MARKOV-LÁNCOK
1. előadás (09.15.)

Markov-tulajdonság: A folyamat jövője csak a jelentől függ, a múlttól nem.

paraméter: diszkrét / folytonos

állapottér: diszkrét / folytonos (csak a diszkrétet hívják láncnak)

pl.: bolygómozgás, diffúziók, populációdinamika stb...

Kérdések: • határeloszlás $\lim_{n\to\infty} P(X_n=i) = ?$

• elnyelő állapotok, elnyelődési valószínűség

• X_n eloszlásának időfüggése

• visszatérési, elérési valószínűségek, átlagos lépésszámok

• nagy számok tv, CHT

Def: Legyen (Ω, A, P) valószínűségi mező, $(I, \mathcal{B})$ mérhető tér, T paraméterhalmaz ($\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Az $X_t : \Omega \to I$ mérhető $(t \in T)$ $\Rightarrow$ sztochasztikus folyamat.

Az $(X_t)_{t\in T}$ Markov-tulajdonságú, ha $\forall t > s$ és $\forall B \in \mathcal{B}$

m.m. $P(X_t \in B \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in B \mid X_s)$ ahol $\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u : u \leq s\}$

A kurzus során I megszámlálható, elemei $i, j, k \dots$. $\mathcal{B} = 2^I$

Ekkor a def $\Leftrightarrow$ $\forall t > s \ \forall i \in I$: $P(X_t = i \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t = i \mid X_s)$ m.m.

Def: $(X_t)_{t\in T}$ Markov-lánc, ha Markov-tulajdonságú és az átmeneti valószínűség homogén: $P(X_t = j \mid X_s = i) = p_{ij}(t-s)$

<u>Diszkrét idejű ML</u> $T = \mathbb{N}$

Ilyenkor megszabadulhatunk az $\mathcal{F}_n$-től, mert ez atomos σ-algebra, és particionálható (?), ezért a def visszavezethető megszámlálható halmazokkal:

$$\forall m > n : P(X_m = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_m = j \mid X_n = i_n)$$

$\forall i_0, \dots i_n, j \in I$

HF: Ez elég az alábbihoz: $P(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, \dots X_n=i_n) = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n)$

tehát elég egy lépésre megkövetelni.

Megj: Ha elnevezem múlt, jelen, jövőt: $A=\{X_0=i_0 \dots X_{n-1}=i_{n-1}\}$

$B=\{X_n=i_n\}$

$C=\{X_m=j\} \quad m>n$

Ekkor a def: $P(C \mid A\cap B)=P(C\mid B)$.

$\iff P(A\cap C\mid B)=P(A\mid B)P(C\mid B)$ tehát A és C feltételesen független B-től

„A jelen elválasztja a múltat és a jövőt"

$\Rightarrow$ A Markov-lánc visszafele is Markov-lánc.

Jelölés: $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=p_{ij}=p_{ij}^{(1)}$

$P(X_{n+m}=j \mid X_n=i)=p_{ij}^{(m)}$

A kezdeti eloszlás: $\mu=(\mu_i)_{i\in I}$ ahol $\mu_i=P(X_0=i)$

Átmeneti mátrix: $P=(p_{ij})_{i,j\in I}$

A megadáshoz a véges dim. eloszlásokat kell megadni. Ezek:

$$P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)=P(X_0=i_0)P(X_1=i_1\mid X_0=i_0)\cdots P(X_n=i_n\mid X_0=i_0,\dots X_{n-1}=i_{n-1})$$

$$=\mu_{i_0}\cdot p_{i_0 i_1}\cdot p_{i_1 i_2}\cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

$\Rightarrow$ μ és P ismerete elég a ML-hez.

μ: eloszlás I-n

P: sztochasztikus mátrix: $p_{ij}\geq 0$, $\sum_{j\in I} p_{ij}=0$.

~~Állítás: Minden μ és P-hez létezik Markov-lánc.~~

Tétel: $\forall I$ megszámlálható halmazhoz, adott μ eloszláshoz és P sztoch. mátrixhoz $\exists(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező és $X_n:\Omega\to I$ $n\geq 0$ valószínűségi változók úgy, hogy $(X_n)_{n\geq 0}$ ML a megfelelő μ és P paraméterekkel.

Biz: Kolmogorov-alaptétellel. Vagy: Tekintsük $U_n \sim E(0,1)$ iid-ket

$X_0=g(U_0)$ ahol g a μ-t állítja elő, $X_{n+1}=f(X_n,U_{n+1})$ ahol f a P mátrix adott sora.

Mi X_n eloszlása?

$$P(X_1=i)=\sum_{j\in I} P(X_0=j)\,P(X_1=i\mid X_0=j) = \sum_{j\in I} \mu_j\, p_{ji} \equiv \mu^{(1)}_i$$

vektorokkal és mátrixokkal: $\mu^{(1)}=\mu^{(0)}\cdot p$

hasonlóképpen : $\mu^{(n)}=\mu^{(n-1)}\cdot p = \mu^{(0)}\cdot p^n$

Chapman – Kolmogorov – egyenletek:

$$p^{(n+m)}_{ij}=\sum_{k\in I} p^{(n)}_{ik}\cdot p^{(m)}_{kj} \qquad \text{(Mátrixalakból triviális)}$$

<u>Állapotok osztályozása</u>

Def: Bevezethetünk osztályokat úgy, hogy i-ből elérhető j, ha $\exists\, n\geq 0$ amire $p^{(n)}_{ij}>0$.

$\iff \exists\, i_1,i_2,\dots,i_n:\ p_{ii_1}\,p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}>0.$

Megjegyzés: i és j egy osztályban van, ha el lehet jutni egymásba ha

ez • reflexív, hiszen $p^{(0)}_{ii}=1$
• tranzitív, hiszen CK-egyenlet. $\Big\}\ i\to j$ $\Big\}\ i\leftrightarrow j$
• szimmetrikus

$\Rightarrow$ osztályokra bontja a teret. Ezek a MC osztályai.

Def: Egy MC irreducibilis, ha csak 1 osztálya van.

Def: Egy osztály zárt (lényeges) ha nem lehet belőle kijutni
nyílt (lényegtelen) ha ki lehet belőle jutni

Def: i állapot lényeges, ha $i\to j$, akkor $j\to i$.
(egy lényeges osztály lényeges állapotokból áll.)

Állítás: A lényegesség osztálytulajdonság.

Biz: indirekt bizonyítás: TFH $i,j\in C$ osztály és i lényeges, de j nem.

Ez ellentmondás, hiszen $i\leftrightarrow j$ az osztály miatt, de j lényegtelensége miatt $\exists k$ ami $j\to k$, de $k\not\to j$, viszont $i\to j\to k \Rightarrow k\to i \Rightarrow j\to k\to i\to j$.

$\square$

MARKOV-LÁNCOK

2. előadás (09.22.)

Def: $i \in I$ állapot periódusa: $d(i) = \text{lnko}\{n>0 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$

Ha a halmaz üres, akkor $d(i)$ nem definiált.

Állítás: A periódus osztálytulajdonság.

Biz: [~~Ha van hurokél, akkor az egész osztály periódusa 1~~]

Legyen $i \leftrightarrow j$. Ekkor $\exists n: p_{ij}^{(n)}>0$ és $\exists m\ p_{ji}^{(m)}>0 \Rightarrow p^{(n+m)}>0$

TFH $s: p_{jj}^{(s)}>0$. ~~ekkor~~ $\Rightarrow p_{ii}^{(n+s+m)}>0$

$\Rightarrow d(i)\,|\,n+m$ és $d(i)\,|\,n+m+s \Rightarrow d(i)\,|\,s \Rightarrow d(i)\,|\,d(j)$

Hasonló módon $d(j)\,|\,d(i) \Rightarrow d(i)=d(j)$. □

Állítás: Egy d periódusú C osztály felbontható d részosztályra úgy, hogy ~~ahol~~ ha $j\in C_r(i)$ és $p_{ij}^{(n)}>0$, akkor $n\equiv r \mod d$

Továbbá $\exists N(j)$ úgy, hogy $\forall n\ge N(j)$: $p_{ij}^{(nd+r)}>0$.

Pl.: 7 elemű, [illegible] lépkedős gráfnál $d=1$, és $N=7$.

Biz: 1) $\exists m: p_{ji}^{(m)}>0$

TFH: $p_{ij}^{(n)}$ és $p_{ij}^{(k)}>0 \Rightarrow p_{ii}^{(n+m)}>0$ és $p^{(k+m)}>0$

$\Rightarrow d\,|\,n+m$ és $d\,|\,k+m \Rightarrow d\,|\,n-k \Rightarrow n\equiv k \mod d$

2) $d = \text{lnko}\{n>0: p_{ii}^{(n)}>0\} \Rightarrow d = \sum_{k=1}^{K} c_k n_k$ ahol $c_k\in\mathbb{Z}$ és $p_{ii}^{(n_k)}>0$

(a számelméletből)

Legyen $n_0 := \sum_{k=1}^{K} n_k$ és $N := n_0^2 \max_{1\le k\le K}|c_k|$.

Ha $n\ge N$ akkor $n = e n_0 + q$ valamely $e\in\mathbb{Z}$ és $0\le q<n_0$

$nd = e n_0 d + qd = \sum_{k=1}^{K} e d n_k + \sum_{k=1}^{K} q c_k n_k = \sum_{k=1}^{K} (ed + q c_k) n_k$

Mivel $de \ge n_0 \max_k |c_k|$ és $|q c_k| < n_0 \max_k |c_k| \Rightarrow (ed+qc_k)>0$

$\Rightarrow p_{ii}^{(nd)}>0$. Innen triviális. □

Következmény: Ha C lényeges osztály d periódussal, és $P(X_0 \in C_r) = 1$ akkor $\{X_{nd}\}$ Markov lánc a C_r állapotterén és irreducibilis és aperiodikus.

<u>Visszatérőség</u>

Jelölés: $f_{ij}^{(n)}$ $n>0$ és $i,j \in I$ -re az a valószínűség, hogy i-ből j-be n lépés alatt érünk el <u>először</u>.

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

$$f^*_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Def: Az $i \in I$ állapot visszatérő (rekurrens), ha $f^*_{ii} = 1$,
átmeneti (tranziens), ha $f^*_{ii} < 1$.

Állítás: 1) $i \neq j$: $i \to j \Leftrightarrow f^*_{ij} > 0$ (trivi)

2) Ha i lényegtelen, akkor tranziens, de a megfordított nem feltétlen. (trivi)

Jelölés: $g_{ij} = P(X_n = j$ végtelen sok n-re $\mid X_0 = i)$

Állítás: 3) Ha i visszatérő akkor $g_{ii} = 1$
i átmeneti akkor $g_{ii} = 0$ (trivi)

4) $g_{ij} = f^*_{ij}\, g_{jj}$ (trivi)

5) $\left.\begin{matrix} g_{ii} = 1 \\ f^*_{ij} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g_{ij} = 1$

Következmény: • A visszatérőség osztálytulajdonság
• Egy visszatérő osztályban $f^*_{ij} = 1$ $\forall i,j \in C$-re.

Biz: Ha i-ben vagyunk, utána végtelen sok kört tesz meg, önmagában. Ezen körökben véges valószínűsége végig nem j.

A végtelen körökben véges esélyünk végtelen.

DE a precizitáshoz kell az erős Markov-tulajdonság.

Def: Erős Markov-tulajdonság.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X_t : \Omega \to I$ $\quad (I, \mathcal{B})$ $\quad t \in T = \mathbb{N}$ vagy $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$\tau : \Omega \to T$ véges megállási idő, ha $\forall t$ $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$.

$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$; $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in T\}$.

Az erős Markov-tulajdonság az, ha $\forall \tau$ véges megállási időre $\forall s > 0$, $\forall B \in \mathcal{B}$

$$P(X_{\tau+s} \in B \mid \mathcal{F}_\tau) = P(X_{\tau+s} \in B \mid X_\tau) \quad \text{majdnem mindenütt.}$$

Állítás: Diszkrét idejű Markov-láncra teljesül az EMT.

Biz: $\mathcal{F}_\tau$ és $\sigma(X_\tau)$ atomos σ-algebrák, tehát elég az atomokra kiszámítani.

