chi_S|\hat{V}_{spin}|\chi_S\rangle\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$$

Válasszunk reprezentációt: $\langle p|$ vagy $\langle r|$-rel szorozzuk?

koord: $\langle r|\psi\rangle = \psi(\underline{r})$ $\qquad$ imp $\langle p|\psi\rangle = \psi(\underline{p})$

$$T = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r \qquad\qquad T = \frac{p^2}{2\mu}$$

Válasszuk a koordinátát:

$$(\hat{T} + \hat{V}_c)\,\psi(\underline{r}) + \underbrace{\langle\chi_S|V_{spin}|\chi_S\rangle}_{A(r)}\,\psi(\underline{r}) = E\,\psi(\underline{r})$$

ugyanúgy néz ki, mint egy mint centrális Schr. egyenlet:

$$u'' + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)u - \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V_c(r) + \langle\chi_S|\hat{V}_{spin}|\chi_S\rangle\right)u = 0$$

Oldjuk meg brute force-szal:

$S = 0$

$$\langle\chi_S|\hat{V}_{spin}|\chi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1\,0)_1(0\,1)_2 - (0\,1)_1(1\,0)_2\right)\left(\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}\right)\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right) =$$

$= \dots = \underline{\quad}$ ezt otthon érdemes kiszámolni

nem brute force-szal:

$$\hat{\underline{S}} = \hat{\underline{S}}_1 + \hat{\underline{S}}_2 = \frac{1}{2}\hbar\left(\hat{\underline{\sigma}}_1 + \hat{\underline{\sigma}}_2\right)$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{4}\hbar^2\left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{\underline{\sigma}}_1\hat{\underline{\sigma}}_2\right) \Rightarrow \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\hbar^2}\hat{S}^2 - \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_2^2\right)$$

Tudjuk, hogy $\hat{S}^2|\chi_S\rangle = \hbar^2 S(S+1)|\chi_S\rangle$

és $\hat{\sigma}_1^2 = \sigma_{1x}^2 + \sigma_{1y}^2 + \sigma_{1z}^2 = \mathbb{1}$

tehát $\hat{\underline{\sigma}}_1\hat{\underline{\sigma}}_2|\chi_S\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\hbar^2}\hbar^2 S(S+1)|\chi_S\rangle - 6|\chi_S\rangle\right)$

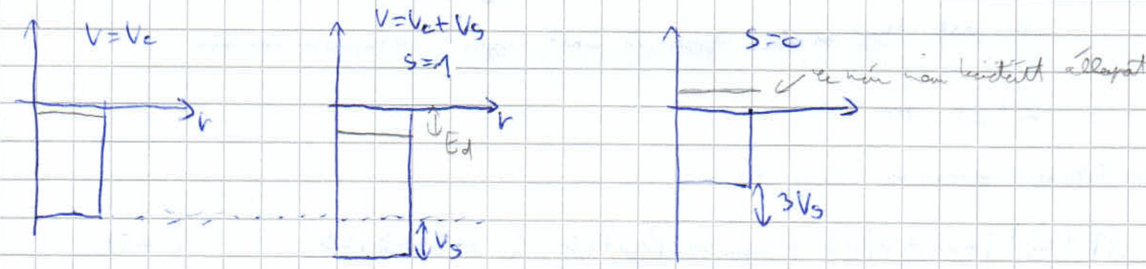
$$\langle\chi_S|\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2|\chi_S\rangle = 2S(S+1) - 3 \Rightarrow \begin{cases} S=0 \Rightarrow -3 \\ S=1 \Rightarrow 1 \end{cases}$$

Mit kapunk, ha a Schr.-be ténylegesen használjuk ezt a spines cuccot?

Az egyik esetben kötöttet, a másikban szabadot kell kapni.

Ahhoz, hogy $s=0$-ra ne legyen kötött az kell, hogy $V_{SPIN} < 0$ legyen.

$$V_{NN} = V_c(r) + V_S(r)\,\hat{\underline{\sigma}}_1\hat{\underline{\sigma}}_2$$



A potenciál különbség $4|V_s|$ akkor, hogy a deuteron így ne legyen kötött

$$4|V_s| > E_d$$

Ugye a deuteron úgy nézett ki, hogy $\psi_d = c_0\phi_{l=0} + c_2\phi_{l=2}$

Mit kapunk, ha

$$\left\langle \phi_{l=0} \left| \begin{matrix} \hat{H} \\ \hat{T} \\ \hat{V}_c \\ \hat{V}_S \end{matrix} \right| \phi_{l=2} \right\rangle$$ vesszük?

A $\phi_{l=2}$ Y részét minden operátor belül hagyja, és ezért a $\phi_{l=0}$ Y részével kinullázza a szorzatot.

Miért jó ez?

A Schr.-egyenlet variációs alakja: $\langle \delta\psi | \hat{H} - E\mathbb{1} | \psi \rangle = 0$

Ha $\psi = c_0\phi_0 + c_2\phi_2$ -t beírjuk.

$$\langle \delta c_0\phi_0 + \delta c_2\phi_2 | H - E | c_0\phi_0 + c_2\phi_2 \rangle = 0$$

$$\delta c_0\left(\langle\phi_0|H-E|\phi_0\rangle c_0 + (H-E)_{02}\right) + \delta c_2\left((H-E)_{20}c_0 + (H-E_{22})c_2\right) = 0$$

A c_0 és c_2 külön variálható $\Rightarrow$ a feltétele: $(H-E)_{00}c_0 + (H-E)_{02}c_2 = 0$

$$(H-E)_{20}c_0 + (H-E)_{22}c_2 = 0$$

Láttuk, hogy $(H-E)_{20} = (H-E)_{02} = 0$.

Tehát a variációs feltétel: $\left.\begin{matrix} (H-E)_{00}c_0 = 0 \\ (H-E)_{22}c_2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Megoldás: a) Tfh $(H-E)_{00} = 0 \Rightarrow E = \dfrac{H_{00}}{\langle\phi_0|\phi_0\rangle} =: E_0$ $\quad c_0$ bármi lehet

ekkor $(H-E_0)_{22} \neq 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_0 = 1$

b) Tfh $(H-E)_{22} = 0 \Rightarrow$ előzőhöz hasonlóan $c_2 = 1,\ c_0 = 0$

más megoldás nincs.

tanulság: ha egy potenciál tag nem csatolja össze a különféle kitüntetett komponenseit, akkor vagy csak az egyik, vagy csak a másik marad!

Következmény: Mivel a deuteronban van Φ_0 és Φ_2 is, vannak tenzori tagok

$$V_{NN} = V_c(r) + V_\sigma(r)\,\underline{\hat{\sigma}}_1\underline{\hat{\sigma}}_2 + V_T(r)\left[3(\underline{\hat{\sigma}}_1\underline{n})(\underline{\hat{\sigma}}_2\underline{n}) - \underline{\hat{\sigma}}_1\underline{\hat{\sigma}}_2\right]$$

Tenzor-tag

MAGFIZ FEJEZETEK

4. előadás (03.05.)

$$V_{NN} = V_C(r) + V_S(r)\,\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2 + V_T(r)\left[3(\underline{\sigma}_1\underline{n})(\underline{\sigma}_2\underline{n}) - \underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2\right]$$

Nézzük a 2. tagot! Mit csinál ez a spinállapotokkal?

$\chi_{S=0}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left((1\ 0)_1(0\ 1)_2-(0\ 1)_1(1\ 0)_2\right)(\sigma_{1x}n_x+\sigma_{1y}n_y+\sigma_{1z}n_z)(\sigma_{2x}n_x+\sigma_{2y}n_y+\sigma_{2z}n_z)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right]=$$

$$=\langle\chi_{S=0}|(\underline{\sigma}_1\underline{n}_1)(\underline{\sigma}_2 n_2)|\chi_{S=0}\rangle = \text{végigszámolva} := 0$$

itt most van ami nem kell a vizsgán:

$$\hat{S}_{12}=\sqrt{\frac{24\pi}{5}}\left(R^{(2)}\cdot S^{(2)}\right)$$

másodrendű irreducibilis tenzoroperátor

ezek: $A^{(n)}_m$ $\quad m=-n \dots n$ $\quad$ az egy n. rendű irrep operátor m. komponense

Ezért jó, mert forgás hatására úgy transzformálódnak, ahogy a gömbfüggvények

Minden vektor egy elsőrendű irrep tenzoroperátor.

$$\underline{A} \Longleftrightarrow A^{(1)} \quad \text{ahol} \quad A^{(1)}_0 = A_z\,,\quad A^{(1)}_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x\pm iA_y)$$

Két azonos rendű irrep tenzor sk. szorzata:

$$\left(A^{(n)}\cdot B^{(n)}\right) := \sum_{m=-n}^{n}(-1)^m A^{(n)}_m B^{(n)}_{-m}$$

HF: Lásd be, hogy $n=1$ esetén ez a vektorok sk. szorzata

HF

A fenti képletben: $\quad R^{(2)}_m = Y_{2m}(\hat{r})$

rend

$$S^{(2)}_m=\sum_{\nu_1\nu_2=-1}^{1}\langle 1\nu_1 1\nu_2|2m\rangle\,\sigma^{(1)}_{1\nu_1}\sigma^{(1)}_{2\nu_2}$$

részecske index

mit is jelent:

Az 1. részecskére ható 3 pauli: $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z \to \underline{\sigma}_1 \to \sigma^{(1)}_1$

ennek komponensei: $\sigma^{(1)}_{1\nu}$

Be lehet látni, hogy az így definiált $\hat{S}_{12}$ a $V_T(r)$ utáni szögletes zárójel

plusz info: Messiah - QM könyve

Matematikai állítás:

$$\langle L S J M \Pi | (\underline{r}^{(n)} \cdot \underline{S}^{(n)}) | L' S' J' M' \Pi' \rangle = \quad \text{ahol } \underline{L}+\underline{S}=\underline{J}$$

Π a paritás

$$= \underbrace{\quad \cdots \quad} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\Pi\Pi'} \delta_{\underline{L}'=\underline{L}+\underline{n}} \delta_{\underline{S}'=\underline{S}+\underline{n}}$$

Azt akarjuk, hogy ez ne legyen 0.

Nézzük meg deuteronra

$$\Psi = (c_0 \phi_{(L=0)} + c_2 \phi_{(L=2)})^{S=1, J=1, T=0}$$

első komponens $L=0$ második $L'=2$

$S=1$ $S'=1$

$J=1$ $J'=1$ ✓

$M=1$ $M'=1$ ✓

$\Pi=+$ $\Pi'=+$ ✓

igaz-e hogy $\underline{L}+\underline{n}=\underline{L}'$: $\underline{0}+\underline{2}=\underline{2}$ ✓

$\underline{S}+\underline{n}=\underline{S}$ $\underline{1}+\underline{2}=\underline{1}$ ✓

$\Rightarrow$ a lett összecsatolja a deuteron két komponensét. Tök jó, ezt vártuk ☺

Van-e még tag a V_{NN}-ben?

spin-pálya

Az atomfizikában láttuk, hogy spin kölcsönhatással az energiaszint felhasadnak.

itt is azt látjuk, hogy

$^3P_{J=0,1,2}$

$\left.\begin{matrix} S=1 \\ L=1 \end{matrix}\right\} J=0,1,2$

A ^3P fele fázistolás arra a felhasadásra emlékeztette a fizikusokat

Tehát kell egy spin-pálya tag is

$$V_{NN} = \ldots + V_{LS}(r)\, \underline{L} \cdot \underline{S}$$

Van-e még más tag? a kísérleti adatok nem teszik ezt szükségessé, tehát a "sukcessziv approx" végét ért

DE van másik út is.

Elméleti megközelítés:

Milyen mennyiségek jellemzik az állapotot:

$\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2$

Mi az a legáltalánosabb formula ami eleget tesz összevonhatóan és megfelel a szimmetriáknak?

Végignézve így gondolkodott, felírta, és ismeretlen mennyiségeket keresett benne.

Megkapta amit ő, +1 tagot: $V_{(LS)^2}(L\cdot S)^2$. Ez kicsi, de jó, hogy van.

$$\boxed{V_{NN} = V_c(r) + V_s(r)\,\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2 + V_t(r)\left[3(\underline{\sigma}_1\underline{n})(\underline{\sigma}_2\underline{n}) - \underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2\right] + V_{LS}(r)(\underline{L}\cdot\underline{S}) + V_{(LS)^2}(\underline{L}\cdot\underline{S})^2}$$

A mért adatokra a $\chi^2/d.o.f \approx 1$ ami átlagosan illesztés

Ezzel ezt le is zártuk $\Rightarrow$ Új téma kezdése

~~A csillagfejlődés~~

Korai univerzum eseményei

A használt mértékrendszer: $c = \hbar = k = 1$.

Ilyenkor a tömeg, a hőmérséklet és az energia egyforma mennyiség

$c = 3\cdot 10^8 \frac{m}{s} = 1 \Rightarrow 1\,s = 3\cdot 10^8\,m$

$\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34}\,Js = 1 \Rightarrow 1\,eV = \dots \frac{1}{s}$

$1\,eV = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J$

$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{J}{K} = 1 \Rightarrow 1\,eV = 11600\,K$

Mivel $J = kg\,\frac{m^2}{s^2}$ $\frac{1}{\dots}\ \dots\frac{1}{eV}$ $\Rightarrow kg = \dots J$

$\dots \frac{1}{eV}$

2 egyforma dolog: $1\,K^3 = 83{,}4\,\frac{1}{cm^3}$

$1\,K^4 = 1{,}3\cdot 10^{-35}\,\frac{g}{cm^3}$

Másik mértékrendszer just for fun:

$\hbar, c, G$

$kg\frac{m^2}{s}$ $\quad \frac{m}{s}$ $\quad \frac{m^3}{kg\,s^2}$

olyan mennyiségek keresése, aminek a dimenziója jó.

$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	Planck-hossz	
$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$	Planck-idő	$10^{-44}\,s$
$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	Planck-tömeg	
$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$	Planck-energia	$1{,}22\cdot 10^{19}\,GeV$

Akkor nézzük vissza időben, a hőmérséklet egyre nagyobb...

Menjünk vissza olyan részre, hogy 100 GeV hőmérséklet legyen, akkor az olyan anyagi részecskék tudnak keletkezni

$\Rightarrow$ 176 GeV felett a SM összes részecskéje jelen lesz

DE 200 GeV-nél a p^+n^0-ok szétesnek kvarkokra és gluonokra

Menjünk fel 300 GeV-re

minden részecske jelen van, és mindegyik relativisztikus

A részecskeállatkert gázkeverékben van. Mi a hőmérsékletük

Akkor lesznek hőmérsékleti egyensúlyban és ezt így a KH-nak higgyük el, hogy 300 GeV-en ez igaz mindenre.

Kvantum stat kell.:

Az eloszlás fv.: $f_i = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}} \pm 1}$ 　 $+$: fermi-dirac, $-$: Bose-Einstein

μ_i: az az energia, amely a hőtartályból egy-egy kicsi rendszer részecskeszámát 1-gyel megváltoztatja „hozzáadott értéke"

ε_i: A részecske energiája. Tudjuk, hogy $\varepsilon_i^2 = m_i^2 + |p_i|^2$

g_i: Ha nagyítunk a szab. fokok számán, akkor $g_i f_i$ megadja, hogy h^3 fázistérfogatban hány db részecske van.

(A mi egységeinkben $\hbar = 1 \Rightarrow h = 2\pi$)

$\dfrac{g_i f_i}{(2\pi)^3}$: egységnyi fázistérfogatban lévő részecskeszám.

$$N_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}} \pm 1}\, d^3\underline{r}_i\, \overbrace{d^3\underline{p}_i}^{4\pi p_i^2\, dp_i}$$

ez fizikailag a térfogat, tehát kiintegrálható

V: univerzum általunk belátott része

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{p_i^2}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}} \pm 1}\, dp_i \quad \Leftarrow \text{részecskeszám-sűrűség}$$

$$E_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}} \pm 1}\, \varepsilon_i\, d^3\underline{r}_i\, d^3\underline{p}_i$$

$$\rho_i = \frac{E_i}{V} = \frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon_i p_i^2}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}} \pm 1}\, dp_i \quad \text{energiasűrűség}$$

nyomás statfizből: $P_p = \dfrac{pv}{3V} N_p = \dfrac{p}{3}\cdot\dfrac{pc^2}{\varepsilon} n_p = \dfrac{g_i}{(2\pi)^3}\displaystyle\int \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}} \pm 1}\, \frac{p^2}{3\varepsilon}\, d^3\underline{p}_i$

pl.: Számoljuk ki a foton szám sűrűségét:

relativisztikusan: $T_i \gg m_i, \mu_i(T)$

ekkor p dominál az [illegible] $\Rightarrow \varepsilon \approx p$

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_i}{T_i}} \pm 1}\, p_i^2\, dp_i \qquad x := \frac{p_i}{T_i} \qquad dp_i = T_i\, dx$$

$$= \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{e^x \pm 1} x^2 dx}_{\substack{-:\ 2\zeta(3) \\ +:\ \frac{3}{2}\zeta(3)}} = \begin{cases} \frac{g_b}{\pi^2} \zeta(3) T_b^3 \\ \frac{3 g_f}{4\pi^2} \zeta(3) T_f^3 \end{cases}$$

kapott összefüggés fotonra ma is igaz:

$$g_{foton} = 2, \quad T_{ma} = 2{,}725\,K$$

$$n_{foton}(ma) = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T_{ma}^3 = \underline{\underline{411 \frac{1}{cm^3}}}$$

MAGFIZ FEJEZETEK

5. előadás (03.12.)

Eloszlás: $f(\varepsilon, T) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} \pm 1}$ $\qquad \mu_\gamma = 0$

$\mu_{e^+}(T) = \mu_{e^-}(T)$

Multhonál:

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu_i}{T_i}} \pm 1} p_i^2 \, dp_i \approx \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_i}{T_i}} \pm 1} p_i^2 \, dp_i =$$

$$= \begin{cases} \frac{g_b}{\pi^2} \zeta(3) T_b^3 & \text{bozonokra} \\ \frac{3 g_f}{4\pi^2} \zeta(3) T_f^3 & \text{fermionokra} \end{cases}$$

Tehát $\boxed{n_\gamma = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T^3}$ (Az index nélküli T a foton hőmérséklete)

$$\rho_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_i}{T_i}} \pm 1} \varepsilon_i p_i^2 \, dp_i = \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^4 \int_0^\infty \frac{1}{e^x \pm 1} x^3 \, dx = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_b T_b^4 \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_f T_f^4 \end{cases}$$

$$P_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_i}{T_i}} \pm 1} \frac{p_i^2}{3} p_i^2 \, dp_i = \frac{1}{3} \rho_i$$

Általában $P = w\rho$

relativisztikus részecskékre $w = \frac{1}{3}$

a sugárzás nyomása az energiasűrűség $\frac{1}{3}$-a.

A teljes sugárzásra: $\rho = \Sigma_i \rho_i = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$

ahol $g_* = \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^4$ effektív degenerációs faktor.

Ez a Stefan-Boltzmann-törvény.

g_* kiszámításához tekintsük át a SM tartalmát!

$T = 300$ GeV-en minden részecske jelen van.

	generáció	polarizáció	szín	íz	anti van-e	f/b	
e, μ, τ	3	2	1	1	2	$\frac{7}{8}$	$12 \cdot \frac{7}{8}$
$\nu_e\ \nu_\mu\ \nu_\tau$	3	1* (*: ν bajos)	1	1	2	$\frac{7}{8}$	$6 \cdot \frac{7}{8}$
q	3	2	3	2	2	$\frac{7}{8}$	$72 \cdot \frac{7}{8}$
γ	1	2	1	1	1	1	2
$W^\pm\ Z^0$	1	3	1	3	1	1	9
g	1	2	8	1	1	1	16
Higgs	1	1	1	1	1	1	1

Tehát 300 GeV-en a szabadsági fokok:

$$g_* = 28 + \frac{7}{8} 90 = 106{,}75$$

A táblázatot sokáig nézték és úgy, mint az ábrák közé elméletet csak számításokat rendeltek

A felső táblán Lorentz-Teil-en (alul részeket nézni)

Mérték táblán (csak 3 van vázolva):

$\gamma, W^\pm, Z^0$	1	2	1	4	1	1
H	1	1	1	4	1	1

← mert 100 GeV fölött az EM és gyenge u.a.

← mert elektrogyenge elméletben 4-féle H-van.

„A Higgs 3 része lett a gyenge kH közvetítő részecskéi”

Nézzük meg 10 MeV-en g_* értékét!

Mely fajta elemi részecskék relativisztikusak?

$$\gamma, e^\pm, \nu_L$$

Mennyi a kémiai egyensúly?

Ezt az határozza meg, mennyire érzik közötti egyensúlyt

$$e^- + \nu \longleftrightarrow e^- + \nu$$

$$(n + \nu \longleftrightarrow p + e^-)$$

termikus reakció ráta: Γ amire vagyunk kíváncsiak.

Ha van egy n és egy ν, akkor mennyi a részecskeszám reakciók száma?

azaz a részecske élettartam: $\tau = \frac{1}{\Gamma}$

Egy másik definíció: A és B típusú részecskék vannak.
A részecskeszám S térfogategységre történő reakciók száma.

Akkor van T egyensúly, ha $\frac{\Gamma}{H} > 1$.
ha $\frac{\Gamma}{H} < 1$ akkor kifagyás.

H - Hubble-konstans.

Gyenge kH-ra $\Gamma_W \sim T^5$. Látjuk majd, hogy $H \sim T^2$

Ezért $\frac{\Gamma_W}{H} \sim T^3$

$e + \nu$ szórásra $\frac{\Gamma}{H} \approx \left(\frac{T}{1{,}5\,\text{MeV}}\right)^3$

T_{WD} gyenge lecsatolódási hőmérséklet

a bomlásra $n + \nu \longleftrightarrow p + e$ $\frac{\Gamma}{H} \approx \left(\frac{T}{0{,}8\,\text{MeV}}\right)^3$

T_{WFO} gyenge kifagyási hőmérséklet

Tehát ~~Be~~ $g_*(10\,\text{MeV}) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 4 + \frac{7}{8} \cdot 6 = 10{,}75$

Mi a g_* értéke ma? $\qquad T = \frac{2{,}725}{11600} \approx 0{,}23\,\text{MeV}$

γ relativisztikus

$e^\pm$ nem azok.

ν ?: tudjuk, hogy van tömegük, de nem teljesen nagy

TFH azok. (ha nem, akkor módosítani kell)

DE: ezek nem olyan T-jűek

$$g_*(ma) = 2 + \frac{7}{8}\cdot 6\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 \qquad \text{De mekkora } T_\nu \text{?}$$

kiszámoljuk majd, de előtte:

<u>nem relativisztikus részecskék:</u>

$T \ll m$, $m-\mu$ $\qquad m-\mu \sim \ln T$

$\varepsilon_i^2 = m_i^2 + p_i^2$ itt most a m dominál

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{p^2}{m^2}}\cdot m \approx m\left(1+\frac{p^2}{2m^2}\right) = m + \frac{p^2}{2m}$$

nem relativisztikusan eltűnik a különbség bozonok és fermionok között.

