# RELATIVITÁS

1. előadás (09.10.)

Katz Sándor katz@bodri.elte.hu

bodri.elte.hu/Relativitáselmélet

vizsga

## Alapfogalmak

relativitás elve: A fizikai tv.-ek minden inerciarendszerben azonosak.

fogalmazás: K koordinátarendszerbeli $(x, y, z, t)$-vel leírt egyenletet minden K-ban azonos

tapasztalat: a fény minden K-ban azonos $(c)$

Téridő: Események halmaza (4D-s objektum)

Távolság: ha van két esemény: $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ és $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ K-ban

de $(x_1', y_1', z_1', t_1')$ és $(x_2', y_2', z_2', t_2')$ K'-ben

legyen a két esemény olyan, hogy az 1. ből induló fényjel átmegy a másodikon.

ekkor a tapasztalat miatt: $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 = c^2(t_2-t_1)^2$

$\Rightarrow c(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=0$ mindkét rendszerben

$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 \leftarrow$ ívhossz négyzet

~~általános esemény a koordinátarendszer függetlenség~~

A tapasztalat miatt ha $s_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow s_{12}'^2 = 0$

Mi a helyzet akkor, ha $\neq 0$?

HF: Bizonyítsd be, hogy $s_{12}^2 = s_{12}'^2$ mindig

hint: legyenek közeli események: $ds^2 = c\,dt - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Sorbafejtés miatt: $ds'^2 = \sqcup\, dt^2 + \sqcup\, dx^2 + \dots + \sqcup\, dt\,dx + \sqcup\, dy\,dz \dots$

meg lehet mutatni, hogy a vegyes tagok 0.

## Speciális ívhossz

Legyen $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ és $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ két nem azonos esemény K-ban *

a) Létezik-e olyan K', ahol a két esemény ~~egyidejű~~ egyhelyű?

b) Létezik-e olyan K', ahol a két esemény egyidejű

Legyen $t_{12} = t_2 - t_1$ $\quad l_{12}^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

tetsz. K'-ben: $s_{12}^2 = s_{12}'^2$

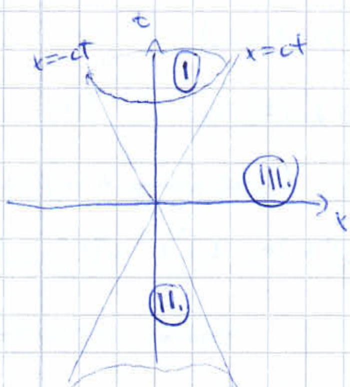
*: minden koord különböző és nem megy át fényjel

a)

$$l_{12}'^2 = 0 \Rightarrow s_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$$

b)

$$t_{12}'^2 = 0 \Rightarrow s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0$$




I. $c^2t^2 - x^2 > 0$ és $t > 0$

$s^2 > 0 \Rightarrow$ időszerű ívhossz

abszolút jövő

II. $s^2 < 0$ $\quad t < 0$

abszolút múlt

III. $s^2 < 0$ - térszerű ívhossz

létezik olyan K' ahol O a múlt vagy a jövő

$\Rightarrow$ semmilyen kh. nem juthat el O-ból ide

sajátidő:

A és B pont között mozog az űrhajó. A sajátidő az az idő, amit az együttmozgó koordinátarendszerben látunk.

$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$ $\qquad$ K'-ben $\quad ds'^2 = c^2dt'^2 - dl'^2 = c\,dt'^2$

$$\Rightarrow c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dl^2}{dt^2}\right) = c^2 dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \le dt$$

általánosítható összetett mozgásra az integrállal: $\tau = \int dt'$

(anti) háromszög egyenlőtlenség: $O_1$ $O_2$ $O_3$ események $s_{12}$ $s_{23}$ $s_{13}$ időszerűek

és $t_1 < t_2 < t_3$

1-ből 3-ba egy egyenesen

$$\tau_{13} = t_3 - t_1$$

$$\tau_{12} + \tau_{23} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\frac{v_{12}^2}{c^2}} + \int_{t_2}^{t_3} dt \sqrt{1-\frac{v_{23}^2}{c^2}} < \int_{t_1}^{t_2} dt + \int_{t_2}^{t_3} dt = \tau_{13}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{12} + \tau_{23} < \tau_{13}$$

## Lorentz-trafó

Mi a kapcsolat az egy eseményt leíró „különböző" K rendszerbeli koordináták között?

[régen galilei-trafó:

ha K' K-hoz képest v-vel mozog x irányban

$$x = x' + vt$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

Ez tudja a relativitási elvet, de a c állandóságát sérti]

Olyan trafót keresünk, ami a ívhosszt megtartja

eltolásra, forgatásra, tükrözésre

1+1 D-ban:

$(x,t)$ $(x',t')$

HF: végigszámolni, hogy a homogenitásból $\Rightarrow$ lin trafó kell legyen.

# RELATIVITÁS

## 2. előadás (09.17.)

K-ban a hely: $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ K'-ben: $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$

A múltkoriból tudjuk, hogy lineáris trafó kell, ami K'-ről K-t csinál, és az intervallum megmarad

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

Állítás: az intervallum invariancia egyértelműen meghatározza a mátrixot.

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$$

$$(\alpha ct' + \beta x')^2 - (\gamma ct' + \delta x')^2 = (ct')^2 - x'^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)(ct')^2 - (-\beta^2 + \delta^2)x'^2 + (2\beta\alpha - 2\gamma\delta)ct'x' = (ct')^2 - x'^2$$

Mivel ez minden $\cancel{c}t'$, $t$, $x'$, $x$-re teljesül:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 - \gamma^2 = 1 \\ \delta^2 - \beta^2 = 1 \\ \alpha\beta - \gamma\delta = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \exists \chi: \operatorname{sh}\chi = \gamma. \text{ az egyenlet miatt } \alpha = \pm \operatorname{ch}\chi \\ \to \exists \chi': \operatorname{sh}\chi' = \beta \Rightarrow \delta = \pm \operatorname{ch}\chi' \\ \phantom{x} \end{array}$$

a + azt jelenti, hogy nincs tükrözés

a − azt jelenti, hogy ~~nincs~~ van

Ha megtagadjuk a tükrözést, összesen 4 féle képpen választhatjuk, ez a 4 féle trafó a tükrözés alkalmazásának szempontjából.

