OPTIKA

1. gyak (09. 14.)

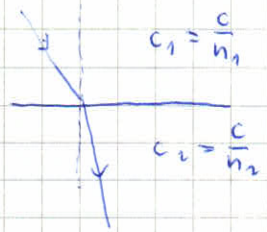
Rakyta Péter, 5.91

Fermat-elv: két pont között a legrövidebb úton terjed a fény

ennek már elvét a görögök is rájöttek, de Fermat továbbvitte:

nem a legrövidebb út, hanem a legrövidebb idő számít

ezzel a fénytörést is magyarázza



Ez néhány dologban sántít

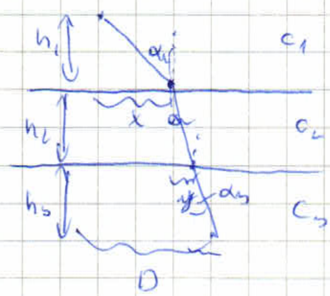
Ez lenne a legrövidebb út, de ez négyzetes

Mai megfogalmazás: „Egy adott pályán haladó fénysugárnak az a tulajdonsága, hogy ha a fény utat elsőrendben megváltoztatjuk, az nem okoz a terjedési időben elsőrendű változást"

matematikailag: $f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x \overset{!}{=} f(x)$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} \overset{!}{=} 0$$

Többszörös törés:



$$t(x,y) = \sum_{i=1}^{3} t_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{s_i}{c_i} = \frac{n_1}{c}\sqrt{h_1^2+x^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{h_2^2+y^2} + \frac{n_3}{c}\sqrt{h_3^2+(D-x-y)^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} \overset{!}{=} 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial t}{\partial y} \overset{!}{=} 0$$

(1) (2)

$$(1): \quad 0 = \frac{n_1}{c}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}} + \frac{n_3}{c}\frac{-(D-x-y)}{\sqrt{h_3^2+(D-x-y)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = n_1 \sin\alpha_1 - n_3 \sin\alpha_3 \Rightarrow n_1 \sin\alpha_1 = n_3 \sin\alpha_3$$

(2) ugyanígy: $n_2 \sin\alpha_2 = n_3 \sin\alpha_3$

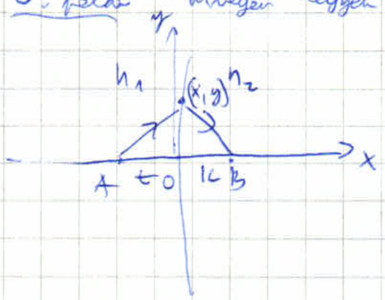
Tehát: $n \sin\alpha = \text{áll}$

Teljes visszaverődés: Mi van, ha $n \sin\alpha = \text{áll}$-nak nincs megoldása α-ra?

Ha α_2 eléri a $90°$-t, a teljes mennyiség visszaverődik

határszög: $\sin\alpha_{11} = \frac{n_2}{n_1}$

2. példa: Milyen legyen a görbe alakja, hogy A-ból B-be minden fénysugár eljusson



$$t(x) = \frac{n_1}{c}\sqrt{(t+x)^2+(y(x))^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(k-x)^2+(y(x))^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dx} \implies \text{bonyi differenciálegyenlet}$$

Trükk: minden útvonal szélsőértékes kell legyen, többletfeltétel az is, amelyik egyenes $t(x) = \frac{n_1}{c}t + \frac{n_2}{c}k$. minden útvonal időhossza ennyi

Spec. eset $t \gg k, x, y$

$$\sqrt{(t+x)^2+y^2} \approx \sqrt{t^2+2tx+x^2+y^2} = t\sqrt{1+2\frac{x}{t}+\underbrace{\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2}}_{\approx 0}} \approx t\left(1+\frac{x}{t}\right) = t+x$$

$$t(x) = \frac{n_1}{\cancel{c}}(t+x) + \sqrt{(k-x)^2+y^2}\,\frac{n_2}{c} = \frac{n_1}{\cancel{c}}t + \frac{n_2}{c}k$$

$$\sqrt{(y(x))^2+(k-x)^2} = k - \frac{n_1}{n_2}x \implies y(x) = \sqrt{(n^2-1)x^2-2(n-1)kx}$$

hiperboloid, vagy ellipszoid, n értékétől függ

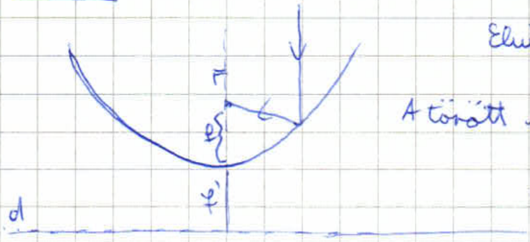
HF

$\boxed{\text{HF:}}$ lencse esete

$t = k$

határozzuk meg a lencse felületét

3. példa: parabola tükör



Elvileg itt is mindegyik út ideje szélsőérték

A törött vonalakat ki kell egyenesíteni

Ha a megtört szakaszt kifordítjuk, akkor az F képe a d egyenesre esik, vagyis a parabola tényleg jó

Folytonosan változó törésmutató

Pálya: $\underline{r}(\varphi)$

eltelt idő: $cT_{AB} = \int_A^B n(\underline{r})\,|d\underline{r}| = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} n(\underline{r}) \left|\frac{d\underline{r}}{d\varphi}\right| d\varphi$

variálva: $\underline{r} \to \underline{r} + \delta\underline{r}$ ahol $\delta\underline{r}(A) = \delta\underline{r}(B) = \underline{0}$ (*)

$$c(T_{AB} + \delta T_{AB}) = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} n(\underline{r} + \delta\underline{r}) \left| \frac{d(\underline{r}+\delta\underline{r})}{d\varphi} \right| d\varphi \qquad \text{Legyen } \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{d\varphi}$$

mivel $n(\underline{r}+\delta\underline{r}) = n(\underline{r}) + \nabla n \cdot \delta\underline{r}$ továbbá

$$\left|\frac{d(\underline{r}+\delta\underline{r})}{d\varphi}\right| = \left|\frac{d\underline{r}}{d\varphi} + \frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi}\right| = \sqrt{\left(\underline{v} + \frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi}\right)\left(\underline{v} + \frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi}\right)} = \sqrt{v^2 + 2\underline{v}\,\frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi} + \underbrace{\left(\frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi}\right)^2}_{\approx 0}} =$$

$$= v + \frac{\underline{v}}{v}\,\frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi}$$

így tehát

$$c(T_{AB} + \delta T_{AB}) = \underbrace{\int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} n(\underline{r})\, v\, d\varphi}_{cT_{AB}} + \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \left(n(\underline{r}) \frac{\underline{v}}{v} \frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi} + \nabla n\, v\, \delta\underline{r} \right) d\varphi + \underbrace{\int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \left(\nabla n\, \delta\underline{r}\, \frac{\underline{v}}{v} \frac{d(\delta\underline{r})}{d\varphi} \right) d\varphi}_{\approx 0}$$

$$c\,\delta T_{AB} = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} -\frac{d}{d\varphi}\left(n(\underline{r})\frac{\underline{v}}{v}\right)\delta\underline{r}\, d\varphi + \underbrace{\left[n(\underline{r}) \frac{\underline{v}}{v}\, \delta\underline{r}(\varphi) \right]_{\varphi(A)}^{\varphi(B)}}_{0} + \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \nabla n\, v\, \delta\underline{r}\, d\varphi$$

$$c\,\delta T_{AB} = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \left[v \nabla n - \frac{d}{d\varphi}\left(n(\underline{r}) \frac{\underline{v}}{v}\right) \right] \delta\underline{r}\, d\varphi \overset{!}{=} 0$$

OPTIKA

2. gyak (09. 21.)

Az fény terjedési idejének variációja:

$$c\,\delta T_{AB} = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \left[v \nabla n - \frac{d}{d\varphi}\left(n(\underline{r}) \frac{\underline{v}}{v} \right)\right] \delta \underline{r}\, d\varphi$$

A Fermat-elv szerint ez $0\ \forall\ \delta r$-re

Csak akkor, ha $v \underline{\nabla} n - \frac{d}{d\varphi}\left(n(\underline{r}) \frac{\underline{v}}{v} \right) = 0$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(n(\underline{r}) \frac{\underline{v}}{v} \right) = \frac{dn}{d\varphi} \frac{\underline{v}}{v} + n(\underline{r}) \frac{d}{d\varphi} \frac{\underline{v}}{v} = \underline{\nabla} n \cdot \underbrace{\frac{d\underline{r}}{d\varphi}}_{\underline{v}} \frac{\underline{v}}{v} + n(\underline{r}) \left(\frac{\frac{d\underline{v}}{d\varphi}}{v} + \underline{v} \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{v}\right) \right) =$$

$$= \underline{\nabla} n \cdot \dot{\underline{v}} + n(\underline{r}) \left(\frac{\dot{\underline{v}}}{v} + \underline{v} \frac{-\frac{dv}{d\varphi}}{v^2} \right) = \underline{\nabla} n\, v + n(\underline{r}) \left(\frac{1}{v} + \frac{(\underline{v} \circ \underline{v})}{v^3} \right) \dot{\underline{v}}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\underline{v}}{v} \circ \frac{\underline{v}}{v} \right) \underline{\nabla} n\, v$$

Ebből végül kijön az alábbi:

$$v \underline{\nabla} n - (\underline{\nabla} n\, \underline{v}) \frac{\underline{v}}{v} - n(\underline{r}) \frac{\dot{\underline{v}}}{v} + n(\underline{r}) \left(\frac{\underline{v}}{v} \circ \frac{\underline{v}}{v} \right) \frac{\dot{\underline{v}}}{v} = 0$$

$$\left(\underline{\underline{1}} - \frac{\underline{v}}{v} \circ \frac{\underline{v}}{v} \right) \underline{\nabla} n \cdot v - n(\underline{r}) \left(\underline{\underline{1}} - \frac{\underline{v}}{v} \circ \frac{\underline{v}}{v} \right) \frac{\dot{\underline{v}}}{v} = 0 \qquad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{1}} - \frac{\underline{v}}{v} \circ \frac{\underline{v}}{v}$$

$$\underline{\underline{P}} \left(\underline{\nabla} n \cdot v - n(\underline{r}) \frac{\dot{\underline{v}}}{v} \right) = 0$$

$$\underline{\underline{P}} \left(\frac{\underline{\nabla} n}{n} - \frac{\dot{\underline{v}}}{v^2} \right) = 0 \quad \Leftarrow \text{Lokális Snellius-Descartes-törvény}$$