$\mathcal{F}_\tau$ egy atomja: $\{\tau = n, X_0 = i_0, \ldots X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\}$

Ami kell, hogy $\underbrace{P(X_{\tau+m} = j \mid \tau = n, X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)}_{p_{ij}^{(m)} \text{ az a közönséges Markov miatt}} = P(X_{\tau+m} = j \mid X_\tau = i)$

$$P(X_{\tau+m} = j \mid X_\tau = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_{\tau+m} = j, \tau = n \mid X_\tau = i) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X_{n+m} = j \mid \tau = n, X_n = i)}_{p_{ij}^{(m)}} \cdot P(\tau = n \mid X_\tau = i) =$$

$$= p_{ij}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} P(\tau = n \mid X_\tau = i) = p_{ij}^{(m)}. \qquad \square$$

Az eredeti állítás biz-hez:

TFH $X_0 = i$, τ_n az i-be való n visszatérés időpontja.

$$A_n = \{X_{\tau_n+1}, \ldots, X_{\tau_{n+1}} \text{ egyikében eljut } j\} \in \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$$

$$P(A_n \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) \underset{\text{EMT miatt}}{=} P(A_n \mid X_{\tau_n}) \underset{\text{triviális } \sigma\text{-algebrát generál}}{=} P(A_n)$$

$\Rightarrow$ A_n független $\mathcal{F}_{\tau_n}$-től, így $A_0, \ldots, A_{n-1}$-től is $\Rightarrow$ $P(A_n) = p > 0$

ahol p az a valsz. hogy előbb ér j-be, mint i-be.

Borel–Cantelli-lemma miatt 1 valszggel bekövetkezik $A_1, A_2, \ldots$ közül végtelen sok.

Példa: $I = \{1, 2, 3\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg f^* és g mátrixokat!

- $f^*_{33} = 1$ és $f^*_{31}, f^*_{32} = 0$ triviális. g_{3i} u.a.
- $f^*_{11} = 0{,}75$, mert ha csak nem megyünk 3-ba, akkor visszajutunk ugyanúgy $f^*_{21} = 1$.
- Egyébként stb. a 3-ba jutás esélye $1 \Rightarrow f^*_{i3} = 1$.

Számolás után:

$$f^* = \begin{pmatrix} 0{,}75 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MARKOV-LÁNCOK

3. előadás (09.29.)

Lemma (Töplitz): Legyenek $a_n \geq 0$ és b_n valós sorozatok olyanok, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \;!$$

Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = b$$

Biz: (Feltesszük, hogy $b<\infty$, de hasonlóan belátható $b=\infty$-re is.)

Mivel b konvergens ezért $\exists B: \ |b_n - b| < B \quad \forall n$

és $\exists N: \ \forall n>N: \ |b_n - b| < \varepsilon$ adott ε-ra.

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} - b \right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} - b)\right|}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} |a_k (b_{n-k} - b)|}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-N} a_k \varepsilon + \sum_{k=n-N+1}^{n} a_k B}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \leq$$

$$\leq \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \cdot B = \varepsilon$$

$\square$

Tétel: $g_{ij} = 0 \iff \sum_{r=0}^{\infty} p_{ij}^{(r)} < \infty$

Biz: $$\sum_{r=1}^{n} p_{ij}^{(r)} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{r-1} f_{ij}^{(r-k)} p_{jj}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-k} f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ahol $a_k = p_{jj}^{(k)}$ és $b_k = \sum_{s=1}^{k} f_{ij}^{(s)}$, $b_0 = 0$

Mivel $b = f_{ij}^{*}$, ezért a Töplitz-lemma miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ij}^{(r)}}{\sum_{r=0}^{n} p_{jj}^{(r)}} = f_{ij}^{*}$$

$\cancel{\text{Ha} \ \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ij}^{(r)}}{\sum_{r=0}^{n} p_{jj}^{(r)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sum_{r=0}^{n} p}\right)}$

, ha $i=j$, akkor

$$f_{ii}^* = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ii}^{(r)}}{\sum_{r=0}^{n} p_{ii}^{(r)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sum_{r=0}^{n} p_{ii}^{(r)}}\right)$$

Ek

$$\left.\begin{array}{l} f_{ii}^* = 1 \iff \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} = \infty \\ \Updownarrow \\ g_{ii} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g_{ii} = 0 \iff \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} < \infty.$$

, ha $i \neq j$ és $g_{ij} = 0$ $(\Rightarrow)$

mivel $g_{ij} = f_{ij}^* g_{jj}$ ezért vagy $f_{ij}^* = 0$ vagy $g_{jj} = 0$

ha $f_{ij}^* = 0$, akkor $p_{ij}^{(r)} = 0$ $\forall r$-re $\Rightarrow \sum_r p_{ij}^{(r)} = 0 < \infty$

ha $g_{jj} = 0$, akkor j tranziens, ezért $\sum_r p_{ij}^{(r)} < \infty$

, ha $i \neq j$ és $\sum_r p_{ij}^{(r)} < \infty$ $(\Leftarrow)$

TFH $g_{ij} > 0$, de akkor $g_{jj} > 0$ és $f_{ij}^* > 0$

$\Downarrow$ j rekurrens; $\Downarrow$ i-ből indulva elérjük j-t, pozitív p-vel

$\Rightarrow \sum_r p_{ij}^{(r)} = \infty$, ami ellentmondás, tehát $g_{ij} = 0$ □

	f_{ij}^*	g_{ij}	$\sum_r p_{ij}^{(r)}$
i és j ugyanazon rekurrens osztályban	1	1	∞
i és j ugyanazon tranziens osztályban	>0	0	$<\infty$
i és j külön osztályban, $i \to j$, j tranziens	>0	0	$<\infty$
i és j külön osztályban, $i \to j$, j rekurrens	$c>0$	$c>0$	∞
$i \not\to j$	0	0	$<\infty$

Példa: bolyongás számegyenesen. Jobbra p, balra $q = 1-p$ valószínűséggel

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = (1-4x)^{-1/2} \quad \text{ahol } x = p(1-p)$$

ha tehát $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \sum p < \infty \Rightarrow$ tranziens

de $p = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum p = \infty \Rightarrow$ rekurrens

MARKOV-LÁNCOK

4. előadás (10.06.)

átmenetvalószínűségek konvergenciája

Def: Egy $i \in I$ visszatérő állapot visszatérési ideje: $m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$

i pozitív rekurrens, ha $m_i < \infty$

i nulla rekurrens, ha $m_i = \infty$.

Ha j tranziens, akkor az előző órai tétel miatt $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \to 0$.

Mi van, ha j rekurrens?

Jelölés: $p_n := p_{ii}^{(n)}$, $f_n := f_{ii}^{(n)}$.

Tétel: Ha i állapot rekurrens d periódussal, akkor $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{m_i}$

Biz: Ha $d > 1$, akkor tekintsük a $\{X_0, X_d, X_{2d}, \dots\}$ láncot, és itt az $m_i' = \frac{m_i}{d}$ miatt az eredeti összefüggést kapjuk.

Tekintsük tehát csak a $d = 1$ esetet!

Belátható, hogy $d_f = \text{lnko}\{n \geq 1 : f_n > 0\} = 1$, mert $\forall n$, ahol $p_n > 0$ előáll $n = n_1 + \dots n_k$ -ként, ahol $f_{n_i} > 0 \Rightarrow d_f | n$.

Mivel azonban $d = 1$, ezért $\forall$ elég nagy n-re $p_n > 0 \Rightarrow d_f = 1$.

Legyen $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ az a valség, hogy n lépés alatt nem térünk vissza i-be!

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k = m_i$$

$P(i$-ből bárhova n lépés alatt$) = 1$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(i\text{-ből bárhova } n \text{ lépés alatt} \mid \text{utoljára az } n-k\text{-ban volt } i\text{-ben})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} r_k = 1 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=0}^{n} r_k p_{n-k}}{\sum_{k=0}^{\infty} r_k} = \frac{1}{m_i} \Rightarrow$$ Töplitz-lemma miatt, ha p_n konvergens, akkor $p_n \to \frac{1}{m_i}$

Be kell látni, hogy p_n konvergens.

Legyen $\lambda := \limsup_{n\to\infty} p_n$ és n_k olyan sorozat, $\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = \lambda$.

Vegyünk olyan s-t, amire $f_s > 0$. Ezzel

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} p_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n_k} f_j\, p_{n_k-j}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(f_s\, p_{n_k-s} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n_k} f_\nu\, p_{n_k-\nu}\right) \quad (\Delta)$$

Mivel $\sum_n f_n = 1$ ezért $\forall \varepsilon\ \exists N : \sum_{n=N}^{\infty} f_n < \varepsilon$. Adott ε-ra a részösszeg:

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n_k} f_\nu\, p_{n_k-\nu} = \sum_{\substack{\nu=N\\ \nu\neq s}}^{n_k} f_\nu\, p_{n_k-\nu} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{N-1} f_\nu\, p_{n_k-\nu} \leq \varepsilon + \left(\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{N-1} f_\nu\right) \sup_{\nu<N} p_{n_k-\nu} \leq$$

$$\leq \varepsilon + (1-f_s) \sup_{\nu<N} p_{n_k-\nu}$$

Felhasználva, hogy $\lim (a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \limsup b_n$, (Δ)-ből

$$\lambda \leq f_s \liminf_{k\to\infty} p_{n_k-s} + \varepsilon + (1-f_s)\lambda$$

$$\Rightarrow \liminf_{k\to\infty} p_{n_k-s} \geq \lambda \Rightarrow \lim_{k\to\infty} p_{n_k-s} = \lambda$$

Ez teljesül $\forall s$-re alakú $s = \sum_j c_j s_j$, $c_j > 0$, $f_{s_j} > 0$

és mivel $d_f = 1$ ezért $\exists t_0$, hogy $\forall t > t_0$-ra $\lim_{k\to\infty} p_{n_k-t} = \lambda$

A $(*)$ kifejezés miatt $\sum_{n=0}^{n_k-t_0} r_n\, p_{n_k-t_0-n} = 1$

- ha $\sum r_n = m_i = \infty$, akkor

$$1 \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{N} r_n\, p_{n_k-t_0-n} = \lambda \sum_{n=0}^{N} r_n \quad \text{ami csak akkor lehet jó, ha}$$

$$\lambda = 0$$

- ha $\sum r_n = m_i < \infty$ akkor $\exists N : \sum_{n=N+1}^{\infty} r_n < \varepsilon$

$$\left|\sum_{n=0}^{n_k-t_0} r_n (p_{n_k-t_0-n} - \lambda)\right| \leq \sum_{n=0}^{N} r_n \left|p_{n_k-t_0-n} - \lambda\right| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

tehát $1 - \lambda \sum_{n=0}^{n_k-t} r_n \to 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n_k-t} r_n} \to \frac{1}{m_i}$

Tehát $\lambda = \frac{1}{m_i}$. Ugyanez végigjátszható $\eta = \liminf_{n\to\infty} p_n$-nel is,

tehát $\lim_{n\to\infty} p_n$ létezik és $= \frac{1}{m_i}$

$\square$

Következmény: A periodicitás osztálytulajdonság.

Biz: Ha i és j ugyanazon rekurrens osztály elemei, akkor $\exists\, n, m \in \mathbb{N}$:

$p_{ij}^{(n)} > 0$ és $p_{ij}^{(m)} > 0$.

Továbbá $p_{ii}^{(n+m+kd)} \geq p_{ij}^{(n)}\, p_{jj}^{(kd)}\, p_{ji}^{(m)}$. Ha $k \to \infty$, akkor $p_{jj}^{(kd)} > 0$ feltéve, hogy j rekurrens, ami akkor $p_{ii}^{(n+m+kd)}$ is az. □

Tétel: Legyen i és j tetszőleges állapotok, és j periódusa d! Ekkor $r = 1, 2, \dots d$-re

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}^{(*)}(r)\,\frac{d}{m_j}$$

ahol $f_{ij}^{*}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(nd+r)}$ és tranziens j-re $m_j = \infty$.

Biz: $p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(kd+r)}\, p_{jj}^{(nd-kd)}$ Innentől Toeplitz. □

Következmény: $\forall i, j \in I$-re $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}^{*}}{m_j}$.

szemlélet: i-ből indulva, a lépések $\frac{f_{ij}^{*}}{m_i}$ részét tölti a lánc j-ben.

- ha j tranziens vagy nulla rekurrens $\Rightarrow p_{ij}^{(n)} \to 0$
- ha i és j ugyanabban az aperiodikus pozitív rekurrens osztályban $\Rightarrow p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j}$
- ha i és j ugyanazon d-periodikus osztály, akkor $p_{ij}^{(nd+r)} \to \frac{d}{m_j}$

Ha μ kezdeti eloszlásból indulunk, akkor $P(X_n = j) = \sum_i \mu_i p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j}$

Példa: Az egydimenziós szimmetrikus bolyongás nulla rekurrens

Példa: Tisztességes játékban annyit lépünk amennyit dobunk. Annak valószínűsége, hogy az n-ik mezőre lépünk $p_n \to \frac{2}{7}$

MARKOV-LÁNCOK

5. előadás (10.13.)