A 3. egyenletből: $\operatorname{ch}\chi \operatorname{sh}\chi' = \operatorname{ch}\chi' \operatorname{sh}\chi \Rightarrow \operatorname{th}\chi' = \operatorname{th}\chi \Rightarrow \chi' = \chi$

Tehát ezt a trafót 1 db számmal paraméterezhető:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \qquad \chi: \text{ rapiditás.}$$

Mi $\chi$ jelentése? Nézzük K-ból K' mozgását: $x' = 0$

$$\left.\begin{array}{l} ct = ct' \operatorname{ch}\chi \\ x = ct' \operatorname{sh}\chi \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A K' sebessége K-ból: } v = \frac{x}{t} = \operatorname{th}\chi \cdot c \Rightarrow \boxed{\operatorname{th}\chi = \frac{v}{c}}$$

Mivel $\operatorname{sh}\chi = \dfrac{\operatorname{th}\chi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\chi}}$ és $\operatorname{ch}\chi = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\chi}}$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{v t' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## Lorentz - kontrakció

K rendszerben áll egy rúd $x_1$ és $x_2$ között

Fix $t'$ esetén mennyi $\Delta x' = x_2' - x_1'$ ?

$$x_1 = \frac{v t' + x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2 = \frac{v t' + x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x' = \Delta x \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta x$$

## Sebességek összeadása 1D-ben:

$$K \underset{\chi_1}{\overset{v_1}{\longrightarrow}} K' \underset{\chi_2}{\overset{v_2}{\longrightarrow}} K''$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi_1 & \mathrm{sh}\,\chi_1 \\ \mathrm{sh}\,\chi_1 & \mathrm{ch}\,\chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi_2 & \mathrm{sh}\,\chi_2 \\ \mathrm{sh}\,\chi_2 & \mathrm{ch}\,\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi_1 & \mathrm{sh}\,\chi_1 \\ \mathrm{sh}\,\chi_1 & \mathrm{ch}\,\chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi_2 & \mathrm{sh}\,\chi_2 \\ \mathrm{sh}\,\chi_2 & \mathrm{ch}\,\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi_1 \mathrm{ch}\,\chi_2 + \mathrm{sh}\,\chi_1 \mathrm{sh}\,\chi_2 & \mathrm{ch}\,\chi_1 \mathrm{sh}\,\chi_2 + \mathrm{sh}\,\chi_1 \mathrm{ch}\,\chi_2 \\ \mathrm{ch}\,\chi_2 \mathrm{sh}\,\chi_1 + \mathrm{ch}\,\chi_1 \mathrm{sh}\,\chi_2 & \mathrm{sh}\,\chi_1 \mathrm{sh}\,\chi_2 + \mathrm{ch}\,\chi_1 \mathrm{ch}\,\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi_1+\chi_2) & \mathrm{sh}(\chi_1+\chi_2) \\ \mathrm{sh}(\chi_1+\chi_2) & \mathrm{ch}(\chi_1+\chi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

~~Egyes~~ A rapiditás additív (csak 1D-ben)

Akkor mennyi $K''$ sebessége $K$-ban:

$$\frac{v}{c} = \mathrm{th}\,\chi = \mathrm{th}(\chi_1+\chi_2) = \frac{\mathrm{sh}(\chi_1+\chi_2)}{\mathrm{ch}(\chi_1+\chi_2)} = \frac{\mathrm{ch}\,\chi_1 \mathrm{sh}\,\chi_2 + \mathrm{ch}\,\chi_2 \mathrm{sh}\,\chi_1}{\mathrm{ch}\,\chi_1 \mathrm{ch}\,\chi_2 + \mathrm{sh}\,\chi_1 \mathrm{sh}\,\chi_2} =$$

$$= \frac{\mathrm{th}\,\chi_1 + \mathrm{th}\,\chi_2}{1 + \mathrm{th}\,\chi_1 \mathrm{th}\,\chi_2} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}} \Rightarrow v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c}} < c$$

## Sebességösszeadás 3D-ben:

Ha $K \xrightarrow[v_x]{} K'$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Ilyenekből már össze lehet rakni tetszőleges trafót.

$K \qquad K'$

$\longrightarrow$ V sebesség x irányban

K rendszerben egy test $\underline{v}=(v_x, v_y, v_z)$ sebességgel megy

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad dx = \frac{V\,dt' + dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad dy = dy' \qquad dz = dz'$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{V\,dt' + dx'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{V + v_x'}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}}$$

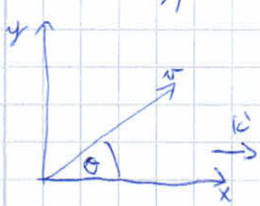
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v_y'}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Tehát a merőleges sebességek is transzformálódnak, így az irány egy nemtriviális módon változik

+ A képletek nem szimmetrikusak $v_x$-re és V-re, tehát a Lorentz-trafók nem kommutatívak

Állítsuk úgy K-t, hogy K' x irányban mozog a test pedig xy síkban.

$v_z = v_z' = 0$




$$v_x = v\cos\Theta$$
$$v_y = v\sin\Theta$$

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V + v_x'} = \frac{v'\sin\Theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V + v'\cos\Theta'}$$

ennek általánosabban most ezt nem számoljuk meg, de nézzük, erre egy spec. esetet, amikor $v = c$

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{c\sin\Theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V + c\cos\Theta'} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\Theta'}{\cos\Theta' + \frac{V}{c}} \Rightarrow \sin\Theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\Theta'}\sin\Theta'$$

HF: ellenőrizni

## Négyes formalizmus

Legyen $x^0 := ct \quad x^1 := x \quad x^2 := y \quad x^3 := z$

$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ négyes koordináta vektor

Lorentz trafó: $\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi & & \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$

röviden: $x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ konvenció: alsó felső indexpárra automatikus összegzés

ívelem négyzet: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} =$

$= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ahol $\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ metrikus tenzor

új jelölés: Legyen $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$

$x^\mu$: $(ct, x, y, z)$ a 4-es koord. kontravariáns komponensei

$x_\mu$: $(ct, -x, -y, -z)$ a 4-es koord. kovariáns komponensei

Ezzel: $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$

# RELATIVITÁS

3. előadás (09. 24.)

metrikus tenzor: $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$x^\mu$ – kontravariáns komponens $(ct, \underline{x})$

$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ kovariáns komponens

felsőindexes metrikus tenzor: $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ és ezzel $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$

ívelem invarianciája: $ds^2 = ds'^2$

$$\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \eta_{\rho\lambda}\, dx'^\rho dx'^\lambda$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho\, dx'^\rho \Lambda^\nu{}_\lambda\, dx'^\lambda = \eta_{\rho\lambda}\, dx'^\rho dx'^\lambda \qquad \forall\, dx'^\rho dx'^\lambda\text{-ra}$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda = \eta_{\rho\lambda} \qquad \text{illetve} \quad \eta_{\rho\lambda}\eta^{\lambda\sigma} = \delta_\rho^\sigma$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda \eta^{\lambda\sigma} = \delta_\rho^\sigma$$