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}}\pm 1}\, p_i^2\, dp_i \approx \frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty e^{-\frac{m_i+\frac{p_i^2}{2m_i}-\mu_i}{T_i}}\, p_i^2\, dp_i =$$

$$= \frac{g_i}{2\pi^2}\, e^{-\frac{m_i-\mu_i}{T}}\int_0^\infty e^{-\frac{p_i^2}{2m_iT_i}}\, p_i^2\, dp_i = \qquad x_i^2 := \frac{p_i^2}{2m_iT_i}$$

$$= \square\,(2m_iT_i)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2}x^2\,dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{g_i}{2\pi^2}(2m_iT_i)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\, e^{-\frac{m_i-\mu_i}{T_i}} =$$

$$= \underline{g_i\left(\frac{m_iT_i}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_i-\mu_i}{T_i}}} \qquad \text{Maxwell–Boltzmann-eloszlás}$$

$$\rho_i = \frac{g}{2\pi^2}\, e^{-\frac{m_i-\mu_i}{T_i}}\int_0^\infty e^{-\frac{p_i^2}{2m_iT_i}}\left[m_i+\frac{p_i^2}{2m_i}\right]p_i^2\,dp_i = m_in_i + \frac{3}{2}T_in_i$$

$$\left[\int_0^\infty e^{-\frac{p_i^2}{2m_iT_i}}\frac{p_i^2}{2m_i}\,p_i^2\,dp_i = T_i(2m_iT_i)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2}x^4\,dx}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{8}} = \right]$$

$$= n_i\left(m_i + \frac{3}{2}T_i\right) \approx n_im_i \qquad \text{(a teljes anyagra)}$$

$$P_i = \frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu_i}{T_i}}\pm 1}\,\frac{p_i^2}{3\left(m_i+\cancel{\frac{p_i^2}{2m_i}}\right)}\,p_i^2\,dp_i = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}T_in_i = T_in_i \quad \leftarrow \text{ideális gáz állapotegyenlet}$$

kicsi

Tehát $P = w\rho$, mivel $n_iT_i \ll \rho_i$ tehát $w = 0$.

Mi történik, ha egy részecske kiesik az egyensúlyból?

$t = t_D$ időpillanatban megszűnik a kH.

Ekkor a részecskeszám: $N_D = \underline{\text{térfogat}} \frac{g}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_D - \mu_i}{T_D}}} p_D^2 \, dp_D$ -

A eseményhorizont távolság $d_H = 4 \cdot 10^{26}$ m, ekkora sugarú gömbbe kell

$= \frac{4\pi}{3}$ itt vandalt térben felhelyezte ☺

MAGFIZ FEJEZETEK

6. előadás (09.19.)

A lecsatolódott részecskeszám számítása: $t = t_D$

$$N_D = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \, R(t_D)^3 \, \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_D - \mu_D}{T_D}} \pm 1} \, p_D^2 \, dp_D$$

R_0: Hubble-sugár

$R(t_D)^3$: megmondja, hogy adott időpontban mekkora volt a sugár.

Az univerzum tágulása azt jelenti, hogy a nagyskálás fizika u.a., de a skála más.

$\Rightarrow$ A most hullámhossz a skála tágulását követi $\Rightarrow$ vöröseltolódás: $\lambda(t) \sim R(t)$

Mi van a lecsatolódás után: $t > t_D$

$$N(t) = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \, R(t)^3 \, \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p(t) - \mu(t)}{T}} \pm 1} \, p(t)^2 \, dp(t)$$

tudjuk, hogy $\frac{p(t)}{p_D} = \frac{R_D}{R(t)} \Rightarrow p(t) = p_D \frac{R_D}{R(t)}$

$$N(t) = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \, R(t)^3 \, \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_D \frac{R_D}{R(t)} - \mu(t)}{T}} \pm 1} \, \frac{R_D^3}{R(t)^3} \, p_D^2 \, dp_D =$$

$$= \frac{4\pi}{3} R_0^3 \, R_D^3 \, \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{p_D - \mu(t) \frac{R(t)}{R_D}}{T(t) \frac{R(t)}{R_D}}} \pm 1} \, p_D^2 \, dp_D$$

Akkor lesz az egyenlő az előzővel*, ha $T_D = T(t) \frac{R(t)}{R_D} \rightarrow T(t) = T_D \frac{R_D}{R(t)}$

$\mu_D = \mu(t) \frac{R(t)}{R_D} \qquad \mu(t) = \mu_D \frac{R_D}{R(t)}$

$$\Rightarrow \underline{T(t) \sim R(t)^{-1}}$$

*: azért van, mert lecsatolódás után nem lesz kölcsönhatás semmivel, így nem változik a szám

A fotonok lecsatolódása 0,5 MeV. Ez a BB után néhány évszázad. Azóta a hőmérséklet $R(t)^{-1}$-gyel változik

Entrópia

$$dE_i = T_i\, dS_i - p_i\, dV_i + \mu_i\, dN_i$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial E_i}{\partial T_i} dT_i = T_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial S_i}{\partial T_i} dT_i\right) - p_i\, dV_i + \mu_i\left(\frac{\partial N_i}{\partial T_i} dT_i + \frac{\partial N_i}{\partial V_i} dV_i\right) =$$

$$dV_i \underbrace{\left(\frac{\partial E_i}{\partial V_i} - T_i \frac{\partial S_i}{\partial V_i} + p_i - \mu_i \frac{\partial N_i}{\partial V_i}\right)}_{\doteq 0} + dT_i \underbrace{\left(\frac{\partial E_i}{\partial T_i} - T_i \frac{\partial S_i}{\partial T_i} - \mu_i \frac{\partial N_i}{\partial T_i}\right)}_{\text{az uni összegzés} = 0} = 0$$

Extenzív mennyiségekre $\frac{\partial E}{\partial V} \approx \frac{E}{V} = \rho$

$$\frac{S}{V} \approx s_i$$

$$\frac{N}{V} \approx n_i$$

$$\Rightarrow \rho_i - T_i s_i + p_i - \mu_i n_i = 0 \quad \Rightarrow \quad s_i = \frac{\rho_i + p_i - \mu_i n_i}{T_i}$$

relativisztikus részecskékre: $\mu \approx 0$, $P \simeq \frac{1}{3}\rho \quad \Rightarrow \quad s_i = \frac{4}{3}\frac{\rho_i}{T_i}$

nem relativisztikus: $P \simeq 0$, $\rho_i = m_i n_i \quad \Rightarrow \quad s_i = \frac{m_i - \mu_i}{T_i}\, n_i$, $\quad n_i = \left(\frac{m_i T_i}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_i - \mu_i}{T_i}}$

kifagyáskor kb. $\frac{m_e - \mu_e}{T_e} \approx 30 - \frac{3}{2}\ln T$

ezért $s_i \approx 0 \quad \Rightarrow$ Az univerzum entrópiáját a relativisztikus részecskék adják (sugárzás)

A teljes entrópia:

$$s = \sum \frac{4}{3}\frac{\rho_i}{T_i} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3$$

g_{*s} az entrópiához tartozó effektív deg. faktor.

és $g_{*s} = \sum_b g_b\left(\frac{T_b}{T}\right)^3 + \frac{7}{8}\sum_f g_f\left(\frac{T_f}{T}\right)^3$

nő a múltba menve

$$S(T) = \frac{4\pi}{3} R_0^3\, R(t)^3\, \frac{2\pi^2}{45}\, g_{*s}(T)\, T^3$$

A mostani belátható univerzum entrópiája: $R_0 = 4\cdot 10^{26}$ m

$R(t) = 1$

$g_{*s}(\text{ma}) = 3{,}91$

$T_{ma} = 2{,}725$ K

Becslés: $S_{ma} \approx 10^{9}$

van hamar az $R(t)^3 T^3$ faktor. az konstans, $g_{*s}(T)$ utoljára 0,5 MeV-nél váltott.

$\Rightarrow$ az univerzum entrópiája nem változik

következik le is csak a T.K.-ban.

$$\boxed{g_{*s}(T)\, R(t)^3\, T^3 = \text{konst}}$$

$W = e^{10^{90}}$

$\frac{dS}{S} \approx 0$

Nézzünk egy alkalmazást:

Legyen $T = 1,5$ MeV a releváns részecskék: $\gamma, e^{\pm}, \nu$

hőmérséklet: T_1, skálafaktor: R_1

$$g_{*s} R^3 T^3 = \left(2 + \frac{7}{8}\cdot 4\right) R_1^3 T_1^3 + \frac{7}{8}\cdot 6 R_1^3 T_1^3$$

$T < 1,5$ MeV : ν lecsatolódik, innentől $T_\nu R = \text{konst}$

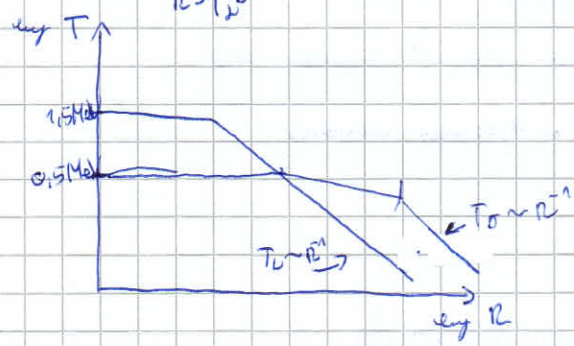
$T < 0,5$ MeV $e^{\pm}$ megszűnik létezni.

Legyen a hőmérséklet T, a skálafaktor R

$$g_{*s} R^3 T^3 = 2\cdot R^3 T^3 + \frac{7}{8}\cdot 6 \underbrace{R^3 T_\nu^3}_{= R_1^3 T_1^3}$$ a kettő megegyezik

Tehát az első tagnak is meg kell egyeznie:

$$\frac{11}{2} \underbrace{R_1^3 T_1^3}_{R^3 T_\nu^3} = 2 R^3 T^3 \Rightarrow \frac{T_\nu}{T} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3}$$



$$T_\nu(\text{ma}) = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\text{ma}} \approx 1,9\,\text{K}$$

Mennyi a g_* ma?

$$g_*(\text{ma}) = 2 + \frac{7}{8}\cdot 6 \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 \approx 3,36$$

$\frac{4}{11}$

$$g_{*s}(\text{ma}) = 2 + \frac{7}{8} 6 \cdot \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^3 \approx 3,91$$

$$s(\text{ma}) = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s}(\text{ma}) T_{\text{ma}}^3 \approx 2900 \frac{1}{\text{cm}^3}$$ $S_{\text{ma}} \approx 10^{90}$

$$n_\nu = \frac{3 g_\nu}{4\pi^2} \zeta(3) T_\nu^3 \approx 56 \frac{\text{db}}{\text{cm}^3}$$

még ezen túl kéne tudni, hogy függ $R(t)$ az időtől?

Az univerzum mozgásegyenlete

Az Einstein-egyenletek helyett, a HF-t a metrikán látjuk

Robertson-Walker-metrikán: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right]$$ ez egy homogén, izotróp alig ...

k: görbület, 3 féle érték $\pm 1, 0$.

Beírva az Einstein-egyenletekbe, egy egyszerű egyenletet kapunk:

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$
$$\frac{\ddot R}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$
Friedmann-egyenletek

A vöröseltolódás definíciója: $\dfrac{R_{ma}}{R(t)} = z(t) + 1$

Mivel $\lambda(t) \sim R(t)$ ezért $\dfrac{\lambda_{ma} - \lambda(t)}{\lambda(t)} = z(t)$

nagyon az interpretáció u.a., de a fizikai folyamat másfajta így.

A foton hullámhossza változik nem a Doppler effektus

$\dfrac{\dot R(t)}{R} =: H(t)$ Hubble-paraméter

A első egyenlet: $\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\underbrace{\left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right)}_{\rho'} - \frac{k}{R^2} \Rightarrow \rho' = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}$

beírva a másikba: $\dfrac{\ddot R}{R} = -\dfrac{4\pi G}{3}\left(\rho' - \dfrac{\Lambda}{8\pi G} + 3p - \dfrac{\Lambda}{4\pi G}\right) = -\dfrac{4\pi G}{3}(\rho' + 3p')$

ahol $p' = p - \dfrac{\Lambda}{8\pi G}$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \Rightarrow p_\Lambda = w\rho_\Lambda \text{ ahol } w = -1$$

Tehát a Friedmann egyenlet felírható Λ nélkül is, ρ' és p'-vel.

~~Azaz~~ $H^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho - \dfrac{k}{R^2}$ ha $k = 0$ $\rho = ?$ ← kritikus sűrűség

$\rho_{krit} = \dfrac{3H^2}{8\pi G}$ mennyi ez ma? $H_0 = h \cdot 100 \dfrac{km/s}{Mpc}$

$\rho_{krit}(ma) \approx 1{,}88 \cdot 10^{-29} h^2 \dfrac{g}{cm^3}$

Állítólag az univerzum görbülete kb. 0, tehát az univerzum sűrűsége ennyi

A Friedmann-egyenlettel csökkentve:

$$2\frac{\dot R}{R}\frac{\ddot R R-\dot R^2}{R^2}=\frac{8\pi G}{3}\dot\rho+\frac{2k}{R^3}\dot R$$

$$\frac{\ddot R}{R}-\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)+\frac{\Lambda}{3}-\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{k}{R^2}-\frac{\Lambda}{3}$$

ami marad: $\frac{\dot R}{R}\left(-4\pi G\rho-4\pi G p\right)=\frac{4\pi G}{3}\dot\rho \Rightarrow \underline{\dot\rho=-3\frac{\dot R}{R}(\rho+p)}$

Állapotegyenlet sugárzásra:

$$p=\frac{1}{3}\rho$$

$$\dot\rho=-3\frac{\dot R}{R}\left(\rho+\frac{1}{3}\rho\right)=-4\frac{\dot R}{R}\rho \Rightarrow \dot\rho R+4\dot R\rho=0 \Rightarrow \frac{1}{R^3}(\rho R^4)^{\cdot}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho R^4=\text{konst} \Rightarrow \underline{\rho_{\text{sug}}\sim R^{-4}}$$

Állapotegyenlet anyagra:

$$p=0$$

$$\dot\rho=-3\frac{\dot R}{R}\rho \Rightarrow \dot\rho R+3\dot R\rho=0 \Rightarrow \frac{1}{R^2}(\rho R^3)^{\cdot}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho R^3=\text{konst} \Rightarrow \underline{\rho\sim R^{-3}}$$

Állapotegyenlet Λ-ra:

$$p=-\rho$$

$$\dot\rho=-3\frac{\dot R}{R}\cdot 0=0 \Rightarrow \rho=\text{konst}=\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

MAGFIZ FEJEZETEK

7. előadás (03.26.)

A jelenlegi univerzum állapotegyenlete:

$P = w\,\rho$ alak $w_{s.e.} = -1$ a jelenlegi mérhető érték

$$\left(\text{emlék.: } w_{sug} = \tfrac{1}{3},\quad w_{an} = 0,\quad w_{\Lambda} = -1 \right)$$

Nem tudjuk mi ez a sötét energia

Mikor volt egyensúlyi pontban:

$$\rho_a \sim R^{-3} \qquad \rho_{sug} \sim R^{-4}$$

$$\frac{\left(\frac{\rho_a}{\rho_s}\right)_{ma}}{\left(\frac{\rho_a}{\rho_s}\right)_{eq}} = \frac{R_{ma}}{R_{eq}} = z_{eq} + 1$$

Az eq defje: $\rho_a = \rho_s$

$$\Rightarrow \quad z_{eq} + 1 = \left(\frac{\rho_a}{\rho_s}\right)_{ma}$$

Tudjuk, hogy $\rho_s(ma) = \frac{\pi^2}{30} g_*(ma)\, T_{ma}^4 = 7{,}8 \cdot 10^{-34} \frac{g}{cm^3}$

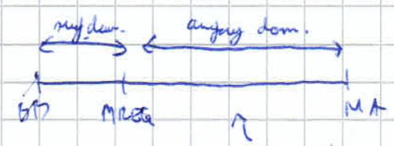
$$g_*(ma) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 6 \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 = 3{,}36$$

$$\rho_a(ma) = \Omega_m(ma) \cdot \rho_{krit}(ma) = 0{,}3 \cdot 10^{-29} \frac{g}{cm^3}$$

Az egyensúlyi állapothoz tartozó vöröseltolódás:

$$\underline{z_{eq} = 3890}$$

Mennyi idős volt a világunk és akkor mennyi T volt?



$$R \sim t^{2/3}$$

$$T \sim R^{-1}$$

$$\frac{R_{ma}}{R(t)} = \frac{t_{ma}^{2/3}}{t^{2/3}} \Rightarrow t = \frac{t_{ma}}{(z(t)+1)^{3/2}}$$

$z+1$; $t_{ma} = 13{,}7 \cdot 10^9$ év

$$\Rightarrow \underline{t_{eq} = 58000 \text{ év}}$$

$$\frac{T(t)}{T_{ma}} = \frac{R_{ma}}{R(t)} = z(t)+1 \Rightarrow T(t) = T_{ma}(z(t)+1)$$

$$\Rightarrow T_{eq} = 0{,}9 \text{ eV}$$

így tehát: $z(t_{ma}) = 0$
$z(0) = \infty$

Lépjünk vissza a sug. dominálásra

mi legyen a kezdőpont?

Nézzük ha $T = 1$ MeV, $t = ?$

az entrópiamegmaradást: $g_{*s} R^3 T^3 = \text{konst.}$

$$g_{*s}(1\,\text{MeV})\, R_{1\,\text{MeV}}^3\, T_{1\,\text{MeV}}^3 = g_{*s}(eq)\, R_{eq}^3\, T_{eq}^3$$

$g_{*s}(1\,\text{MeV}) = (2 + 7/8 \cdot 4 + 7/8 \cdot 6)$; $g_{*s}(eq) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 6 \left[\frac{T_\nu}{T}\right]^3 \approx 3{,}91$

$$\frac{R_{1\,\text{MeV}}}{R_{eq}} = \left(\frac{g_{*s}(eq)}{g_{*s}(1\,\text{MeV})}\right)^{1/3} \frac{T_{eq}}{T_{1\,\text{MeV}}} \Rightarrow t_{1\,\text{MeV}} = t_{eq} \left(\frac{g_{*s}(eq)}{g_{*s}(1\,\text{MeV})}\right)^{2/3} \left(\frac{T_{eq}}{T_{1\,\text{MeV}}}\right) \approx 1\,\text{s}$$

t_{eq}: 3 év ; $\frac{3{,}91}{10{,}75}$; T_{eq}: 0,9 eV ; $T_{1\,\text{MeV}} \approx 1$ MeV

Tehát 1 MeV-nél 1 s volt. ezt könnyű megjegyezni

Ismétlés: $T \sim t^{-1/2}$ $\Rightarrow$ 1 s $\leftrightarrow$ 1 MeV

$t \sim T^{-2}$

$T = 0{,}1$ MeV $\rightarrow t = 100$ s

$t = 0{,}01$ s $\rightarrow T \sim 100$ MeV

Kozmikus kalendárium:

	t	T	z
ma	$13{,}7\cdot 10^{9}$ év	$\frac{2{,}725}{11600}$ eV	0
rekombináció (semleges atomok)	$3{,}8\cdot 10^{5}$ év	0,26 eV	1100
anyag-sugárzás egyensúly	$5{,}8\cdot 10^{4}$ év	0,9 eV	3850
első könnyű elemek (BBN – nukleoszintézis)	100 s	0,1 MeV	$4\cdot 10^{8}$
kvark-hadron fázisátmenet	25 μs	200 MeV	
elektrogyenge fázisátmenet	10^{-10} s	100 GeV	
GUT (grand unified theory)	10^{-32} s	10^{15} GeV	
Planck-kor	10^{-44} s	10^{19} GeV	

(Az anyagból mikor sugárzó, ezeknek megfelelően számolhatók t és z)

↑ eddig van letesztelve az egész

↓ spekuláció

ezelőtti időpontban a SM tuti rossz. (már a GUT sem biztos)

Hogyan tudjuk z-ből kiszámolni a távolságot?

A univerzum metrikája: $ds^2 = -dt^2 + R(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right]$

gömbi koordinátákkal a geodetikust a $d\varphi = 0$ definiálja (ld.: BF-Tóth tétel)

az univerzum forgási szimmetriája alapján $\theta = \text{konst}$ $\varphi = \text{konst}$.

$$d_0(ma) = \int_0^{r_0} ds = R(t_{ma}) \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Mivel az időhöz nézve szeretjük, ezért nézzük meg a fényt. t az ugyanis geodetikus.

fény esetén: $-dt^2 + R(t)^2 \frac{dr^2}{1-kr^2} = 0 \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{dt}{R(t)}$

$$\Rightarrow d_0(ma) = R(t_{ma}) \int_t^{t_{ma}} \frac{dt'}{R(t')} = t_{ma}^{2/3} \int_t^{t_{ma}} t'^{-2/3}\, dt' = 3t_{ma}\left(1 - \frac{t^{1/3}}{t_{ma}^{1/3}}\right) =$$

$$= 3t_{ma}\left(1 - \left(\frac{R}{R_{ma}}\right)^{1/2}\right) = 3t_{ma}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{z(t)+1}}\right)$$

Ha valamit látunk $z=8$-nál, annak távolsága: $d = 3\cdot t_{ma}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 3\cdot 13{,}7\cdot 10^{9}$ év $\cdot \frac{2}{3} = 2\cdot 13{,}7\cdot 10^{9}$ fényév

Milyen messze látjuk a BB-t? (horizonttávolság)

$$d_H(t) = R(t)\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \longrightarrow \text{sug. dom: } R \sim t^{1/2} \quad = t^{1/2}\int_0^t t'^{-1/2}\,dt' = \underline{2t}$$

$$\searrow \text{ anyag. dom. } \frac{R(t)}{R(t')} = \frac{t^{2/3}}{t'^{2/3}} \quad = t^{2/3}\int_0^t t'^{-2/3}\,dt' = 3t$$

ha feltételezzük, hogy a legnagyobb részt anyag dominált, akkor $d_H = 3 \cdot 13{,}7 \cdot 10^9$ fé $= 41 \cdot 10^9$ fé

valódi: $46 \cdot 10^9$ f.é

„Az, hogy az univerzum hogy [illegible], az világos 100%-ra, de a fizikusok 90%-a [illegible] [illegible] lépett el”

Big bang nukleoszintézis

Hogyan jöttek létre ma a könnyű elemek?

Kell egy elég picin időskála ($a\ t \sim T^{-2}$ nem elég jó)

Hol kell ez? MeV-os tartományban: sugárzás dominált kor

A nukleonok és atommagok nem relativisztikusak

Sugárzás kontrollált $\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\pi^2}{30} g_* T^4$ $\qquad R = \alpha t^{1/2}$

$\dot{R} = \alpha \frac{1}{2} t^{-1/2} \Rightarrow \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{2} t^{-1}$

$\frac{1}{2} t^{-1} = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45}} \sqrt{G g_*}\, T^2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{45}{4\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{g_*(t)}} \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{T}{MeV}\right)^{-2} MeV^{-2}$

$m_P = E_P = 1{,}22 \cdot 10^{19}\, GeV$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{45}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{g_*(t)}} \left(\frac{T}{MeV}\right)^{-2} \frac{1}{1{,}22\cdot 10^{19}\, GeV\, MeV^2} =$$

$$= 2{,}4 \frac{1}{\sqrt{g_*(t)}} \left(\frac{T}{MeV}\right)^{-2} s$$

Tudjuk, hogy $T_{WFO} = 0{,}8\, MeV$ (gyenge lefagyás) $\quad t_{WFO} = ?$

$g_*(WFO) = (\gamma, e^\pm, \nu\ \text{van}) = 2 + \frac{7}{8}\cdot 4 + \frac{7}{8}\cdot 6 = 10{,}75$

Ebből $t_{WFO} = 1{,}1\, s$.