Stacionárius eloszlás

Olyan μ eloszlást keresünk, amire $\mu^T P = \mu$

Tétel volt: C zárt osztályon $u^T P = u^T$ abszolút konvergens megoldást vizsgálva

- Ha C tranziens vagy null-rekurrens, akkor $u = 0$
- Ha C pozitív rekurrens, akkor $\mu = c \cdot \pi$ ahol $\pi_i = \frac{1}{m_i}$

és $\sum_{i \in C} \pi_i = 1$, $\sum_{i \in C_r} \pi_i = \frac{1}{d}$

Tétel:
- Ha nincs pozitív rekurrens osztály, akkor $\nexists$ stac eloszlás
- Ha van pozitív rekurrens osztály, akkor

$$\mu_i = \begin{cases} \lambda_\alpha \pi_i & i \in C_\alpha \\ 0 & i \notin \bigcup C_\alpha \end{cases} \qquad \lambda_\alpha \geq 0, \ \sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$$

magyarul: A teljes láncra a stac eloszlás a rekurrens osztályok stac eloszlásainak lin komb-ja.

Bizonyítás nem kell, de a jegyzetben benne van.

Stac eloszlás keresése: 1) $u^T P = u^T$ megoldása

2) $p_{ij}^{(nd+r)} \xrightarrow[n \to \infty]{} d\pi_j$ ha $i,j \in C$ zárt, $j \in C_i(r)$

pl.:
- hány fej van a sorozat végén?
- nem szimmetrikus bolyongás az $\mathbb{N}$-en

Állítás: TFH μ egy stac eloszlás, és indítsuk innen a láncot! Ekkor $\forall A \subseteq I$-re $P(X_0 \in A, X_1 \notin A) = P(X_0 \notin A, X_1 \in A)$

magyarul: Amennyi tömeg bemegy A-ba, annyi ki is jön.

μ-vel felírva: $\sum_{\substack{i \in A \\ j \notin A}} \mu_i p_{ij} = \sum_{\substack{i \notin A \\ j \in A}} \mu_j p_{ji}$

megj: ez a tétel hasznos bolyongásoknál, mert a határán csak két irányú átmenet.

Biz: $A, B \subseteq I$, $\text{flux}(A,B) := P(X_0 \in A, X_1 \in B) = \sum_{\substack{i \in A \\ j \in B}} \mu_i p_{ij}$

$$\text{flux}(\{i\}, I) = P(X_0 = i, X_1 = I) = \mu_i = \sum_{j \in I} \mu_j p_{ji} = \text{flux}(I, \{i\})$$

Mivel diszjunkt unióra P-t összeadódik

$$\text{flux}(A, I) = \sum_{i \in A} \text{flux}(\{i\}, I) = \sum_{i \in A} \text{flux}(I, \{i\}) = \text{flux}(I, A)$$

$$\text{flux}(A,I) = \text{flux}(A,A) + \text{flux}(A,\bar{A}) \qquad \text{flux}(I,A) = \text{flux}(A,A) + \text{flux}(\bar{A},A)$$

$$\Rightarrow \text{flux}(A,\bar{A}) = \text{flux}(\bar{A},A) \qquad \square$$

példa: Ehrenfest diffúziós modell

- a golyók eloszlása van 2 urnában egy-egy golyóval, amit a i. és i−1. elem átrakja, ami reverzibilis ismeretlenül.
- más ötlet: felírhatjuk a 2^N elemű elemi eseményt és akkor egyenletes eloszlás lesz a stac., amit számolni kell. (u.a. elv)

(ebben érdemes kezelni csak a többit, hogy egy nagyobb állapotterű, de szimmetrikus ML-t kapunk)

Nagy számok tv-e

Legyen $(X_n)_{n\geq 1}$ ML és $f: I \to \mathbb{R}$ egy fv!

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k(X_k) \to ?$$

Tétel: TFH $(X_n)_{n\geq 0}$ irreducibilis poz rekurrens ML. Ekkor

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j\in I} f(X_j)\pi_j \quad \text{1 valószínűséggel, } \underline{\text{ha}} \text{ ez absz. konvergens}$$

Biz: Válasszunk $i \in I$ fixált elemet, és mindig, amikor i-be ér a lánc, akkor újraindul minden. Ezek közötti szakaszok függetlenek és azonos eloszlásúak

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ ahol τ_n az i-be tett látogatások.

$\tau_n := \min\{m > \tau_{n-1} : X_m = i\}$. Mivel a lánc rekurrens, ezért τ_n véges.

$\ell(n)$: Az i-beli látogatások száma n-ig.

$\tau_{e(n)} \leq n < \tau_{e(n)+1}$

veritén és negatív részre bontással feltesszük, hogy f nem negatív.

$$\frac{1}{e(n)} \sum_{j=1}^{e(n)-1} \underbrace{\sum_{k=\tau_j}^{\tau_{j+1}-1} f(X_k)}_{=: Y_j} \leq \frac{1}{e(n)} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \leq \underbrace{\frac{1}{e(n)} \sum_{k=0}^{\tau_1-1} f(X_k)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \frac{1}{e(n)} \sum_{j=1}^{e(n)} \underbrace{\sum_{k=\tau_j}^{\tau_{j+1}-1} f(X_k)}_{=: Y_j}$$

Y_j-k iid változók

Mivel $e(n) \to \infty$ 1 valószínűséggel ezért $\frac{1}{e(n)} \sum_{j=1}^{e(n)} Y_j \to E(Y_1)$ 1 valószínűséggel

a kiöröseséges nagy számok tv-e miatt. Rendőr elv miatt

$\frac{1}{e(n)} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \to E(Y_j)$.

Nade: $\cdot$ $Y_j \doteq \sum_{k=0}^{\tau_1-1} f(X_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(X_k) \cdot \mathbb{1}_{\{k<\tau_1\}}$

$$\Rightarrow E(Y_j) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(X_k) \mathbb{1}_{\{k<\tau_1\}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} E\left(f(X_k) \mathbb{1}_{\{k<\tau_1\}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{e\in I} f(e) P(X_k = e, k<\tau_1) =$$

$$= \sum_{e\in I} f(e) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(X_k = e, k<\tau_1)}$$

u_e : Annak várható értéke, hogy két i-ben tett látogatás között hányszor járt e-ben a lánc.

Def miatt $\sum_{e\in I} u_e = m_i$ ami véges

Meg kell mutatni, hogy $u^T P = u^T$, amiből következik, hogy $u = c\pi$,

de ezt a házi során ...

MARKOV-LÁNCOK

6. előadás (10.20.)

Irreducibilis periodikus MC-re bizonyítjuk, hogy $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j\in I} f(x_j)\pi_j$.

Két látogatás közötti változó: $Y_k = \sum_{k=\tau_n}^{\tau_{n+1}-1} f(X_k)$ iid volt, és láttuk, hogy

$$\frac{1}{e(n)}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \longrightarrow E(Y_k)$$

$$E(Y_k) = \sum_{j\in I} f(j)u_j \qquad \text{ahol} \qquad u_j = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_k = j \mid k < \tau_1)$$

$$\text{és} \quad \sum_{j\in I} u_j = m_i < \infty$$

Nézzük az állítást:

$$\sum_{j\in I} u_j p_{jl} = \sum_{j\in I}\sum_{k=0}^{\infty} P(X_k = j, k<\tau_1)\, P(X_{k+1} = l \mid X_k = j) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j\in I} P(X_k = j, k<\tau_1)\, P(X_{k+1} = l \mid X_k = j) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[P(X_{k+1} = l \mid X_k)\cdot \mathbb{1}_{\{k<\tau_1\}}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[P(X_{k+1} = l \mid \mathcal{F}_k)\cdot \mathbb{1}_{\{k<\tau_1\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[E\left(\mathbb{1}_{\{X_{k+1}=l\}}\cdot \mathbb{1}_{\{k<\tau_1\}} \mid \mathcal{F}_k\right)\right] =$$

Markov-tulajdonság miatt

$$= \text{Teljes várható érték tétele} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{k+1} = l, k<\tau_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_k = l, k\le\tau_1)$$

= mindegy, hogy 0-t vagy τ_1-t vesszük bele, mert i a. állapot

$= u_l$

Korábbi tétel miatt $u_j = c\pi_j$, de mivel $1 = u_i = c\pi_i \Rightarrow c = \frac{1}{\pi_i}$

$$\Rightarrow u_j = \frac{\pi_j}{\pi_i} = \frac{m_i}{m_j}$$

$$\Rightarrow E(Y_k) = \sum_{j\in I} f(j)\frac{\pi_j}{\pi_i}$$

Alkalmazva $f\equiv 1$-re (3): $\frac{n+1}{e(n)} \xrightarrow{mm} \frac{1}{\pi_i} \Rightarrow \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \underbrace{\frac{e(n)}{n+1}}_{\downarrow mm\ \pi_i}\underbrace{\frac{1}{e(n)}\sum_{k=0}^{n} f(n)}_{E(Y_k)} = \sum_{j\in I} f(j)\pi_j$

$\square$

Pl: • adott elem relatív gyakorisága

• adott elempár relatív gyakorisága

A CHT-t alapfelt. irreducibilis, periodikus MC, definiálunk egy f fv. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} f(X_k) - (n+1)\, J(f) \approx \sum_{k=1}^{\ell(n)} \underbrace{\left[Y_k - J(f)\,(\tau_{k+1} - \tau_k)\right]}_{\sum_{k=\tau_h}^{\tau_{h+1}-1} \left[f(X_k) - J(f)\right] \;=\; V_h}$$

ahol $J(f) = \sum_{j \in I} f(x_j)\, \pi_j$

$$\Rightarrow \quad E(V_h) = \frac{J(f)}{\pi_i} - J(f)\, m_i = 0$$

Állítás: $$\frac{\sum_{k=0}^{n} f(x_k) - (n+1) J(f)}{\sqrt{n \pi_i D^2(V_h)}} \to N(0,1) \qquad \text{ha } 0 < D^2(V_h) < \infty$$

Nem bizonyítjuk precízen, de az ötlet a fenti.

Ehelyett nézzük meg $D^2(V_h)$ kiszámítását

$$D^2(V_h) = E(V_h^2) = E\Big[\Big(\sum_{k=\tau_h}^{\tau_{h+1}-1} \underbrace{f(X_k) - J(f)}_{=:\, g(X_k)}\Big)^2\Big]$$

$$x_0 = i: \; E\Big(\Big(\sum_{k=0}^{\tau_1 - 1} g(x_k)\Big)^2\Big) = E\Big(\Big(\sum_{k=0}^{\infty} g(x_k)\, 1\!\!1_{\{k < \tau_1\}}\Big)^2\Big) = E\Big(\Big(\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\, 1\!\!1_{\{k \le \tau_1\}}\Big)^2\Big) =$$

$$= E\Big(\sum_{k=1}^{\infty} g^2(x_k)\, 1\!\!1_{\{k \le \tau_1\}} + 2 \sum_{n<m} g(x_n) g(x_m)\, 1\!\!1_{\{m \le \tau_1\}}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in I} g^2(j)\, P(x_k = j,\, k \le \tau_1) + 2 \sum_{n<m} \sum_{j \ne i} \sum_{e} g(j) g(e) \cdot P(x_n = j,\, x_m = e,\, m \le \tau_1)$$

(*): ide még visszatérünk...