Mivel $\det \eta = -1$, ezért $\det \Lambda = \pm 1$    $+$: nincs tükrözés, $-$: van tükrözés

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x'^\sigma = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\sigma\kappa} x'_\kappa = \Lambda_\mu{}^\kappa x'_\kappa$$

A fenti kifejezés egyszerűbben: $\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\sigma = \delta_\rho^\sigma \quad \sim \quad \Lambda^T \Lambda = \mathbb{1}$

Ez nem egészen a transzponált, mert itt az indexek is játszanak.
Rendes jelölés:

$$(\tilde{\Lambda}^T)^\sigma{}_\mu := \Lambda_\mu{}^\sigma \qquad \text{ezzel:} \quad (\tilde{\Lambda}^T)^\sigma{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta_\rho^\sigma$$

$$\text{így} \quad (\tilde{\Lambda}^T)\Lambda = \mathbb{1}$$

$\Lambda$ majdnem ortogonális, $4\times4$-es mátrix ezért 10 feltétel $\Rightarrow$ 6 paraméter szabadsági fok

3 térbeli forgatás + 3 boost

$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}$    olyan, mint a múltkor

ahol $O$ $3\times3$ ortogon.

Négyesvektorok általában.

$\Phi$ mennyiség skalár, amely értéke minden K rendszerben azonos. (Lorentz-transzformáció invariáns)

4 db $A^\mu$ szám ($\mu$: 0...3) egy 4-vektor kontravariáns komponenseit alkotja, ha a Lorentz-transzf. úgy transzformálódik, mint $x^\mu$: $A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A'^\nu$

kovariáns komponensek u.a., csak lent.

4-es vektor négyzete: $\eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = A_\mu A^\mu$

Ez egy skalár.

SŐT, két 4-vektornak a skalárszorzat:

$$(A, B) := \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$$

jelölés: $A^\mu = (A^0, \underline{A})$

$A_\mu = (A^0, -\underline{A})$

Kétindexes tenzor: 16 db $A^{\mu\nu}$ számot 2 indexes 4-es tenzornak hívunk, ha úgy transzformálódik, mint a koordináták szorzata.

$$A^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma A^{\rho\sigma}$$

Általánosságban $4^n$ db $A^{\mu_1 \dots \mu_n}$ szám n indexes tenzor, ha

$$A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} A^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$$

indexek le-fel hozogatása — ált. részletesen, de valójában triviális

speciális tenzorok:

- egységtenzor $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\delta^\mu{}_\nu$

  Azaz $\delta^\mu{}_\nu A^\nu = A^\mu$

- metrikus tenzor $\eta^{\mu\lambda} \delta_\lambda{}^\lambda \to \delta^{\nu\lambda} = \eta^{\nu\lambda}$ A metrika és a tenzor u.a.
- szimmetrikus tenzor $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ 10 komponens
- antiszimmetrikus $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ 6 komp.
- térbeli forgatásra nézve: $A^{0i}$: 3D-s vektor

  $A^{ij}$ 3x3 tenzor stb.
- teljesen antiszimm. tenzor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$: $\begin{cases} 1 \text{ ha } \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ a } 0,1,2,3 \text{ páros perm.} \\ -1 \text{ ha } \text{páratlan} \\ 0 \text{ ha } \text{azonos indexek vannak} \end{cases}$

Ha lehet tértükrözés, akkor lesznek - amire inv. skalárok → skalár
- előjelet váltó skalár → pszeudoskalár

vektorok - aki előjelet vált → vektor
- aki nem vált előjelet → pszeudovektor / axiálvektor

Állítás: egy antiszimm. tenzor összeáll egy vektorból és egy axiálvektorból

mezők:

skalármező: Olyan fv. $\Phi$ ami a téridőben rendel skalárt.

Transzformálódási szabály $\phi(0) = \phi'(0)$ azaz $\phi$

$$\phi(x) = \phi'(x') = \phi'(\Lambda^{-1}x)$$

4-vektormező: téridőbe a 4-es vektorokba képező fv.

$$V^\mu(0) = \Lambda^\mu{}_\nu V'^\nu(0)$$
$$V^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu V'^\nu(\Lambda^{-1}x)$$

Kovariáns egyenlet: Olyan egyenlet, amelynek két oldalán azonosan transzformálódó mennyiségek vannak.
Ezen

$\Longrightarrow$ Minden K rendszerben azonosak

Ezen a nyelven a relativitási elv: Minden természeti tv. felírható kov. egyenlettel.

Kovariáns diffoperátorok:

F legyen skalármező! Ha $x^\mu$ megváltozik:

$$\underbrace{dF}_{\text{skalár}} = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \underbrace{dx^\mu}_{\text{kontravariáns}} \qquad \forall\, dx^\mu\text{-re}$$

$\Downarrow$

$\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x^\mu}$ egy 4-vektor kovariáns komponensei.

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \underline{\nabla}\right) \qquad \text{ebből: } \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\underline{\nabla}\right)$$

Ebből: $dF = \partial_\mu F\, dx^\mu = \partial^\mu F\, dx_\mu$

többszörös derivált: $\Box := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ . D'Alembert-operátor

hullámegyenlet $\Box \phi = 0$

Keressük a megoldást síkhullám alakban! $\phi = e^{\pm i k_\mu x^\mu}$

$$\partial_\mu \partial^\mu e^{\pm i k_\mu x^\mu} = \mp k_\mu k^\mu e^{\pm i k_\mu x^\mu} = 0$$

akkor nemtriviális, ha $k_\mu k^\mu = 0 \Longrightarrow k_\mu$ fényszerű

# RELATIVITÁS

4. előadás (10.01)

Definiáljuk a mozgást leíró mennyiségeket

A koordináta már megvan! Sebesség: $\underline{v} = \frac{dx}{dt}$ volt, de t nem volt komponens.

deriváljuk a sajátidő [ívhossz] ; $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$

Mivel $ds = c\,d\tau = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\qquad u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\ \frac{\underline{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

$u^\mu$ : - dimenziótlan

- négyzete: $u_\mu u^\mu = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{c^2-v^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = 1$

avagy $u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx_\mu dx^\mu}{ds^2} =$ def sz. $= 1$

- szemléletes jelentés: a téridőben a világvonal érintője

- vektorként transzformálódik: $u^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u'^\nu$

gyorsulás: $a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$

érdekes tul.: $u^\mu u_\mu = 1 \quad / \cdot \frac{d}{ds}$

$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0$

$2a_\mu u^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad$ A 4-es sebesség és gyorsulás OG.-k

## Egyenletesen gyorsuló mozgás

Mi legyen a def? Az $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = $ const nem jó, mert $\underline{v}$ túllépné c-t

def: saját rendszerben (minden pillanatban) a gyorsulás legyen állandó (1)

$a^0 = \frac{c\,d^2t}{ds^2} = 0$ (HF belátni) HF

$a^k = \frac{d^2x^k}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2x^k}{dt^2} = \frac{a_k}{c^2}$

$a'^\mu = \left(0,\ \frac{a}{c^2},\ 0,\ 0\right)$ ha x irányú gyorsul.