A nukleoszintézis: $T_{NS} = 0{,}07\, MeV$

$g_*(NS) = 2 + \frac{7}{8}\cdot 6 \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 \simeq 3{,}36$

$t_{NS} = 269\, s$

barion-foton arány: $\eta = \frac{n_B(T)}{n_\gamma(T)} = \frac{\overset{\text{„megmarad" (Wigner)}}{N_B(T)}}{\frac{4\pi}{3} R_0^3 R(T)^3 \cdot \frac{2}{\pi^2}\zeta(3) T^3} = \frac{N_B(t_m)}{\frac{4\pi}{3} R_0^3 R(t_m)^3 \frac{2}{\pi^2}\zeta(3) T_m^3 \frac{g_{*s}(t_m)}{g_{*s}(T)}} =$

entrópiamegmaradás miatt
$g_{*s}(T) R^3(T) T^3 = \text{const}$

$$= \eta(t_m) \frac{g_{*s}(T)}{g_{*s}(t_m)}$$

$g_{*s}(10\, MeV) = 2 + \frac{7}{8}\cdot 4 + \frac{7}{8}\cdot 6 = 10{,}75 \qquad g_{*s}(t_m) = 2 + \frac{7}{8}\cdot 6 \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^3 \simeq 3{,}91$

Feltesszük, hogy η konstans.

Becsüljük meg η értékét!

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{N_B m_N}{V n_\gamma m_N} = \frac{\rho_B}{n_\gamma m_N} = \frac{\Omega_B \rho_{krit}}{n_\gamma m_N}$$

$$\eta(ma) = \frac{\Omega_B(ma)\, \overbrace{\rho_{krit}(ma)}^{\approx 1{,}88\cdot 10^{-29}\, h^2 \frac{g}{cm^3}}}{\underbrace{n_\gamma(ma)}_{411\,\frac{1}{cm^3}}\; \underbrace{m_N}_{938\,MeV = 1{,}67\cdot 10^{-24}\,g}} = 2{,}7\cdot 10^{-8}\, \underbrace{\Omega_B}_{0\le 1}\, \underbrace{h^2}_{0\le\ \le 1}$$

η egy kicsi szám. $\sim 10^9$ foton jut egy barionra.

Amint most kerestük mi volt korábban, de részecskeszámot az atomokra nukleáris statisztikus egyensúly: Z db p + $(A-Z)$ db n $\rightleftarrows A + \gamma - k$

mivel a kémiai pot. egyenlő: $Z\cdot\mu_p + (A-Z)\mu_N = \mu_A$

$$n_A = g_A \left(\frac{m_A T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_A-\mu_A}{T}} \qquad n_p = \underbrace{g_p}_{2} \left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_p-\mu_p}{T}} \qquad n_n \text{ u.így. } g_n = 2$$

$$e^{\frac{\mu_A}{T}} = e^{\frac{Z\mu_p}{T} + \frac{(A-Z)\mu_n}{T}}$$

Legyen $m_p = m_n = m_N$

$m_A = A\cdot m_N$

$$n_A = g_A A^{3/2}\left(\frac{m_N T}{2\pi}\right)^{3/2}\cdot \frac{1}{2^Z}\, n_p^Z \left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{3/2 Z}\cdot\frac{1}{2^{A-Z}}\, n_n^{A-Z}\left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{3/2(A-Z)} e^{\frac{-m_A + Zm_p + (A-Z)m_n}{T}} =$$

$$= g_A A^{3/2}\, 2^{-A}\, n_p^Z\, n_n^{A-Z}\left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{3/2(A-1)} e^{\frac{B_A}{T}}$$

B_A: kötési energia.

Egy hasznos mennyiség: Tömegarány: $X_A = \frac{A n_A}{n_B}$ ahol $n_B = n_p + n_n + \sum_A A\cdot n_A$

tehát, hogy $\sum_A X_A = 1$

X_A: a teljes barionok mekkora hányad része van A atommagban:

térjünk át n-ről X-re:

$$X_p = \frac{n_p}{n_B} \qquad X_n = \frac{n_n}{n_B}$$

$$X_A = \frac{1}{n_B}\, g_A A^{5/2}\cdot 2^{-A}\, X_p^Z n_B^Z\, X_n^{A-Z} n_B^{A-Z}\left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{3/2(A-1)} e^{B_A/T} =$$

$$= g_A A^{5/2}\, 2^{-A}\, X_p^Z\, X_n^{A-Z}\left(\frac{2}{\pi^2}\zeta(3)\right)^{A-1}(2\pi)^{3/2(A-1)}\left(\frac{T}{m_N}\right)^{3/2(A-1)}\eta^{A-1}\, e^{B_A/T}$$

Azt hogy egy atommag megszületett-e, az fejezi ki, hogy X_A mennyire kicsi

Az utolsó 3 tényezőn múlik, mert a többi $\mathcal{O}(1)$ nagyságú

Def: A atom nukleoszintézis hőmérséklete ahol $\left(\frac{T}{m_N}\right)^{3/2(A-1)}\eta^{A-1}e^{B_A/T} = 1$

(kicsit túltoljuk, de csak néhány %-a hiba) néhány atommag:

	J	g_A	B_A (MeV)
d	1	3	2,22
^3H	1/2	2	8,5
^3He	1/2	2	7,7
^4He	0	1	28,3

Alkalmazom a formulát

^4He-ra $A=4$, $B_A=28{,}3$

$$\frac{3}{2}(A-1)\ln\frac{T}{m_N}+(A-1)\ln\eta+\frac{B_A}{T}=0$$

$$T=-\frac{B_A/(A-1)}{\ln\eta+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{T}{m_N}\right)}=\frac{B_A/(A-1)}{\ln\eta^{-1}+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{m_N}{T}\right)}$$

iterációval megoldható.

Akik először elvégezték (D. Schramm, M Turner) nem ismerték η-t.

$\eta=2{,}7\cdot10^{-8}\,\Omega_B h^2$ vegyük először $2{,}7\cdot10^{-8}$-t

kiszámolják a ^4He keletkezését, és azt mérni lehet, és ebből meghatározzák η-t.

Mi felhasználjuk, hogy $\eta=6\cdot10^{-10}$

iteráció: $T^{(0)}=1\,\mathrm{MeV}$

$$T^{(1)}=\frac{28{,}3\,\mathrm{MeV}/3}{\ln\left((6\cdot10^{-10})^{-1}\right)+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{938\,\mathrm{MeV}}{1\,\mathrm{MeV}}\right)}=0{,}299\,\mathrm{MeV}$$

$T^{(2)}=\dots=0{,}2833\,\mathrm{MeV}$

$T^{(3)}=0{,}2826$ $\Rightarrow$ $T_{NS}^{^4He}=0{,}28\,\mathrm{MeV}$

ugyanígy: $T_{NS}^{d}=0{,}07\,\mathrm{MeV}$

Miért sokkal kisebb sokkal, mint a kötési energia?

mat. ok: a [illegible] képletben [illegible] kell a [illegible]

fizikai ok: 3. ábra alapján: BE eloszlás és FD eloszlás metszésének betöltöttsége

Állítás: $T_{NS}^{^4He}$ és T_{NS}^{d} [illegible] [illegible].

Miért? mert nem csak úgy jön létre a ^4He, hanem lépésenként

A keletkezési reakciók:

$n+p\leftrightarrow d+\gamma$

$d+p\leftrightarrow {}^3He+\gamma$

$d+d\leftrightarrow {}^3He+n$

$d+d\leftrightarrow {}^3H+p$

$^3He+n\leftrightarrow {}^3H+p$

$d+{}^3H\leftrightarrow {}^4He+n$

$d+{}^3He\leftrightarrow {}^4He+p$

$^3H+{}^4He\leftrightarrow {}^7Li+\gamma$

$^3He+{}^4He\leftrightarrow {}^7Be+\gamma$

$^7Li+p\leftrightarrow 2\,{}^4He$

$^7Be+n\leftrightarrow {}^7Li+p$

túlnyomórészt ez p-n számok lépései végére.

MAG-FIZ - FEJEZETEK

9. előadás (04.09.)

Miért csak a múltban felírt reakciók mennek végbe?

A töltésekkel $Z_1 Z_2$ szorzatával exp. csökken a HKM.

elvileg kellene n^0 befogás, de annak nincs valószínűsége elég.

$T^{He}_{ns} = 0{,}28\,\mathrm{MeV}$

de $T^{d}_{ns} = 0{,}07\,\mathrm{MeV}$ tehát 0,28 MeV-on kéne lenni ^4He, de még deutérium, tehát az sem jön létre

feloldás: 0,28 MeV alatt nincs termikus egyensúly.

⇒ az értékek eltávolodnak az egyensúlyi helyzettől.

Amikor megérkezünk 0,07 MeV-re, hirtelen megindulnak a reakciók.

Mivel ^4He a legnagyobb kötési energiájú, az akar leggyakrabban létrejönni

⇒ minden reakció a ^4He létrejöttét szolgálja.

Áll.: Az összes létező n^0 befogódik ^4He-be.

Feladat: $\frac{n}{p}$ arány kiszámolása 70 keV-on.

3 periódus:

1.) $T > 0{,}8\,\mathrm{MeV}$ $\quad n+\nu \leftrightarrow p+e^-$ egyensúly ⇒

$$\Rightarrow \frac{n}{p} = \left(\frac{n}{p}\right)_{es} = \frac{2\left(\frac{m_n T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_n-\mu_n}{T}}}{2\left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_p-\mu_p}{T}}} \approx e^{-\frac{m_n-m_p}{T}} e^{+\frac{\mu_n-\mu_p}{T}} = *$$

mivel $\mu_n+\mu_\nu = \mu_p+\mu_e \Rightarrow \mu_n-\mu_p = \mu_e-\mu_\nu$ $\qquad Q = m_n - m_p \approx 1{,}3\,\mathrm{MeV}$

$$* = e^{-Q/T} e^{+\mu_e/T} e^{+\mu_\nu/T}$$

Állítás: $\mu_e/T \ll 1$ ha T elég nagy

$\mu_\nu/T \ll 1$ mindig

tehát: $\frac{n}{p} \approx e^{-Q/T}$ $\quad$ (≈ Boltzmann-faktor)

másrészt: $\left(\frac{x_n}{x_p}\right)_{es} = \left(\frac{n}{p}\right)_{es}$

továbbá: $x_n + x_p = 1$

$$\Rightarrow \quad x_n = \frac{e^{-Q/T}}{1+e^{-Q/T}}, \quad x_p = \frac{1}{1+e^{-Q/T}}$$

pl.: $T=0.8\,\mathrm{MeV}$-on: $\quad x_n = 0{,}16,\ x_p = 0{,}84 \Rightarrow \frac{n}{p} \approx \frac{1}{5}$

②

$0{,}07\,\text{MeV} < T < 0{,}8\,\text{MeV}$

$$x_n(t) = x_n(t_{WFO})\, e^{-\frac{t-t_{WFO}}{\tau_n}}$$ (n bomlás miatt exp bomlási tag)

ahol $\tau_n = (887 \pm 2)\,s$

$T = 0{,}07$ MeV-nél:

$t_{NS} = 269\,s$

$$x_n(t_{ns}) = 0{,}16 \cdot e^{-\frac{269-1{,}1}{887}} = 0{,}125 \quad \Rightarrow \quad x_p = 0{,}875$$

$\frac{n}{p} = \frac{1}{7}$ 8 nukleonból $7p^+$ és $1n^0$

③

$T = 0{,}07$ MeV

Ekkor az összes n^0 bekötődik ^4He-be.

$$X_{^4He} = \frac{4\, n_{^4He}}{n_B} = \frac{4 \cdot \frac{n_n}{2}}{n_B} = \frac{2 n_n}{n_B} = 2 x_n = \underline{0{,}25}$$

$\Rightarrow$ Ekkor a tömeg 75%-a p^+

25% ^4He lett, és nyomokban d, ^3He, ^3H, ^7Li, ^7Be.

a csillagok kialakulásáig ez maradt az arány.

Milyen input paramétereket használtunk, és hogy függ ettől az arány?

η kell T_{ns} meghatározásához

τ_n is kell a bomlástv. miatt. (ez már precízen ismert)

N_ν is kell mert az idő kiszámításánál g_* is kellett.

ebben olyan részecskék is vannak, amiket még nem is ismerünk

Ha η nagyobb, T^d_{ns} nagyobb $\Rightarrow t_{ns} \downarrow \Rightarrow t_{ns} - t_{WFO} \downarrow \Rightarrow X_{^4He} \uparrow$

Ha $\tau_n \uparrow \Rightarrow$ lassabb bomlás $\Rightarrow$ több n_0 $\Rightarrow X_{^4He} \uparrow$

Ha $N_\nu \uparrow \Rightarrow$ gyorsabb hűlés $\Rightarrow t_{ns} - t_{WFO} \downarrow \Rightarrow X_{^4He} \uparrow$

mérési ábrák diszkussziója

Csillagok nagyfizikai működése

A sugárzási teljesítmény L (luminozitás)

Az élettartam: $t_é$ $\Rightarrow$ $L \cdot t_é$ a kisugárzott energia $\sim M$

mérések alapján $L \sim M^{3,5}$

behelyettesítve: $t_é \sim M^{-2,5}$

A Nap élettartama tudjuk, hogy 10^{10} év

M	t	végállapot
$1 M_☉$	10^{10} év	fehér törpe
$8 M_☉$	$5 \cdot 10^{7}$ év	↕ Super Nova (kémiai elemtermelés)
$30 M_☉$	$2 \cdot 10^{6}$ év	fekete lyuk

Az elem-gyakoriság grafikon kb egyenes

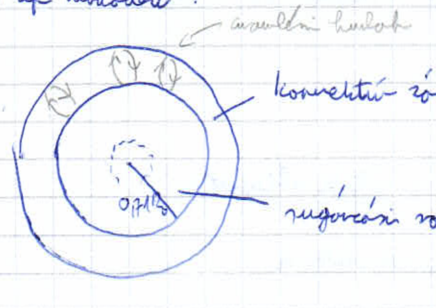
$\Rightarrow$ egy arány, mert töltött részecskék reakciója HKM-ig

De a Fe után nem egyenes, lassan lecseng

$\Rightarrow$ nem töltött részecske reakció, hanem neutronbefogás

A Nap születésekor az arányok: $H: 71\%$
$He: 27\%$
$M: 2\%$ ← csak kicsit változott.

Nap működése:



sugárzási zóna (radiatív, konduktív, konvektív)
sugárzás vezetés áramlás

a nagy zónában a fotonok a töltött részecskékkel ütköznek, és véletlen bolyongás a nagy zónában: 10 0000 év alatt jut ki

lassan tudjuk milyik hajtja valóban meg:

- a konvektívhez nagyon nagy T grad kell.
- a radiatívhoz nagy opacitás kell.
  (a csillagok az ionizáltság miatt van)

MAGFIZ FEJEZETEK

10. előadás (04.16.)

Nap működése

sugárfüggő tömeg: $M(r)$

$$M(r+dr)-M(r) = 4\pi r^2 dr\,\rho(r) \Rightarrow \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \qquad (1)$$

Gravit. erőivel a nyomáskülönbség tart ellen:

$$G\frac{M(r)\,4\pi r^2 dr\,\rho(r)}{r^2} = -\big(P(r+dr)-P(r)\big)4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -G\frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \qquad (2)$$

Luminozitás: Az egységnyi felületen átmenő energia mennyisége:

$$L(r+dr)-L(r) = \varepsilon(r)\cdot 4\pi r^2 dr\,\rho(r) \Rightarrow \frac{dL}{dr} = \varepsilon(r)4\pi r^2\rho(r) \qquad (3)$$

A sugárzás és konvekciós transzportra írnak a $\frac{dT}{dr} = \dots$ összefüggéseket (4), (5)

A kulcs az opacitás $(\kappa(r))$
ez az intenzitás állandóság: $\frac{dI}{dr} = -I(r)\kappa(r)\rho(r)$

Kezdőfeltétel: H 71%
^4He 27%
M 2% Ha lefuttatjuk, az jól leírja a Nap evolúcióját

Helioszeizmológia: Az utóbbi időben a Napban terjedő hanghullámokból meg tudjuk mérni az anyag sugárfüggését.

Minket meghatározóan az $\varepsilon(r)$ érdekel, hogy hogy termelődik az energia.

- p–p lánc

Mi történhet? $p+p$, $p+{}^4He$, ${}^4He+{}^4He$ } Egyiknek nincs kötött állapota.

$A = 5$ és 8 tömegszámú izotóp egyáltalán nem létezik

De $p \to n + e^+ + \nu$ végbemehetne és a $p+n$ létezik, de szabad protonnál ilyen nincs, mert a proton stabil

Az kell, hogy egy másik nukleon erős KH erőt érezze, de ehhez le kell győzni a Coulomb-gátat. Ez a $p+p$-nél a legkisebb.

termikus energia: $15\cdot 10^6\,K = 1{,}3\,keV$

Coulomb-gát: $1{,}44\,MeV$ ez hatalmas gát $\Rightarrow$ lassú reakció

és egyszerre kell a $p^+ \to n$-nal végbemenni.

bomlási valószínű: $p+p \to d + e^+ + \nu_{pp}$ iszonyú lassú.

ritka eset: $p+e^-+p \to d+\nu_{pep}$ ez még ritkább

Miért van deutérium:

A $p+d$ megint valószínűbb, mint a $d+{}^3He$

A $d+d$ még lehetne, de valószínűleg kevés van.

$d+p \rightarrow {}^3He+\gamma$ ez gyors, ezért a d rögtön elfogy $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ d nincs a Napban.

Miből épülhet fel a ${}^4He$?

${}^3He + {}^3He \rightarrow {}^6Be$ több energia kéne

$\rightarrow {}^5Li + p$ ez még mindig nem stabil

$\rightarrow {}^4He + 2p$ ez már jó

${}^3He + p \rightarrow {}^4He + e^+ + \nu_{hep}$

${}^3He + {}^4He \rightarrow {}^7Be + \gamma$

A Coulomb-gát 6, 3, 16.

De a másodikat a gyenge, a harmadikat az EM irányítja, ezért az első lesz a legerősebb

Az erős kH σ-ja a legnagyobb

rátái: 86%, 10^{-5}%, 14%

A ${}^7Be$ elektront bomlik: ${}^7Be + e^- \rightarrow {}^7Li + \nu_{7Be}$ $T_{1/2} = 53$ nap

de ez alatt reagálhat is: ${}^7Be + p \rightarrow {}^8B + \gamma$

A Li is befogott p-t ${}^7Li + p \rightarrow {}^8Be$

De 8-as izotóp nincs $\Rightarrow$ ${}^8Be \rightarrow {}^4He + {}^4He$

${}^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_{8B}$

Tehát minden reakció a ${}^4He$-be visz. (Az időskála a $p+p$-től függ)

- CNO ciklus

A nehezebb elemekből ugyanolyan arányban van, mint a Földön, csak itt már H és He.

Ezeket katalizátorként használja:

${}^{12}C + p \rightarrow {}^{13}N + \gamma$ a ${}^{13}N$ instabil ezért tovább bomlik

${}^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu_{13N}$ ez már stabil, így tovább reagál

${}^{13}C + p \rightarrow {}^{14}N + \gamma$

${}^{14}N + p \rightarrow {}^{15}O + \gamma$ ez is bomlik

${}^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu_{15O}$

${}^{15}N + p \rightarrow {}^{16}O + \gamma$ valószínűbb végbemenne, de az erős folyamat

$\rightarrow {}^{12}C + {}^4He$ gyorsabb, mint a EM.

Melyik a leglassabb? Ahol $Z_1 Z_2$ a legnagyobb: Mivel $n_{14N} > n_{15N}$, de $\sigma_{15N} \gg \sigma_{14N}$ az erősség miatt, így az időskálát a ${}^{14}N+p$ határozza meg.

Összességében mindkét folyamat egyenlete az alábbi:

$$4p \to {}^4He + 2e^+ + 2\nu + Q$$

Honnan jön az energia? Onnan, hogy a ^4He kötési E-ja kisebb[nál] : 28,3 MeV

4 protonok átalakításának energiája: 1,3 MeV

Az e^+-k keltésén 0,5 MeV

$$Q = 28{,}3\,MeV - 2\cdot 1{,}3\,MeV - 2\cdot 0{,}5\,MeV$$

az a e^+-k azonnal annihilálódnak, ez is energiát ad:

$$Q_{eff} = Q + 4\cdot 0{,}5\,MeV = 26{,}7\,MeV \begin{cases} \nearrow 97\%\ \gamma \\ \searrow 3\%\ \nu \end{cases}$$

Mennyi a reakciók száma?

$$L_\odot = \underset{1366\frac{W}{m^2}}{k_\odot}\, 4\pi \underset{150\cdot 10^6\,km}{R_{NF}^2} \qquad \frac{L_\odot}{26{,}7\,MeV\cdot 0{,}97} \approx 10^{38}\,\frac{1}{s}$$

ez alapján a neutrínó áram: $I_\nu = 2\cdot 10^{38}\,\frac{1}{s}$

a fluxus: $\Phi_\nu = \frac{I_\nu}{4\pi R_N^2} = 6\cdot 10^{10}\,\frac{1}{cm^2 s}$

mennyivel csökken a nap tömege?

$$L_\odot = \Delta m\, c^2 \Rightarrow \Delta m \simeq 4{,}3\cdot 10^6\ t/s$$

nézzük a rátát $A + B \to C + D$ reakció esetén

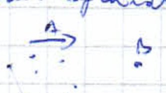
$$j_A = \frac{N_A}{\Delta A\cdot \Delta t} = \frac{N_A}{\Delta A\,\Delta s}\, v = n_A v$$

A reakciók száma: $j_A\, \sigma_{AB}\cdot N_B$

térfogategységre: $n_A n_B \sigma_{AB} v$

Tehát a reakció ráta: $R = \frac{1}{1+\delta_{AB}}\, n_A n_B \langle \sigma_{AB}(E)\cdot v\rangle$ ← termikus reakció ráta

A részecske fogyási ráta



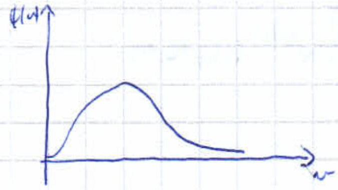
$$\Gamma = n_A \langle \sigma_{AB}\cdot v\rangle$$

egy részecske esetén valószínűség van a rátának van értelme ezért

$\tau = \frac{1}{\Gamma}$ várható élettartammal.