Átmeneti valószínűségek tabu állapotokkal, rekurrens osztályokkal.

$$H \subseteq I, \quad {}_H p_{ij}^{(n)} = P(x_n = j,\, x_1 \notin H, \dots x_{n-1} \notin H \mid x_0 = i)$$

korábbi jelölés: $f_{ij}^{(n)} = P(x_n = j,\, x_{n-1} \ne j, \dots x_1 \ne j \mid x_0 = i)$

világos: $f_{ij}^{(n)} = {}_j p_{ij}^{(n)}$

újabb jelölés: ${}_H f_{ij}^{(n)} = {}_{j,H}\, p_{ij}^{(n)}$

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

$${}_H p_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H p_{ij}^{(n)} \qquad \text{„}i\text{-ből indulva várhatóan hányszor járunk } j\text{-ben, míg } H\text{-ba érünk"}$$

$$m_{ii} = m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$ ← i-be visszatérés átlagos hossza

$$m_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$ ← i-ből j-be jutás átlagos hossza

$$_Hm_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, {}_Hf_{ij}^{(n)}$$ ← ugyanez, csak tabuval

Állítás: pozitív rekurrens C esetén $i,j\in C$-re $m_{ij}<\infty$

Biz: $m_{jj} \geq P(j\text{-ből előbb ér } i\text{-be, mint } j\text{-be})\, m_{ij}$

Mivel $m_{jj}<\infty$ és $P(\dots)$ pozitív $\Rightarrow m_{ij}<\infty$. □

Lemma: $i,j,k\in C$ pozitív rekurrens osztályban $j\neq k$. Ekkor

$$_kf^*_{ij} = \frac{m_{ik}+m_{kj}-m_{ij}}{m_{jk}+m_{kj}} \qquad {}_kf^+_{ij} = \frac{m_{ik}+m_{kj}-m_{ij}}{m_{jj}}$$

Biz: $_kf^*_{ij} = {}_{jk}f^*_{ij} = P(i\text{-ből indulva előbb ér } j\text{-be, mint } k\text{-ba})$

$$f_{ij}^{(n)} = {}_jp_{ij}^{(n)} = {}_{jk}p_{ij}^{(n)} + \sum_{s=1}^{n-1} {}_{jk}p_{ik}^{(s)} \cdot {}_jp_{kj}^{(n-s)} = {}_kf_{ij}^{(n)} + \sum_{s=1}^{n-1} {}_jf_{ik}^{(s)} \cdot f_{kj}^{(n-s)}$$

$$m_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} = {}_km_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{s=1}^{n-1} {}_jf_{ik}^{(s)} f_{kj}^{(n-s)} =$$

$$= {}_km_{ij} + \sum_{s=1}^{\infty} {}_jf_{ik}^{(s)} \sum_{n=s+1}^{\infty} \left((n-s) f_{kj}^{(n-s)} + s f_{kj}^{(n-s)}\right) =$$

$$= {}_km_{ij} + {}_jf^*_{ik} \cdot m_{kj} + {}_jm_{ik} \cdot \underbrace{f^*_{kj}}_{=1 \text{ mert pozitív rekurrens osztály}}$$

$$m_{ik} - m_{ij} + m_{kj} = ({}_jm_{ik} + {}_kf^*_{ij}\, m_{jk} + {}_km_{ij}) - ({}_km_{ij} + {}_jf^*_{ik}\, m_{kj} + {}_jm_{ik}) + m_{kj} =$$

$$= {}_kf^*_{ij}\, m_{jk} - {}_jf^*_{ik}\, m_{kj} + m_{kj} = \qquad \text{mivel } {}_kf^*_{ij} = 1 - {}_jf^*_{ik}$$

$$= {}_kf^*_{ij}\,(m_{jk}+m_{kj}) \quad \Rightarrow \quad {}_kf^*_{ij} = \frac{m_{ik}+m_{kj}-m_{ij}}{m_{jk}+m_{kj}}$$

Z: i-ből indulva hányszor érünk j-be, mielőtt k-ba?

$Z=0$ $\;{}_jf^*_{ik}$ valószínűséggel

$Z>0$ $\;{}_kf^*_{ij}$ valószínűséggel. $\qquad\Rightarrow Z \sim$ nevezetes eloszlás ${}_jf^*_{jk}$ kvócienssel

$$E(Z) = {}_kf^*_{ij}\, \frac{1}{{}_jf^*_{jk}} \qquad \text{mivel } {}_jf^*_{jk} = \frac{m_{jj}}{m_{kj}+m_{jk}}$$

$$= \frac{m_{ik}+m_{kj}-m_{ij}}{m_{jk}+m_{kj}} \cdot \frac{m_{kj}+m_{jk}}{m_{jj}} = \frac{m_{ik}+m_{kj}-m_{ij}}{m_{jj}}$$

□

(*): Visszautalás:

$$P(X_k=j,\ k\le \tau_1) = {}_ip_{ij}^{(k)} \quad \text{és} \quad P(X_n=j, X_m=e,\ m\le \tau_1) = {}_ip_{ij}^{(n)}\cdot {}_jp_{je}^{(m-n)}$$

$$E(V_k^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_j g^2(j)\,{}_ip_{ij} + 2\sum_{n<m}\sum_{j\ne i}\sum_e g(j)g(e)\,{}_ip_{ij}^{(n)}\,{}_ip_{je}^{(m-n)} =$$

$$= \sum_j g^2(j)\,{}_ip_{ij}^{*} + 2\sum_{j\ne i}\sum_e g(j)g(e)\,{}_ip_{ij}^{*}\,{}_ip_{je}^{*} = \text{innentől számolás}$$

$$= \frac{1}{\pi_i}\left(\pi\left[(f-\pi(f))^2\right] - 2\sum_j\sum_e (f(j)-\pi(f))(f(e)-\pi(f))\,\pi_j\pi_e m_{je}\right)$$

MARKOV-LÁNCOK

7. előadás (10.27.)

Megjegyzés a előző órához:

pozitív rekurrens MC esetén néztük ezt: $E\left[\left(\sum_{n=0}^{\tau-1} g(x_n)\right)^2\right]$

$g = f - J(f)$ -t néztük, és így egy másféle jelleg centrált kaptunk.

Ha viszont $g = 1$, akkor $\sum_n g = \tau \Rightarrow E(\tau^2) = m_{ii}\left[2\left(\sum_{j\in I} \frac{m_{ji}}{m_{jj}}\right) - 1\right]$

$E(\tau) = m_{ii}$

Stac eloszlásnak hívtuk a $u^T P = u^T$ egyenlet megoldását $u_i \geq 0$, $\sum_{i\in I} u_i = 1$. esetén.

Irreducibilis MC esetén csak akkor van stac. eloszlás, ha pozitív rekurrens:

$u_i = \pi_i = \frac{1}{m_i}$

Keresünk olyan mennyiséget ami akkor is létezik, de van feltétel eloszlás

<u>Reguláris (stacionárius / invariáns) mérték</u>

$u^T P = u^T \quad u_i \geq 0$

Jelölés: $e_{ej} := {}_e p_{ej}^*$ (két e-beli látogatás között hányszor jár j-ben)

Lemma: Irreducibilis, rekurrens MC, $i, j, k, e \in I$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{N} p_{ke}^{(n)}} = e_{ej}$$

intuitív jelentés: Az, hogy hányszor többet járunk j-ben, mint e-ben, egyenlő azzal, hogy milyen hosszan jut el e-ből e-be j-vel.

megjegyzések:
- $0 < e_{ej} < \infty$ (az előző órán látott geometriai eloszlás miatt)
- pozitív rekurrens esetén $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j} = \pi_j > 0$

  és $\lim_{N\to\infty} (\ ) = \frac{\pi_j}{\pi_e} = e_{ej}$ NSzT miatt, tehát ebben az esetben a lemma triviális.
- null rekurrens esetén $\sum_{n=0}^{N} p_{ij}^{(n)} \to \infty$

Biz:

Láttuk, hogy $\lim_{N\to\infty} \dfrac{\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{*(n)}}{\sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}} = f_{ij}^{*}$ $\qquad S_{ij}(N) := \sum_{n=0}^{N} p_{ij}^{(n)}$

Mivel a MC rekurrens, ezért $f_{ij}^{*} = 1$, továbbá mivel $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj} \to \infty$, ezért az $n=0$-t is hozzávehetjük.

$$\frac{S_{ij}(N)}{S_{ll}(N)} = \underbrace{\frac{S_{ij}(N)}{S_{jj}(N)}}_{\to 1} \frac{S_{jj}(N)}{S_{ll}(N)} \underbrace{\frac{S_{ll}(N)}{S_{ll}(N)}}_{\to 1}$$

$$\frac{S_{jj}(N)}{S_{ll}(N)} = \underbrace{\frac{S_{jj}(N)}{S_{lj}(N)}}_{\to 1} \frac{S_{lj}(N)}{S_{ll}(N)}$$ ha $l=j$, akkor ez 1, ezért teljesül

ha $l \neq j$

$$p_{lj}^{(n)} = {}_l p_{lj}^{(n)} + \sum_{s=1}^{n-1} p_{ll}^{(s)} \cdot {}_l p_{lj}^{(n-s)}$$

$$\sum_{n=1}^{N} p_{lj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} {}_l p_{lj}^{(n)} + \sum_{s=1}^{N-1} \underbrace{p_{ll}^{(s)}}_{a_s} \underbrace{\sum_{n=s+1}^{N} {}_l p_{lj}^{(n-s)}}_{b_{N-s}}$$: Nörlund-lemma $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{lj}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{N} p_{ll}^{(n)}} = \underbrace{\frac{\sum_{n=1}^{N} {}_l p_{lj}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{N} p_{ll}^{(n)}}}_{\to \frac{{}_l p_{lj}^{*}}{\infty} \to 0} + \underbrace{\frac{\sum_{s=0}^{N} a_s b_{N-s}}{\sum_{s=0}^{N} a_s}}_{\to b = e_{lj}} \to e_{lj}$$

$\square$

Tétel: Irreducibilis rekurrens MC. A rekurrenciafeltételek regularitás-nóntételének [illegible]:

$$u_i = c\, e_{hi} \qquad i \in I \quad (c > 0,\ h \in I)$$

megjegyzés: elvileg minden h-ra más különböző nóntétel, de valójában ezek is csak konstansban térnek el, mert

$$\underbrace{\frac{S_{ll}(N)}{S_{jj}(N)}}_{\to e_{jl}} = \underbrace{\frac{S_{ll}(N)}{S_{hh}(N)}}_{e_{hl}} \cdot \underbrace{\frac{S_{hh}(N)}{S_{jj}(N)}}_{e_{jh}} \Rightarrow e_{jl} = e_{jh}\, e_{hl}$$

konstans

- pozitív rekurrens esetén $e_{hi} = \dfrac{\pi_i}{\pi_h} = c\pi_i \Rightarrow$ nincs új megoldás
- $\sum_{i\in I} e_{hi} = m_h \to \infty$ nulla-rekurrens esetén.

Biz: 1) $u_i = e_{ji}$ valóban megoldás. Ezt láttuk az NSzT bizonyításában, ahol nem használtuk ki e_{ji} valószínűségi értelmét.

2) Nincs más megoldás. Ehhez TFH $u_i \geq 0$, $u_j = \sum_{i \in I} u_i p_{ij}$ $j \in I$

$$= \sum_{i \in I} \Big(\sum_{k \in I} u_k p_{ki} \Big) p_{ij} = \sum_k u_k \underbrace{\sum_i p_{ki} p_{ij}}_{p^{(2)}_{kj}} = \dots = \sum_{i \in I} u_i p^{(n)}_{ij}$$

Ha $\left.\begin{array}{l} \exists i: u_i > 0 \\ j \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n: p^{(n)}_{ij} > 0 \Rightarrow u_j > 0.$

Legyen $q^{(n)}_{ij} := \frac{u_j}{u_i} p^{(n)}_{ji}$ és belátjuk, hogy ez egy másik MC mátrixa, tehát $Q^{(n)} = Q^n$ valamely sztochasztikus Q-ra. Ehhez:
- $q^{(n)}_{ij} \geq 0$
- $\sum_{j \in I} q^{(n)}_{ij} = 1$
- Chapman–Kolmogorov

Ezek triviálisan teljesülnek

A Q-val definiált MC az I-n:
- irreducibilis, mert q és p között csak tükrözés van.
- rekurrens, hiszen ha $\sum_n p^n_{ii} \to \infty$, akkor q-ra is.

Felírva a Doeblint:

$$\underbrace{\frac{\sum_{n=0}^{N} q^{(n)}_{ij}}{\sum_{n=0}^{N} q^{(n)}_{jj}}}_{\to 1} = \frac{u_j}{u_i} \underbrace{\frac{\sum_{n=0}^{N} p^{(n)}_{ji}}{\sum_{n=0}^{N} p^{(n)}_{jj}}}_{\to e_{ji}} \Rightarrow u_i = u_j e_{ji}$$

Tehát az valóban u.a. mérték, és nincs más.

$\square$

példa:
- szimmetrikus bolyongás és a konstans mérték
- aszimm. bolyongás: ez tranziens, így itt a konstans mellett van más is.

<u>ML megfordítása</u>

Ha az $\underset{\text{stoch}}{P}$ mátrixunk, és u reguláris mérték $(u_i > 0 \ \forall i \in I)$,

akkor $q_{ij} = \frac{u_j}{u_i} p_{ji}$ -vel definiált ML osztályai u.a. -k, és ezek egyszerre tranziensek vagy rekurrensek.