$a_\mu a^\mu = a'_\mu a'^\mu = -\frac{a^2}{c^4} = $ const

Így is lehetne definiálni: A mozgás iránya nem változik, és a gyorsulás nagysága konst

laborrendszerben: $a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a'^\nu = \begin{pmatrix} ch\chi & sh\chi & & \\ sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{c^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{c^2}\begin{pmatrix} sh\chi \\ ch\chi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{c^2}\left(\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\ 0,\ 0\right)$

$a^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$

HF $a^\mu = \dfrac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\dfrac{du^\mu}{dt}$

$\mu = 3,4$-re ~~ha~~ $a = c$
$\mu = 0,1$-re u.a. ← HF ellenőrizni

$$\frac{a}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = at + \text{konst}$$ ha $t=0$-an $v=0$, konst $=0$

HF $\Rightarrow$ invertálva $v$-re (HF): $$v = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} \underset{at \ll c}{\simeq} at$$

HF HF: bizonyítsuk be, hogy $v < c$ $\forall t$-re

integrálva a távolság: $$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{at'}{\sqrt{1+\frac{a^2t'^2}{c^2}}}dt' = x_0 + \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t'^2}{c^2}}\right]_0^t =$$
$$= x_0 + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right)$$

ha $x_0 = 0$: $$\left(x+\frac{c^2}{a}\right)^2 - \frac{c^4}{a^2}\left(1+\frac{a^2t^2}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow \left(x+\frac{c^2}{a}\right)^2 - ct^2 = \frac{c^4}{a^2}$$

Ez egy hiperbola egyenlete a $x-t$ síkban

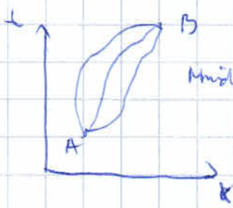
Mennyi az eltelt sajátidő: $$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt' = \int_0^t \sqrt{1-\frac{a^2t'^2/c}{1+\frac{a^2t'^2}{c^2}}}\,dt' =$$
$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2t'^2}{c^2}}}\,dt' = \frac{c}{a}\,\mathrm{arsh}\left(\frac{at}{c}\right)$$

pl.: $a = g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$ gyorsulással $x = 100$ fényév messzire mennénk.

~~t~~ $t = 100{,}95$ év

$\tau = 4{,}09$ év

<u>Tömegpont mozgása</u>




Minden világvonalhoz rendeljünk hatást

Legkisebb hatás elve.

$S = \int_{t_1}^{t} L\,dt$ volt klasszikusan.

itt mi legyen?

Legyen a hatás skalár!  Javaslat: $\int_a^b ds$, a hatás ennek a fv.-e.

TFH: $S = \alpha\int_a^b ds$   $\alpha = ?$

Azt akarjuk, hogy kis $v$-kre adja vissza a klasszikust

$$S = \alpha \int_a^b c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = \int_a^b L\,dt \Rightarrow L = \alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ha $v \ll c$ $\quad L = \alpha c\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) = \alpha c - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2 + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \overset{!}{=} \text{konst} + \frac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow -\frac{\alpha}{c} = m \Rightarrow \alpha = -mc$$

Tehát $\quad S = -mc\int_a^b ds \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (adott KR-ben)

Ált. imp.: $\quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad v \ll c$-re $\quad p_i = m v_i$

erő: $\quad F_i = \frac{dp_i}{dt}$

2 példa:

a) $|v| = \text{áll}$ $\quad v^2 = \text{áll}$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv_i}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}a_i$$

b) $v$ irány állandó: $v_i = v n_i$

$$\frac{dp_i}{dt} = m\frac{d}{dt}\frac{v n_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \overset{HF}{=} \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv_i}{dt}$$

HF

$\Rightarrow$ nincs $F = ma$ szerű összefüggés

Energia:

$$E = p_i\dot{q}_i - L = \underline{p}\,\underline{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

érdekesség: – nincs benne konstans szabadság

– nem tűnik el, ha a $v = 0$: $\quad$ (4.2) $\quad \boxed{E = mc^2}$ !!!!!!

nyugalmi energia

ez alapján lehet $m$-et definiálni $m$-+ (nagy fordítás)

Összetett rendszerre is igaz, hogy $E_i = m_i c^2$, teljes $E = mc^2$

de $\quad E = \sum_i E_i + \sum_{i \neq j} V_{ij} \Rightarrow mc^2 = \sum_i m_i c^2 + \sum_{i\neq j} V_{ij} \Rightarrow m = \sum_i m_i + \frac{1}{c^2}\sum_{i\neq j} V_{ij}$

nincs tömegmegmaradás (tömegdefektus)

Hamilton-fv.:

$$H = \underline{p}\,\underline{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{p^2+m^2c^2} \qquad \text{ha } p \ll mc$$

$$H \approx mc^2\sqrt{\frac{p^2}{m^2c^2}+1} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} + O\left(\frac{p^4}{m^4c^4}\right)$$

Összefüggés:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{v}{c^2}$$

(ha $m = 0$ és $v < c$, akkor $p = 0$, $E = 0$ mozi.

ha $m \neq 0$ $\quad v = c$, akkor $\underline{p}$ és $E$ divergál

ha $m = 0$ és $v = c$ együtt lehet értelmes $\Rightarrow$ foton)

De ez $\underline{p}$ ezekből nem jön, de $E = pc$ igaz.)