Mivel itt nem relativisztikus részecskék vannak, a valószínűség MB-eloszlás:

$$\phi(\underline{v})\, d^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, d^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, 4\pi v^2\, dv$$



Bizonyítsuk, hogy ez valószínűség

$$\int \phi(\underline{v})\, d^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2\, dv = \qquad x^2 = \frac{mv^2}{2kT}, \quad dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\, dx$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2} x^2\, dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} = 1 \quad \checkmark$$

Energiaeloszlás;

$$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi\, e^{-E/kT} \frac{2E}{m} \frac{1}{\sqrt{2m}} E^{-1/2}\, dE = \frac{1}{(kT)^{3/2}} \frac{2}{\pi^{1/2}} e^{-E/kT} E^{1/2}\, dE$$

Ez is hasonló alakú

Nézzük a maximum helyzetét:

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = kT$$

$$E_{max} = \frac{kT}{2}$$

Egy v-től függő A mennyiség $\langle A(\underline{v})\rangle = \int \phi(\underline{v})\, A(\underline{v})\, d^3v$

HF

HF: Energia átlaga:

$$\langle E = \tfrac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Mi van, ha több részecske van:

$$\langle A(\underline{v}_1, \underline{v}_2)\rangle = \int \phi_{m_1}(\underline{v}_1)\, \phi_{m_2}(\underline{v}_2)\, A(\underline{v}_1, \underline{v}_2)\, d^3v_1\, d^3v_2$$

És ha a különbségtől:

$$\langle A(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)\rangle = \left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int e^{-\frac{m_1 v_1^2}{2kT}} e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} A(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)\, d^3v_1\, d^3v_2 =$$

$$\underline{v} := \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \qquad \underline{V} := \frac{m_1 \underline{v}_1 - m_2 \underline{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= (\dots) \int e^{-\frac{(m_1+m_2)}{2kT} V^2} e^{-\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} \frac{1}{2kT} v^2} A(\underline{v})\, d^3V\, d^3v =$$

$$= \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} A(\underline{v})\, d^3\underline{v} =$$

⇒ A relatív sebesség eloszlása ugyanaz Maxwell-Boltzmann, a redukált tömeggel.

Und somit:

$$\langle \sigma(E)\, v \rangle = \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}\, \sigma(E)\, v\, 4\pi v^2\, dv =$$

$$= \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi\, \frac{2}{\mu^2} \int_0^\infty e^{-E/kT}\, \sigma(E)\, E\, dE = \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \int_0^\infty e^{-E/kT}\, \sigma(E)\, E\, dE$$

MAG-FIZ-FEJLETEK

11. előadás (04.30.)

$$R_{ab} = \frac{1}{1+\delta_{ab}} n_a n_b \langle \sigma_{ab} v \rangle$$ a telep működése

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \to \underline{V}, \underline{v}$ $\quad \underline{v}_1 = \underline{V} - \frac{m_2}{M}\underline{v}$

$\underline{v}_2 = \underline{V} - \frac{m_1}{M}\underline{v}$ $\quad d^3 v_1\, d^3 v_2 = |J|\, d^3 V\, d^3 v$

TKP rendszerrel J mindig ± 1.

ezt bebizonyította

Hogy írjuk át a reakciós ráta matematikai egyenletté?

Válasszunk ki egy izotópot:

^3He:

$$\frac{dn_{^3He}}{dt} = n_d n_p r_{d+p \to ^3He + \gamma} - \frac{1}{2} n_{^3He} n_{^3He} r_{^3He + ^3He \to ^4He + 2p} -$$

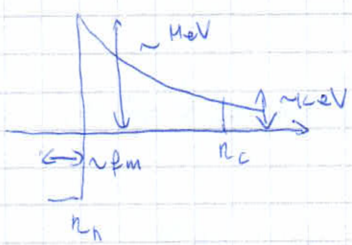
$$- n_{^3He} n_{^4He} r_{^3He\, ^4He \to ^7Be + \gamma} - n_{^3He} n_p r_{^3He + p \to ^4He + e^+ + \nu}$$

minden izotópra fel kell írni egy ilyen egyenletet, ez egy csatolt diffegy.

Azt időben fejlesztve, megkapjuk mi van és mi lesz.

<u>Töltött részecskés magreakciók</u>

A töltött részecske a Coulomb-gátat látja.



Mi a valség, hogy E energiával átalagutazunk R_c-től R_n-ig?

dr vastagságon alagutazás valsége: $P_1 = e^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{8\mu(V(r)-E)}\,dr}$

A valségek szorzódnak, tehát a teljes valség:

$$P = e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{R_n}^{R_c} \sqrt{8\mu(V(r)-E)}\,dr} = \text{ha } E \ll V = e^{-2\pi\eta(E)}$$

ahol

$$\eta(E) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$

$$= e^{-\frac{a}{\sqrt{E}}}$$

A HKM-be belerakjuk a valséget HKM:

$\sigma = P\sigma_{HKM} = P \cdot \frac{1}{E} \cdot S(E) \leftarrow$ asztrofizikai S-faktor.

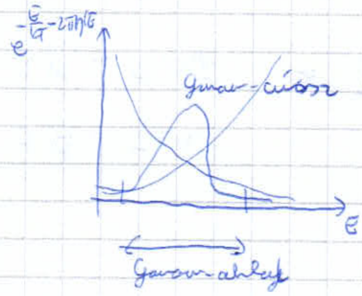
Az S-faktor általában majdnem konstans. (kivéve rezonancia)

$$\sigma_{\text{magreakció}} = \frac{4\pi}{k^2} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell(E)}_{\text{ez csak kevésbé függ E-től}}$$

$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{E}$ A σ_{HKM} nagyrészt e miatt számít az $\frac{1}{E}$ lógásért

A múltkoriak:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-E/kT} \sigma(E)\, E\, dE = \frac{1}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-E/kT - 2\pi\eta(E)} S(E)\, dE$$



Közelítsük Gauss-szal: $f(E) = e^{-\frac{E}{kT} - 2\pi\eta(E)}$

$$g(E) = I_{max}\, e^{-\left(\frac{E-E_{max}}{\Delta/2}\right)^2}$$

3 paramétert kell illeszteni $\Rightarrow$ 3 feltétel:

$$\left.\begin{aligned} f'(E_0) &= g'(E_0) \\ f(E_0) &= g(E_0) \\ f''(E_0) &= g''(E_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_0,\ \Delta,\ I_{max} \text{ meghatározható}$$

végeredmény: $E_0 = 1{,}22\,(Z_1^2 Z_2^2 \tilde{\mu} T_6^2)^{1/3}$ [keV]

$\Delta = 0{,}75\,(Z_1^2 Z_2^2 \tilde{\mu} T_6^5)^{1/6}$ [keV]

$I_{max} = e^{-\frac{3E_0}{kT}}$

ahol $[T_6] = 10^6\,K$, $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}$, $\tilde{m}_1 = m_1/m_N$, $\tilde{m}_2 = m_2/m_N$

TFH $S(E) \approx$ konst. Ekkor a fenti integrál eredménye:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} I_{max} S(E_0) \int_0^\infty e^{-\left(\frac{E-E_0}{\Delta/2}\right)^2} dE = \frac{1}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} I_{max} S(E_0) \frac{\Delta}{2} \sqrt{\pi} =$$

ezt közelítjük Gauss-szal.

$$= \frac{\Delta}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} S(E_0)\, e^{-\frac{3E_0}{kT}} = A \cdot \frac{T^{5/6}}{T^{3/2}} e^{-BT^{-1/3}} = A\, T^{-2/3} e^{-BT^{-1/3}}$$

Közelítsük $T^{n(T)}$-nel!

Feltétel: deriváltak egyezzenek: $-\frac{2}{3} A T^{-5/3} e^{-BT^{-1/3}} + A T^{-2/3} e^{-BT^{-1/3}} \cdot (-B) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) T^{-4/3} \overset{!}{=} n T^{n-1}$

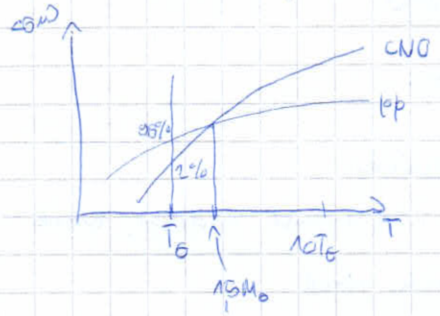
$$-\frac{2}{3} T^{n-1} + \frac{1}{3} B T^{n-1-\frac{1}{3}} = n T^{n-1} \Rightarrow n = \frac{BT^{-1/3} - 2}{3} = \frac{\frac{3E_0}{kT} - 2}{3}$$

Konkrét számokkal:

$T = 1{,}34\ \mathrm{keV} \approx 15 \cdot 10^6$ fok

	E_0 (keV)	$\Delta/2$ (keV)	I_{max}	η	$S(E_0)$ (keV barn)
p+p	5,9	3,2	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$	3,7	$4 \cdot 10^{-22}$
$^3He + {}^3He$	22,0	6,3	$5{,}2 \cdot 10^{-22}$	19,7	$5 \cdot 10^{3}$
$^3He + {}^4He$	23,0	6,4	$5{,}5 \cdot 10^{-23}$	16,5	0,54
$^7Be + p$				13,0	

Hasonlítsuk össze a p+p és CNO folyamatokat!



Ezután nagyjából az elemek Napban való eloszlását

MAGFIZ FEJEZETEK

12. előadás (05.07.)

$p+p \to d + e^+ + \nu + Q$ ahol $Q = 2{,}22\,MeV - 1{,}5\,MeV - 0{,}5\,MeV = 0{,}42\,MeV$

A maradék nagy részét az e^+ és a ν kapja, de a kettő között
folytonos spektrum határozza meg (ábra)

Ez a gyenge kölcsönhatás miatt nehéz kimutatni

A más reakciók is folytonos spektrum. De vannak, ahol diszkrét spektrum van.

pl.: ^7Be megkötődik belőle a ^7Li állapotai között E+

Továbbá az egyik 9-szer valószínűbb => ennek a valószínűsége 90%

Összeadva a spektrumok területét, és a diszkrét oszlopok nagyságát, a teljes neutrínó fluxust kéne kapni: $\phi = 6\cdot 10^{10}\,\frac{1}{cm^2\,s}$

Ebből a legnagyobb a pp reakció adja.

Minél nagyobb a ν energiája, annál „könnyebben" detektálni.
A detektorok nagy része csak a ^8B-ből származót érzékeli, ebből
kellett visszakövetkeztetni a teljes részét.

Hogy találták meg végül a neutrínókat?

ötletek: • atomreaktorok környékén sok neutrínó van (maghasadás, bomlás β-bomlás)

• atomrobbantás környékén nagyon. ^{235}U hasadásakor 200 MeV szabadul fel, $+ 6\bar{\nu}$.

• Napból jövő neutrínók.

$^{37}Cl + \nu \to {}^{37}Ar + e^-$ (B. Pontecorvo) Homestake-kísérlet

követelmény: • olcsó legyen: C_2Cl_4-t viszonylag nagy mennyiségben könnyű előállítani

• olyan legyen, hogy a $^{37}Cl + p \to Ar + n$ ne nagyon legyen, a p a kozmikus sugárzásból jön

A Nap spektrumából kimutathatóak a reakciók, mint a ν eloszlását számolták

• a detektáláshoz a végterméknek radioaktívnak kell lennie

• A felezési ideje legyen sokkal nagyobb, mint a mérés ideje $T_{1/2}(^{37}Ar) \approx 1$ hónap

• hogy nyerik ki? Nagy buborékoltatás => ... ábra alapján

R. Davis ötlete alapján

A '70-es évek elején mérték először, és csak állandó, csak a kisebb szinten.

$\Phi_{Cl}^{mért} \approx \frac{1}{3}\Phi_{SSM}$ miért van 1/3?

Lehetséges magyarázatok:

- Az asztrofizikai S-faktorban lehet hiba, de alacsony energián nem lehet mérni, csak extrapolálni.
  Mi van, ha nem helyes az extrapoláció (A Gamow-csúcs alacsony E-nél van, ugyanis ez fontos)
  ⇒ lehet, hogy az elágazási arány nem 85% és 15% csak.
  Ez alapján könnyű volt, hogy ezeknek az egyetlen reakcióknak a σ-ját mérték
  (mint a $^3He + {}^3He \to {}^4He + 2p$)
  Ez borzasztó ritka reakció, mert 1 hónap alatt 1 reakciót mértek.
  (A $^{14}N + p \to {}^{15}O + \gamma$ S-faktorát is mérték már. fun fact)
  Nem támasztotta alá
- Múlt óra alapján $\langle v\sigma \rangle = T^{n(T)}$
  ahol a $^7Be + p$-re $n(T) = 13$. ez nagyon nagy.
  Mi van, ha a Nap T-je egy kicsit más, és a 13. hatvány felerősíti
- Stephen Hawking: A Nap E-jének csak 1/3-a jön abból a modellből. A többi a Napban lévő fekete lyuk okozza.

Új kísérlet: <u>Kamiokande</u>

Eredetileg a proton bomlásának mérésére építették
Mivel ez nem ment, inkább ν-detektálásra térték át.
50.000 t víz. (ez már a szuper kamiokande)
a $\nu + e \to \nu' + e'$ reakcióban a neutrínó meglöki az e^--t, és a
Cserenkov-sugárzást lehet mérni

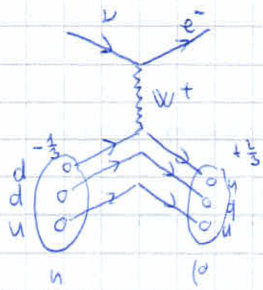
Az előzővel szemben ez egy valós idejű detektor, ami az E-t és az irányt is méri
A háttér a spallációból jön (kozmikus sugárzás)
De az kiszűrhető az irány miatt

A '90-es években azt kapták, hogy $\Phi_{SK}^{mért} \approx \frac{1}{2}\Phi_{SSM}$

Ez kisebb csökkenést mutat a napspektrumban; ami a ^8B reakcióval magyarázható, mert az SK kevesebb ν-t lát, mint a Cl, mégis nagyobb az arány.

Vizsgáljuk meg a két reakciót:

$n+\nu \to p+e^-$

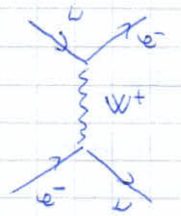


A bozon a W^+ a töltésmegm. miatt.

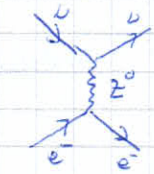
Az eddigi kísérletekben nem csak a leptonszám, hanem a családon belüli leptonszám is.

$\Rightarrow$ Csak ν_e-re működik.

$\nu+e \to \nu+e$



vagy



ez is csak ν_e-re vagy

ez bármelyik ν-ra jó.

Charge Current-reakció

Neutral charge reakció

ez magyarázza, miért kapunk kevesebbet itt, de a Napból csak ν_e-ket várunk

A HKM-re: $\sigma_{CC} \approx \beta\sigma_{NC}$

Feloldás: A Napban megszületett ν_e átalakul ν_μ-vé.

DE ez megsérti a Standard Modellt!!! (fun fact: eddig ez az egyetlen)

Biztos mi így nagyjából?

Ha a neutrínó spektrum jó, akkor matematikailag kiszámolható.

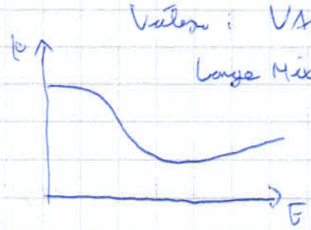
($c_1 \dots c_9$-cel beszorozzuk a különböző spektrumokat)

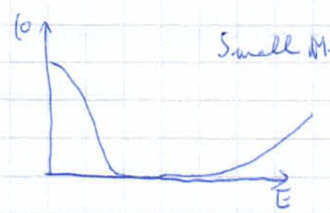
Kérdés: Mi van, ha a Napban E-vel megszületett ν_e $p(E)$-vel lesz itt ν_μ

Ekkor egy új spektrumot kapunk. ν_E-re, és egy adottat ν_μ-re.

Van-e olyan $p(E)$, ami jó eredményt ad?

Válasz: VAN!





13. előadás (05. 14.)

SNO detektor kanadai

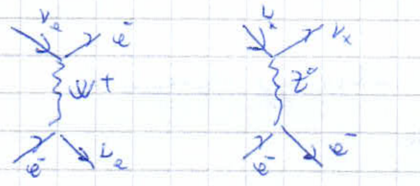
Ezzel lehet eldönteni a neutrínóoszcilláció jelenségét

3 mérési mód: $\nu + e^- \to \nu' + e^-$ $\quad \phi_{\nu_e} + \frac{1}{6}\phi_{\nu_e}$

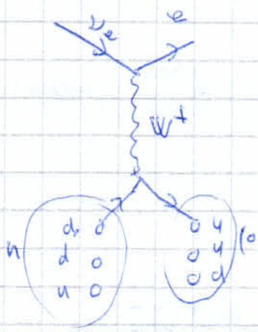
$\nu + d \to p + p + e^-$ $\quad \phi_{\nu_e}$

$\nu + d \to n + p + \nu$ $\quad \phi_{\nu_e} + \phi_{\nu_\mu}$

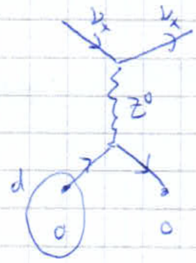
Feynman-gráfok:



σ_{CC} $\quad \sigma_{NC} = \frac{1}{6}\sigma_{CC}$



CC folyamat



NC folyamat

itt ami grafikonon mutat, hogy hogy különítjük el a különböző folyamatokat.

A 2. folyamat a legfontosabb.

detektálás a neutronnal: 1. $n + d \to {}^3H + \gamma$ (Ez 3 évig ment viszonylag nagy stat. hibával)

2. tettek a vízbe sót.

${}^{35}Cl + n \to {}^{36}Cl + \gamma$

${}^{36}Cl$ több fotonban gerjesztődik le.

3. vékony üvegcsöveket tettek be, ${}^3He$-vel töltve

${}^3He + n \to {}^3H + p$ ezt meg számlálóként mérték

és még jó pontosságot ad.

adatok a lapon.

Mi okozza a neutrínó oszcillációt?

Ez már SM-en túli fizika

Amit mi látunk, az nem tiszta ~~[illegible]~~ e^--neutrínó, hanem kevert állapot.

Legyen 3 tömeg sajátállapotú neutrínó, de mi nem ezeket detektáljuk, hanem az íz-sajátállapotot:

$$|\nu_e\rangle = a|\nu_1\rangle + b|\nu_2\rangle + c|\nu_3\rangle$$
$$|\nu_\mu\rangle = e|\nu_1\rangle + f|\nu_2\rangle + g|\nu_3\rangle$$
$$|\nu_\tau\rangle = h|\nu_1\rangle + i|\nu_2\rangle + j|\nu_3\rangle$$

Ez ismert volt már a kvarkokra is, de azt hitték, hogy a tömegük 0.

Így viszont valószínű, hogy legyen tömegük

Egyszerűbb modell:

TFH:
$$|\nu_e\rangle = a|\nu_1\rangle + b|\nu_2\rangle$$

Az 1. komponens: $e^{i(k_1x-\omega_1 t)}$ időt elhagyva e^{ik_1x} vegyük a sin részt

$|1\rangle \sim \sin(k_1 x)$

$|2\rangle \sim \sin(k_2 x)$

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$
$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = pc\sqrt{1+\frac{m^2c^4}{p^2c^2}} \cong pc\left(1+\frac{m^2c^4}{2p^2c^2}\right) = pc + \frac{m^2c^4}{2pc}$$

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar c}\left(E - \frac{m^2c^4}{\underbrace{2pc}_{\approx E}\,\hbar c}\right) \cong \frac{1}{\hbar c}E - \frac{m^2c^4}{2E\hbar c}$$

$$k_1 = \frac{1E}{\hbar c} - \frac{m_1^2c^4}{2E\hbar c}$$
$$k_2 = \frac{1}{\hbar c}E - \frac{m_2^2c^4}{2E\hbar c}$$

mivel m_1 és m_2 kicsi, ezért k_1 és k_2 közeli $\Rightarrow$ lebegés.

Mik lehetnek az eh-k?

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}$$

Abban, hogy a hullámfv. valószínűség megmaradjon unitér mátrixot kell kapni.