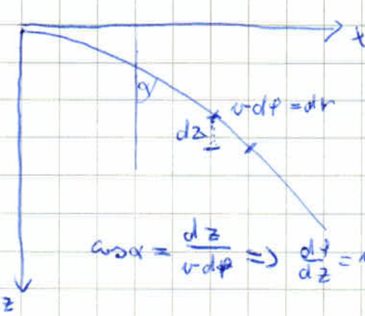
Spec eset: $n(\underline{r}) = n(z)$ ívhossz paraméterezés, ami szerint $\frac{d}{d\varphi} v = 0$

$$\underline{v}(\varphi) = v \begin{pmatrix} \sin\alpha(\varphi) \\ \cos\alpha(\varphi) \end{pmatrix}$$ ahol α az érintő függőlegessel bezárt szöge

Így

$$\underline{v} \circ \underline{v} = v^2 \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\underline{v}}{d\varphi} = v \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \frac{d\alpha}{d\varphi}$$



$$\cos\alpha = \frac{dz}{v\,d\varphi} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = v\cos\alpha$$

$$\left(\frac{\underline{\nabla} n}{n}\right) = \underline{\nabla}(\ln n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{dz}(\ln n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{d\varphi}(\ln n) \frac{d\varphi}{dz} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{d\varphi}(\ln n) \frac{1}{v\cos\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{P}}\left(\frac{\underline{\nabla} n}{n}\right)\right]_z = \left[\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{d\varphi}(\ln n) \frac{1}{v\cos\alpha} \end{pmatrix}\right]_z = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\, v} \frac{d}{d\varphi}(\ln n)$$

$$\left[\underline{\underline{P}}\, \frac{\dot{\underline{v}}}{v^2}\right]_z = \left[\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \frac{1}{v} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \frac{d\alpha}{d\varphi}\right]_z = \frac{1}{v} \frac{d\alpha}{d\varphi} \left(-\sin\alpha\right) \overbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}^{1}$$

visszaírva Sn-Des-ba

$$\frac{1}{n}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\frac{d}{d\varphi}(\ln n) + \frac{1}{n}\frac{d\alpha}{d\varphi}\sin\alpha = 0$$

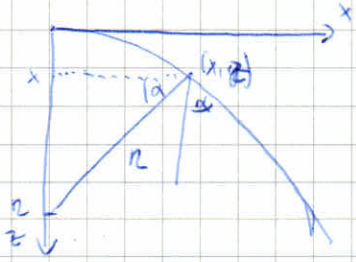
$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{d(\ln n)}{d\varphi} \implies \frac{d(\ln n)}{d\varphi} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{d}{d\varphi}\left[\ln(\sin\alpha)\right]$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\ln n + \ln(\sin\alpha)\right] = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\ln(n\sin\alpha)\right] = 0 \implies \underline{n\sin\alpha = \text{const}}$$ a pálya mentén

Pl.:

$n(z) = ?$ ha a fény egy R sugarú körpályán mozog



$$\sin\alpha = \frac{R-z}{R}$$

tudjuk, hogy $n\sin\alpha = \text{áll} = n\,(z=0)$

$$\implies \underline{n(z) = n_0\frac{R}{R-z}}$$

<u>Lagrange-formalizmus</u>

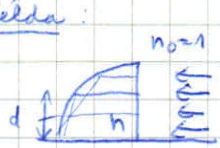
Lagrange-függvény: $L(\underline{r}, \underline{v})$ ahol $\underline{r}$ és $\underline{v}$ független, de a pálya mentén $\underline{v}(\varphi) = \frac{d\underline{r}}{d\varphi}$

az EL-egyenlet: $\frac{\partial L}{\partial \underline{r}} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{v}}\right)$

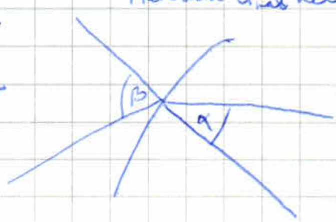
ha n x-től független, akkor $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies p_x$ megmarad

$L(\underline{r}, \underline{v}) = n(\underline{r})\, v$

<u>Példa:</u>



Mekkora d_{max} mellett lesz teljes visszaverődés



$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n$$

azaz $\sin\beta = n\sin\alpha \leq 1$

$$n\sin\alpha = n\frac{d_{max}}{R} \leq 1 \implies \underline{d_{max} \leq \frac{R}{n}}$$

Hullámok

hullámtan: legkisebb térbeli periódus

$$y(x) = A\cos(kx + \varphi_0)$$

akkor, hogy teljesüljön a periodicitás: $y(x) = y(\lambda + x) \Rightarrow k\lambda = n\,2\pi$

ott célszerű választani, amikor $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

időfejlődés: olyan, mintha a hullám eltolódna valami v sebességgel

v: fázissebesség

$$y(x,t) = A\cos(k(x - vt) + \varphi_0) = A\cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

$\omega = kv$ körfrekv.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ← periódusidő

komplex írásmód

$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \mathrm{Re}(e^{i\varphi})$ emiatt a $\cos\varphi$ és $e^{i\varphi}$ jól üzemeltethető

pl.: $\cos\varphi \longleftrightarrow e^{i\varphi}$ $\quad \mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi$

$(\cos\varphi)' = -\sin\varphi \longleftrightarrow (e^{i\varphi})' = i e^{i\varphi}$ $\quad \mathrm{Re}(ie^{i\varphi}) = -\sin\varphi$

$\Rightarrow$ ha a $\cos\varphi$ kielégíti a dinamikát leíró diffegyenletet, akkor $e^{i\varphi}$ is kielégíti a lineáris szuperpozíció miatt

Áttérhetünk a komplex írásmódra:

$$y(x) = A e^{i(kx - \omega t + \varphi_0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komplex}}}{C}\, e^{i(kx - \omega t)}$$

a valódi hullám $\mathrm{Re}(C e^{i(kx - \omega t)})$

Ez egy $v = \frac{\omega}{k}$ fázissebességgel haladó hullám

bonyolultabb esetek:

a) y, A, C lehetnek skalárok
vektorhullám

b) k, x is lehetnek skalárok (1D-ben terjedő hullám)
vektorok (Több D-ben terjedő hullám)

DE ω és t számok $\forall$ klasszikusan

Síkhullám, mert az azonos fázisban levő pontok egy síkban vannak

OPTIKA

3. gyak (09. 28.)

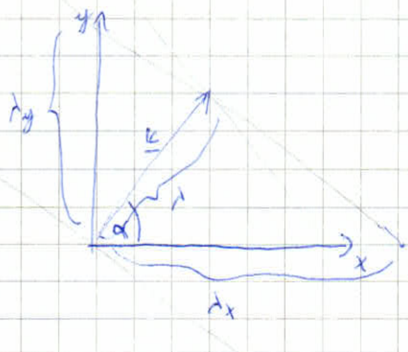
(1) 2D-ben terjedő skalárhullám (egyedi, monokróm)

$$u(\underline{r}) = u_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

$k_x = 3\,\frac{1}{m}$ $\quad u_0 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

$k_y = 4\,\frac{1}{m}$

$\omega = 6\,\frac{1}{s}$



$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\lambda}{\lambda_x}\\ \sin\alpha &= \frac{\lambda}{\lambda_y}\end{aligned}\right\} \quad 1 = \frac{\lambda^2}{\lambda_x^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda_y^2}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_x^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda_y^2} \Rightarrow k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$\Rightarrow$ A hullámhossz nem, de a hullámszám vektormennyiség

$u(\underline{r}) = \mathrm{Re}\left[u_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}\right] = 3[e$ vmi koszinusz

(2) vektoros leírás

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underset{\uparrow}{\underline{E}_0} \cos(\underline{k}\,\underline{r} - \omega t + \varphi_0) = \begin{pmatrix} E_{0x}\cos(\dots) \\ E_{0y}\cos(\dots) \\ E_{0z}\cos(\dots)\end{pmatrix} = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t + \varphi_0)} = \underset{\uparrow}{\underline{C}}\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$

$$\underline{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z}\end{pmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_0} \\ E_{0y} e^{i\varphi_0} \\ E_{0z} e^{i\varphi_0}\end{pmatrix}$$

Mi van, ha a komplex amplitúdó fázisa nem azonos? pl.:

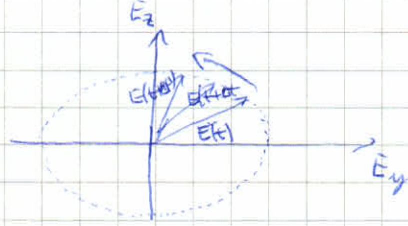
Szuperpozíció:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} e^{i(2x-7t)} + \begin{pmatrix}0\\0\\4i\end{pmatrix} e^{i(2x-7t)} = \begin{pmatrix}0\\3\\4i\end{pmatrix} e^{i(2x-7t)}$$

Valódi hullám:

$$\underline{E}^V(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix}0\\3\\4i\end{pmatrix} e^{i(2x-7t)}\right] = \begin{pmatrix}0\\3\cos(2x-7t)\\-4\sin(2x-7t)\end{pmatrix}$$

$$\frac{(E_y^V)^2}{9} + \frac{(E_z^V)^2}{16} = 1 \quad \text{ellipszis egyenlete}$$



Legyen x a terjedés iránya!