Tétel:
- Q sztochasztikus
- P és Q osztályai u.a.
- rekurrencia is u.a.
- u reg mérték Q-ra is, mert $\sum_i u_i q_{ij} = \sum_i u_i \frac{u_j}{u_i} p_{ji} = u_j \sum_i p_{ji} = u_j$
- P és Q egymás megfordítottjai u szerint

Valsz. fizikai jelentés: Ha a lánc indítás stacionárius, akkor a megfordított lánc a visszafelé élő időben látott ML.

$$P(X_{n-1}=j \mid X_n = i) = \frac{P(X_{n-1}=j, X_n=i)}{P(X_n=i)} = \frac{P(X_{n-1}=j)\, P(X_n=i \mid X_{n-1}=j)}{P(X_n=i)} =$$

$$= \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i} = q_{ij}$$

Def: Egy láncot megfordíthatónak tekintünk, ha a megfordítás u.a.

$$\frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji} = q_{ij} = p_{ij} \iff \boxed{\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \forall i,j}$$

Véges állapotterű Markov-láncok

Állítás: Véges állapotterű ML-ban (i) minden rekurrens osztály pozitív
(ii) minden tranziens osztály elhagyható, és 1 valószínűséggel elhagyjuk.

Biz: (i) Legyen C rekurrens osztály! $\forall i \in C$-re: $\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \forall n$-re.

Ha C nulla rekurrens lenne, akkor $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ lenne, de mivel j véges, ezért az összeg nem lehetne 1.

(ii) Legyen C tranziens osztály! $\forall i \in C$-re: $\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} + \sum_{j\notin C} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \forall n$-re.

Mivel $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ $j \in C$-re, ezért $\sum_{j\notin C} \lim p_{ij}^{(n)} = 1$

$$\Downarrow$$

$$P(\exists n : X_n \notin C \mid X_0 = i) = 1 \qquad \square$$

Következmény: - Irreducibilis, véges állapotterű ML pozitív rekurrens
- Minden véges ML-nek van pozitív rekurrens osztálya.

Jelölés: $\geq$: minden koordináta $\geq$
$>$: minden koordináta $\geq$ és van legalább 1 db $>$
$\gg$: minden koordináta $>$.
A: rögzített nemnegatív elemű, négyzetes mátrix.

Def: Legyen $A \geq 0$, akkor $\lambda_0[A] = \sup\{\lambda : \exists x > 0 : Ax \geq \lambda x\}$

Állítás: $\min_i (A\mathbb{1})_i \leq \lambda_0 \leq \max_i (A\mathbb{1})_i$

Biz: Legyen λ és x olyan, amire $Ax \geq \lambda x$ és k olyan, amire $x_k = \max_i x_i$.

$$\lambda x_k \leq (Ax)_k = \sum_j A_{kj} x_j \leq (A\mathbb{1})_k x_k \leq \max_i (A\mathbb{1})_i x_k \Rightarrow \lambda \leq \max_i (A\mathbb{1})_i$$

Ezen kívül a $\lambda = \min_i (A\mathbb{1})$ és $x = \mathbb{1}$-re

$$(Ax)_j = (A\mathbb{1})_j \geq \min_i (A\mathbb{1})_i = \lambda = \lambda x_j \qquad \square$$

Tétel: Legyen $A \gg 0$ irreducibilis, azaz $\forall i,j\ \exists m: (A^m)_{ij} > 0$! Ekkor

1. λ_0 egyszeres sajátérték valamilyen $x^0 \gg 0$ sajátvektorral.
2. A többi sé. abszolútértéke $\leq \lambda_0$-nál
3. Ha A aperiodikus, azaz $\exists m: A^m \gg 0$, akkor a többi sé. $< \lambda_0$-nál.

Biz: 1. Található olyan $x^0 > 0$, amire $Ax^0 \geq \lambda_0 x^0$, hiszen létezik olyan λ_k, x^k sorozat, ami $\lambda_k \to \lambda$ és $\|x^k\| = 1$.

TFH $Ax^0 > \lambda_0 x^0$. Beszorozva $A \gg 0$-val, $A(Ax^0) \gg \lambda_0 (Ax^0)$, de mivel $Ax^0 > 0$, ezért λ_0 növelhető lenne, ami ellentmondás.

$\Rightarrow Ax^0 = \lambda_0 x^0$, és mivel $Ax^0 \gg 0$, ezért $x^0 \gg 0$ is.

TFH $\exists y \neq c x^0 : Ay = \lambda_0 y$!

$y - dx^0 > 0$ valamilyen d-re úgy, hogy $y - dx^0 \not\gg 0$. Ekkor

$0 \ll A(y - dx^0) = \lambda_0 y - c\lambda_0 x^0 = \lambda_0(y - cx^0)$ ami ellentmondás.

2. Ha λ sé, akkor $Az = \lambda z \Rightarrow A|z| \geq |\lambda||z| \Rightarrow |\lambda| \leq \lambda_0$

3. TFH $|\lambda| = \lambda_0$! Legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $A - \delta I \gg 0$!

$\lambda_0[A - \delta I] = \lambda_0[A] - \delta$ és $(A - \delta I)z = (\lambda - \delta)z$, de a 2. miatt

$|\lambda - \delta| \leq \lambda_0 - \delta$ amiből háromszögegyenlőtlen:

$|\lambda| \leq |\lambda - \delta| + \delta \leq \lambda_0 - \delta + \delta = \lambda_0$

egyenlőség csak att, akkor $\delta = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_0$ □

Tétel: A irreducibilis, aperiodikus mátrix λ_0 sé-hez tartozó jobb- és baloldali sajátvektorai: x^0 és f^{0T} úgy normálva, hogy $f^{0T} x^0 = 1$.

Legyen $R = x^0 f^{0T}$! Ekkor $\lim_{n\to\infty} A^n / \lambda_0^n = R$.

Biz: Kiválás miatt $R^2 = R$, $Rx^0 = x^0$, $f^{0T} R = f^{0T}$, $AR = RA = \lambda_0 R$.

Legyen $B := (A - \lambda_0 R)$! Ekkor

$$B^n = (A - \lambda R)^n = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A^k (-\lambda_0 R)^{n-k} = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \lambda_0^n R =$$

$$= A^n - \lambda_0^n R \Rightarrow A^n/\lambda_0^n - R = B^n/\lambda_0$$ erről kell belátni, hogy $\to 0$

TFH $Bz = \lambda z$ valamilyen $\lambda > 0$, z-re! Mivel $BR = RB = 0$, ezért

$0 = RBz = \lambda Rz \Rightarrow Rz = 0 \Rightarrow \lambda z = Bz = Az \Rightarrow \lambda$ sé-je A-nak,

de $|\lambda| \leq \lambda_0$, viszont $\lambda_0 = 0$ csak ha $Rz \neq 0$, tehát $|\lambda| < \lambda_0$

Legyen $\rho := \lambda_{B1}/\lambda_0 \leq \lambda_{A1}/\lambda_0 < 1$. Használva, hogy $\rho = \lim_{n\to\infty} \|B^n\|^{1/n}$

$\|A^n/\lambda_0^n - R\| < (\rho + \varepsilon)^n \quad \forall \varepsilon$-ra □

Tétel: Legyen $A > 0$! Ekkor 1. λ_0-hoz tartozik $x^0 > 0$ sajátvektor

2. Minden más λ sajé-re $|\lambda| \le \lambda_0$

3. Ha $x^0 \gg 0$, akkor $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A}{\lambda_0}\right)^k$ konvergens.

Biz: 1. Ha E a csupa 1-ből álló mátrix, akkor az $A_\delta = A + \delta E$-hez tartozó $\lambda_\delta = \lambda_0[A_\delta]$ és $x_\delta^0 \gg 0$. Ha $\delta \to 0$ úgy, hogy $\|x_\delta^0\| = 1$, akkor $x_\delta^0 \to x^0 > 0$.

2. Ugyanúgy kell bizonyítani, mint az $A \gg 0$ esetre.

3. Be kell látni, hogy a $T = \frac{A}{\lambda_0}$ egyenletesen korlátos, de ezt nem bizonyítjuk.

Következmények:

- Mivel a ML akkor irreducibilis, ha P mátrix irreducibilis, amelynél $\lambda_0[P] = 1$ és x^0 a stac eloszlás, ezért az előző oldal alapján irreducibilis ML-nek egyértelműen létezik stac megoldás, ami szigorúan pozitív.
- Ha A irreducibilis, aperiodikus, akkor $x^0 = \mathbb{1}$, $f^0 = \pi^0$, $R_{ij} = f_j^0$ $\forall i$-re, és az $\|M\| = \max|m_{ij}|$ normával
$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j^0| \le (\lambda_1 + \varepsilon)^n \qquad \forall \varepsilon > 0,\ i,j\text{-re}$$
elég nagy n-re.
- Az utolsó tétel alapján minden véges állapotterű ML-nek van stac eloszlás, és az utolsó pont alapján $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$ konvergens $\forall i,j$-re.

MARKOV-LÁNCOK

9. előadás (11. 10.)

A véges állapotterű ML-eket felhasználhatjuk arra, hogy valószínűségi változót generáljunk. Legyenek $b_1, b_2, \dots b_m > 0$ számok, és $B = \sum_{k=1}^{m} b_k$.

Legyen $X \in \{1, \dots, m\}$ változó olyan, hogy $P(X=i) = \frac{b_i}{B}$. Ha m nagy, akkor B nehezen számolható.

DE! Ha találunk olyan $\underbrace{\text{ML}}_{\text{irreducibilis, aperiodikus}}$-t, aminek $I = \{1, \dots, m\}$ és $\pi_i = \frac{b_i}{B}$, akkor tetszőleges kezdeti eloszlásból futtatva π-hez tartunk.

Vegyünk egy tetszőleges P átmeneti mátrixot, ami irreducibilis! Legyen Q olyan, ami

$$q_{ij} = \alpha_{ij} p_{ij} \text{ ha } i \neq j \quad \text{és} \quad q_{ii} = p_{ii} + \sum_{j \neq i} (1-\alpha_{ij}) p_{ij}$$

jelentés: ha a lánc $i \to j$ lépést tenne, mi α_{ij} valséggel engedjük meg.

Q irreducibilis, ha $\forall p_{ij} > 0$ esetén $\alpha_{ij} > 0$.

Q aperiodikus, ha
- $\exists i : p_{ii} > 0$

vagy
- $\exists i \neq j : p_{ij} > 0, \alpha_{ij} < 1$

Ezek a MCMC (Markov chain Monte Carlo) módszerek.

Ha Q megfordítható, akkor $q_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} q_{ji}$ $\forall i, j$-re. Ha létezik ilyen π, akkor az stacionárius. Tehát α_{ij} olyan kell legyen, hogy

$$\pi_i p_{ij} \alpha_{ij} = \pi_j p_{ji} \alpha_{ji} \quad \forall i \neq j \quad \text{teljesüljön.}$$

Állítás: A fenti egyenlőség teljesül, ha $\alpha_{ij} = \min\left(\frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}, 1\right) = \min\left(\frac{b_j p_{ji}}{b_i b_{ij}}, 1\right)$ $\forall p_{ij} > 0$-ra.

Biz: Ha $p_{ij} > 0$, $p_{ji} = 0$ akkor $\alpha_{ij} = 0$ és az egyenlőség teljesül.

Ha $p_{ij}, p_{ji} > 0$, akkor ha $\pi_j p_{ji} \leq \pi_i p_{ij}$ akkor $\alpha_{ij} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}$

$\alpha_{ji} = 1$.

Ezzel $\pi_i p_{ij} \alpha_{ij} = \pi_j p_{ji} = \pi_j p_{ji} \alpha_{ji}$.

Ellenkező esetben ugyanezt kapjuk. □

Ez a Metropolis-Hastings-algoritmus

Példa: – Egy összefüggő G gráfban akarunk kiválasztani véletlenszerű csúcsot, úgy, hogy az élek mentén bolyongunk. $b_s = 1$ $\forall s$-re, és a bolyongás mátrixa: $p_{st} = \frac{1}{|N(s)|}$ ha $t \in N(s)$.

Mivel a gráf összefüggő, P irreducibilis, és a korábbiak alapján

$$\alpha_{st} = \min\left(\frac{|N(s)|}{|N(t)|}, 1\right)$$

– Gibbs-mintavételezés: úgy léptetünk további állapotokba, hogy azok egy koordinátában különböznek.