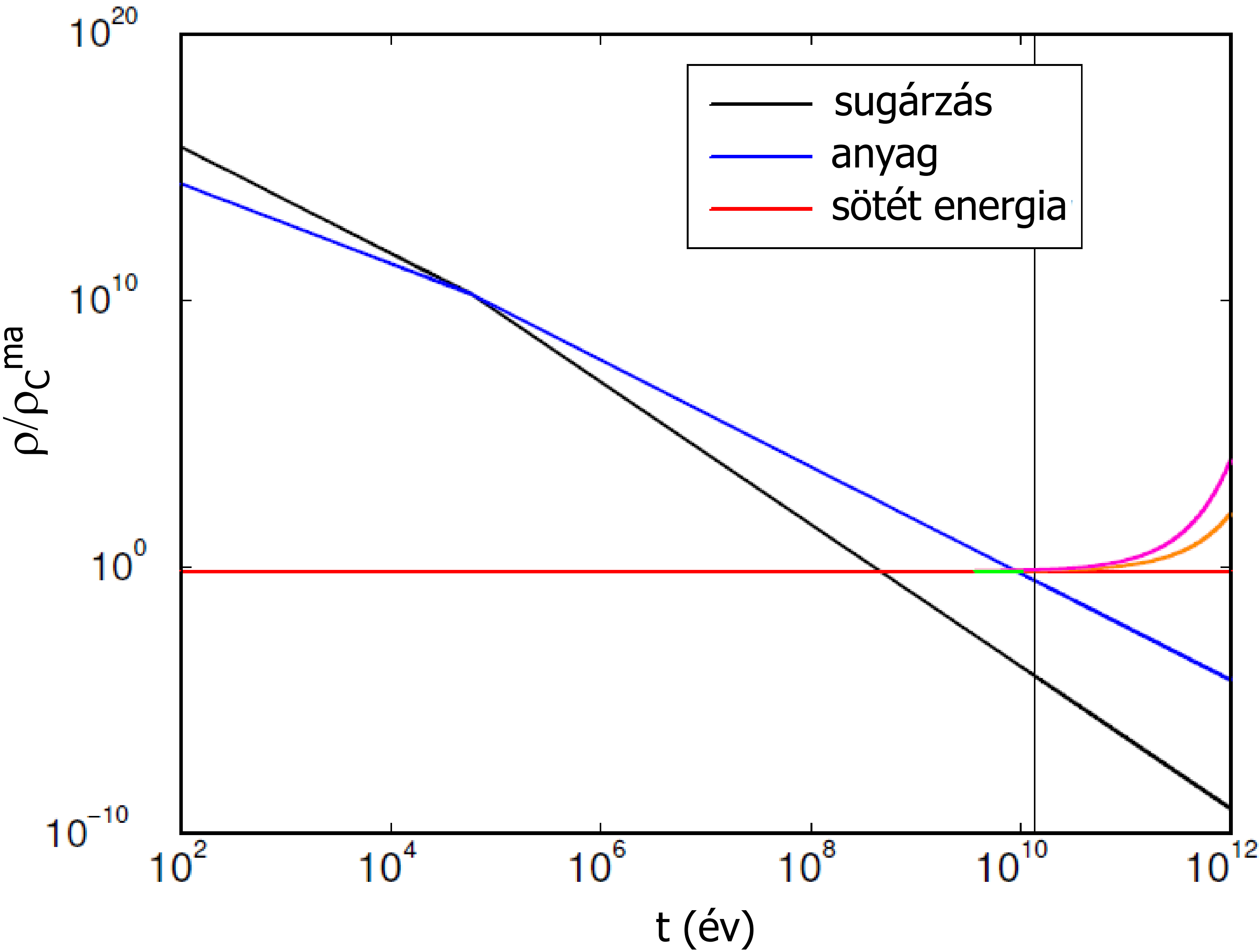
Legyenek valósak $\Rightarrow$ ortogonális m. $\Rightarrow$
$$\left.\begin{matrix} a^2+b^2=1\\ ac+bd=0\\ c^2+d^2=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \text{ szabad paraméter}$$

Kiderül, hogy az eh. θ forgásszöget ad, az átalakulási valószínűség a Δm-től függ.

$$P_{\nu_e\to\nu_\mu}(L) = \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2c^4}{4E\hbar c}L\right)$$

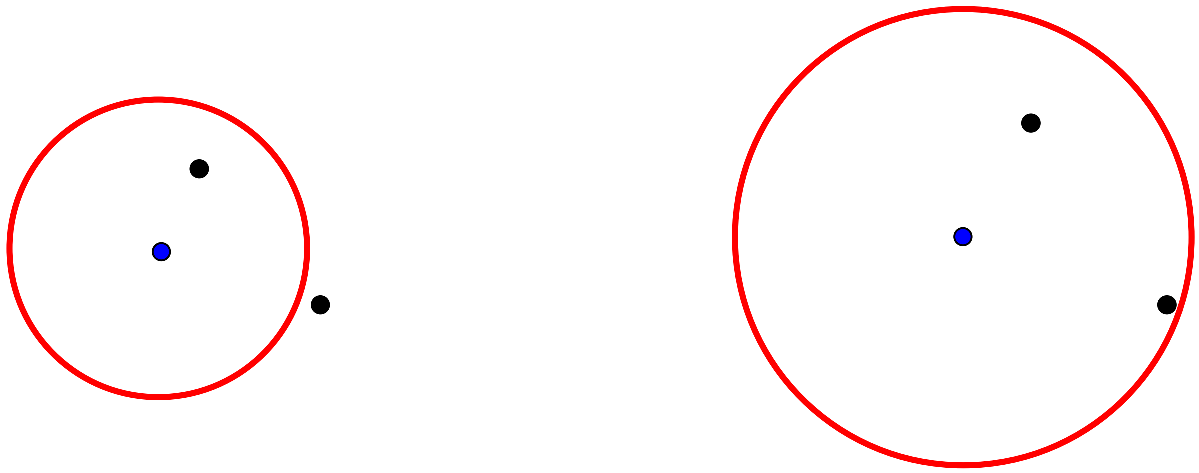
(utolsó óra)

vizsgálták mely θ-ra és Δm-re illeszkednek az adatok $\Rightarrow$ felső korlátot adnak

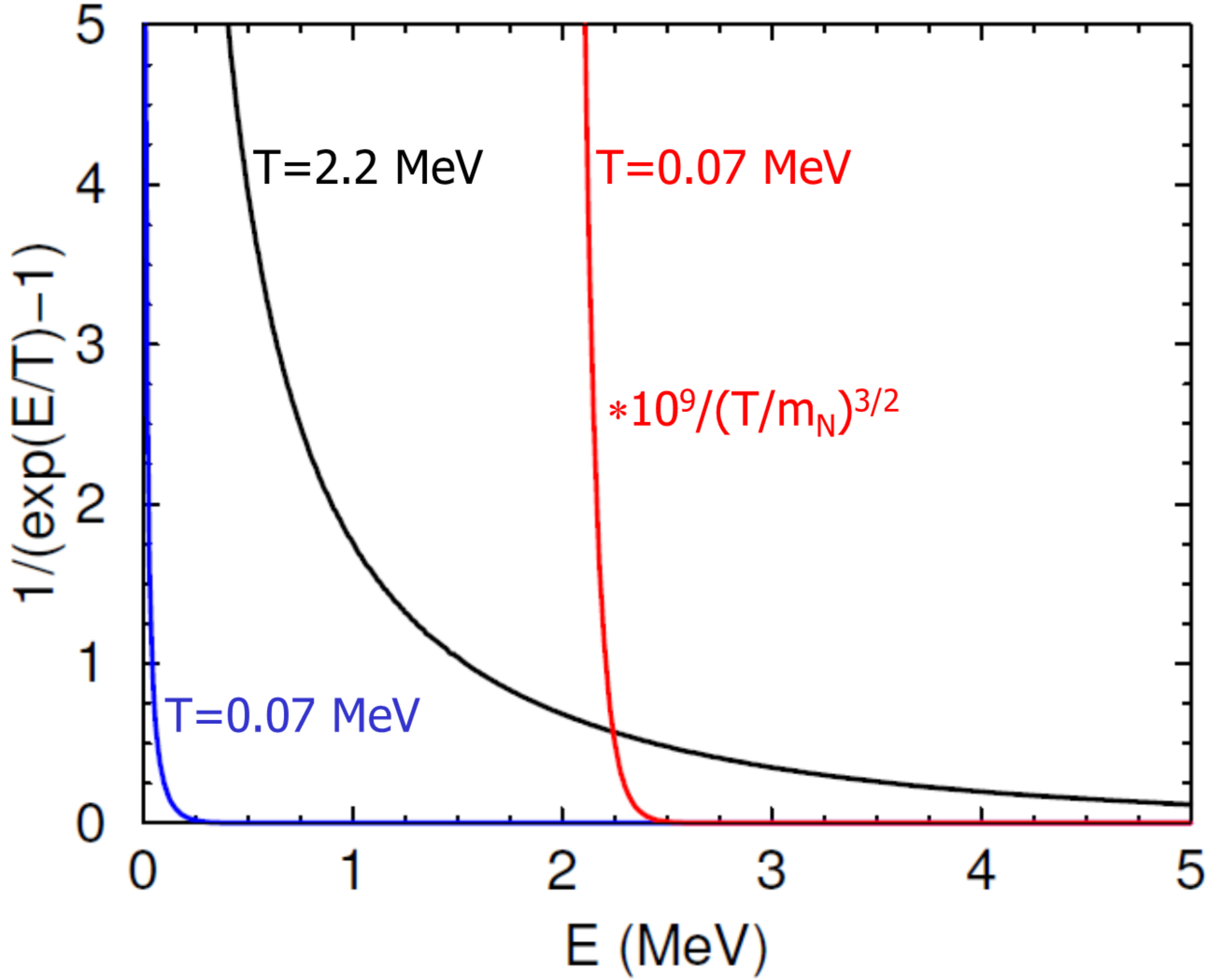


sugárzás
anyag
sötét energia
10^{20}
10^{10}
10^{0}
10^{-10}
ρ/ρ_C^{ma}
10^{2}
10^{4}
10^{6}
10^{8}
10^{10}
10^{12}
t (év)

Anyag által dominált univerzum ($R \sim t^{2/3}$)



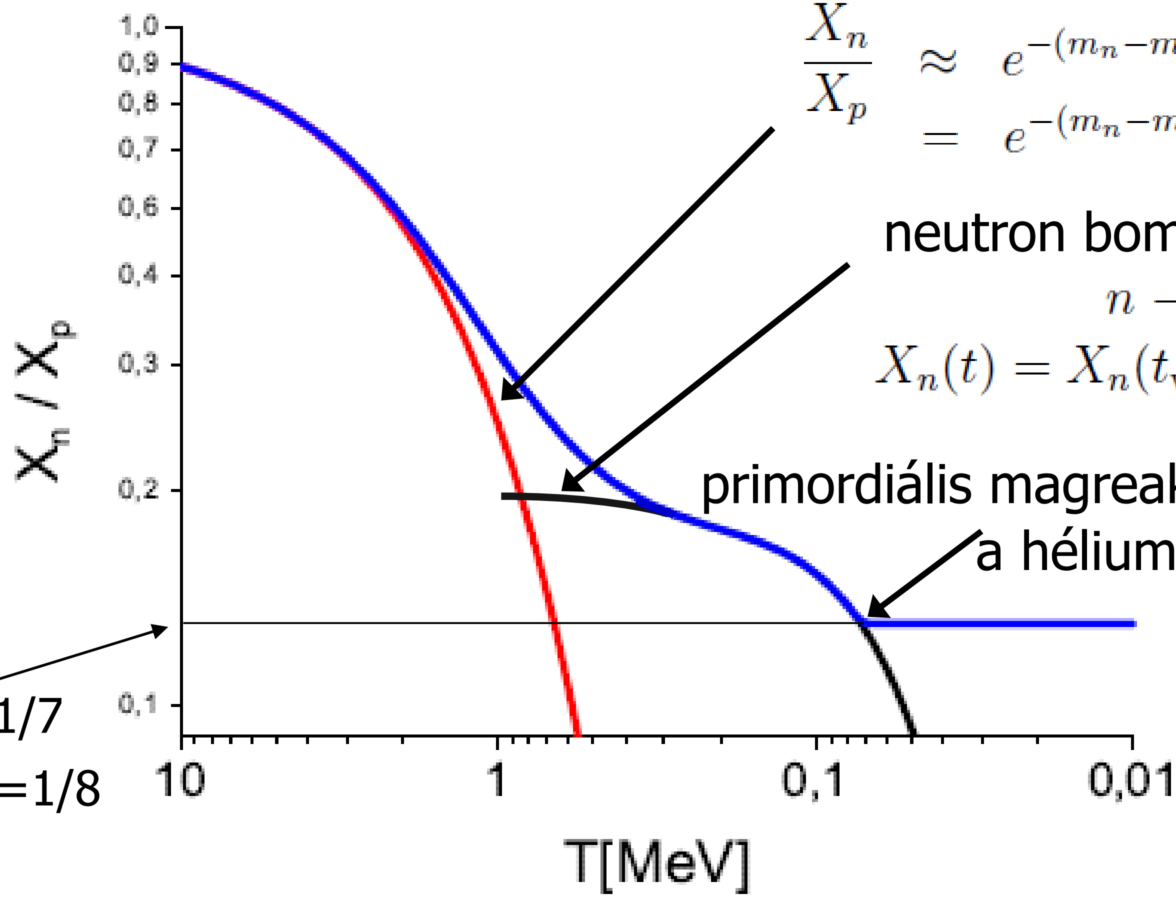
Sötét energia által dominált univerzum ($R \sim e^{a*t}$)



1/(exp(E/T)−1)
E (MeV)
T=2.2 MeV
T=0.07 MeV
$*10^9/(T/m_N)^{3/2}$
T=0.07 MeV
0
1
2
3
4
5

Neutron/proton arány a korai univerzumban: a hélium születése

egyensúlyi n/p arány: $n + \nu \longleftrightarrow p + e \quad n_A = g_A \left(\frac{m_A T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m_A - \mu_A)/T}$



$$\frac{X_n}{X_p} \approx e^{-(m_n - m_p)/T + (\mu_n - \mu_p)/T} = e^{-(m_n - m_p)/T + (\mu_e - \mu_\nu)/T}$$

neutron bomlás:

$$n \longrightarrow p + e + \overline{\nu}$$

$$X_n(t) = X_n(t_{\mathrm{wfo}}) \exp(-(t - t_{\mathrm{wfo}})/\tau_n)$$

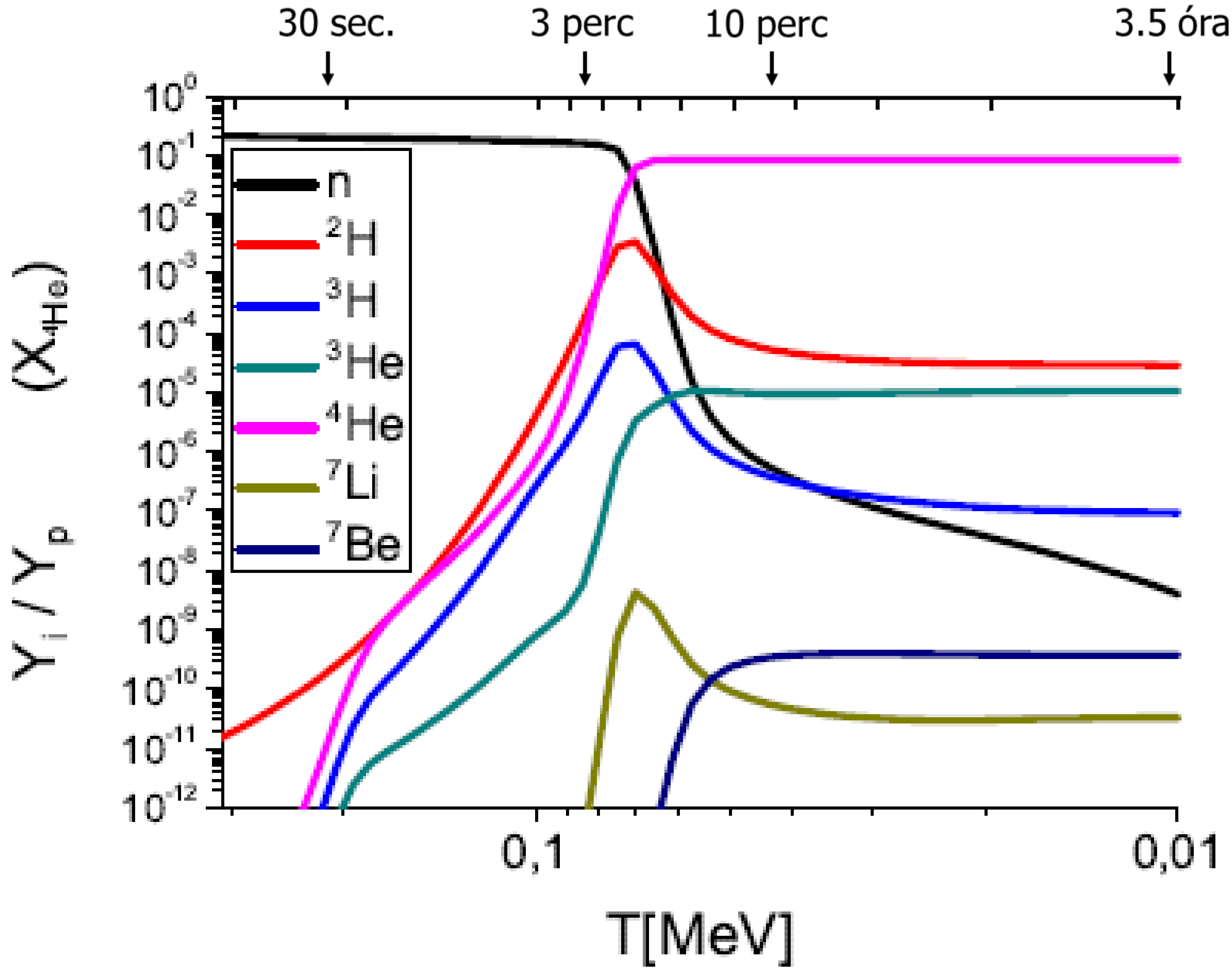
primordiális magreakciók (p+n → d+γ, …)

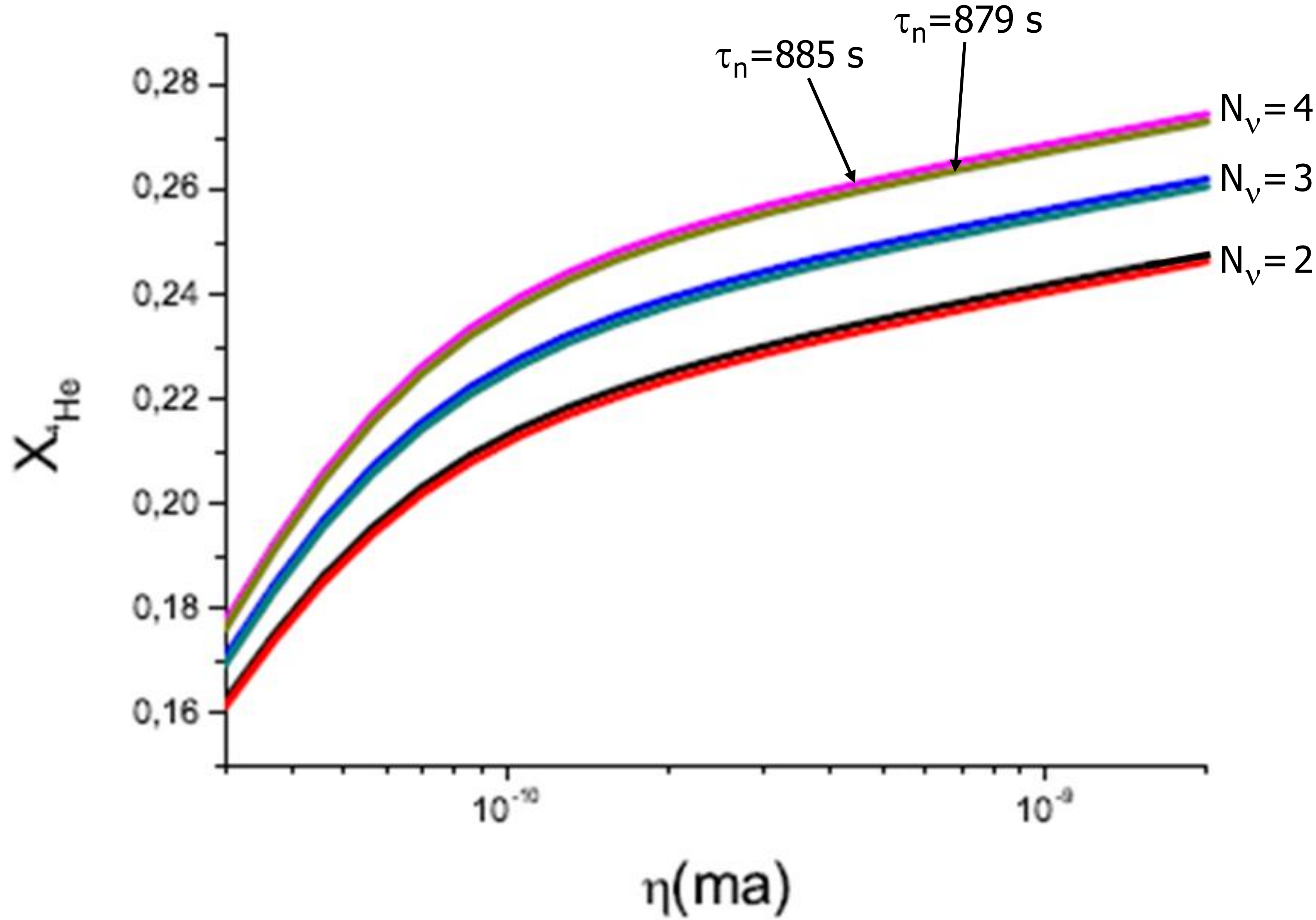
a hélium születése

0.14 ≈ 1/7

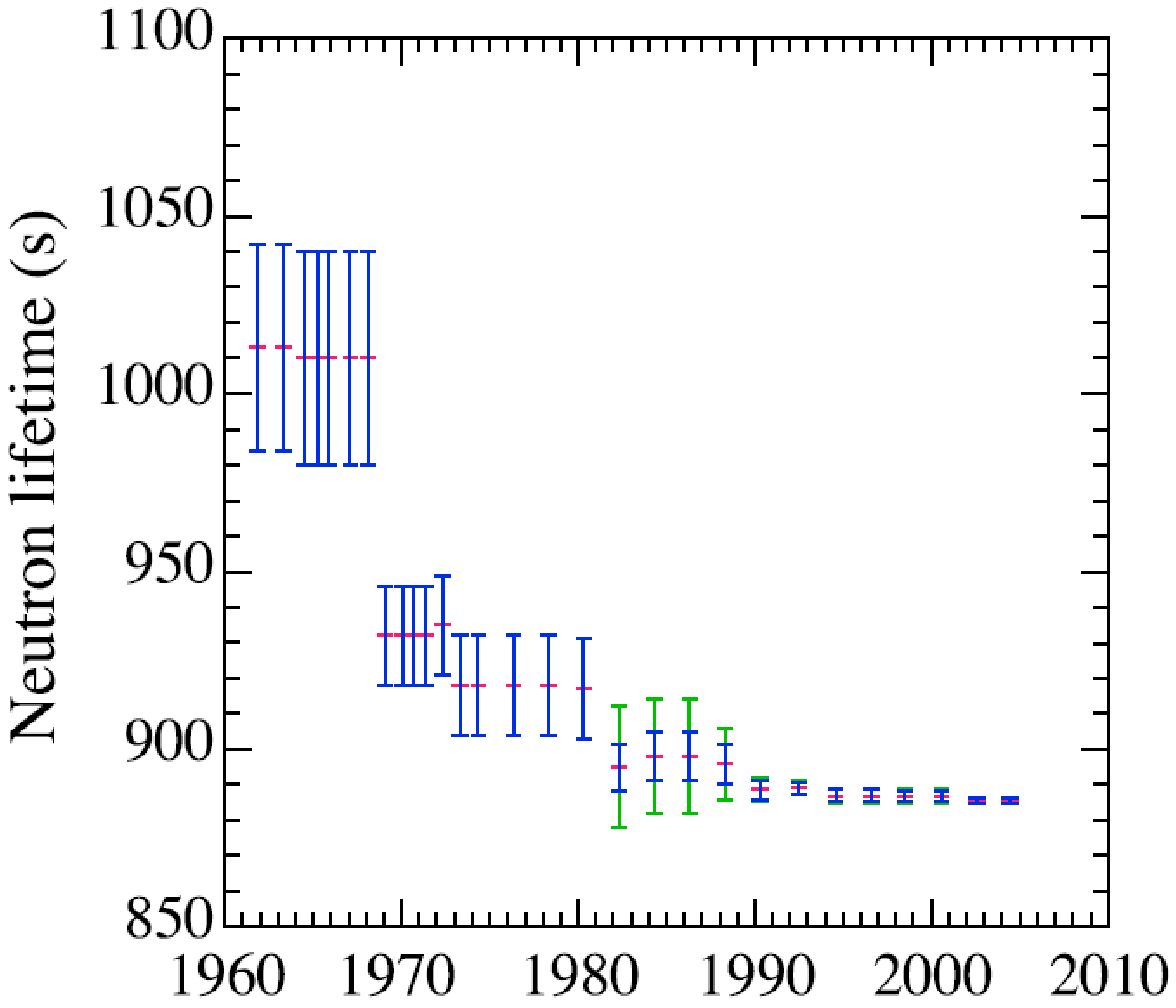
1/(1+7)=1/8

Végeredmény (pár perccel a big-bang után): 75% hidrogén, 25% ^{4}He,
nyomokban d, ^{3}He, ^{7}Li


30 sec.
3 perc
10 perc
3.5 óra
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
10^{-11}
10^{-12}
n
^{2}H
^{3}H
^{3}He
^{4}He
^{7}Li
^{7}Be
$Y_i / Y_p \quad (X_{^4He})$
0,1
0,01
T[MeV]