Ekkor általában $\underline{E}_0 = \begin{pmatrix}0\\E_1\\E_2 e^{i\varphi}\end{pmatrix}$

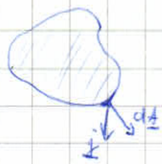
Ha $\varphi = 0;\ \pi$ lineáris polarizáció

Ha $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ elliptikus/cirkuláris polarizáció

Kontinuitási egyenlet

ρ – fizikai mennyiség (sűrűség, energia)

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ – ki/be áramlás + forrástag Ha ρ sűrűség, akkor a forrástag $= 0$



$$\frac{d}{dt}\int \rho \, dV = -\oint \underline{j}\, d\underline{A} = -\int \operatorname{div} \underline{j} \, dV$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} \right) dV = 0$$

Ez minden V-re teljesül, tehát:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0}$$

kontinuitás

Kontinuitási egyenlet energiára:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{S} = -\underline{j}\,\underline{E}}$$

ahol w: energia sűrűség

$\underline{S}$: Poynting-vektor

Maxwellből: $\underline{j} = \varepsilon_0 c^2 \operatorname{rot} \underline{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$ $/ \cdot \underline{E}$

$$\underline{E}\,\underline{j} = \varepsilon_0 c^2 \underline{E} \operatorname{rot} \underline{B} - \underbrace{\varepsilon_0 \underline{E} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \frac{\partial}{\partial t} w}$$

$$\left[\underline{E}(\underline{\nabla} \times \underline{B})\right]_k = E_k \varepsilon_{klm} \partial_l B_m = \cancel{\partial_l \left(\varepsilon_{klm} E_k B_m\right)} = *$$

$$\cancel{= \partial_l \left(-\varepsilon_{lkm} E_k B_m\right) = \partial_l (-\underline{E} \times \underline{B})_l} = -\operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{B}) = -\operatorname{div} \underline{S}$$

~~ezt $\underline{E}\,\underline{j} = -$~~ $* = \partial_l \left[\varepsilon_{klm} E_k B_m\right] - B_m \varepsilon_{klm} \partial_l E_k =$

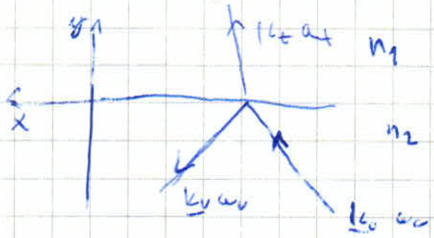
$$= -\partial_l \left(\varepsilon_{lkm} E_k B_m\right) + B_m \varepsilon_{mlk} \partial_l E_k =$$

$$= -\operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{B}) + \underline{B} \operatorname{rot} \underline{E} = -\operatorname{div} \underline{S} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} B^2\right)$$

ezért $\underline{E}\,\underline{j} = -\operatorname{div}(\underbrace{\varepsilon_0 c^2 \underline{E} \times \underline{B}}_{\underline{S}}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2}_{w}\right)$ Ez így már tényleg a kontinuitás

Tánytüri a számoptikában

① 2D-ben terjedő skalár hullám határfelületen



bejövő $u_0(\underline{r},t) = u_0 e^{i(\underline{k}_0\underline{r} - \omega_0 t)}$

visszavert : $u_r(\underline{r},t) = u_r e^{i(\underline{k}_r\underline{r} - \omega_r t)}$

törőt : $u_t(\underline{r},t) = u_t e^{i(\underline{k}_t\underline{r} - \omega_t t)}$

$$\omega_0 = \frac{c}{n_1} k_0 \qquad \omega_r = \frac{c}{n_1} k_r \qquad \omega_t = \frac{c}{n_2} k_t$$

Feltétel a határfelületen:

$$u_0(\underline{r},t)\big|_{y=0} + u_r(\underline{r},t)\big|_{y=0} = u_t(\underline{r},t)\big|_{y=0} \qquad \forall x,t\text{-re}$$

$$u_0 e^{i(k_{0x}x - \omega_0 t)} + u_r e^{i(k_{rx}x - \omega_r t)} = u_t e^{i(k_{tx}x - \omega_t t)}$$

Ha ω-k különbözőek, akkor nem egyezne valahol $\Rightarrow \omega_0 = \omega_r = \omega_t$

ugyanez k_x-ekre $k_{0x} = k_{rx} = k_{tx}$

emellett $u_0 + u_r = u_t$ $\Leftarrow$ a konkrét megoldáshoz a dinamikai egyenletek is kellenének

Mivel $\frac{c}{n_1} k_0 = \frac{c}{n_1} k_r = \frac{c}{n_2} k_t \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} k_0 = k_t = \sqrt{k_{tx}^2 + k_{ty}^2} =$

$$= \sqrt{k_{0x}^2 + k_{ty}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{ty} = \pm\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_0^2 - k_{0x}^2} = \pm k_0\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2\alpha}$$

ha $\sin\alpha > \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow k_{ty} = \pm i q \; (q > 0 \text{ valós})$

$u_t(\underline{r},t) = u_t e^{ik_{0x}x} e^{i(\pm iq)y} =$

$\nearrow e^{-qy}$ esetén $u_t \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$ Teljes visszaverődés

$\searrow e^{qy}$ esetén $u_t \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$ ez nem fizikai

ha $\sin\alpha < \frac{n_2}{n_1}$

$$\frac{c}{n_1} k_0 = \frac{c}{n_2} k_t$$

$$\frac{c}{n_1} \frac{k_{0x}}{\sin\alpha} = \frac{c}{n_2} \frac{k_{tx}}{\sin\beta} \Rightarrow \underline{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta} \quad \text{Snellius–Descartes törvény}$$

OPTIKA

4. gyak (10.05.)

Diszperzió

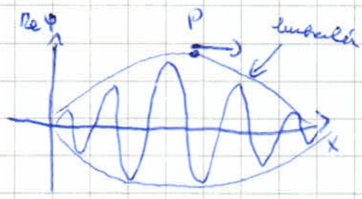
eddig $\omega = ck$

mert a hullámegyenlet $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$ és ha $u \sim e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$

akkor $-\omega^2 u = -c^2 k^2 u \Rightarrow \omega = c\,|\underline{k}|$

csoportsebesség: a hullámcsomag sebessége

$$\Psi = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$



A burkoló sebessége a csoportsebesség

$x_P(t) =$ a P pont trajektóriája

$k = k_0 + \tilde{k}$

$\omega = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \tilde{k}$ ezeket beírva Ψ-be:

$$\Psi = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int \tilde{A}(\tilde{k})\, e^{i\left(\tilde{k}x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \tilde{k} t\right)}\, d\tilde{k}$$

↑ fázistag, de ebből nem lehet információt kiolvasni

P pont trajektóriáját mentén az exp kitevő állandó: $\tilde{k}x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \tilde{k}\, t = \text{áll}$

$\Rightarrow x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t = \text{áll}$ a P pont tolódásának sebessége: $v_{cs}(k_0) = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$

u.a 3D-ben: $\underline{v}_{cs} = \frac{d\omega}{d\underline{k}}$

Így esetben $\omega = c\,|\underline{k}| \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k} = c$

$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk} = c\,\frac{\underline{k}}{k}$

Ha van törésmutató: $\omega(\underline{k}) = \frac{c}{n(k)}\,|\underline{k}|$ $\quad v_f = \frac{c}{n}$

$v_{cs} = \frac{d}{d\underline{k}}\left(\frac{c}{n(k)}\,|\underline{k}|\right)$

Klein-Gordon 1D-ben

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m^2 u$ $\quad$ ha $u \sim e^{i(kx-\omega t)}$

akkor $-\omega^2 u = -c^2 k^2 u - m^2 u$

$\Rightarrow \omega = \pm\sqrt{c^2k^2 + m^2}$

$v_f = \frac{\sqrt{c^2k^2+m^2}}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{m^2}{k^2}}$ $\quad v_{cs} = c^2\,\frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_f}$

Diffúziós egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

valós

Ha $u \sim e^{i(kx-\omega t)}$

$$-i\omega = -kk^2$$

Ha k valós az kapjuk:

$$e^{-i\omega t} = e^{-kk^2 t}$$ időben lecseng

$$u \to e^{ikx}e^{-i\omega t} \to \mathrm{Re}\, u = e^{-kkt}\cos(kx)$$

vektoros eset 2D-ben:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i(\underline{k}\,\underline{r} - \omega t)}$$

Az egyenlet: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u + i\alpha(\sigma_x\partial_y - \sigma_y\partial_x)u$

mátrixos alakban

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & -i\alpha(\partial_y + i\partial_x) \\ -i\alpha(\partial_y - i\partial_x) & \frac{\partial}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{pmatrix} \underline{u} = 0$$

Beírva:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + c^2k^2 & -i\alpha(ik_y - k_x) \\ -i\alpha(ik_y + k_x) & -\omega^2 + c^2k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

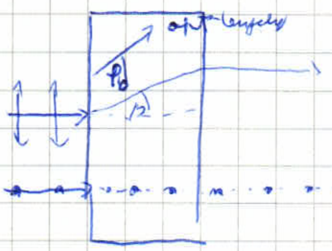
$\Rightarrow$ A mátrix detje 0.

$$(-\omega^2 + c^2k^2)^2 + \alpha^2(-k_y^2 - k_x^2) = 0$$

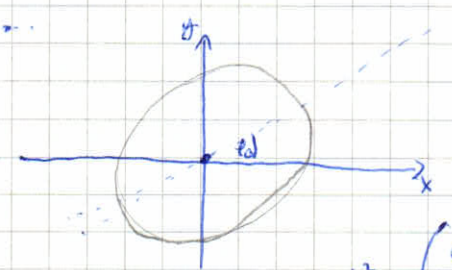
$$-\omega^2 + c^2k^2 = \pm\alpha|\underline{k}|$$

$$\omega = \pm\sqrt{c^2k^2 \pm \alpha|\underline{k}|}$$

Kettős törés



az a fény, ami merőleges a valahol, negyed törésen amelynek ph, az felbonthatjuk olyanra a merőleges és párhuzamos, és mivel a ph-nak más lesz a sebessége, az elválik