Kérdés: Mennyit kell lépnie az ML-nek, hogy a stac. eloszlás közelében járjon?

Def: A τ megállási idő ügyes, ha kilépés esetén az eloszlás stac., azaz:

$$P(X_k = i \mid \tau = k) = \pi_i.$$

Tétel: Ha τ ügyes megállási idő, akkor $\forall p^0$ kezdeti eloszlásra a $p_i^k = P(X_k = i)$ módon definiált „időfüggő eloszlás"

$$\|p^k - \pi\|_{TV} \le P(\tau > k)$$

ahol $\|\cdot\|_{TV}$ a teljes variációs norma.

Biz: Azt kell belátni, hogy $|p^k(A) - \pi(A)| \le P(\tau > k)$ $\forall A \subseteq I$-re.

$$p^k(A) = P(X_k \in A) = \sum_{j \le k} P(X_k \in A, \tau = j) + P(X_k \in A, \tau > k).$$

Az első tagban $P(X_k \in A \mid \tau = j) = \pi(A)$ mivel τ ügyes. A második tag pedig felt. valség alapján $P(X_k \in A, \tau > k) = P(X_k \in A \mid \tau > k) P(\tau > k)$

$$\Rightarrow p^k(A) = \sum_{j \le k} \pi(A) P(\tau = j) + P(X \in A \mid \tau > k) P(\tau > k) =$$

$$= \pi(A) + P(\tau > k)\left[P(X \in A \mid \tau > k) - \pi(A)\right]$$

$$\Rightarrow |p^k(A) - \pi(A)| \le P(\tau > k) \left| P(X \in A \mid \tau > k) - \pi(A) \right| \le P(\tau > k) \quad \square$$

Pl.: m lapú kártyapaklit úgy keverünk, hogy a legfelső lapot véletlenszerűen betesszük valahova. Ez egy irreducibilis, aperiodikus ML, aminek a P-je duplán sztochasztikus (minden nem 0 elem $\frac{1}{m}$), ezért a stac. eloszlás egyenletes.
Belátjuk, hogy $m \ln m$ keveréssel ez elérhető.

Tétel: Tekintsük a fenti példát a paklikeverésről! Legyen π az egyenletes eloszlás, $c > 0$ tetszőleges egész szám, és $k = (m \ln m + c)$! Ekkor

$$\| p^k - \pi \|_{k} \le e^{-c}$$

Biz: Legyen T az az idő, amikor a eredetileg alul levő lapot bekeverjük, mert felülre került. Ez ügyes megállási idő, mert a többi lap bármilyen sorrendben bekerülhet alá.

Legyen T_n az az idő, amikor az eredetileg alul levő lap alá bekerül az n-ik lap! Ekkor

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + \dots + (T - T_{m-1})$$

ahol a tagok függetlenek és $(T_{i+1} - T_i) \sim \text{geo}\left(\frac{i+1}{m}\right)$

$\Rightarrow T$ eloszlása u.a. mint a kupongyűjtő problémánál.

(m kupont kell összegyűjteni, mindig véletlen kupont egyet)

Ha ott A_i az az esemény, hogy az i-ik kupont még nem vontuk be k kísérlet alatt

$$P(T > k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} P(A_i) = m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^k \le m e^{-k/m} = e^{-c}$$

$\square$

Folytonos idejű MC-k

Az állapottér most is I diszkrét halmaz, de X_t indexe $t \geq 0$ valós szám.

A Markov-tulajdonság: $p_{ij}(t) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$ $\quad t > 0$

ahol $p_{ij}(t)$ nem függ s-től.

$P(t)$ sztochasztikus mátrix $\forall t$-re, és a Chapman-Kolmogorov miatt

$$P(s+t) = P(s)P(t).$$

$\Rightarrow$ Ha $P(t)$ adott valamilyen $t \in (0, \varepsilon)$ intervallumon, akkor CK-ból tetszőleges t megkapható, de nincs „legkisebb t", mint diszkrét esetben.

Helyette: infinitezimális generátor.

Def: A $(P(t))_{t \geq 0}$ család standard, ha $\lim\limits_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$. Legyen ekkor $P(0) = I$!

A továbbiakban csak standard családokat vizsgálunk.

Tétel: Ha $(P(t))_{t \geq 0}$ standard, akkor $|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(h)$

Biz:
$$\begin{aligned}
|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| &= \left|\sum_k p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t)\right| \leq \\
&\leq \left|(p_{ii}(h) - 1) p_{ij}(t)\right| + \left|\sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t)\right| \leq \\
&\leq \left|(p_{ii}(h) - 1) p_{ij}(t)\right| + \left|\sum_{k \neq i} p_{ik}(h)\right| = \\
&= \left|(p_{ii}(h) - 1) p_{ij}(t)\right| + \left|(1 - p_{ii}(h))\right| = \\
&= (1 - p_{ii}(h))(1 - p_{ij}(t)) \leq 1 - p_{ii}(h) \qquad \square
\end{aligned}$$

MARKOV-LÁNCOK

10. előadás (11.17.)

folytonos időben a ML a következő volt:

$X_t \quad t \geq 0 \quad , \quad p_{ij}(t) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) \qquad P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in I}$

sztochasztikus mátrix

(félcsoport)

$P(t+s) = P(t)P(s)$ Chapman-Kolmogorov teljesül

$P(t) \xrightarrow[t \to 0]{} Id$ standard esetben

Állítás: $\forall i,j \in I \ \exists\ p_{ij}(t)$-nek a nullában vett jobboldali deriváltja

jelölés: $p'_{ij}(0) = q_{ij} \qquad P'(0) = Q$

Biz: • 1. rész: $\exists \lim\limits_{t \to 0} \frac{p_{ii}(t)-1}{t} = q_{ii} \leq 0$ (esetleg $q_{ii} = -\infty$)

$\log(p_{ii}(t)) = \log(1 + \underbrace{(p_{ii}-1)}_{kicsi}) = (p_{ii}(t)-1)(1+\mathcal{O}(1))$

$\frac{\log(p_{ii}(t))}{t} = \frac{p_{ii}(t)-1}{t}(1+\mathcal{O}(1))$

[$p_{ii}(t) > 0$ hisz $p_{ii}(t) \geq (p_{ii}(\frac{t}{n}))^n$ és $\lim\limits_{t \to 0} p_{ii}(t) = 1$

tehát elég nagy n-re $p_{ii}(\frac{t}{n}) > 0 \Rightarrow p_{ii}(t) > 0$]

$\Rightarrow$ elég ezt a logaritmusra

$\varphi(t) := -\log p_{ii}(t)$

$\varphi(t)$ olyan, hogy • $[0,\infty)$-n folytonos

• $\varphi(0) = 0$

• $p_{ii}(t+s) \geq p_{ii}(t)\, p_{ii}(s)$ miatt $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$

• Legyen q_i olyan, hogy $\sup\limits_{t > 0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i \geq 0$

belátjuk, hogy $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i$

TFH $q_i < \infty$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0 \quad \frac{\varphi(t_0)}{t_0} > q_i - \varepsilon$

$t_0 = nt + \delta \qquad 0 \leq \delta < t$

$q_i - \varepsilon < \frac{\varphi(t_0)}{t_0} = \frac{\varphi(nt+\delta)}{t_0} \leq \frac{n\varphi(t) + \varphi(\delta)}{t_0} = \frac{nt}{t_0} \cdot \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}$

$t\to 0$ esetén ez az lesz

$$q_i - \varepsilon \le \liminf_{t\to 0}\left(\underset{\downarrow\, 1}{\frac{nt}{t_0}}\,\frac{f(t)}{t} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{f(\delta)}{t_0}}\right) = \liminf_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$$

ha $q_i=\infty$, akkor hasonlóan végigvihető

Tehát $q_i = \lim_{t\to 0}\frac{-\log p_{ii}}{t} = -p_{ii}'(0)$

• 2. rész: $i\neq j$ $\exists \lim_{t\to\infty}\frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij}\ge 0$, $q_{ij}<\infty$

Vegyünk egy kis $h>0$ értéket, és diszkretizáljuk a ML-t:

$Y_n := X_{nh}$, $n=0,1,\dots$

Ekkor $(Y_n)_{n\ge 0}$ egy diszkrétidejű ML $P(h)$ átmeneti mátrixszal.

A diszkrét esetben az átmenet valószínűsége: $\bar p_{ij}^{(n)} = p_{ij}(nh)$

$\{i\to j$ átmenet n db lépés alatt$\}\supseteq\{i\to j$ n lépés alatt, úgy, hogy előtte az i-ből lépett oda$\}$

↑ legyen a k-adik lépés

$$\bar p_{ij}^{(n)} = p_{ij}(nh) \ge \sum_{k=0}^{n-1} {}_j\bar p_{ii}^{(k)}\,\bar p_{ij}\cdot\bar p_{jj}^{(n-k-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_j\bar p_{ii}^{(k)}\, p_{ij}(h)\, p_{jj}((n-k-1)h) = *$$

A tabu valószínűség

$$\bar p_{ii}^{(k)} = p_{ii}(kh) = {}_j\bar p_{ii}^{(k)} + \sum_{m=1}^{k-1}\bar f_{ij}^{(m)}\,\bar p_{ji}^{(k-m)} \le {}_j\bar p_{ii}^{(k)} + \max_{1\le m\le k-1}\bar p_{ji}^{(k-m)}\sum_{m=1}^{k-1}\bar f_{ij}^{(m)} \le$$

$$\le {}_j\bar p_{ii}^{(k)} + \max \bar p_{ji}^{(k-m)} \Rightarrow {}_j\bar p_{ii}^{(k)} \ge p_{ii}(kh) - \max_{1\le m\le k-1} p_{ji}((k-m)h)$$

Mivel $\forall\varepsilon>0\ \exists t_0:\ \max_{0\le t\le t_0} p_{ji}(t)\le\varepsilon \Rightarrow \min_{0\le t\le t_0} p_{ii}(t)\ge 1-\varepsilon$

$$\min_{0\le t\le t_0} p_{jj}(t)\ge 1-\varepsilon$$

$$* = p_{ij}(nh) \ge \sum_{k=0}^{n-1}(1-2\varepsilon)\,p_{ij}(h)\,(1-\varepsilon) > (1-3\varepsilon)\,n\,p_{ij}(h) \quad \text{ha } nh<t_0$$

Legyen $q_{ij} := \limsup_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}$

Legyen $0<t<t_0$, $h\to 0$, $nh\to t$

$$\frac{p_{ij}(nh)}{nh} > (1-3\varepsilon)\frac{p_{ij}(h)}{h} \Rightarrow \frac{p_{ij}(t)}{t}\ge(1-3\varepsilon)\limsup_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h} = (1-3\varepsilon)\,q_{ij}$$

$t\to 0$ esetén $\liminf_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}\ge(1-3\varepsilon)\,q_{ij}$ $\forall\varepsilon>0$ $\Rightarrow \liminf\frac{p_{ij}(t)}{t}\ge q_{ij} \Rightarrow \lim\frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij}$

mert q_{ij} volt a limsup □

Tehát $Q = P'(0)$ létezik. Ez a $(P(t))_{t\geq 0}$ család generátora

Tudjuk, hogy $-\infty \leq q_{ii} \leq 0$

$0 \leq q_{ij} < \infty \quad i \neq j$

továbbá $1 = \sum_{j\in I} p_{ij}(t) = p_{ii}(t) + \sum_{j\neq i} p_{ij}(t)$

$$\Rightarrow \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} \Rightarrow -q_{ii} \geq \sum_{j\neq i} q_{ij} \Rightarrow \sum_{j\in I} q_{ij} \leq 0$$

def: A Q mátrix konzervatív, ha $q_{ii} > -\infty \ \forall i$, és $\sum_{j\in I} q_{ij} = 0 \ \forall i$.

Mostantól minden generátor legyen konzervatív!

Állítás: Ha Q konzervatív, akkor $\forall i,j$ $p_{ij}(t)$ folytonosan deriválható $(0,\infty)$-n.

nem bizonyítjuk

derivált kiszámítása: $\lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = ?$

$$p_{ij}(t+h) = \sum_k p_{ik}(h) p_{kj}(t) = p_{ii}(h) p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t)$$

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \underbrace{\frac{p_{ii}(h)-1}{h}}_{\to q_{ii}} p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} \underbrace{\frac{p_{ik}(h)}{h}}_{\to q_{ik}} p_{kj}(t) \xrightarrow{h\to 0} \sum_k q_{ik} p_{kj}(t)$$

csak, ha a Σ és a lim felcserélhető

Tehát $\underline{P'(t) = QP(t)}$ Kolmogorov-backward diffegyenlet rendszer.

másik lehetőség:

$p_{ij}(t+h) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(h) =$ u. a. számítás $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P'(t) = P(t)Q}$ Kolmogorov-forward differenciálegyenletrendszer.