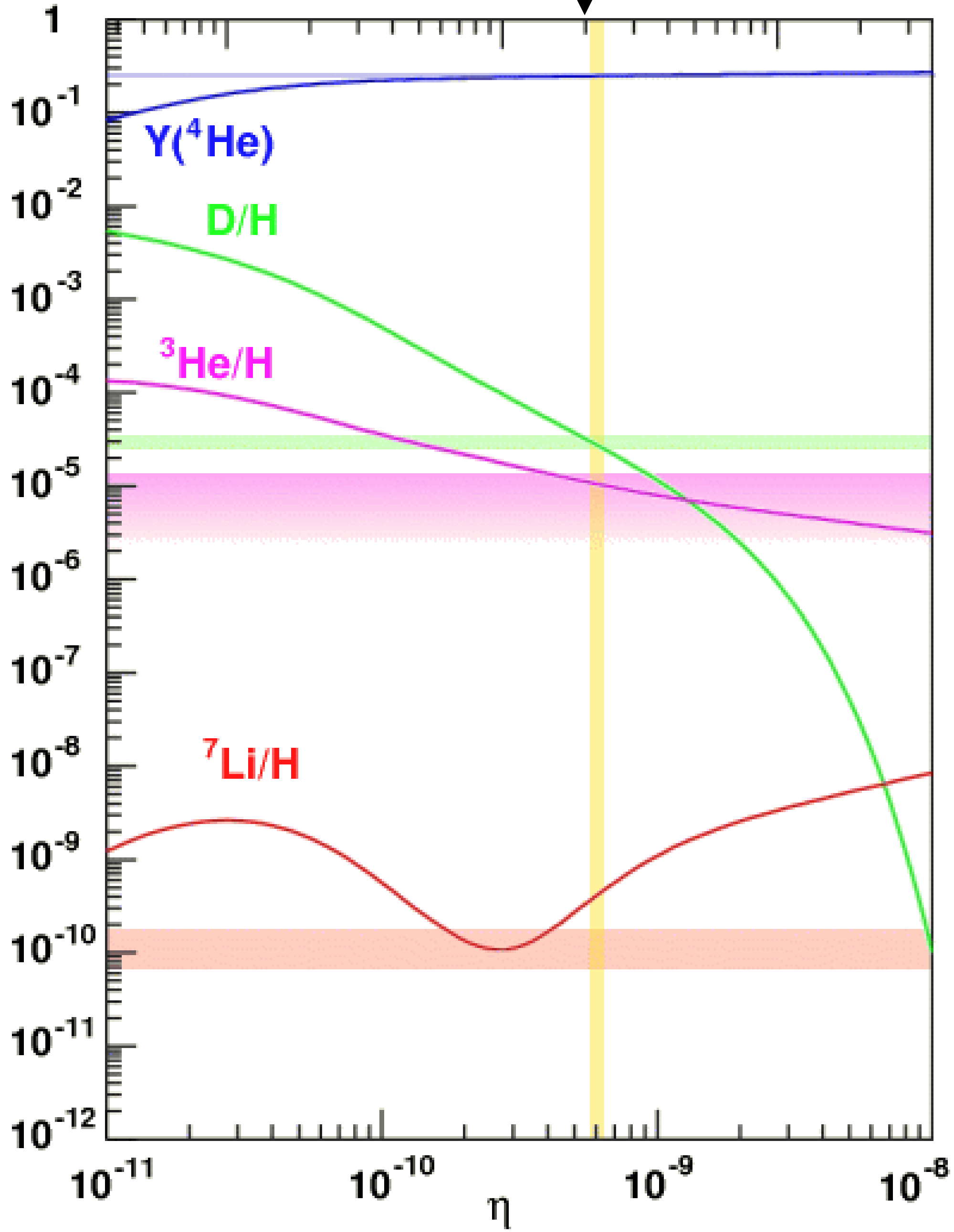
τn=885 s
τn=879 s
Nν=4
Nν=3
Nν=2
0,28
0,26
0,24
0,22
0,20
0,18
0,16
X4He
10-10
10-9
η(ma)



Neutron lifetime (s)
1100
1050
1000
950
900
850
1960
1970
1980
1990
2000
2010

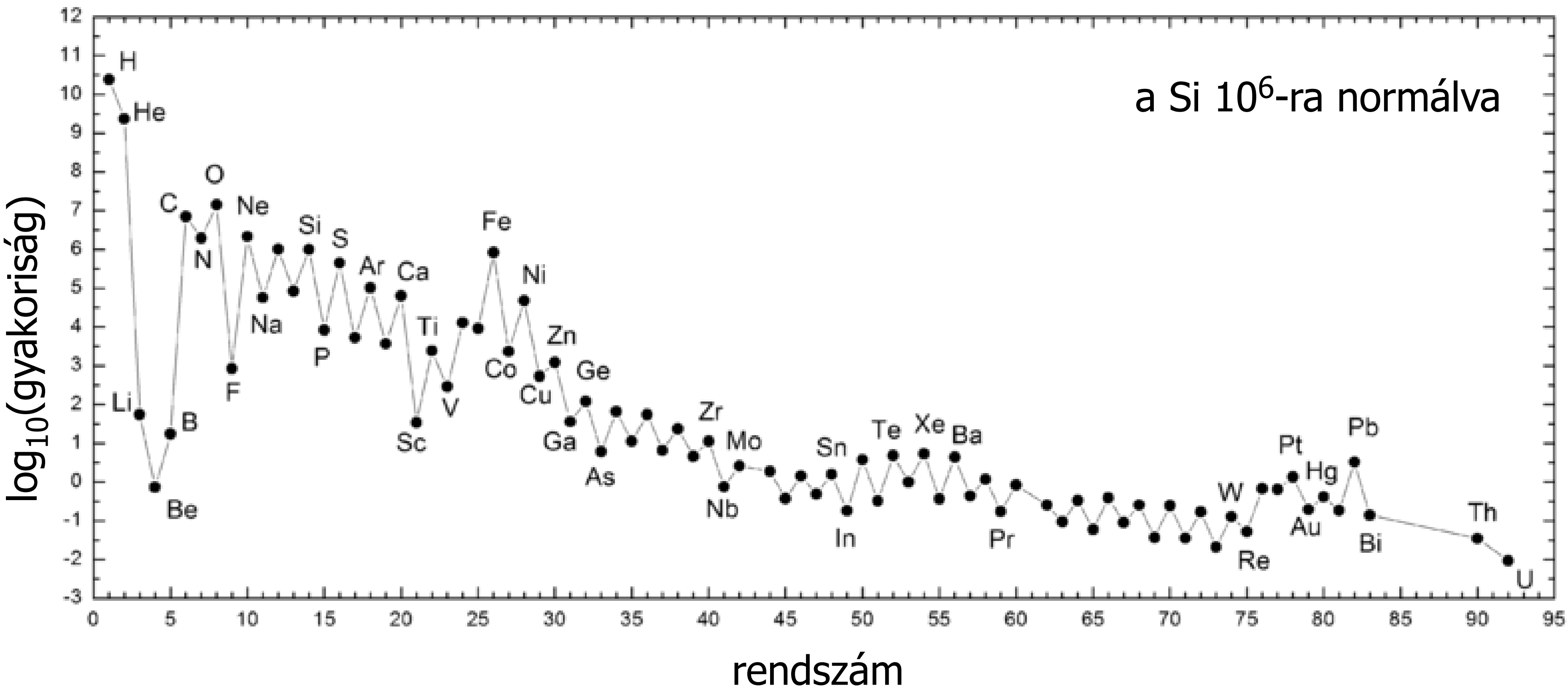
$$\eta_{\rm ma} = 2.74 * 10^{-8}\Omega_{\rm B}h^2$$

$h^2\Omega_B$ 0.02 $\longrightarrow$ $\Omega_B = 0.04 - 0.05$

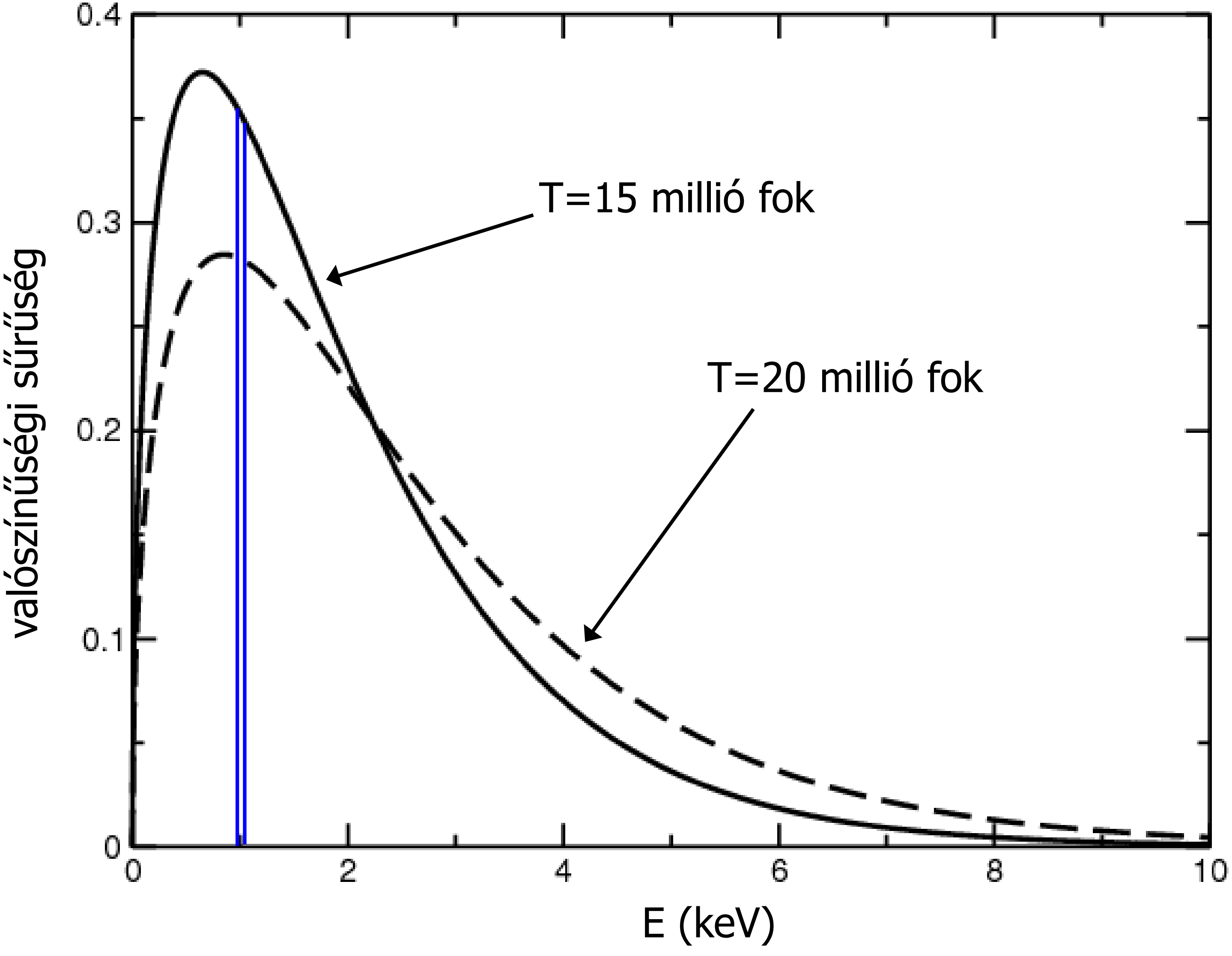


A kémiai elemek gyakorisága a Naprendszerben

A világegyetem tömegének ez csak 5%-a!! (25% sötét anyag, 70% sötét energia)



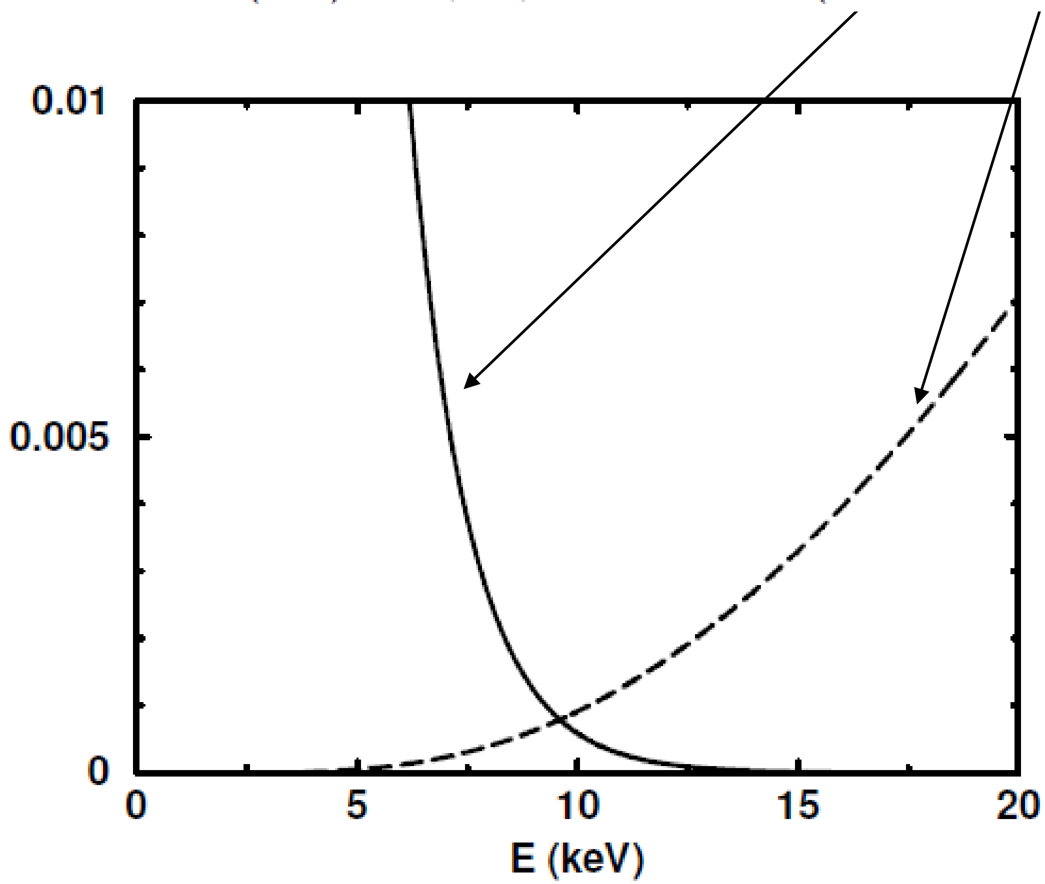
Atommagok energiája a Napban



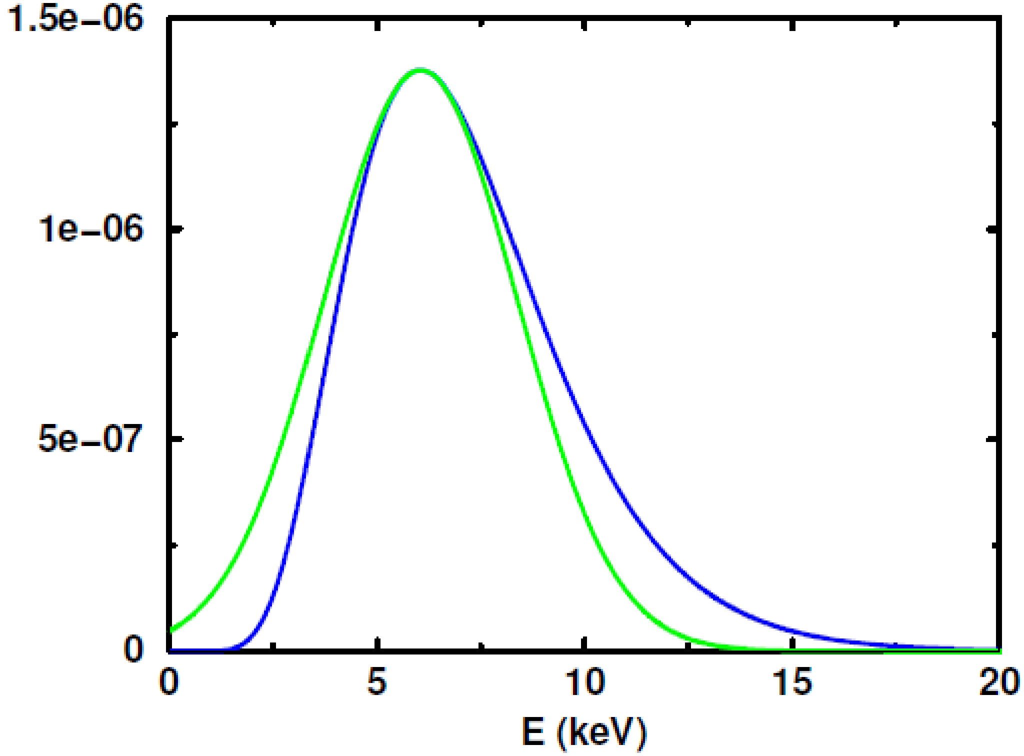
Termikus reakcióráta

$$n_A n_B \langle \sigma v \rangle = n_A n_B \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \sigma(E) dE$$

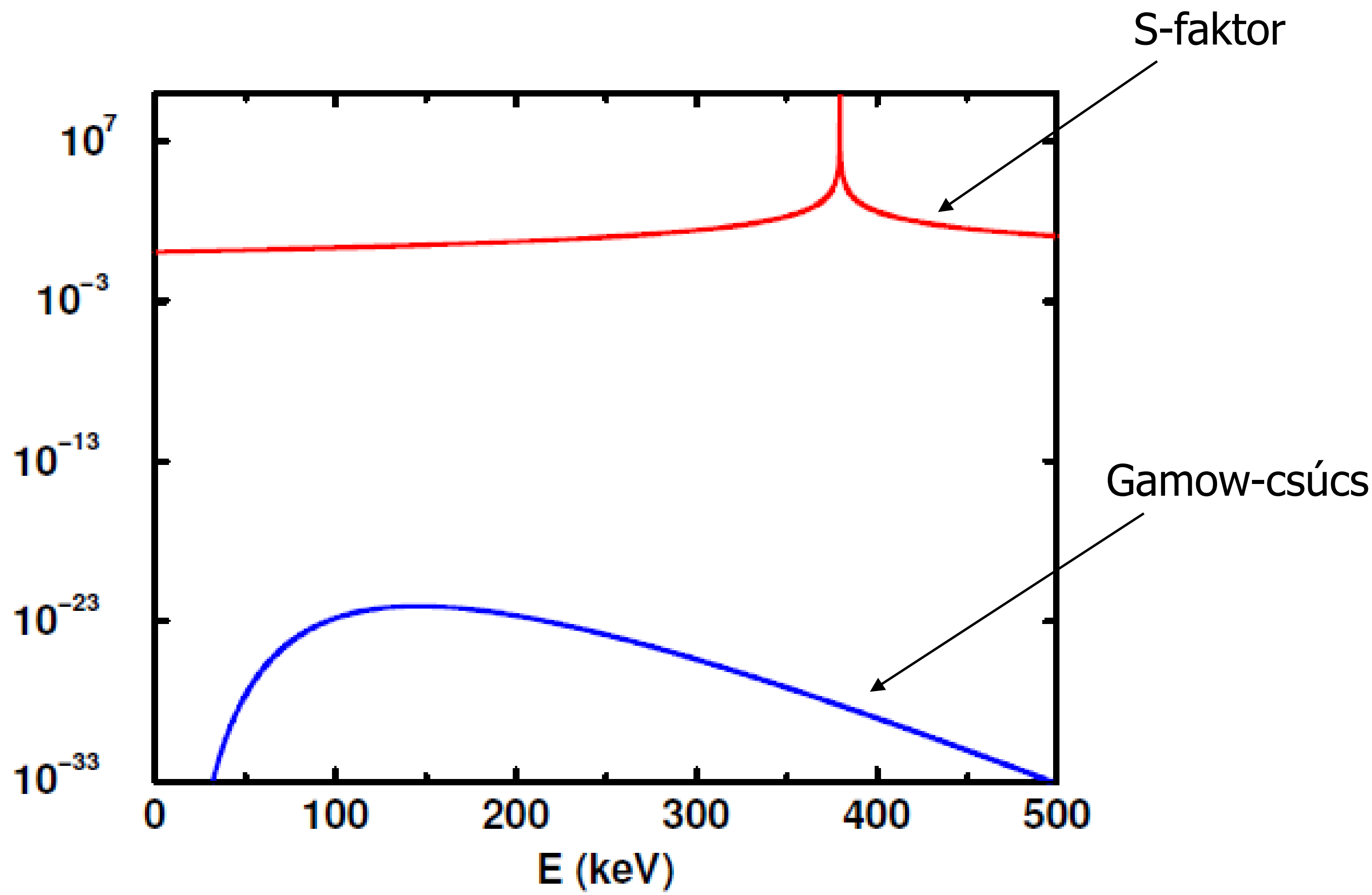
$$= n_A n_B \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{kT} - 2\pi\eta(E)\right) S(E) dE$$