Az O-ból kiinduló hullám frontjai nem körök, hanem ellipszisek

$$r^2_{(\varphi,t)}\left(\frac{\cos^2(\varphi_0-\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi_0-\varphi)}{b^2}\right) = 1$$

(*)

$$a(t) = v_\parallel t = \frac{c}{n_\parallel}t$$

$$b(t) = v_\perp t = \frac{c}{n_\perp}t$$

$$\underline{r} = r_{(\varphi,t)}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d}{d\varphi}\left(r_{(\varphi,t)}\cos\varphi\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{d\varphi}r_{(\varphi,t)}\right)\cos\varphi - r_{(\varphi,t)}\sin\varphi = 0 \qquad r_{(\varphi,t)} = \left(\frac{\cos^2(\varphi_0-\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi_0-\varphi)}{b^2}\right)^{-1/2}$$

(x)

(*): A hullám arra terjed, amerre az ellipszis legnagyobb x koordinátája van, mert a ferde él mint arra megy a hullámfront. Ezt kiszámítva

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{2} r^3 \cdot 2 \cos(\varphi_0-\varphi)\sin(\varphi_0-\varphi)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$

visszaírva (*)-ba: $\quad -\cos\varphi \, r^3 \cos(\varphi_0-\varphi)\sin(\varphi_0-\varphi)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) - r\sin\varphi = 0$

$$\cos\varphi \cos(\varphi_0-\varphi)\sin(\varphi_0-\varphi)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) + \sin\varphi\left(\frac{\cos^2(\varphi_0-\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi_0-\varphi)}{b^2}\right) = 0$$

a $\varphi_0-\varphi$-t mindenhol elrontottam, ki kell cserélni $\varphi-\varphi_0$-ra.

Ha $\varphi_0 \ll 1$ akkor $\beta \ll 1$

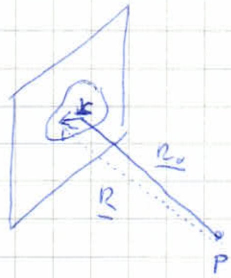
$$(\beta-\varphi_0)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) + \beta\left(\frac{1}{a^2} + \underbrace{\frac{(\beta-\varphi_0)^2}{b^2}}_{\text{kicsi}}\right) = 0$$

$$-\varphi_0\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) = -\beta\left(\frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow \quad \beta = \varphi_0\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = \varphi_0\left(1-\frac{n_\parallel^2}{n_\perp^2}\right)$$

OPTIKA

5. gyak (10.12.)

Diffrakció



Amplitúdó P pontban

pl.: Green fgv-es formalizmus: gömbhullámok szuperpozíciója

$$u_{(P)} = C\int_{rés} u(\underline{r})\, \frac{e^{ikR}}{R}\, \cos\vartheta$$

$\cos\vartheta$ - ban sok bonyolult dolog lehet

de ha a fázy ph. számít, akkor az az érdekes, ami a fázist $\underline{r}$ mentén és $\underline{R}$ változásakor kezén.

sorfejtés: $kR \approx kR_0 - \underline{r}\underline{k} + \frac{kr^2}{2R_0}$

$\frac{1}{R}$ itt nem igazán számít R_0 körüli ingadozás

$$u_{(P)} = C\,\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int e^{-i\left(\underline{k}\underline{r} - \frac{kr^2}{2R_0}\right)} u(\underline{r}) \cos\vartheta\, d^2r$$

① Szemben nézve $\underline{k} \parallel \underline{n} \perp \underline{r}$ $\Rightarrow \underline{k}\,\underline{r} = 0$; $\cos\vartheta = 1$

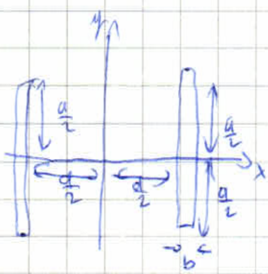
$$u_{(P)} = C\,\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int e^{+i\frac{kr^2}{2R_0}}\, u(r)\, d^2r$$ ← Fresnel-diffrakció

② Ferdén nézve: $\underline{k}\,\underline{r} \neq 0$ és $\frac{kr^2}{2R_0} \ll \underline{k}\,\underline{r}$

$$u_{(P)} = C\,\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int e^{-i\underline{k}\underline{r}}\, u(\underline{r})\, dr$$ ← Fraunhofer-elhajlás (Fourier-optika)

Feladat:

Rések: $u(\underline{r}) = 1$ ha rés, 0 ha akadály



$$u_{(P)} = u_0\int_{rés} e^{-i\underline{k}\underline{r}}\, dx\, dy \qquad \underline{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u = u_0\int_{-\frac{d}{2}-\frac{b}{2}}^{-\frac{d}{2}+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy\; e^{-ik_x x}\, e^{-ik_y y} + \text{j.o.r.} =$$

$$= u_0\left[\frac{-1}{ik_x} e^{-ik_x x}\right]_{-\frac{d}{2}-\frac{b}{2}}^{-\frac{d}{2}+\frac{b}{2}} \cdot \left[\frac{-1}{ik_y} e^{-ik_y y}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \text{j.o.r.} =$$

$$= -\frac{u_0}{k_x k_y}\, e^{i\frac{k_x d}{2}}\left(e^{-ik_x\frac{b}{2}} - e^{ik_x\frac{b}{2}}\right)\left(e^{-ik_y\frac{a}{2}} - e^{ik_y\frac{a}{2}}\right) =$$

$$= \frac{4 u_0}{k_x k_y} e^{i k_x \frac{d}{2}} \sin\left(k_x \frac{b}{2}\right) \sin\left(k_y \frac{a}{2}\right) + \text{j.o.n.}$$

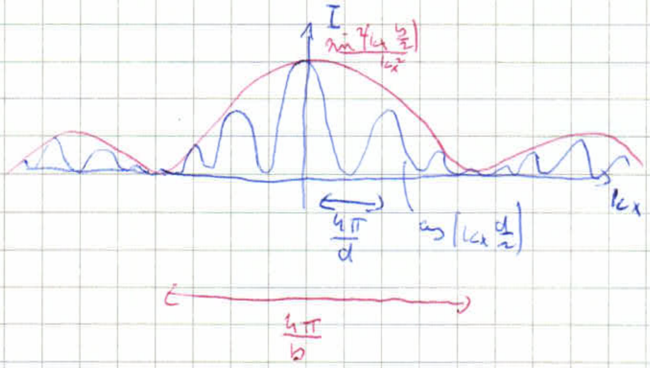
a j.o.n. u.a. csak $-d$-vel.

$$= \frac{8 u_0}{k_x k_y} \cos\left(k_x \frac{d}{2}\right) \sin\left(k_x \frac{b}{2}\right) \sin\left(k_y \frac{a}{2}\right)$$

intenzitás: $I_{(P)} = |u_{(P)}|^2 = |u_0|^2 \frac{64}{k_x^2 k_y^2} \cos^2\left(k_x \frac{d}{2}\right) \sin\left(k_x \frac{b}{2}\right) \sin\left(k_y \frac{a}{2}\right)$

$\cos\beta = \frac{k_y}{k}$ $\quad \cos\alpha = \frac{k_x}{k}$

$\lim_{k_x \to 0} \frac{\sin\left(k_x \frac{b}{2}\right)}{k_x} = \frac{b}{2}$



Spec esetek

(1) $b = d$ $\quad$ Egy rés lesz

$$I_{(P)} = \frac{16}{k_x^2 k_y^2} \left[2 \cos\left(k_x \frac{d}{2}\right) \left(\sin\left(k_x \frac{b}{2}\right)\right]^2 \sin\left(k_y \frac{a}{2}\right) = \frac{16}{k_x^2 k_y^2} \sin^2(k_x b) \sin^2\left(k_y \frac{a}{2}\right)$$

(2) $b \ll d$

Legyen $k_x \frac{d}{2} = \varphi$

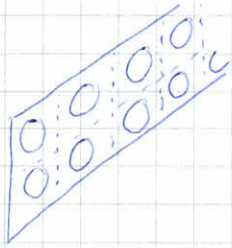
$$I_{(P)} = \frac{64 |u_0|^2}{k_x^2 k_y^2} \cos^2(\varphi) \underbrace{\sin^2\left(\varphi \frac{b}{d}\right)}_{\approx \varphi \frac{b}{d} = k_x \frac{b}{2}} \sin\left(k_y \frac{a}{2}\right) = \frac{16 |u_0|^2 b^2}{k_y^2} \cos^2\left(k_x \frac{d}{2}\right) \sin^2\left(k_y \frac{a}{2}\right)$$

itt nem cseng le az oszcilláció $\Rightarrow$ a lecsengés a rés méret következménye

OPTIKA

6. gyak (10.19.)