Ugyanez kovariánsan:

$$S = -mc\int ds \qquad \delta S = 0 \quad \text{mit ad?}$$

$$\delta S = -mc\,\delta\int_a^b ds = -mc\int_a^b \delta ds = *$$

$$\delta ds = \delta\sqrt{dx_\mu dx^\mu} = \frac{1}{2\sqrt{dx_\mu dx^\mu}}\left(dx_\mu \delta dx^\mu + \delta dx_\mu dx^\mu\right) =$$

$$= \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds}$$

$$* = -mc\int_a^b \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} = -mc\int_a^b u_\mu \delta dx^\mu = -mc\int_a^b u_\mu d(\delta x^\mu) =$$

$$= -m\left(u_\mu \delta x^\mu\Big|_a^b - \int_a^b du_\mu \delta x^\mu\right)$$

Tehát $\delta S = -mc\,u_\mu \delta x^\mu\Big|_a^b + mc\int_a^b a_\mu ds\, \delta x^\mu$

ha a határokat nem variáljuk $\delta S = 0$ $\rightarrow$ mozgásegyenlet:

$$mc\int_a^b u_\mu ds\,\delta x^\mu = 0 \quad \forall \delta x^\mu \Rightarrow a_\mu = 0$$ ez a szabad részecske mozgásegyenlete

# RELATIVITÁS

9. előadás (10.08.)

6. ás:

$$\delta S = -mc\, u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b + mc \int_a^b a_\mu \delta x^\mu \, ds$$

fix határok mellett mozgásegyenlet.

Ha a határokon változtatunk, és mindig az a pálya, ami a m.e.-t megoldja

$$\delta S = -mc\, u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b \qquad \text{adódó 4-es impulzus}$$

$$p_\mu = -\partial_\mu S = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \qquad \text{(a felső végpont szerinti derivált.)}$$

Ha a alsó végpont is változtat, akkor: $\delta S = p_\mu \delta x^\mu \big|_b - p_\mu \delta x^\mu \big|_a$

Szabad részecskére: $p_\mu = mc\, u_\mu$

$$p^\mu = \left( \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} , \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \left( \frac{E}{c} , \underline{p} \right)$$

$\Rightarrow$ Az energia és a impulzus u.a. 4-esvektor komponensei.

$$\delta S = -p_\mu^{(b)} \delta x^\mu \big|_b + p_\mu^{(a)} \delta x^\mu \big|_a$$

Eltolás hatására: $\delta x^\mu \big|_a = \delta x^\mu \big|_b$, $\delta S = 0$ $\Rightarrow$ $0 = \left( -p_\mu^{(b)} + p_\mu^{(a)} \right) \delta x^\mu \big|_{a,b}$

$\Rightarrow p_\mu^{(a)} = p_\mu^{(b)}$ ~~eltolás~~ hatására megmaradó mennyiség.

mivel $u_\mu u^\mu = 1$ miatt $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$

$\Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ tömeghéj feltétel

4-es erő

az erő az impulzus idõderiváltja volt, így

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{ds} = mc \frac{du^\mu}{ds} = mc\, a^\mu \qquad \text{felírhatjuk a komponensei}$$

$$F^\mu = \left( \frac{E v}{c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} , \frac{E}{c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Részecskék bomlása/ütközése $(c = 1)$

két dolgot kell felhasználni: $p^\mu$ megmaradás + tömeghéj

1) M tömegű részecske bomlása 2 részecskére. M nyugalmi rendszerében mi a keletkezők energiája? $(m_1, m_2)$

Energia megmaradás:

$M = E_1 + E_2$ (1) $\Rightarrow$ $E_1 > m_1$, $E_2 > m_2$ $\Rightarrow$ bomlás feltétele $(M \geq m_1 + m_2)$

impulzus megmaradás:

$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{0} \Rightarrow p_1^2 = p_2^2$ (2)

tömeghéj miatt: $E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2 \Rightarrow E_1^2 - E_2^2 = m_1^2 - m_2^2$ (2)'

$E_1 + E_2 = M$ (1)

$$\Rightarrow E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} \longrightarrow E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}$$

2) két $m_1, m_2$ tömegű részecske ütközése mekkora tömegű részecskét hozhat létre?

HF

Tudjuk $(E_1, \underline{p}_1)$ $(E_2, \underline{p}_2)$-t ált. eset HF

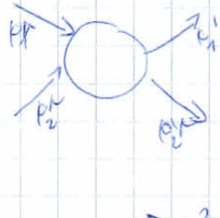
spec eset: a keletkező M tömegét kapjuk meg.

def: TKP rendszerben a 4-es impulzus: $\sum_i p_i^\mu = \left(\sum_i E_i, \underline{0}\right) = (M, 0)$

Látjuk, hogy $\left(\sum_i p_i^\mu\right)^2 = M^2$ skalár, így ekkor már nem kell áttérni másik rendszerbe.

3) Rugalmas ütközés tetszőleges 4-impulzusra
↳ a részecskék típusa és száma nem változik

2 részecske: $m_1, m_2$




4-impulzus megmaradás:

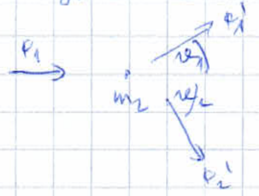
$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu \Rightarrow p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + m_1^2 + 2\left(p_1^\mu p_{2\mu} - p_1^\mu p'_{1\mu} - p_2^\mu p'_{1\mu}\right) = m_2^2$$

$$\Rightarrow m_1^2 + p_1^\mu p_{2\mu} - p_1^\mu p'_{1\mu} - p_2^\mu p'_{1\mu} = 0 \quad (1)$$

$$m_2^2 + p_1^\mu p_{2\mu} - p_2^\mu p'_{2\mu} - p_1^\mu p'_{2\mu} = 0 \quad (2)$$

Lesz egy szögparaméter



ekkor: $p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 m_2$

$p_1^\mu p'_{1\mu} = E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos\vartheta_1$

$p_2^\mu p'_{1\mu} = m_2 E_1'$

megoldva: $$\cos\vartheta_1 = \frac{E_1'(E_1+m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}$$

$$\cos\vartheta_2 = \frac{(E_1+m_2)(E_2'-m_1)}{p_1 p_2'}$$

be kell helyettesíteni, ahol $p_1=\sqrt{E_1^2-m_1^2}$, $p_1'=\sqrt{E_1'^2-m_1^2}$ $p_2'=\sqrt{E_2'^2-m_2^2}$

kifejezve csak E-kkel:

$$E_2' = m_2 \frac{(E_1+m_2)^2 + (E_1^2-m_1^2)\cos^2\vartheta_2}{(E_1+m_1)^2 - (E_1^2-m_1^2)\cos\vartheta_2}$$

ha $m_1=0$, akkor ez a Compton-szórás

ekkor: $$\cos\vartheta_1 = \frac{E_1'(E_1+m_2) - E_1 m_2}{E_1 E_1'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1' = \frac{E_1 m_2}{m_2 + E_1(1-\cos\vartheta_1)} = \frac{E_1}{1+\frac{E_1}{m_2}(1-\cos\vartheta_1)}$$

mennyi az átadott energia?