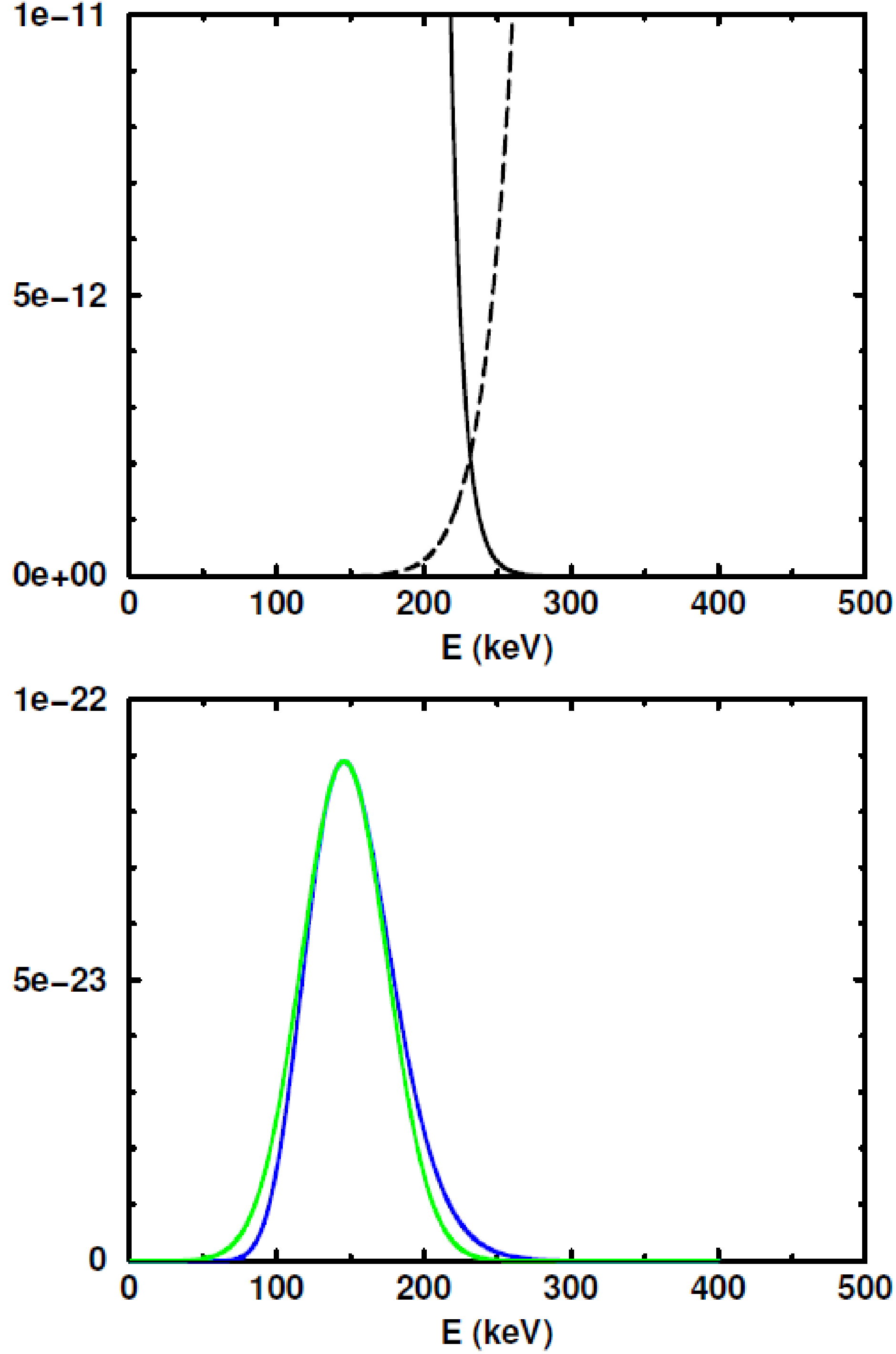


Gamow-csúcs



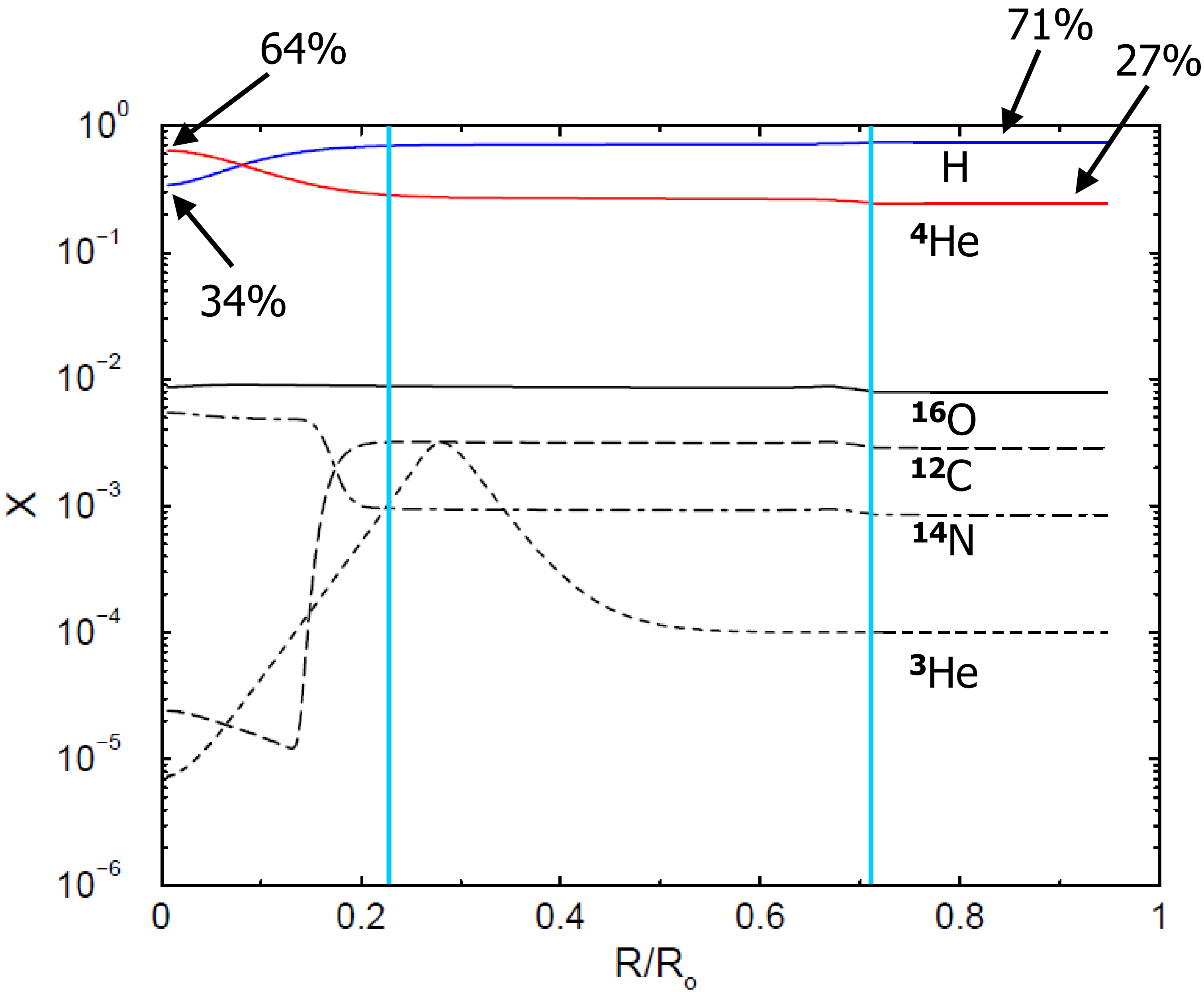
Példa rezonáns S-faktorra: Hoyle-állapot a szénszintézisben (^{8}Be+α)

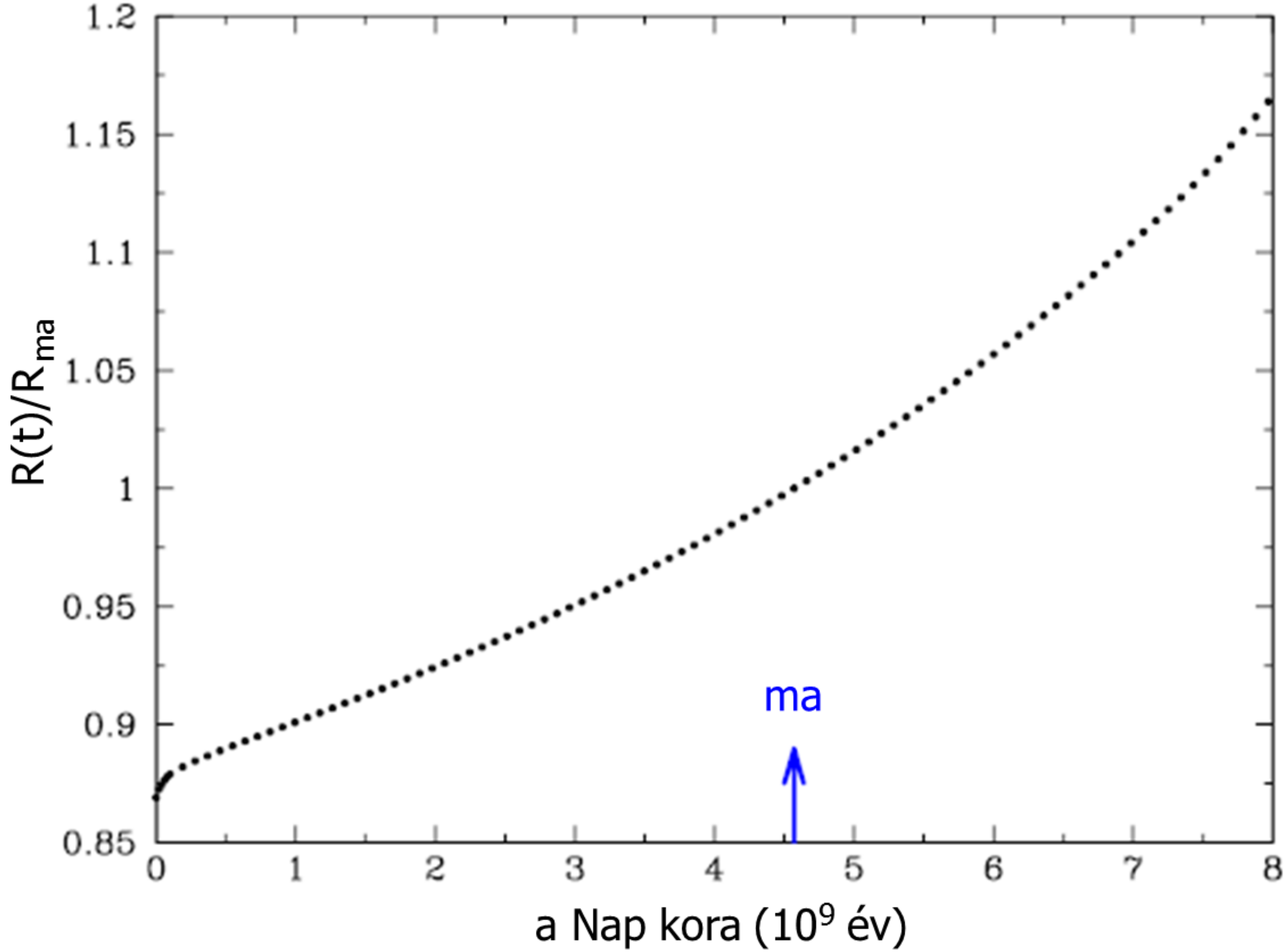




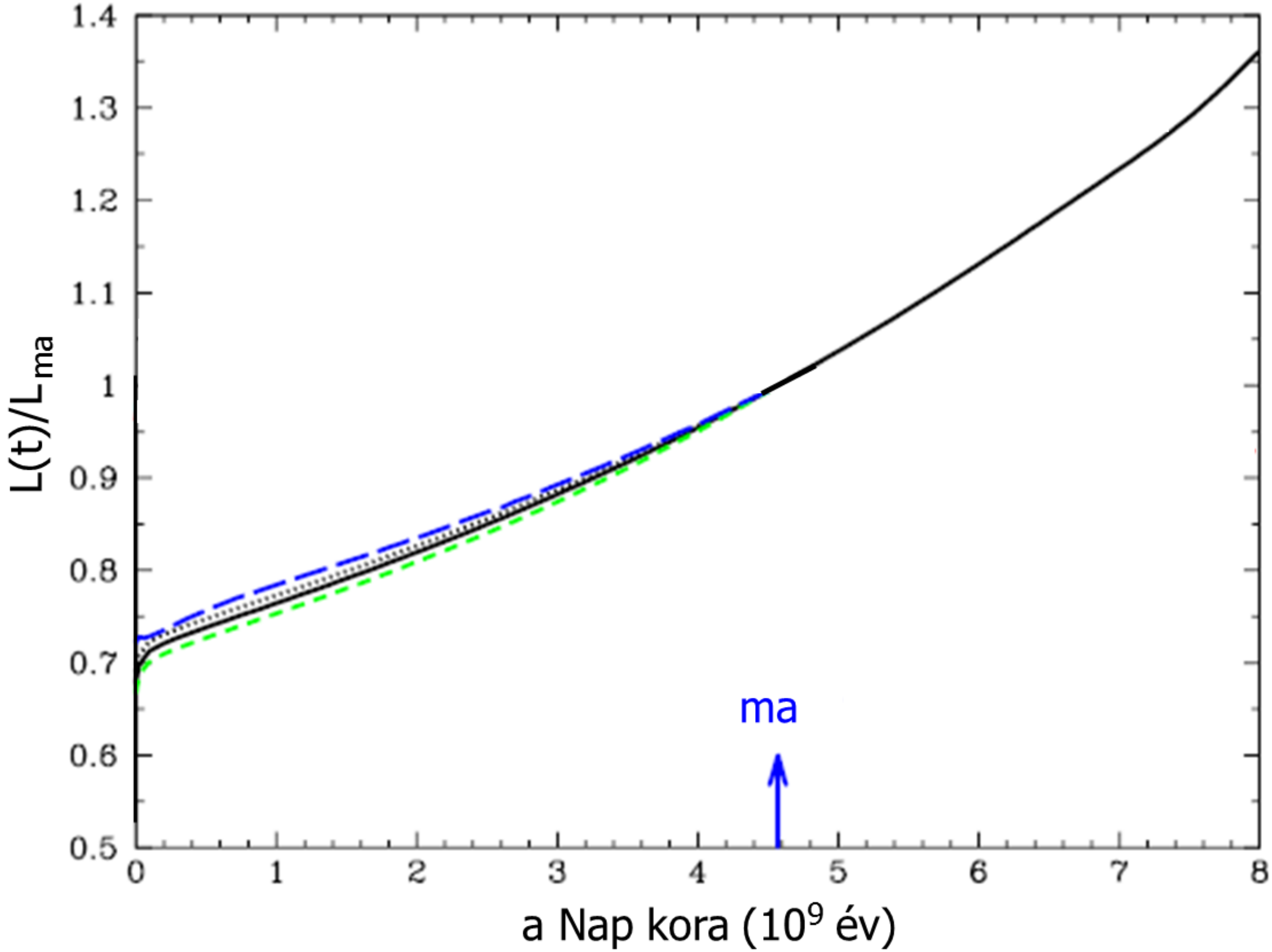
1e−11
5e−12
0e+00
0
100
200
300
400
500
E (keV)
1e−22
5e−23
0
0
100
200
300
400
500
E (keV)

Elemszintézis a Napban

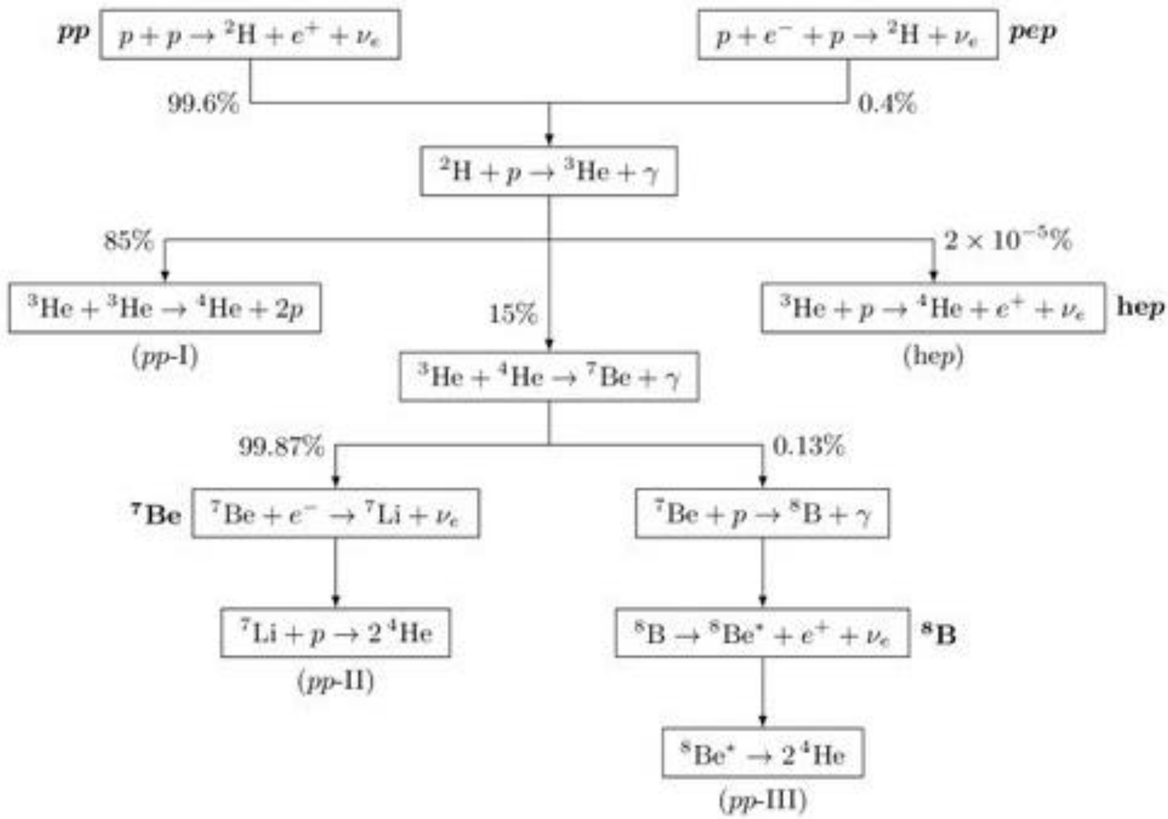




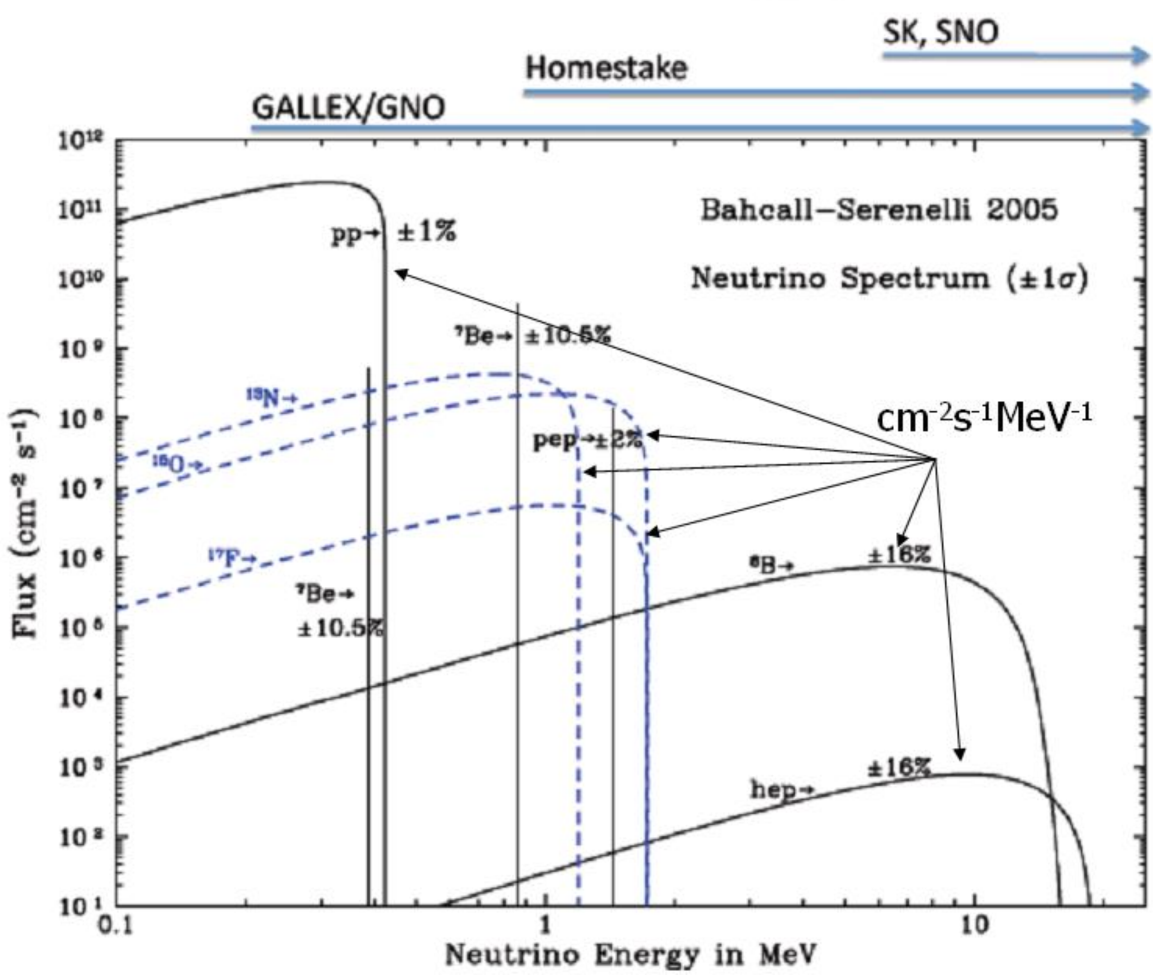
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0.95
0.9
0.85
R(t)/R$_{ma}$
ma
0
1
2
3
4
5
6
7
8
a Nap kora (10^9 év)



1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
$L(t)/L_{ma}$
ma
0
1
2
3
4
5
6
7
8
a Nap kora (10^9 év)



pp
$p + p \to {}^2\mathrm{H} + e^+ + \nu_e$
$p + e^- + p \to {}^2\mathrm{H} + \nu_e$
pep
99.6%
0.4%
${}^2\mathrm{H} + p \to {}^3\mathrm{He} + \gamma$
85%
15%
$2 \times 10^{-5}\%$
${}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \to {}^4\mathrm{He} + 2p$
(pp-I)
${}^3\mathrm{He} + p \to {}^4\mathrm{He} + e^+ + \nu_e$
hep
(hep)
${}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \to {}^7\mathrm{Be} + \gamma$
99.87%
0.13%
^{7}Be
${}^7\mathrm{Be} + e^- \to {}^7\mathrm{Li} + \nu_e$
${}^7\mathrm{Be} + p \to {}^8\mathrm{B} + \gamma$
${}^7\mathrm{Li} + p \to 2\,{}^4\mathrm{He}$
(pp-II)
${}^8\mathrm{B} \to {}^8\mathrm{Be}^* + e^+ + \nu_e$
^{8}B
${}^8\mathrm{Be}^* \to 2\,{}^4\mathrm{He}$
(pp-III)