Periodikusan elhelyezkedő rések

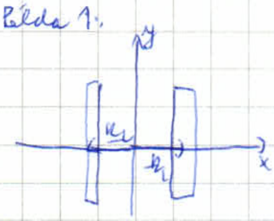


$$U(\underline{\rho}+\underline{R}) = U(\underline{\rho}) \quad \text{ahol } \underline{R} \text{ rácsvektor}$$

$$U(P_0) = C\int_{\text{egész ernyőn}} U(\underline{r})\, e^{-i\underline{k}\underline{r}}\, d^2r =$$

$$= C\sum_{\underline{R}} \int_{\text{elemi cellán}} U(\underline{\rho})\, e^{-i\underline{k}(\underline{R}+\underline{\rho})}\, d^2\rho = \underbrace{C\sum_{\underline{R}} e^{-i\underline{k}\underline{R}}}_{\text{szerkezeti tényező}} \underbrace{\int U(\underline{\rho})\, e^{-i\underline{k}\underline{\rho}}\, d^2\rho}_{\text{alaktényező}}$$

Példa 1:

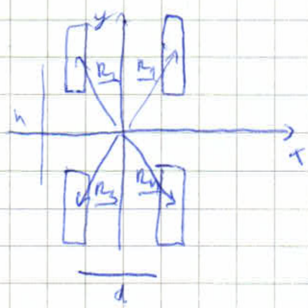


$$\underline{R}_1 = \begin{pmatrix} d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{R}_2 = \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

szerkezeti tényező:

$$S(\underline{k}) = e^{ik_x \frac{d}{2}} + e^{-ik_x \frac{d}{2}} = 2\cos\left(k_x \frac{d}{2}\right)$$

Példa 2:



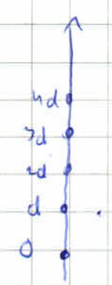
$$\underline{R}_1 = \begin{pmatrix} d/2 \\ h/2 \end{pmatrix} \quad \underline{R}_2 = \begin{pmatrix} -d/2 \\ h/2 \end{pmatrix} \quad \underline{R}_3 = \begin{pmatrix} -d/2 \\ -h/2 \end{pmatrix} \quad \underline{R}_4 = \begin{pmatrix} d/2 \\ -h/2 \end{pmatrix}$$

$$S(\underline{k}) = \sum_{R_i} e^{-i\underline{k}\underline{R}_i} = e^{-i\left(k_x \frac{d}{2} + k_y \frac{h}{2}\right)} + e^{-i\left(-k_x \frac{d}{2} + k_y \frac{h}{2}\right)} + e^{-i\left(-k_x \frac{d}{2} - k_y \frac{h}{2}\right)} + e^{-i\left(k_x \frac{d}{2} - k_y \frac{h}{2}\right)} =$$

$$= e^{-ik_y \frac{h}{2}}\left(e^{-ik_x \frac{d}{2}} + e^{ik_x \frac{d}{2}}\right) + e^{ik_y \frac{h}{2}}\left(e^{ik_x \frac{d}{2}} + e^{-ik_x \frac{d}{2}}\right) =$$

$$= 4\cos\left(k_x \frac{d}{2}\right)\cos\left(k_y \frac{h}{2}\right)$$

interferencia rácsok



$$\text{szerkezeti tényező} \quad S(\underline{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\underline{k}\underline{R}_n} = \qquad \underline{R}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ nd \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + e^{-ik_y d} + e^{-2ik_y d} \dots e^{-i(N-1)k_y d} = \frac{e^{iNk_y d} - 1}{e^{ik_y d} - 1} =$$

$$= \frac{e^{-ik_y \frac{N}{2}d}}{e^{-ik_y \frac{d}{2}}} \frac{e^{-ik_y \frac{Nd}{2}} - e^{ik_y \frac{Nd}{2}}}{e^{-ik_y \frac{d}{2}} - e^{ik_y \frac{d}{2}}} = \frac{e^{-ik_y \frac{N}{2}d}}{e^{-ik_y \frac{d}{2}}} \frac{\sin\left(k_y \frac{Nd}{2}\right)}{\sin\left(k_y \frac{d}{2}\right)}$$

$$I(k_y) \sim |S(k_y)|^2 = \frac{\sin^2\left(k_y \frac{Nd}{2}\right)}{\sin^2\left(k_y \frac{d}{2}\right)} \qquad I(0) \sim N^2$$

$$I_2 = I(k_y^2) = \qquad k_y \frac{Nd}{2} = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow k_y = \frac{3\pi}{Nd}$$

$$I_2 \approx \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{Nd}\frac{d}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} = \frac{4}{9\pi^2} N^2 \Rightarrow I_2 = \frac{4}{9\pi^2} I_0 = 0{,}045\, I_0$$

(1) Biz. be, h $u(\underline{k})$ valós és $u(\underline{k}) = u(-\underline{k})$ akkor $u(\underline{r})$ középpontosan szimmetrikus és valós

$$u(\underline{k}) = \int u(\underline{r}) e^{-i\underline{k}\underline{r}} d^2r = \int_{r_x>0} u(\underline{r}) e^{-i\underline{k}\underline{r}} d^2r + \int_{r_x<0} u(\underline{r}) e^{-i\underline{k}\underline{r}} d^2r = \int_{r_x>0} u(\underline{r}) e^{-i\underline{k}\underline{r}} d^2r + \int_{r_x>0} u(-\underline{r}) e^{i\underline{k}\underline{r}} d^2r$$

$r_x \to -r_x$
$r_y \to -r_y$

$$= \int_{r_x>0} u(\underline{r})\left(e^{-i\underline{k}\underline{r}} + e^{i\underline{k}\underline{r}}\right) d^2r = 2\int_{r_x>0} u(\underline{r}) \cos(\underline{k}\underline{r})\, d^2r = \text{valós}$$

visszafelé ugyanígy

(2)

$$u(x,y) = e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\left[e^{-\frac{(x-1)^2}{2a^2}} + e^{-\frac{(x+1)^2}{2a^2}}\right] \qquad \text{legyen } \underline{k} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

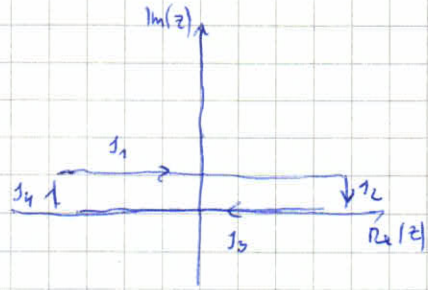
$$u(\underline{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} e^{-iqy} dy \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-1)^2}{2a^2}} + e^{-\frac{(x+1)^2}{2a^2}}\right) e^{-ixp} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} e^{-iqy} dy \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2+2iqa^2y}{2a^2}} dy \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+iqa^2)^2}{2a^2} - \frac{q^2a^2}{2}} dy =$$

$$= e^{-\frac{q^2a^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+iqa^2)^2}{2a^2}} dy = \left[z = y + iqa^2;\ dz = dy\right] = e^{-\frac{q^2a^2}{2}} \int_{-\infty+iqa^2}^{\infty+iqa^2} e^{-\frac{z^2}{2a^2}} dz =$$

reziduum tétel

J_2 és J_4 kicsi, a téglalapban szingularitás nincsen, tehát



$J_1 = -J_3$, ezért

$$\int_{-\infty+iqa^2}^{\infty+iqa^2} e^{-\frac{z^2}{2a^2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \sqrt{2\pi a^2}$$

Tehát $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} e^{-iyq} dy = e^{-\frac{q^2a^2}{2}} \sqrt{2\pi a^2}$$

ugyanígy $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x\pm1)^2}{2a^2}} e^{-ipx} dx = e^{\mp ip} e^{-\frac{a^2p^2}{2}} \sqrt{2\pi a^2}$$

Tehát $$u(\underline{k}) = u(p,q) = e^{-\frac{a^2q^2}{2}} \sqrt{2\pi a^2} \underbrace{\left[e^{-ip} + e^{ip}\right]}_{\cos p\text{: alaktényező}} e^{-\frac{a^2p^2}{2}} \sqrt{2\pi a^2} =$$

$$= 4\pi a^2 e^{-\frac{a^2k^2}{2}} \cos(p)$$

⑤

$$u(x,y) = \sin(x)\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} f(y) \qquad f(y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |y| < 1 \\ 0 & \text{ha } |y| > 1 \end{cases}$$

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$u(\underline{k}) = u^1(p) \cdot u^2(q)$$

$$u^1(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin x}_{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-ipx}\, dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \left[e^{-i(p-1)x} - e^{-i(p+1)x} \right] dx = \text{u.a. mint az előbb}$$

$$= \frac{1}{2i} e^{-\frac{(p-1)^2 a^2}{2}} \sqrt{2\pi a^2} - \frac{1}{2i} e^{-\frac{(p+1)^2 a^2}{2}} \sqrt{2\pi a^2} = \frac{\sqrt{2\pi a^2}}{2i} \left(e^{-\frac{a^2 (p-1)^2}{2}} - e^{-\frac{a^2 (p+1)^2}{2}} \right)$$

$$u^2(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-iqy}\, dy = \int_{-1}^{1} e^{-iqy}\, dy = \frac{1}{-iq} \left[e^{-iqy} \right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-iq} - e^{iq}}{-iq} = \frac{2 \sin(iq)}{q}$$

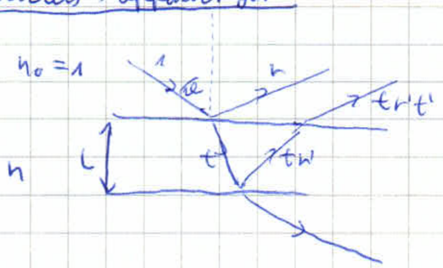
$$u(\underline{k}) = \frac{\sqrt{2\pi a^2}}{iq} \sin(iq) \left(e^{-\frac{a^2(p-1)^2}{2}} - e^{-\frac{a^2(p+1)^2}{2}} \right)$$

OPTIKA

7. gyak (10.26.)

1. formalizmus a transzfer mátrixokra

Fény visszaverődés szappanhártyán



Fresnel formulák:

$$r = \frac{1-n}{1+n} \qquad t = \frac{2}{1+n}$$

$$r' = \frac{n-1}{n+1} \qquad t' = \frac{2n}{n+1}$$

most úgy vesszük hogy $\vartheta = 0$ vagy ami ilyesmi

Interferencia főjárulékra:

$$\underbrace{r + tr't'e^{i2kLn}}_{\text{oda-vissza fáziscsúszás}} = \frac{1}{n+1}\left[(1-n) + (n-1)\frac{2}{1+n}\cdot\frac{2n}{1+n}e^{i2kLn}\right] =$$

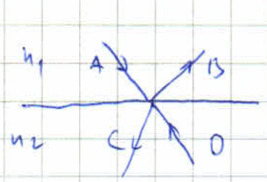
$$= \frac{1}{(n+1)^3}\left[(n+1)^2(1-n) + (n-1)4ne^{i2kLn}\right] = \frac{1-n}{(n+1)^3}\left[(n+1)^2 - 4ne^{i2kLn}\right] \quad (*)$$

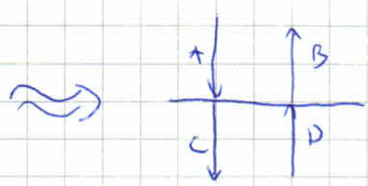
Kérdés: jó volt-e kétsugaras közelítés?