TKP rendszer:

Állítás: előtte: $(\varepsilon_1, \underline{k})$, $(\varepsilon_2, -\underline{k})$

utána: $(\varepsilon_1', \underline{k}')$, $(\varepsilon_2', -\underline{k}')$

ekkor: $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$

$|\underline{k}| = |\underline{k}'|$

tehát csak elfordul a rendszer $\chi$ szöggel

HF

megoldva az egyenleteket: $E_1' - E_1 = -\frac{k^2}{m_2}(1-\cos\chi) = \frac{m_2(E_1^2-m_1^2)}{2m_2E_1+m_1^2+m_2^2}(1-\cos\chi) = \Delta E$

$\Delta E$ minimális, ha $\chi = 0$

$\Delta E$ maximális, ha $\chi = \pi$

Mi van, ha ~~$m_1 \gg$~~ $m_1 \ll m_2$ de $E_1 \gg m_2$ akkor $\Delta E \approx E_1$

ez nagyon más, mint klasszikusan

# RELATIVITÁS

6. előadás (10.15.)

Impulzus momentum: klasszikusan: $\underline{J} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{p}_i$.

A Noether tétele, hogy a vett rendszernek mi a megfelelője, szerint imbálón megmaradó mennyiséget kapunk a forgatásra

ez a Lorentz trafó spec esete.

Legyen $x^\mu$ egy 4 dimenziós koordináta

infinitezimális 4D-s forgatás: $x^{\mu'} - x^\mu = \delta\Omega^{\mu\nu} x_\nu$

$\delta\Omega^{\mu\nu} (\Lambda^\mu{}_\nu) = ?$ HF

ívhossz invariancia $x'_\mu x^{\mu'} = x_\mu x^\mu$

$$(x^\mu + \delta\Omega^{\mu\nu} x_\nu)(x_\mu + \delta\Omega_{\mu\nu} x^\nu) = x^\mu x_\mu$$

ha $\delta\Omega$ kicsi:

$$x^\mu x_\mu + \delta\Omega^{\mu\nu} x_\mu x_\nu + \delta\Omega_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

$$\Rightarrow \delta\Omega^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0 \quad \forall x_\mu x^\nu\text{-re}$$

$$\Rightarrow \delta\Omega \text{ antiszimmetrikus}: \delta\Omega^{\mu\nu} = -\delta\Omega^{\nu\mu}$$

részecske rendszer $x^\mu_i$, és mindenkit u.a.-val forgatjuk el.

$$\delta S = -\sum_i p_i^\mu \delta x_\mu \Big|_a^b = -\sum_i p_i^\mu x_i^\nu \Big|_a^b \delta\Omega_{\mu\nu}$$

ha a forgatás szimmetria, akkor $\delta S = 0 \quad \forall \delta\Omega$-ra $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_i p_i^\mu x_i^\nu \text{ szimmetrikus}: \sum_i (p_i^\mu x_i^\nu - p_i^\nu x_i^\mu) \Big|_a^b = 0$$

Tehát a $J^{\mu\nu} = \sum_i x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu$ megmaradó mennyiség

ez antiszim

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & J^{01} & J^{02} & J^{03} \\ -J^{01} & 0 & J_z & -J_y \\ -J^{02} & J_z & 0 & J_x \\ -J^{03} & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix}$$

ténylegesen megjelenik a klasszikus impulzus momentum $(J_x, J_y, J_z)$

Mi a maradék 3 komponens? $\underline{I} = (J^{01}, J^{02}, J^{03}) = \sum_i \left(ct\,\underline{p}_i - \underline{r}_i \frac{E_i}{c}\right)$

$\underline{I}$ is egy megmaradó mennyiség. De ez mit jelent?

$$\frac{\underline{I}}{\frac{1}{c}\sum_i E_i} = \frac{\sum_i p_i}{\sum_i E_i} c^2 t - \frac{\sum_i E_i \underline{r}_i}{\sum_i E_i} = \text{konst} \Rightarrow t\underline{V} - \underline{R} = \text{konst}$$

azaz az $\underline{R}$ egyenletes mozgást $\underline{V}$ sebességgel végez. Ez egy olyan energia TKP szerűség.

és $\mu$-re ez pont a TKP. De $E$ az nem egy 4-es vektor 3-as része, egy másik súlyozással $\Rightarrow$ nem inv.

## 0 tömegű részecskék

$(c=1)$ $\quad E = |\underline{p}|$

A foton tömege nulla 0, de tud „tömeget" szállítani

$$\overset{M_1}{O} \overset{}{\underset{E}{\rightsquigarrow}} \quad \Rightarrow \quad \underset{E}{\rightsquigarrow} \overset{M_2}{O} \quad \Rightarrow \quad \underset{E_1 p_1}{\overset{}{\leftarrow}} O \qquad O \underset{E_2 p_2}{\rightarrow}$$

$M_1 = E_1 + E \quad (1) \qquad (M_1')^2 = E_1^2 - p_1^2 \quad (3)$

$0 = p_1 - E \quad (2) \qquad = (M_1 - E)^2 - E^2 = M_1^2 - 2M_1E < M_1^2$

másik oldal u.i.: $(M_2')^2 = M_2^2 + 2M_2E > M_2^2$ (HF)

Honnan tudjuk a foton energiáját? Planck hipotézis: $E = h\nu$

értelmes-e ez a kifejezés a kovariancia szempontjából?

meg kell nézni egy transzformációra a kifejezést (átfogalmazva: a tömeg skalár-e?)

a foton $x$ mentén mozog, $K \xrightarrow{} K'$ mentén $x$ mentén $\quad$ ált HF $\quad$ (HF)

$K$: $p^\mu = (E, E, 0, 0)$

$K'$: $p^{\mu'} = (E', E', 0, 0)$ $\qquad E = E' \operatorname{ch}\chi + E' \operatorname{sh}\chi = E' e^\chi$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ az EM hullám frekvenciája. Mozogjon a hullám is $x$ irányba!

a hullámegyenlet: $\Box\phi = 0 \rightarrow$ síkhullám megoldás: $\phi \sim e^{ik_\mu x^\mu} = e^{i(\omega t - \underline{k}\underline{x})}$

tehát $k^\mu = (\omega, \underline{k})$ és $k_\mu k^\mu = 0 \Rightarrow \omega^2 - k^2 = 0$