Állítás: A Σ és a lim a backward esetben mindig felcserélhető, de a forward esetben nem biztos.

skalár esetben $f'(t) = c\,f(t)$, $f(0) = 1 \Rightarrow f(t) = e^{ct}$

ha I véges, akkor ez itt is megoldható: $P(t) = e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!}$

Példa: születési folyamatok: $I = \mathbb{N}$, felfelé ugrálás

$$q_{ii} = -\lambda_i, \quad q_{i\,i+1} = \lambda_i \qquad \forall i \ \lambda_i > 0$$

$$r_n(t) := p_{0n}(t), \quad \cancel{r_n(t) = p_{0n}(t)\ n \in I}$$

A forward egyenlet:
$$r_0'(t) = p_{00}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(t)\, q_{k0} = p_{00}(t)(-\lambda_0) = -\lambda_0 r_0(t)$$

$$\Rightarrow r_0(t) = e^{-\lambda_0 t} \quad \text{egyértelműen}$$

$$r_1'(t) = p_{01}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(t)\, q_{k1} = p_{00}(t)\lambda_0 - p_{01}(t)\lambda_1 =$$
$$= \lambda_0 r_0 - \lambda_1 r_1$$

általánosan is: $r_n'(t) = \lambda_{n-1} r_{n-1}(t) - \lambda_n r_n(t)$

legyen $v_n(t) = e^{\lambda_n t} r_n(t)$

$$v_n'(t) = e^{\lambda_n t} r_n'(t) + \lambda_n e^{\lambda_n t} r_n(t) = e^{\lambda_n t}\left(r_n'(t) + \lambda_n r_n(t)\right) =$$
$$= e^{\lambda_n t} \lambda_{n-1} r_{n-1}(t)$$

$$v_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n s} \lambda_{n-1} r_{n-1}(s)\,ds$$

$$r_n(t) = \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n s} r_{n-1}(s)\,ds$$ ez egy rekurzió, ami egyértelmű

MARKOV-LÁNCOK

11. előadás (11.24.

múlt órában: születési folyamatok

$I = \mathbb{N}$ $\quad q_{i,i+1} = \lambda_i$, $\quad q_{ii} = -\lambda_i$ $\quad \Rightarrow \quad r_{0n}(t) = r_n(t)$

$$r_0'(t) = -\lambda_0 r_0(t)$$

$$r_n'(t) = -\lambda_n r_n(t) + \lambda_{n-1} r_{n-1}(t)$$

~~[illegible]~~ $r_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$r_n(t) = \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n s} r_{n-1}(s)\, ds$$

Poisson folyamat: $\lambda_i = \lambda$

Yule-folyamat: $I = \{1, 2, \dots\}$

$\lambda_i = i\lambda$ (baktérium osztódás)

Állítás: $Z_j \sim Exp(\lambda_j)$, $Z = \min_{1 \le j \le i} Z_j \Rightarrow Z \sim Exp\left(\sum_{j=1}^{i} \lambda_j\right)$

Biz: $P(Z > t)$-t kell felírni.

$$r_1(t) = e^{-\lambda t}$$

$$r_2(t) = \lambda e^{-2\lambda t} \int_0^t e^{2\lambda s} e^{-\lambda s}\, ds = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$$

$$r_3(t) = 2\lambda e^{-3\lambda t} \int_0^t e^{3\lambda s} e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda s})\, ds = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^2$$

indukcióval: $r_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$

$$\Rightarrow X_t \sim Geo(e^{-\lambda t})$$

(ha $X_0 = k$, akkor $X_t \sim$ Negbin$(k, e^{-\lambda t})$, jelöltem bizonyít)

Láttuk, hogy $P'(t)=P(t)Q$ egyenletnek $\exists!$ megoldása, de $P(t)$ nem feltétlenül sztochasztikus. Ennek magyarázata, hogy a folyamat felrobbanhat.

Tétel: Legyen $(P(t))_{t\geq 0}$ a fenti egyenlet megoldása

1) Ha $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$, akkor $P(t)$ sztochasztikus $\forall t$-re

2) Ha $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$, akkor $\forall t>0$ $P(t)$ minden sorának összege < 1

Szemlélet: $\frac{1}{\lambda_i}$ az i-ik születési idő várható értéke. Ha ez véges, akkor véges idő alatt elfut a végtelenbe.

Biz:
$$S_k(t) = \sum_{i=0}^{k} r_i(t) = \sum_{i=0}^{k} p_{0,i}(t)$$

$$S_\infty(t) = \lim_{k\to\infty} S_k(t)$$

$$S_k'(t) = \sum_{i=0}^{k} r_i'(t) = (-\lambda_0 r_0(t)) + \sum_{i=1}^{k} \left(-\lambda_i r_i(t) + \lambda_{i-1} r_{i-1}(t)\right) = -\lambda_k r_k(t)$$

$\Rightarrow S_k(t) = -\lambda_k \int_0^t r_k(s)\,ds + c.$ Mivel $S_k(0)=1$ ezért $c=1$

$\Rightarrow 1-S_k(t) = \lambda_k \int_0^t r_k(s)\,ds \geq 0 \Rightarrow S_k(t) \leq 1$

Kérdés, hogy mi van $k=\infty$ esetén:

$$1-S_\infty(t) \leq 1-S_k(t) \leq 1$$

$$1-S_\infty(t) \leq \lambda_k \int_0^t r_k(s)\,ds \leq 1$$

$$(1-S_\infty(t)) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \leq \int_0^t S_n(s)\,ds \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k}$$

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$ mivel $\int_0^t S_n(s)\,ds \leq t \Rightarrow 1-S_\infty(t) = 0 \Rightarrow S_\infty(t) = 1.$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^t S_n(s)\,ds = \int_0^t S_\infty(s)\,ds \leq K \quad \forall t \Rightarrow S_\infty(s)$ nem lehet $=1$ $\forall s$

Lemma: Ha $\exists t>0$, melyre $P(t)$ első sorának összege 1, akkor $P(t)$ sztochasztikus $\forall t$-re.

$\square$

Lemma bizonyítása:

TFH $\sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t) = 1$

Mivel $p_{ij}(t) = \sum_{k=i}^{j} p_{ik}(t-s) \cdot p_{kj}(s)$

ezért $$1 = \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t) = \sum_{k=i}^{\infty} p_{ik}(t-s) \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} p_{kj}(s)}_{\leq 1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t-s) \leq 1$$

csak akkor lehet az egyenlőség $=1$, ha $\sum_{j=k}^{\infty} p_{kj}(s) = 1 \ \forall k$

$\Rightarrow P(s)$ sztochasztikus mátrix

És mivel sztoch mátrixok szorzata is az, ezért $P(s \geq t)$ is sztoch. □

<u>minimális lánc, minimális megoldás:</u>

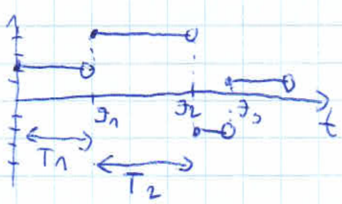
TFH $I \subseteq \mathbb{Z}$

Kolmogorov-alaptétellel megmutatható, hogy μ kezdeti eloszlásra és $(P(t))_{t\geq 0}$ félcsoportra $\exists$ olyan ML, melynek kezdeti eloszlása μ és átmenetmátrixa $P(t)$.

Sőt megadható úgy is, hogy jobbról folytonos trajektóriái legyenek.

J_i: az i-ik ugrás időpontja $J_0 = 0$

$J_{n+1} = \inf\{t > J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$



(és úgy vesszük h. $\inf\{\emptyset\} = +\infty$)

$T_n := J_n - J_{n-1}$

3 eset: 1) Véges db ugrás van, utána a lánc elnyelődik

2) Végtelen ugrás, de véges idő alatt csak véges

Tehát ekkor $\zeta = \sup J_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \infty$

3) Véges idő alatt végtelen ugrás, tehát $\zeta < \infty$

$\Rightarrow$ A lánc felrobban

minimális lánc: bevezetünk egy új állapotot (pl. $+\infty$) és $X_t = +\infty$ ha $t \geq \zeta$

ugrási lánc: $Y_n = X_{J_n}$. ez egy diszkrét idejű ML.

A minimális láncot meghatározza $(Y_n)_{n\ge 0}$ és $(T_n)_{n\ge 1}$

Állítás: A tartózkodási idők exp eloszlásúak

biz: TFH $X_0 = i$, $T = T_0$

$$P(T>t) = P(X_s = i\ \forall\, 0\le s<t) = \lim_{n\to\infty}\left(p_{ii}\left(\tfrac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(p_{ii}(h)\right)^{t/h} = \lim_{h\to 0}\left[\left(1-q_{ii}h+o(h)\right)^{1/h}\right]^t = \left(e^{-q_i}\right)^t = e^{-q_i t}$$

$$\Rightarrow T\sim Exp(q_i) \qquad \square$$

Állítás: Az ugrási lánc átmenetei: $\pi_{ij} = P(Y_{n+1}=j \mid Y_n = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}$

biz: $p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$ tehát q_{ij}-vel arányos, és ezt le kell normálni

(Ez nem teljesen precíz bizonyítás!!!)

Állítás: $X_1,\dots,X_n$ függetlenek, $X_i\sim Exp(\lambda_i)$

$$P\left(\min_{1\le i\le n} X_i = X_j\right) = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

biz: $\min X_i = X_1 \iff X_1 < \min(X_2,\dots,X_n) = Y \sim Exp\Big(\underbrace{\sum_{i=2}^n \lambda_i}_{\mu :=}\Big)$

X_1 és Y függetlenek

$$P(X_1<Y) = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\cdot P(Y>t)\,dt = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\mu t}\,dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu}$$

ugyanígy 1 helyett tetszőleges j-re. $\square$

Ha i-ben vagyok, akkor $\forall j$ állapotba való átlépés ideje λ_j szerinti exp eloszlású, és amelyik először sorra kerül, oda lépünk.

Példa: Egy gyárban működő két gép meghibásodása

MARKOV-LÁNCOK

12. előadás (11.01.)

Q konzervatív generátor és p kezdeti eloszlás meghatároz egy MC-t.

$\to$ minimális markov-lánc.

Minimális megoldás: Adott Q-hoz $\exists\, (\bar{P}(t))_{t\geq 0}$ család, ami

- $(\bar{P}(t))_{t\geq 0}$ standard
- $\bar{P}(t)$ sztochasztikus $\forall t>0$
- Chapman–Kolmogorov: $\bar{P}(s+t)=\bar{P}(s)\bar{P}(t)$
- mindkét Kolmogorov egyenlet:

  $$\bar{P}'(t)=\bar{P}(t)Q$$
  $$\bar{P}'(t)=Q\bar{P}(t)$$

- ha $\exists\, (P(t))$ szubsztochasztikus, amely generátora Q, akkor $p_{ij}(t)\geq \bar{p}_{ij}(t)\ \forall i,j,t$

  $\Rightarrow$ Ha $\bar{P}(t)$ sztoch, akkor a minimális megoldás az egyetlen félcsoport Q generátorral (ekkor nem robban fel a lánc)

Nem bizonyítjuk az állítást, de adunk egy konstrukciót.

$p_{ij}(t)$: az a valség, hogy a lánc i-ből j-be megy t idő alatt véges ugrással.