← mindet fel kéne összegezni

ehelyett fogjuk a transzformációs formalizmust használni

pl.: transzfermátrix egy felületre:





TFH a két oldalon lévő amplitúdókat leíró lineáris trafó van

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Az $\underline{M}$ a felső oldalt viszi át az alsóba, így a sorrend $\begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{pmatrix}$

így a Mátrix alakja:

$$M(\underset{\text{hova}}{n_2}, \underset{\text{honnan}}{n_1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \frac{n_1}{n_2} & 1 - \frac{n_1}{n_2} \\ 1 - \frac{n_1}{n_2} & 1 + \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

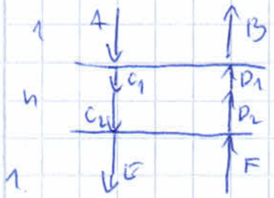
Ez összhangban van-e a Fresnel-formulákkal?

$$n_1 = 1 \quad n_2 = n \quad A = 1 \quad B = r$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{n+1}{n} & \frac{n-1}{n} \\ \frac{n-1}{n} & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-n}{1+n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{1-n}{1+n} \\ \frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{n}\frac{1-n}{1+n} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{4n}{n(1+n)} \\ \frac{0}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Vissza a szappanhártyához:



$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(1,n)\,\underline{\underline{F}}(L)\,\underline{\underline{M}}(n,1)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{\underline{F}}(L) = \begin{pmatrix} e^{ikLn} & 0 \\ 0 & e^{-ikLn} \end{pmatrix}$ a fázistoló mátrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n & 1-n \\ 1-n & 1+n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ikLn} & 0 \\ 0 & e^{-ikLn} \end{pmatrix}\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} n+1 & n-1 \\ n-1 & n+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4n}\begin{pmatrix} 1+n & 1-n \\ 1-n & 1+n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ikLn}(n+1) & e^{ikLn}(n-1) \\ e^{-ikLn}(n-1) & e^{-ikLn}(n+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4n}\begin{pmatrix} (1+n)^2 e^{ikLn} - (1-n)^2 e^{-ikLn} & (n^2-1)e^{ikLn} + (1-n^2)e^{-ikLn} \\ \underbrace{(1-n^2)e^{ikLn} + (n^2-1)e^{-ikLn}}_{(1-n^2)2i\sin(kLn)} & \underbrace{-(n-1)^2 e^{ikLn} + (1+n)^2 e^{-ikLn}}_{-(n^2+1)(e^{ikLn}-e^{-ikLn}) + 2n(e^{ikLn}+e^{-ikLn})} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2n}\begin{pmatrix} i(n^2+1)\sin(kLn) + 2n\cos(kLn) & (n^2-1)i\sin(kLn) \\ (1-n^2)i\sin(kLn) & -i(n^2+1)\sin(kLn) + 2n\cos(kLn) \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Legyen $A = 1$ $\quad F = 0$

$\quad\quad B = \tilde{r}$ $\quad E = \tilde{t}$

Ekkor:

$$0 = T_{21}\cdot 1 + T_{22}\tilde{r} \Rightarrow \tilde{r} = -\frac{T_{21}}{T_{22}}$$

valamint

$$\tilde{t} = T_{11}\cdot 1 + T_{12}\tilde{r} \Rightarrow \tilde{t} = T_{11} - \frac{T_{12}T_{21}}{T_{22}} = \frac{\det T}{T_{22}}$$

Ha a két oldalon lévő n azonos akkor ki kell jönnie hogy $\det T = 1$

ha nem u.a. akkor a törésmutatók aránya.

$$\tilde{r} = -\frac{i\sin(kLn)(1-n^2)}{-i(n^2+1)\sin(kLn)+2n\cos(kLn)} \quad (**)$$

$$4n^2\det T = (n^2+1)^2\sin^2(kLn)+4n^2\cos^2(kLn)-2in(n^2+1)\cos(kLn)\sin(kLn)+2in(n^2+1)\cos(kLn)\sin(kLn)-$$

$$-(n^2-1)^2\sin^2(kLn) =$$

$$= \sin^2(kLn)\left[(n^2+1)^2-(n^2-1)^2\right]+4n^2\cos^2(kLn) = \sin^2(kLn)\left(n^4+2n^2+1-n^4+2n^2-1\right)+4n^2\cos^2(kLn) =$$

$$= 4n^2\left(\sin^2(kLn)+\cos^2(kLn)\right) = 4n^2 \checkmark$$

$$\tilde{t} = \frac{1}{T_{22}} = \frac{2n}{-i(n^2+1)\sin(kLn)+2n\cos(kLn)}$$

másik checkpoint a E megmaradás:

$$|\tilde{r}|^2+|\tilde{t}|^2 = \frac{(n^2-1)^2\sin^2(kLn)+4n^2}{(n^2+1)^2\sin^2(kLn)+4n^2\cos^2(kLn)} = \frac{(n^2-1)^2\sin^2(kLn)+4n^2}{(n^2+1)^2\sin^2(kLn)+4n^2-4n^2\sin^2(kLn)} =$$

$$= \frac{(n^2-1)^2\sin^2(kLn)+4n^2}{(n^2-1)^2\sin^2(kLn)+4n^2} = 1 \checkmark$$

A (*) képlet akkor jó közelítése annak, ha $n = 1+\varepsilon$ $\quad \varepsilon \ll 1$

$$(*):\ r = -\frac{\varepsilon}{2^5}\left(2^4 - 4^2 e^{2ikLn}\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon\left(1-e^{2ikLn}\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon e^{ikLn}\left(e^{-ikLn}-e^{ikLn}\right) = i\varepsilon e^{ikLn}\sin(kLn)$$

$$(**):\ \tilde{r} = \frac{2i\varepsilon\sin(kLn)}{-i2\sin(kLn)+2\cos(kLn)} = i\varepsilon e^{ikLn}\sin(kLn)$$

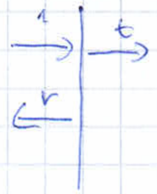
Tényleg kb u.a.

OPTIKA

5. gyak. (11.09.)

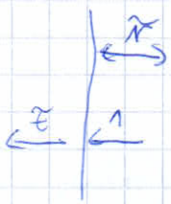
részben visszaverő tükör

a transzfermátrixot akarjuk megkapni t és r ismeretében



$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$$

ezt a másik oldalról is lejátszhatjuk:



$$\begin{pmatrix} \tilde{r} \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$$

kiírjuk a mátrixegyenleteket:

$$t = T_{11} + T_{12} r$$

$$0 = T_{21} + T_{22} r$$

$$\tilde{r} = T_{12}\tilde{t} \quad \Rightarrow \quad T_{12} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}$$

$$1 = T_{22}\tilde{t} \quad \Rightarrow \quad T_{22} = \frac{1}{\tilde{t}}$$

ugyanígy: $T_{21} = -\frac{r}{\tilde{t}}$ és $T_{11} = t - \tilde{r}\frac{r}{\tilde{t}}$

TFH a rendszer invariáns az időtükrözésre!

emiatt: $T_{21}^* = T_{12} \Rightarrow -\frac{r}{\tilde{t}} = \frac{\tilde{r}^*}{\tilde{t}^*}$ $(*)$

$T_{11}^* = T_{22} \Rightarrow t - \frac{\tilde{r}}{\tilde{t}} r = \frac{1}{\tilde{t}^*}$

elvileg előadásnál

$$\Rightarrow t + \tilde{r}\frac{\tilde{r}^*}{\tilde{t}^*} = \frac{1}{\tilde{t}^*}$$

$$t = \frac{1 - |\tilde{r}|^2}{\tilde{t}^*} = \frac{|\tilde{t}|^2}{\tilde{t}^*} = \tilde{t}$$

Tehát, ha van időszimmetria, akkor $t = \tilde{t}$.

viszont mivel $\tilde{r} = -\frac{t}{t^*} r^*$ $(*)$ miatt

így a transzfermátrix:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

$$\det T = \frac{1}{t^*}\frac{1}{t} - \frac{r r^*}{t t^*} = \frac{1-|r|^2}{|t|^2} = \frac{|t|^2}{|t|^2} = 1 \quad ✓$$

A Jones-féle transzfer mátrix formalizmus (Fénypolarizáció)

z irányban egy hullám terjed, ennek $\underline{E}(\underline{r}, t)$ része $\begin{pmatrix} a_x e^{i(kz-\omega t)} \\ a_y e^{i(kz-\omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}$

Mivel z-t mindig a terjedés irányában vesszük fel, ezért mindig visszavezethető 2D-s problémára:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{A}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

lineáris polarizáció: ~~$\underline{A} = \cos\varphi$~~ $\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

hozzáadható fázissal: $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} e^{i\chi}$

ilyenkor a_x és a_y fázisa mindig megegyezik

cirkuláris polarizáció:

a_x és a_y fázisa különböző: pl.: $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

ekkor $u = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}$

$$\mathrm{Re}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(e^{i(kz-\omega t)}\right) \\ \mathrm{Re}\left(\pm i e^{i(kz-\omega t)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \mp \sin(kz-\omega t) \end{pmatrix}$$

i esetén

$-i$ esetén

elliptikus polarizáció: $|a_x| \neq |a_y|$

komplexek, és különböző szögűek

Polarizációs eszközök:

$$A_{ki} = \underline{\underline{J}}\, \underline{A}_{be}$$

polarizátor: amerre áll ott átengedi, arra merőlegesen nem.

pl.: $\underline{\underline{P}}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{P}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

elforgató: a beeső polarizációt elforgatja

$$\underline{\underline{Q}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ez a síkban polarizált nyalábot elforgatja, de mit csinál a cirkulárisan polárossal?

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \sin\varphi + i\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \\ i(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{pmatrix} = e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

a cirkulárisan polárosból u.a.-t csinál

késleltető: Az egyik főtengely mentén lassítja a fény terjedését a másikban nem

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Feladat!

Számoljuk ki egy forgatott polarizátor transzformációját!