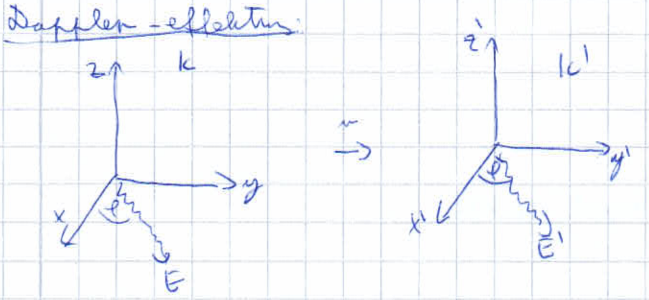
a hullámszám vektor: $k^\mu = (\omega, k_x, 0, 0) = (\omega, \omega, 0, 0)$

tehát $\omega$ is úgy transzformálódik $k^{\mu'} = (\omega', \omega', 0, 0)$

$\omega = \omega' \operatorname{ch}\chi + \omega' \operatorname{sh}\chi = \omega' e^\chi \Rightarrow \nu = \nu' e^\chi$

$\Rightarrow \frac{E}{\nu}$ : invariáns $\rightarrow$ Planck

## Doppler-effektus:




$v$ x irányú legyen!

$K$: $p^\mu = (E, p\cos\varphi, p\sin\varphi, 0) = (E, E\cos\varphi, E\sin\varphi, 0)$

$K'$: $p'^\mu = (E', E'\cos\varphi', E'\sin\varphi', 0)$

Lorentz:

$$\left.\begin{aligned} E &= E'\,\mathrm{ch}\,\chi + E'\cos\varphi'\,\mathrm{sh}\,\chi \\ E\cos\varphi &= E'\,\mathrm{sh}\,\chi + E'\cos\varphi'\,\mathrm{ch}\,\chi \\ E\sin\varphi &= E'\sin\varphi' \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = E'\,\mathrm{ch}\,\chi\,(1 + \cos\varphi'\,\mathrm{th}\,\chi) = \frac{E'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a klasszikus képletben nincsen a nevező.

a szögre: $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{th}\,\chi + \cos\varphi'}{1 + \mathrm{th}\,\chi\cos\varphi'} = \dfrac{\frac{v}{c} + \cos\varphi'}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'}$

## Eloszlásfv. trafója

részecskenyalábok impulzuseloszlása: $f(\mathbf{p})\,d^3p$ — a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$ közé eső részecskék száma.

Lorentz-trafó hatására mi lesz $f(\mathbf{p})$-vel?

$d^3p = dp_x\,dp_y\,dp_z$

hogy $p \to p'$ esetén $\int d^4p = \int d^4p'\,|\det\Lambda| = \int d^4p' \Rightarrow d^4p = d^4p'$

integrálni csak azokra az impulzusokra, amelyekre $p^0 > 0$ és $p^2 = m^2$

$\int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\Theta(p_0)$ is továbbra is invariáns (egy hiperbola mentén)

$$2d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\Theta(p_0) = 2d^4p\,\delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)\,\Theta(p_0) =$$

$$= 2d^4p\,\delta(f(p_0))\,\Theta(p_0)$$ mivel $\delta(f(x)) = \sum_i \dfrac{\delta(x - x_{0i})}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_{0i}}}$ ahol $f(x_0) = 0$

jelenleg a gyökök: $p_0^{1,2} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm\varepsilon$

a derivált: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial p_0}\right|_{p_0^{1,2}} = |2p_0|_{p_0^{1,2}} = 2\varepsilon$

Folytatva a kifejtést:

$$2\,d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p_0)=2\,dp^0\,d^3p\left(\underbrace{\frac{\delta(p_0+E)}{2E}}_{\text{ez kiesik a }\Theta\text{ miatt}}+\frac{\delta(p_0-E)}{2E}\right)\Theta(p_0)=2\,\overbrace{dp^0\,d^3p\,\frac{\delta(p_0-E)}{2E}}^{1}=$$

$$=\frac{d^3p}{E}\quad \text{ez is invariáns}$$

tehát $\dfrac{d^3p}{E}=\dfrac{d^3p'}{E'}$

Mivel a részecskeszám is invariáns: $f'(p')=f(p)\dfrac{E}{E'}$.

A fázistér eloszlás:

$dN=f(x,p)\underbrace{dV\,d^3p}_{d\tau}$ ... : $d\tau$ hogyan transzformálódik

Két koordinátarendszer:

$K$-ban $p$ és $p+dp$ közötti részecskék sebessége $v$

$K'$-ben: $v'$

az együttmozgó $K_0$ koordinátarendszer.

Lorentz kontrakció miatt: $dV=dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$dV'=dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$

energia $K$: $E=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $K'$: $E'=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$

Emiatt $dV E=dV'E'$.

Az előbbi: $\dfrac{d^3p}{E}=\dfrac{d^3p'}{E'}\implies d\tau=d\tau'$ Tehát a fázistérfogat invariáns:

$f(x,p)=f'(x',p')$

<u>Elektrodinamika</u> $c=1$.

Írjuk le egy részecske mozgását külső erőtérben!

$S=S_r+S_{kH}+S_e$ (az utolsót hagyjuk el, ill. majd később)

$S_r=-m\int_a^b ds$

1) skalármező: $\phi(x)$

$S_{kH}=\lambda\int_a^b\phi\,ds=\dots$ HF

ha $\phi=\phi_0$ konst, akkor csak átnagyítja ad konstansát.

HF

2) 4-es tenzor mező $A_\mu(x)$

$$S_{int} \doteq -Q \int_a^b A_\mu \, dx^\mu$$

$$S = -m \int_a^b ds - Q \int_a^b A_\mu \, dx^\mu$$

$A^\mu = (\phi, \underline{A})$

Q: részecske csatolási erőssége (töltés)

$=$

megnézzük majd 3-as formalizmusban, és szép lesz majd ...
de 4-esben is megnézzük.

# RELATIVITÁS

7. előadás (11.05.)