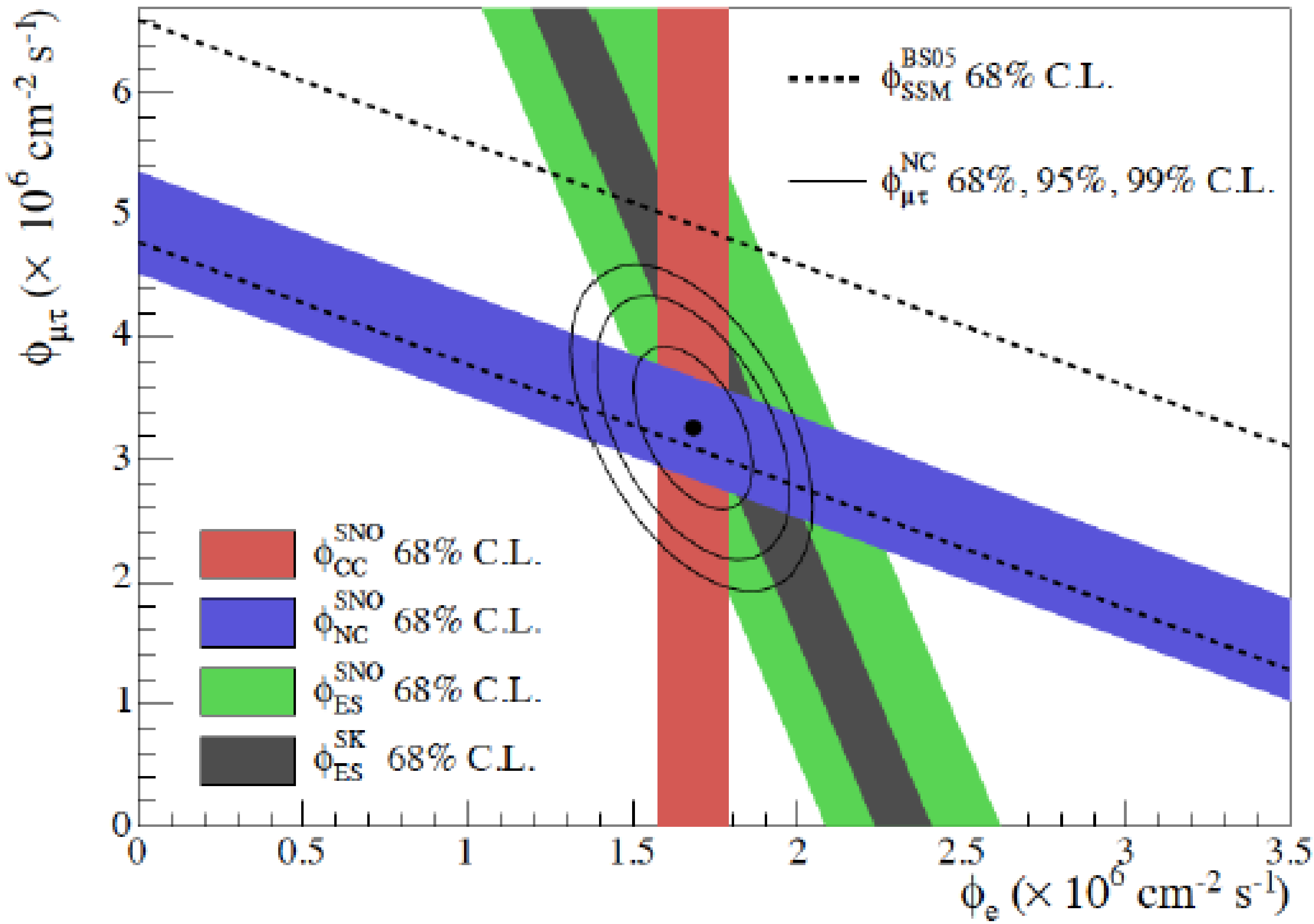
SK, SNO
Homestake
GALLEX/GNO
Bahcall–Serenelli 2005
Neutrino Spectrum (±1σ)
cm^{-2}s^{-1}MeV^{-1}
pp→ ±1%
^{7}Be→ ±10.5%
^{13}N→
^{15}O→
^{17}F→
pep→±2%
^{8}B→
±16%
hep→
±16%
^{7}Be→
±10.5%
Flux (cm^{-2} s^{-1})
10^{12}
10^{11}
10^{10}
10^{9}
10^{8}
10^{7}
10^{6}
10^{5}
10^{4}
10^{3}
10^{2}
10^{1}
0.1
1
10
Neutrino Energy in MeV

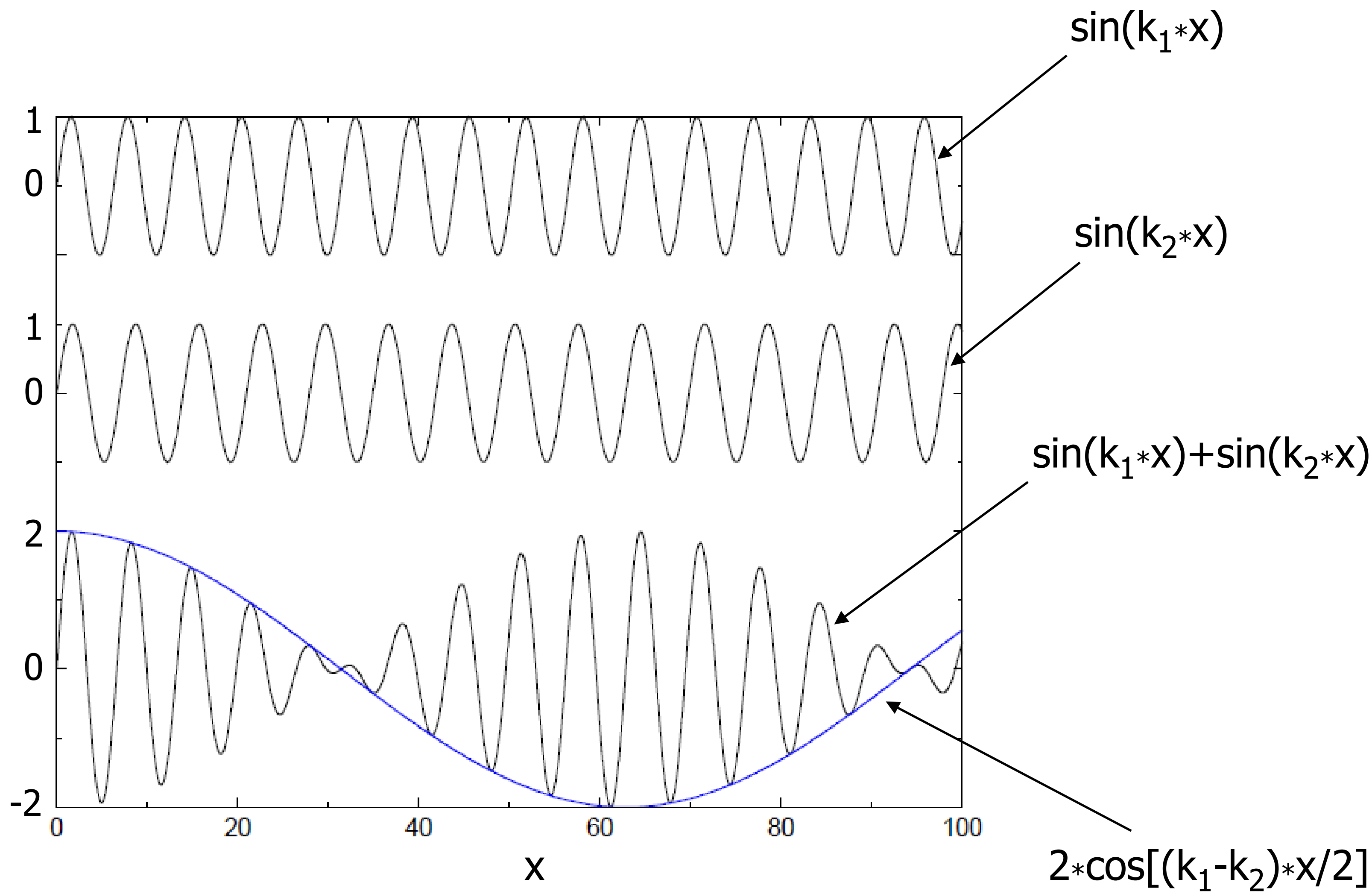
Eredmény: $\phi_{CC} = 1.7 * 10^6\ cm^{-2}s^{-1}$

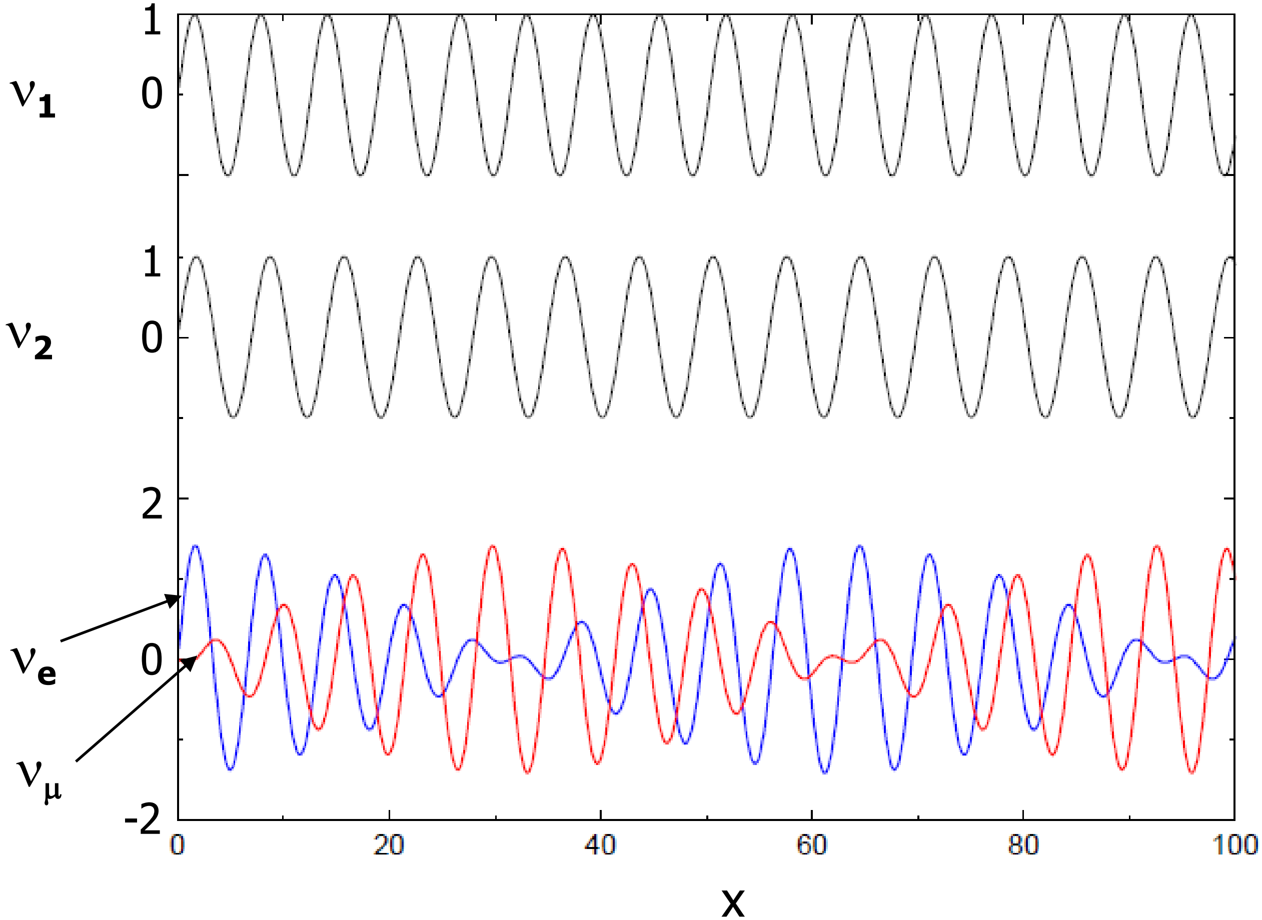
$\phi_{ES} = 2.3 * 10^6\ cm^{-2}s^{-1}$

$\phi_{NC} = 5.0 * 10^6\ cm^{-2}s^{-1}$

$\phi_{Nap\text{-}modell} = 5.0 * 10^6\ cm^{-2}s^{-1}$




sin(k1*x)
sin(k2*x)
sin(k1*x)+sin(k2*x)
2*cos[(k1-k2)*x/2]
1
0
1
0
2
0
-2
0
20
40
60
80
100
x



ν_1
1
0
ν_2
1
0
2
ν_e
0
ν_μ
-2
0
20
40
60
80
100
x

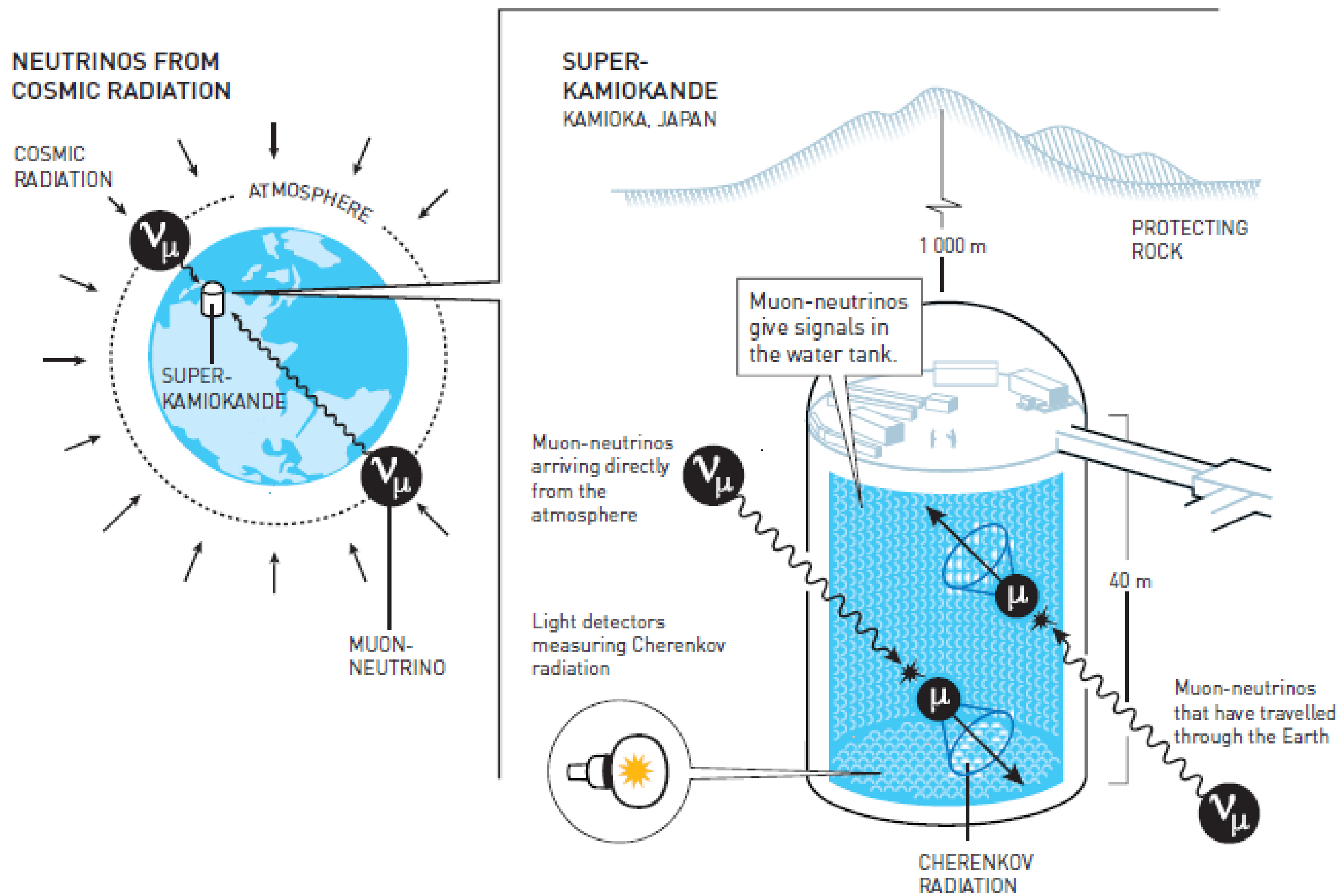
A kozmikus sugárzás pionokat kelt a légkörben: $p+^{14}N \dashrightarrow p+^{14}N+\pi$

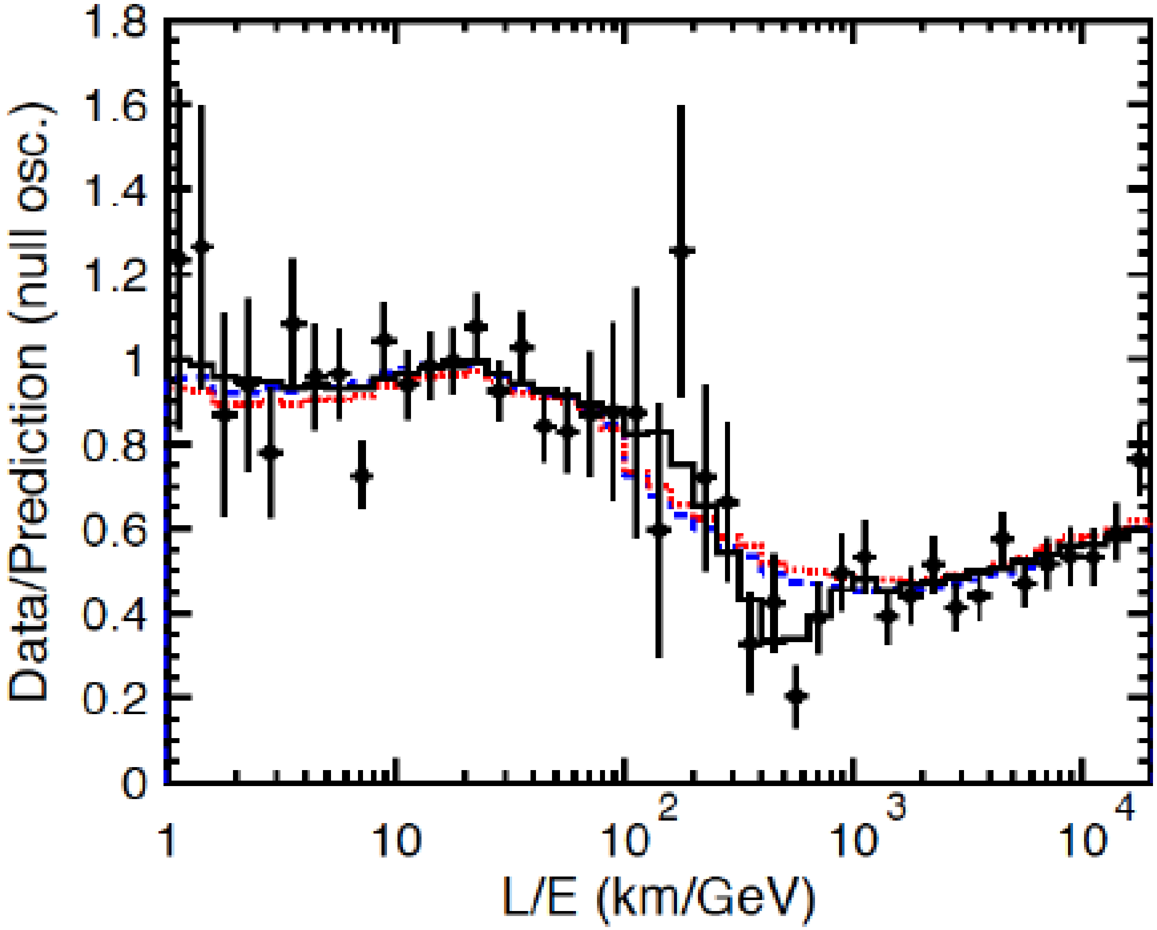
$\pi^- \dashrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

$\mu^- \dashrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$

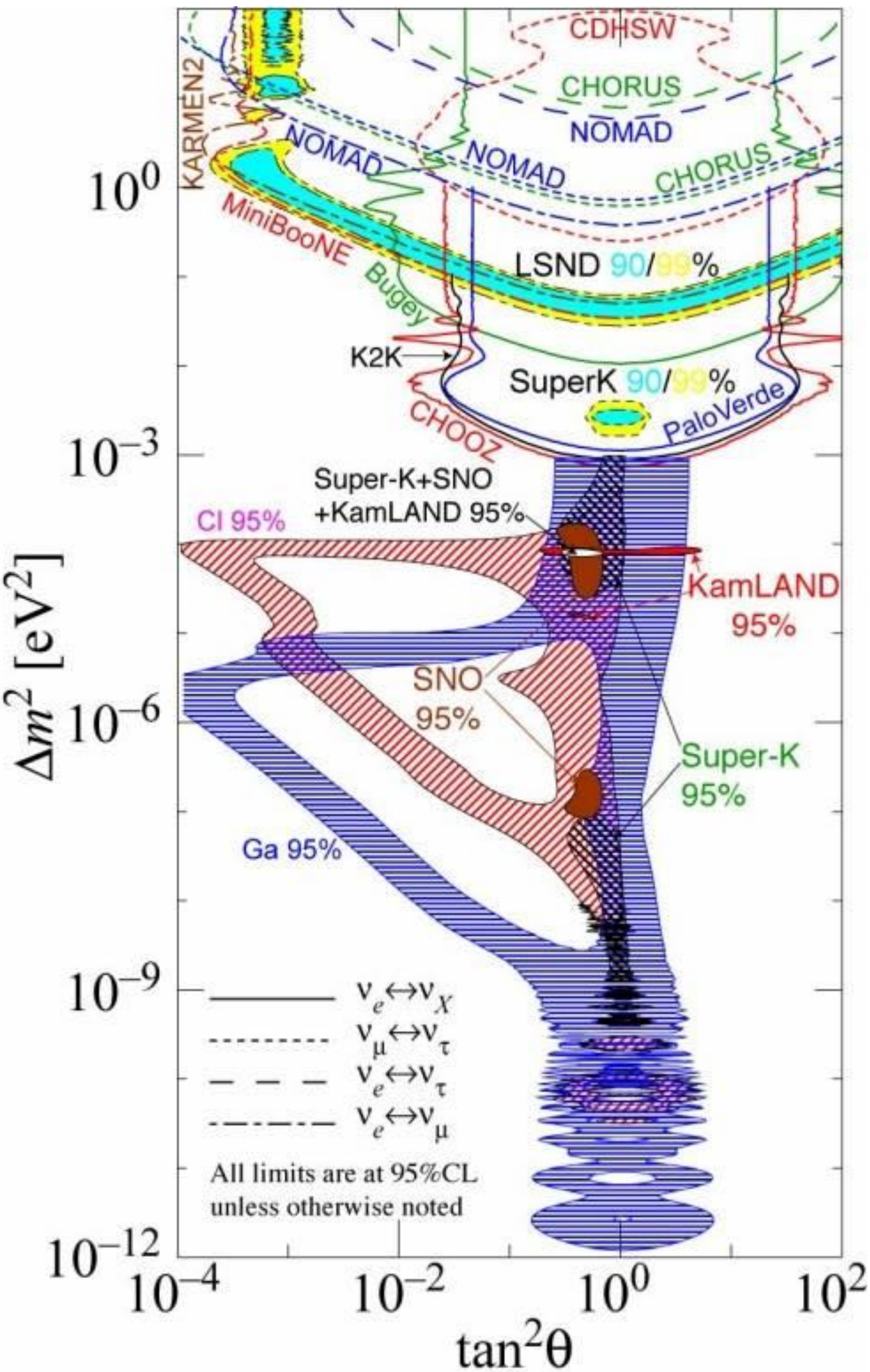
$N_{\text{müon-típusú}}/N_{\text{elektron-típusú}} = 2$

GeV energiájú neutrínók





Data/Prediction (null osc.)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
10
10^2
10^3
10^4
L/E (km/GeV)


CDHSW
CHORUS
NOMAD
KARMEN2
NOMAD
NOMAD
CHORUS
MiniBooNE
LSND 90/99%
Bugey
K2K
SuperK 90/99%
CHOOZ
PaloVerde
Super-K+SNO
+KamLAND 95%
Cl 95%
KamLAND
95%
SNO
95%
Super-K
95%
Ga 95%
$\nu_e \leftrightarrow \nu_X$
$\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$
$\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$
$\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$
All limits are at 95%CL
unless otherwise noted
Δm^2 [eV^2]
10^0
10^{-3}
10^{-6}
10^{-9}
10^{-12}
10^{-4}
10^{-2}
10^0
10^2
$\tan^2\theta$