Jó, ha egy $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Jones-vektor x'-y'-ban

ennek reprezentációja x-y-ban: $\underline{\underline{O}}^{-1}(\varphi)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Erre alkalmazzuk a polarizátort: $\underline{P}\,\underline{O}^{-1}(\varphi)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

de mivel x'-y'-ban érdekel, újra vissza kell forgatni: $\underline{O}(\varphi)\,\underline{P}\,\underline{O}^{-1}(\varphi)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

tehát

$$\underline{\underline{P}}(\varphi) = \underline{\underline{O}}(\varphi)\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{O}}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

De ez diadikus projektor tehát $P(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$

Feladat

~~Két~~ egymásra merőleges polarizáló egység után abban 0-t kell kapni

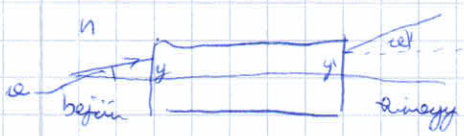
$$T = P_2 P_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mi van, ha mi közé teszünk egy φ szögű polarizátort:

$$T = \underline{P}_2\,\underline{P}(\varphi)\,\underline{P}_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi\, a \end{pmatrix}$$

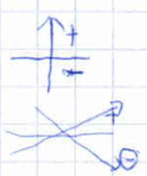
Paraxiális sugármenetek



képzünk egy oszlopvektort $\begin{pmatrix} y' \\ n'\alpha' \end{pmatrix}$

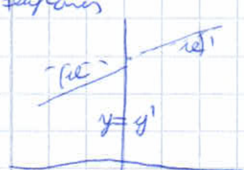
$$\begin{pmatrix} y' \\ n'\alpha' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}\begin{pmatrix} y \\ n\alpha \end{pmatrix}$$

előjelkonvenció: y:



α:

① fénytörés



$y' = 1y + 0\,n\alpha$

$n'\alpha' = 0y + n\alpha$ mert $\alpha \ll 1$

Tehát a fénytörés transzformációja: $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

② Szabad mozgás

$\alpha' = \alpha$

$y' = y + a \operatorname{tg} \alpha = y + \frac{a}{n} n \alpha$

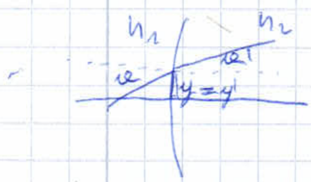
$$T(a) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Könnyű belátni, hogy $T(a)\,T(b) = T(a+b)$

valamint $(T(a))^{-1} = T(a)$

de milyen fizikai jelentése van T^{-1}-nek? megnézd mi van, ha megfordítjuk a fénysugár menetét

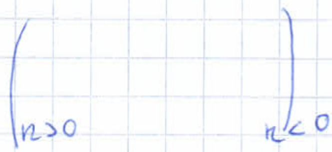
③ Gömbi törő felület:



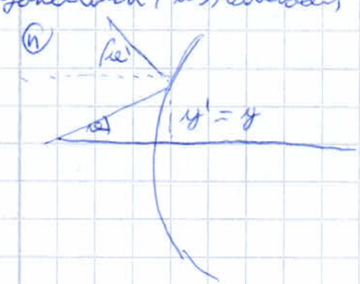
előadás alapján:

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

előjel konvenció:



④ Gömbtükör, visszaverődés

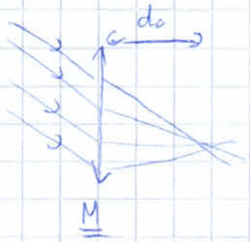


$$\underline{\underline{M_{\text{tükör}}(R)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$$

OPTIKA

9. gyak (11. 16.)

Példa 1



Mondjuk meg d_0-t $\underline{\underline{M}}$ függvényében

Ha elteszünk egy d_0 oldalán dobozba, akkor az összetett rendszer mátrixa:

$$\underline{\underline{M}}' = \underline{\underline{T}}(d_0)\,\underline{\underline{M}} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{T}}(d_0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_0}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ez alapján:
$$\underline{\underline{M}}' = \begin{pmatrix} M_{11} + \frac{d_0}{n} M_{21} & M_{12} + \frac{d_0}{n} M_{22} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

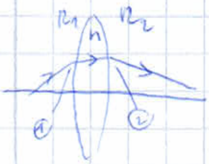
A fókuszpontra:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall y\text{-ra}$$

$$0 = M'_{11}\, y \quad \forall y\text{-ra} \Rightarrow M_{11} + \frac{d_0}{n} M_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{d_0 = -n \frac{M_{11}}{M_{21}}}$$

Miért nem f a d_0?

azért, mert d_0 az optikai eszköz határától van mérve, f pedig a fősíktól

Példa 2

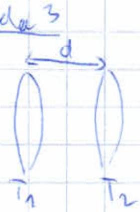


Számoljuk ki a vékony lencse transzfermátrixát!

$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{T}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-R_2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}_{\text{lencse}} = \underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{T}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ilyenkor} \quad T_{21} = -\frac{1}{f} = -D$$

Példa 3



$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_2 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(d) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{össz}} = T_2 T(d) T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{D_1 d}{n} & \frac{d}{n} \\ -D_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{D_1 d}{n} & \frac{d}{n} \\ \frac{D_2 D_1 d}{n} - D_2 - D_1 & 1 - \frac{D_2 d}{n} \end{pmatrix}$$

Látjuk, hogy a dioptriák nem összeadódnak, hanem van mellette korrekció a távolsággal.

Példa 4 foncsorozott lencse (vékony)

$$M^{(1)}(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{(3)}(R_1) = M^{(1)}(R_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{(2)}(-R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{-R_2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_e = M^{(3)}M^{(2)}M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{-R_2} - \frac{1-n}{R_1} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_1} + \frac{2n}{R_2} + \frac{n-1}{R_1} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\varphi} = -2\left(\frac{n}{R_2} + \frac{n-1}{R_1}\right)$$

Példa 5 vastag foncsorozott lencse

TFH $d \ll R$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix} \quad M^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \text{ törésen}$$

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ terjedésen}$$

$$M_E = M^{(3)}T^{(2)}M^{(2)}T^{(1)}M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ \frac{n-1}{R} & \frac{(n-1)}{n}\frac{d}{R} + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{R}\frac{1-n}{n} & \frac{d}{n} \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ \frac{n-1}{R} & \frac{n-1}{n}\frac{d}{R} + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{R}\frac{1-n}{n} & \frac{d}{n} \\ \frac{2n}{R} + \frac{2d}{R^2}(1-n) - \frac{1-n}{R} & \frac{2d}{R} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{R}\frac{1-n}{n} - \frac{2d}{R} - \frac{2d^2}{R^2}\frac{1-n}{n} & \frac{d}{n} - \frac{2d^2}{nR} + \frac{d}{n} \\ -\frac{1-n}{R} - \frac{d}{R^2}\frac{(1-n)^2}{n} + \left(1 - \frac{1-n}{n}\frac{d}{R}\right)2\left(\frac{n}{R} + \frac{d}{R^2}(1-n) - \frac{1-n}{R}\right) & \frac{d}{R}\frac{n-1}{n} + \left(1 - \frac{1-n}{n}\frac{d}{R}\right)\left(\frac{2d}{R} - 1\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{2n-1}{n}\frac{d}{R} + 2\frac{n-1}{n}\frac{d^2}{R^2} & 2\frac{d}{n}\left(1 - \frac{d}{R}\right) \\ \frac{4n-2}{R} - 2\frac{3n^2-4n+1}{n}\frac{d}{R^2} + 2\frac{(n-1)^2 d^2}{nR^3} & 2\frac{2n-1}{n}\frac{d}{R} \end{pmatrix}$$

közelítés első rendben:

$$M_E' = \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{2n-1}{n}\frac{d}{R} & 2\frac{d}{n} \\ \frac{4n-2}{R} - 2\frac{3n^2-4n+1}{n}\frac{d}{R^2} & 2\frac{2n-1}{n}\frac{d}{R} - 1 \end{pmatrix}$$

$$k_0 = \frac{1}{M_{21}}\left(1 - M_{11}\right) = \frac{R}{4n-2}\, 2\, \frac{2n-1}{n}\, \frac{d}{R} = \frac{d}{n}$$

$$t_0 = \frac{1}{M_{21}}\left(\det M - M_{22}\right) = \frac{R}{4n-2}\left(-2\,\frac{2n-1}{n}\,\frac{d}{R}\right) = -\frac{d}{n}$$

$$f = -\left(\frac{4n-2}{R} - 2 - \frac{d}{R^2}\right) = -\frac{R}{4n-2}\left(1 - 2\,\frac{2}{n-2}\,\frac{3n^2-(c-1)}{n}\,\frac{d}{R}\right) =$$

$$= -\frac{R}{2(2n-1)}\left(1 + \frac{3n^2-4n+1}{(2n-1)n}\,\frac{d}{R}\right) < 0$$

OPTIKA

10. gyak (11.23.)

Specrel.

inerciarendszer váltáskor nem a ponton távolsága, hanem a következő négyzet marad meg

$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$

Az inerciarendszer-váltó csoport a Lorentz-csoport:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi & \mathrm{sh}\,\chi \\ \mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

ahol χ a rapiditás $v = c\,\mathrm{th}\,\chi$

Keressük meg azon pontokat, amik $t' = 0$.