$p_{ij}^{(n)}(t)$: az a valószínűség, hogy i-ből j-be megy t idő alatt n lépéssel.

ekkor: $p_{ij}^{(0)}(t)=\begin{cases} 0 & i\neq j \\ e^{-q_i t} & i=j \end{cases}$

és rekurzióval: $$p_{ij}^{(n)}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t \underbrace{q_i e^{-q_i(t-s)}}_{i\text{-ben marad } t-s \text{ ideig}}\ \underbrace{\frac{q_{ik}}{q_i}}_{i\text{-ből } k\text{-ba ér}}\ \underbrace{p_{kj}^{(n-1)}(s)}_{k\text{-ból } j\text{-be ér}}\,ds$$

$$p_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_i t}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}\,p_{kj}^{(n-1)}(s)\,ds=$$
$$=\delta_{ij}e^{-q_i t}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}\,\bar{p}_{kj}(s)\,ds$$

Ezt az integrálegyenletet kell megoldani (gyakorlatilag lényegében ez épp a hátra-egyenlet)

Állapotok osztályozása, visszatérőség

$(X_t)_{t\geq 0}$ folytonos idejű MC

Def: · i-ből elérhető j, ha $\exists t\geq 0$: $p_{ij}(t)>0$

· i és j kommunikálnak, ha kölcsönösen elérhetők egymásból

A kommunikálás itt is ekvivalenciareláció

Ezek definiálhatók ezekkel analóg módon: lényegesség, irreducibilitás

DE nincs periódus

Kétféle diszkretizációt láttunk:

· $X_n = X_{nh}$ $n=0,1,\dots$ h-diszkretizált lánc. Átmeneti mátrix: $P(h)$

· $Y_n = X_{\tau_n}$ $n=0,1,\dots$ ugrási lánc. Átmeneti mátrixa Π ahol $q_i=0$ $\Pi_{ij}=\delta_{ij}$

$q_i>0$ $\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & i\neq j \\ 0 & i=j \end{cases}$

Állítás: Az elérhetőségi reláció mindkét láncban u.a.

Bz: alap képletek, de elég triviális

A visszatérőséget tehát most is ezzel definiáljuk

Állítás: Az alábbiak ekvivalensek:

1) $\exists h$: $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh)=\infty$

2) $\forall h$ $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh)=\infty$

3) $\int_0^{\infty} p_{ii}(t)\,dt=\infty$

Bz: integrál diszkretizálása és és feltétele, alulról becslése

egyfajta def: A folytonos lánc akkor visszatérő, ha a diszkretizáltja az.

$\Leftrightarrow$ $\int_0^{\infty} p_{ii}(t)\,dt$

Másik megközelítés: $S_i = \{t : X_t = i\}$

Ha i visszatérő, akkor $E(\mu(S_i))=\infty$ 1 valószínűséggel

Ha i tranziens, akkor $E(\mu(S_i))<\infty$ ahol μ a Lebesgue-mérték

diszkrét időben ez a g_{ii}-nek az analógiája

Biz: $X_0 = i$

$$E(\mu(S_i)) = \int_\Omega \mu(S_i)\,dP = \int_\Omega \int_0^\infty 1\!\!1_{\{X_t=i\}}\,dt\,dP \overset{\substack{\text{nemnegatív} \\ \text{csere}}}{=} \int_0^\infty \int_\Omega 1\!\!1_{\{X_t=i\}}\,dP\,dt =$$

nemnegatív csere → Fubini-tétel

$$= \int_0^\infty p_{ii}(t)\,dt$$

Tehát, nyilván $E(\mu(S_i)) < \infty \Rightarrow P(\mu(S_i) < \infty) = 1$

$E(\mu(S_i)) = \infty$: i visszatérő a $h=1$ diszkretizáltban.

$\Rightarrow \infty$ sok n-re lesz $X_n = i$

Ezek után még exp ideig marad ott is marad,

$A_k = \{X_t = i \ \forall\ \tau_k \le t \le \tau_k + h\}$

$P(A_k) = c > 0$

A_k-k függetlenek a erős MT miatt $\Big\} \Rightarrow$ B-C miatt 1 valószínűséggel teljesül ∞ sok A_k-ra

$\Rightarrow P(\mu(S_i) = \infty) = 1$.

$\square$

Harmadik megfogalmazás:

$X_0 = i$ - ha $q_i = 0 \Rightarrow i$ elnyelő, és triviálisan visszatérő.

TFH $q_i > 0$ $\qquad \vartheta_1 = \inf\{t > 0 : X_t \neq i\}$

$V_i = \inf\{t > \vartheta_1 : X_t = i\}$ (ha nincs ilyen, akkor ∞)

Állítás: i visszatérő, ha $P(V_i < \infty) = 1$

ezt nem bizonyítjuk, csak gondoljuk meg!

MARKOV-LÁNCOK

13. előadás (12.08.)

Határeloszlás, stacionárius eloszlás

Mivel folytonos idejű ML-ben nincs periodicitás, ezért könnyebb átlátni a határeloszlást.

Tétel: $\forall i,j \in I$-re $\exists \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_{ij}$.

Bi: Láttuk, hogy $p_{ij}(t)$ egyenletesen folytonos, tehát $\forall \varepsilon>0$-ra $\exists h>0$:

$$\forall s,u: \quad |s-u|<h \Rightarrow |p_{ij}(s)-p_{ij}(u)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Adott ε és h esetén nézzük a lánc h-diszkretizáltját! Mivel ez aperiodikus, ezért $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nh) = \frac{f^*_{ij}(h)}{m_j(h)} = \pi_{ij}(h)$.

Legyen $t=nh+s$ és $t'=n'h+s'$!

$$|p_{ij}(t)-p_{ij}(t')| \le |p_{ij}(t)-p_{ij}(nh)| + |p_{ij}(nh)-p_{ij}(n'h)| + |p_{ij}(n'h)-p_{ij}(t')|.$$

Ha $n,n'>n_0(h)$, akkor a középső tag $<\frac{\varepsilon}{3}$, az első és az utolsó pedig a diszkretizált lánc konvergenciája miatt, tehát ha $t,t'>t_0(h)$, akkor $|p_{ij}(t)-p_{ij}(t')|<\varepsilon$, ami a Cauchy-kritérium □

Következmények:
- Folytonos idejű ML átmeneti mátrixa mindig konvergens
- Tranziens láncnál $p_{ij}(t)\to 0$, rekurrens láncnál pedig $f^*_{ij}(h)=1$ $\forall i,j,h$-ra, tehát $\exists m_j$ visszatérési idő minden j-re.
- nulla rekurrensnél $p_{ij}(t)\to 0$, pozitív rekurrensnél $p_{ij}(t)\to \pi_j$
- irreducibilis ML-nél a stac. eloszlás $\pi^T P(h)=\pi^T$ $\forall h$-ra. $\Rightarrow$ π-ből indulva, ott is marad.

Tétel: Legyen Q egy irreducibilis rekurrens ML generátora, u pedig egy nemnegatív vektor! $u^T P(s)=u^T$ $\forall s$-re akkor és csak akkor ha $u^T Q = 0$.

Bi: $(u^T P(s))' = u^T (P(s))' = u^T Q P(s)$.

$u^T P(s)$ csak akkor konstans $\forall s$-re, ha $u^T Q = 0$ □

Az $u^T Q=0$ egyenletnek mindig létezik egyértelmű megoldása. Pozitív rekurrens esetben u véges összegű, nulla rekurrens esetben végtelen összegű. Ez esetben u nem stac. eloszlás, hanem reguláris mérték.

Példa: Egy gyárban működő két gép meghibásodása 2 $\frac{\text{hiba}}{\text{nap}}$.

A javítás várhatóan 4 óra, és A javításán fontosabb B-nél.

4 állapot: két gép működik; csak A működik; csak B működik; Egyik sem

Q az átmeneti intenzitásokkal kapható:

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & -8 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

A stac eloszlás: $\pi^T = \left(\frac{36}{68}, \frac{15}{68}, \frac{9}{68}, \frac{8}{68} \right)$.

Láttuk korábban, hogy a visszatérőség az $m_i = E(V_i)$ visszatérési idő végességével is definiálható; erről egy nevezetes tétel.

Tétel: Egy irreducibilis ML pozitív rekurrens akkor és csak akkor, ha $m_i < \infty$ $\forall i \in I$-re.

Ekkor $m_i = \frac{1}{\pi_i q_i}$

Jelentés: A mérési idő elején várhatóan $\frac{1}{q_i}$ időt tölt i-ben az m_i-ből.

Tehát az i-ben tartózkodás aránya: $\pi_i = \frac{1}{q_i} / m_i$.

nem bizonyítjuk precízen.

Tétel: Legyen a Q generátormátrixhoz tartozó ugrási lánc átmeneti mátrixa R!

Ha u nemnegatív mérték, és $\mu_i = u_i q_i$, akkor

$$u^T Q = 0 \iff \mu^T R = \mu^T$$

Biz: Ha i elnyelő volt (azaz $q_i = 0$), akkor $r_{ii} = 1$ és $r_{ij} = 0$.

Ha i nem elnyelő volt, (azaz $q_i > 0$) akkor $r_{ij} = q_{ij}/q_i$ és $r_{ii} = 0$.

Ez alapján $q_i(r_{ij} - \delta_{ij}) = q_{ij}$ $\forall i, j$-re.

Ebből

$$(\mu^T(R - I))_j = \sum_i \mu_i (r_{ij} - \delta_{ij}) = \sum_i u_i q_i (r_{ij} - \delta_{ij}) = \sum_i u_i q_{ij} = (u^T Q)_j$$

$\square$

Következmény: Ha a eredeti lánc egyensúlyi mértéke u, az ugrásé μ, akkor a kettő között $\mu_i = q_i u_i$ áll fenn.

Születési - halálozási folyamatok

Legyen Q olyan konzervatív mátrix, ahol

- $q_{i,i+1} = \lambda_i > 0$ születési intenzitások $(i=0,1,\dots)$
- $q_{i,i-1} = \mu_i > 0$ halálozási intenzitások $(i=1,2,\dots)$
- $q_{ii} = -\lambda_i - \mu_i$
- minden más elem 0.

Ez egy irreducibilis MC-t definiál. Próbáljuk a megfordíthatóságot kihasználni: ha a lánc megfordítható, akkor $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \Rightarrow \pi_{i-1}\lambda_{i-1} = \pi_i \mu_i$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\pi_{i-1} = \dots = \frac{\lambda_{i-1}\cdot\lambda_{i-2}\cdots\lambda_0}{\mu_i\cdot\mu_{i-1}\cdots\mu_1}\pi_0.$$

Legyen $\rho_0 = 1$, $\rho_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$, $\tilde\rho_0 = 1$, $\tilde\rho_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i}$

Tétel (Karlin – McGregor): A Kolmogorov-féle differenciálegyenletnek akkor és csak akkor létezik egyértelmű sztochasztikus megoldása, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \sum_{i=n}^{\infty} \tilde\rho_i = \infty. \qquad \left(S = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i;\ \tilde S = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde\rho_i\right)$$

B-féle azt állít: (i) tranziens lánc, ha $S = \infty$ és $\tilde S < \infty$

(ii) nulla rekurrens lánc, ha $S = \infty$ és $\tilde S = \infty$

(iii) rekurrens lánc, ha $S < \infty$ és $\tilde S = \infty$

akkor $\pi_i = \rho_i \pi_0$

Példák: 1) $M/M/1$-sor.

λ-Poisson-folyamat szerint érkeznek egy rendszerbe igények, amiket egy kiszolgáló μ-exp eloszlás szerint megold.

X_t a rendszerben lévő igények száma, $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$

- ha $\lambda > \mu$, a rendszer tranziens
- ha $\lambda = \mu$, a rendszer nulla rekurrens
- ha $\lambda < \mu$, a rendszer pozitív rekurrens

akkor a stac. eloszlás $\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$

$$E(X_t) \to \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

2) $M/M/\infty$ - sor

Az előző példa, csak végtelen kiszolgálóval. Tehát $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\mu$

Ekkor mindenképpen pozitív rekurrens a lánc $\frac{\lambda}{\mu}$ - paraméterű Poisson-eloszlással.

3) Lineáris növekedés bevándorlással.

$\lambda_n = n\lambda + a$

$\mu_n = n\mu$.

Legyen $\underline{M}(t) = (M_0(t), M_1(t), \dots)$ ahol $M_i(t) = E(X(t) \mid X(0) = i)$

Ha $\mathbb{1} = (1, 1, 1, \dots)$ és $\underline{f} = (0, 1, 2, \dots)$, akkor $\underline{M}(t) = P(t)\,\underline{f}$

Ha teljesül a $P'(t) = P(t)Q$, akkor

$$\underline{M}'(t) = (P(t)\,\underline{f})' = P'(t)\,\underline{f} = P(t)\,Q\,\underline{f}$$

Mivel $(Q\underline{f})_i = a + (\lambda - \mu) i$, ezért $\underline{M}'(t) = a\,\mathbb{1} + (\lambda - \mu)\,\underline{M}(t)$

Ennek a $\underline{M}(0) = \underline{f}$ KF mellett a megoldás:

$$\underline{M}(t) = \begin{cases} at\,\mathbb{1} + \underline{f} & \text{ha } \mu = \lambda \\ \frac{a}{\lambda-\mu}\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right)\mathbb{1} + e^{(\lambda-\mu)t}\,\underline{f} & \text{ha } \mu \neq \lambda \end{cases}$$