$0 = \mathrm{ch}\chi\, ct + \mathrm{sh}\chi\, x \Rightarrow ct = -\mathrm{th}\chi\, x \leftarrow x'$ egyenlete K-ban

Keressük meg azon pontokat, amik $x' = 0$

$0 = \mathrm{sh}\chi\, ct + \mathrm{ch}\chi\, x \Rightarrow ct = -\mathrm{cth}\chi\, x \leftarrow t'$ egyenlete K-ban

$$\left(\mathrm{ch}\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \mathrm{sh}\chi = \frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

sajátidő:

A saját koordinátarendszerben $\Delta x = 0$. $\Delta\tau^2 = c\Delta t^2 - \Delta x^2$

az összes lehetséges Δt közül $\Delta\tau$ a legkisebb.

pl.: $v = \frac{c}{2} \Rightarrow \mathrm{ch}\chi = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{sh}\chi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ekkor $\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta\tau \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Delta\tau$ a azonos helyen bekövetkező események között eltelt idő

$\Delta t' = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta\tau \longrightarrow \Delta t' > \Delta\tau$ idődilatáció

$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{3}} c\Delta\tau$

Példa

Sebesen bomló részecske. $v = 0{,}8c$-vel mozognak és $s = 30m$ út alatt bomlanak le (átlagosan). Mekkora a felezési idő a saját rendszerben

$\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{300}{8}\frac{m}{c}$

$\Delta\tau = \frac{1}{\mathrm{ch}\chi}\Delta t = \frac{\cancel{1}}{\sqrt{1-0{,}8^2}} \frac{300}{8}\frac{m}{c} = \frac{300}{\cancel{0{,}48}}\frac{m}{c}\ \frac{180}{8}\frac{m}{c}$ ~~A helyes eredmény~~ $\frac{0{,}6}{0{,}8}\frac{s}{c}$

Sebesség összeadás:

$v_1 = 0{,}9c$ ← Galaxis •Föld → $v_2 = 0{,}9c$ Galaxis

Mekkora a galaxisok egymáshoz képesti sebessége

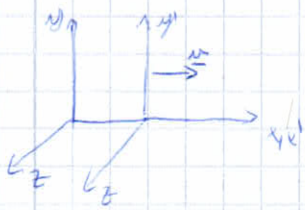
ugyanúgy egyik galaxisból a Földre, és onnan a másik galaxisra

$$\Lambda(\chi_1)\Lambda(\chi_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_1 & \operatorname{sh}\chi_1 \\ \operatorname{sh}\chi_1 & \operatorname{ch}\chi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_2 & \operatorname{sh}\chi_2 \\ \operatorname{sh}\chi_2 & \operatorname{ch}\chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2) & \operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2) \\ \operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2) & \operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2) \end{pmatrix}$$

a rapiditás adódik össze

a sebesség: $$v_e = c\operatorname{th}\chi_e = c\operatorname{th}(\chi_1+\chi_2) = c\,\frac{\operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2)}{\operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2)} = \frac{\operatorname{sh}\chi_1\operatorname{ch}\chi_2 + \operatorname{ch}\chi_1\operatorname{sh}\chi_2}{\operatorname{ch}\chi_1\operatorname{ch}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1\operatorname{sh}\chi_2} =$$
$$= \frac{\frac{\operatorname{sh}\chi_1}{\operatorname{ch}\chi_1} + \frac{\operatorname{sh}\chi_2}{\operatorname{ch}\chi_2}}{1 + \frac{\operatorname{sh}\chi_1}{\operatorname{ch}\chi_1}\frac{\operatorname{sh}\chi_2}{\operatorname{ch}\chi_2}}\,c = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Lorentz-trafó 3 térbeli koordinátával



$y' = y$
$z' = z$

Ha $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ akkor

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ha $\underline{n}$-t elforgatjuk a térben:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi\cdot\underline{n} \\ \hline -\operatorname{sh}\chi\,\underline{n} & \\ \hline \end{array} \longrightarrow (\operatorname{ch}\chi-1)\underline{n}\circ\underline{n} - \underline{1}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi\,\underline{n}^T \\ -\operatorname{sh}\chi\,\underline{n} & (\operatorname{ch}\chi-1)\,\underline{n}\circ\underline{n} - \underline{1} \end{pmatrix}$$

A koordinátarendszert el lehet forgatni $$\underline{\underline{F}}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^T \\ \underline{0} & \underline{\underline{F}}_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

Sebes

Sebesség összeadás 3D-ben:

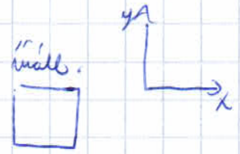
$\Lambda(\underline{n}_1, \gamma_1)\,\Lambda(\underline{n}_2, \gamma_2) = \Lambda(\underline{n}, \gamma)$ DE ez sajnos nem működik, mert az eredmény nem lesz $\Lambda(\underline{n}, \gamma)$ alakú

A boostok nem alkotnak csoportot, csak a forgatásokkal együtt

helyesen: $\Lambda(\underline{n}_1, \gamma_1)\,\Lambda(\underline{n}_2, \gamma_2) = \Lambda(\underline{n}, \gamma)\,F$ $\leftarrow$ forgatás lesz

OPTIKA

11. gyak (11.30.)



Az egyik űrhajó $v' = 0{,}2c$-vel lövi ki az űrhajót a másik felé
~~Mozgatott~~ űrhajó rendszerében a becsapódás ideje $\Delta\tau$
~~mekkora az egyik űrhajó rendszerében?~~

A rakéták rendszerében a kilövés és a becsapódás x koordinátája u.a.

a) Mekkora Δt az űrállomás rendszerében

b) Mekkora a lövedék sebessége az űrállomás szerint v?

c) A másik űrhajó fotontorpedóval lő vissza mekkora ennek a sebessége az űrhajóban

a)

A rakéták rendszerében $\begin{pmatrix} c\Delta\tau' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\Delta\tau \\ 0 \end{pmatrix}$

űrállomásnál: $\begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi \\ -sh\chi & ch\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\chi\, c\Delta\tau \\ -sh\, c\Delta\tau \end{pmatrix}$

$$\Delta t = ch\chi\,\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{0{,}36}} = \underline{\frac{5}{3}\Delta\tau}$$

b)

$$v_y = \frac{L}{\Delta t} = \frac{3}{5}\frac{L}{\Delta\tau} = \frac{3}{5}\frac{L}{\frac{L}{v}} = \frac{3}{5}v$$

$v_x = v_x$

$$v_t = \sqrt{\left(\frac{3}{5}v\right)^2 + v_x^2}$$

máshogy:

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

c) fény

mert $\sqrt{\left(\frac{3}{5}c\right)^2 + \left(\frac{4}{5}c\right)^2} = c$

$u = \Lambda u' = \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{v'} \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sh\chi\, v' \\ -ch\chi\, v' \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,ch\chi \\ -c\,sh\chi \\ v' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Impulzus, energia

4-vektor $\quad P_0 = E = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$P_{1,2,3} = \underline{P} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

fennáll a $m^2c^2 = P_0^2 - |P_{1,2,3}|^2$ $\qquad$ rapiditással: $P = mc\begin{pmatrix}\text{ch}\chi \\ \text{sh}\chi\end{pmatrix}$

Példa

^3He $\quad Mc^2 = 2808{,}415\ \text{MeV}$

→ Bomlik → $^2H + p^+$

$M_H c^2 = 1875{,}613\ \text{MeV}$

$M_p c^2 = 938{,}272\ \text{MeV}$ $\qquad$ mennyi energia kell hozzá?

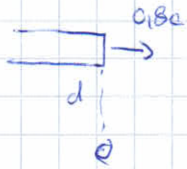
minimális energia, ha nyugalomban maradnak.

$$\Delta E = M_H c^2 - M_p c^2 - M c^2 = 5{,}47\ \text{MeV}$$

OPTIKA

12. gyak (12.07.)

2014/1.



Mennyi idő alatt ér le?

a)

$$t_1 = \frac{d}{c}$$

b)

$$t_2 = \frac{d}{c} + \frac{\sqrt{d^2 + (0{,}8 t_2 c)^2}}{c}$$

$$c t_2 - d = \sqrt{d^2 + (0{,}8 t_2 c)^2}$$

$$c^2 t_2^2 - 2dct_2 + d^2 = d^2 + 0{,}64 c^2 t_2^2$$

$$0{,}36 c^2 t_2^2 = 2dct_2$$

$$t_2 = \frac{2d}{0{,}36c} = \frac{50}{9}\frac{d}{c}$$

$$t_2' = \frac{\frac{50}{9}\frac{d}{c}}{\sqrt{1-0{,}8^2}}$$

$$t_1 + t_2 = \cancel{d}\, t_1 +$$

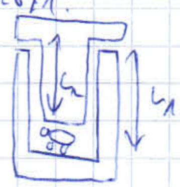
$$v^4 t_1^2 + (c^2 - v^2)(v^2 t_1^2 + c^2$$

2015/1.

$$\cancel{t_2 = t_1 + \frac{(t_1+t_2)v}{c}} \Rightarrow \cancel{t_2 = \frac{t_1}{1-\frac{v}{c}}}$$

Ez is tévút

2016/1.



L_1 $\quad L_2 = 0{,}6 L_1$

0,8c-vel tolják be

$$\operatorname{th}\chi = 0{,}8$$

$$\operatorname{ch}\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$$

a) az edényből a kupak hossza $L_2' = ?$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ L_2' \end{pmatrix}}_{\text{edény}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c\Delta t \\ L_2 \end{pmatrix}}_{\text{kupak}} \Rightarrow \begin{pmatrix} c\Delta t \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ L_2' \end{pmatrix}$$

$$\cancel{L_2' = \operatorname{ch}\chi\, L_2 =}$$

$$L_2 = \operatorname{ch}\chi\, L_2' \Rightarrow L_2' = \frac{1}{\operatorname{ch}\chi} L_2 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, L_2 = 0{,}6 L_2$$

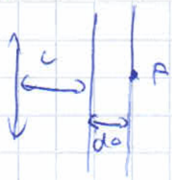
b) Az edény hossza a kupakból $L_1' = ?$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ L_1' \end{pmatrix}}_{\text{kupak}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c\Delta t \\ L_1 \end{pmatrix}}_{\text{edény}} \Rightarrow L_1' = \frac{1}{\operatorname{ch}\chi} L_1 = 0{,}6 L_1$$

c)

A ~~kupak~~ annyi mértékegységet fog, hogy nagy tud-e állni

2014/2.



$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d_0}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & L+\frac{d_0}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-D\left(L+\frac{d_0}{n}\right) & L+\frac{d_0}{n} \\ -D & 1 \end{pmatrix} = M$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ n\alpha \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = 0$$

$$\left(L+\frac{d_0}{n}\right)\frac{1}{f} = 1 \quad \Rightarrow L = f - \frac{d_0}{n}$$