Vektortérben mozgó részecske esetén:

$$S = -m\int ds - Q\int A_\mu dx^\mu$$

ahol $A^\mu = (\phi, \underline{A})$ $\qquad A_\mu = (\phi, -\underline{A})$

Egy konkrét koordinátarendszerben ki kell találni mi a Lagrange. Ehhez $dt$ függvényévé kell alakítani $S$-t.

$$S = -m\int\sqrt{1-v^2}\,dt - \underbrace{\quad}$$ ← mi jön ide?

$$A_\mu dx^\mu = A_0 dx^0 - A_i dx^i = \phi\, dt - A_i v^i dt$$

Tehát

$$S = -m\int\sqrt{1-v^2}\,dt + Q\int \underline{A}\,\underline{v}\,dt - Q\int\phi\, dt = \int\left(-m\sqrt{1-v^2} + Q\underline{A}\,\underline{v} - Q\phi\right)dt$$

$$\Rightarrow L = -m\sqrt{1-v^2} + Q\underline{A}\,\underline{v} - Q\phi$$ innen simán klasszikus mechanika

ált. impulzus: $$\underline{P} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-v^2}} + Q\underline{A} = \underline{p}_{mozg} + Q\underline{A}$$

Hamilton-fv.: $$H = \underline{v}\frac{\partial L}{\partial \underline{v}} - L = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + Q\phi = \sqrt{m^2 + (\underline{P} - Q\underline{A})^2} + Q\phi$$

Mozgásegyenletek (EL-egyenletek):

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{dp_{i\,mozg}}{dt} + Q\frac{dA_i}{dt} = \frac{dp_{mi}}{dt} + Q\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}v_j\right) =$$

$$\frac{dp_{mi}}{dt} = Q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}v_j - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}v_j\right) = Q\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + Q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)v_j =$$

$$= Q\left(\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) + Q\left(\underline{v}\times \mathrm{rot}\,\underline{A}\right) =: Q(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B})$$

jéé, ez az elektrodinamika.

Ugyanez kovariáns jelöléssel:

$$S = \int_a^b (-m\,ds - QA_\mu dx^\mu)$$

variálunk: $$\delta S = \delta\int_a^b(-m\,ds - QA_\mu dx^\mu) = -\int_a^b(m\,\delta ds + Q\delta A_\mu dx^\mu + QA_\mu \delta dx^\mu) =$$

$$= -\int_a^b(m u_\mu \delta dx^\mu + QA_\mu\delta dx^\mu + Q\delta A_\mu dx^\mu) =$$

$$= (-mu_\mu\delta x^\mu - QA_\mu\delta x^\mu)\Big|_a^b + \int_a^b(m\,du_\mu\delta x^\mu + Q\,dA_\mu\delta x^\mu - Q\delta A_\mu dx^\mu) = *$$

mivel $du_\mu = a_\mu ds$, $\quad dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}u^\nu ds$, $\quad \delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}u^\nu\delta s$

$$* = \text{konst} + \int_a^b \left( m a_\mu + Q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu - Q \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\nu \right) \delta x^\mu \, ds$$

Tehát: $\delta S = (-m u_\mu - Q A_\mu)\delta x^\mu \Big|_a^b + \int_a^b \left[ m a_\mu - Q(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) u^\nu \right] \delta x^\mu \, ds$

diszkusszió: 1)

Ha a határon nem változna $\Rightarrow \delta S = 0$:

$$\int_a^b \left[ m a_\mu - Q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right] \delta x^\mu \, ds = 0 \qquad \forall \delta x^\mu\text{-re}, a\text{-ra}, b\text{-re}.$$

$\Rightarrow \underline{m a_\mu = Q F_{\mu\nu} u^\nu}$ ← ez a mozgásegyenlet.

ahol $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (def. sz. antiszimmetrikus

Mivel $A_\mu = (\phi, -\underline{A})$

ezért F elemei: $F_{00} = F_{ii} = 0$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 (\underline{A})_i - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} A_i - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} =: E_i$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\frac{\partial (\underline{A})_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (\underline{A})_i}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} B_k$$

ezért

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát $\underline{E}$ és $\underline{B}$ nem 4-vektorok 3-as részei, hanem egy 4-es tenzor különböző komponensei.

$\Rightarrow$ ha csak 3D-s forgatásokat csinálunk, akkor $\underline{E}$ vektorként, $\underline{B}$ pedig axiálvektorként viselkednek.

2)

a határon változhat, de a mozgásegyenletek teljesülnek,

$$p_\mu = -\partial_\mu S = m u_\mu + Q A_\mu = p_{\text{mozgási}} + Q A_\mu$$

Térerősségek trafója:

$$K \xrightarrow[v]{} K'$$

$$\underline{E}, \underline{B} \qquad \underline{E}', \underline{B}'$$

Mivel $F_{\mu\nu}$ kétindexes tenzor, $F_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F'_{\rho\sigma}$

boostnál: $\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} ch\chi & sh\chi & & \\ sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$$(\tilde{\Lambda}^T)^\sigma{}_\nu = \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho F'_{\rho\sigma} (\tilde{\Lambda}^T)^\sigma{}_\nu =$$

$$= \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ -E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ -E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\chi & -sh\chi & 0 & \\ -sh\chi & ch\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E'_x & ch\chi E'_y + sh\chi B'_z & ch\chi E'_z - sh\chi B'_y \\ & 0 & -sh\chi E'_y - ch\chi B'_z & -sh\chi E'_z + ch\chi B'_y \\ & & 0 & -B'_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ott antiszimm

tehát: $E_x = E'_x \qquad E_y = E'_y\, ch\chi + B'_z\, sh\chi \qquad E_z = E'_z\, ch\chi - B_y\, sh\chi$

$B_x = B'_x \qquad B_y = B'_y\, ch\chi - E'_z\, sh\chi \qquad B_z = B'_z\, ch\chi + E'_y\, sh\chi$

térerősségek invariánsai:

milyen skalárt tudunk csinálni E-ből és B-ből?

lényeges F-ek nyelvén.

HF 2 adódó mennyiség: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -8 \underline{E}\, \underline{B}$$

Következmények:
- ha $\underline{E} \perp \underline{B}$ egy $K$-ban akkor $\forall K'$-ban $\underline{E}' \perp B'$
- ha $|\underline{E}| = |\underline{B}|$ egy $K$-ban akkor $\forall K'$-ban $|\underline{E}'| = |B'|$

Pl.: fény vákuumban

Állítás: ha $\underline{E}\underline{B} = 0$, akkor $\exists K$ koordinátarendszer, ahol $E=0$ vagy $B=0$
(egy konkrétan választjuk, az $B^2-E^2$ előjelétől függ)

<u>Maxwell-egyenletek</u>

Mivel a Lorentz-trafót alapból erre írták fel, ezt várjuk, hogy nem fognak változni.

1) $\text{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 2) $\text{div}\,\underline{B} = 0$

3) $\text{div}\,E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ 4) $\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ + tudjuk, hogy $\mu_0\varepsilon_0 = 1$

ha $B := \text{rot}\,A$ akkor 2) automatikusan teljesül

ha $E = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$ akkor 1) automatikusan teljesül.

3+4) $\Rightarrow$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\underline{j} = 0$ kontinuitás

Ez egy konzisztencia feltétel, azaz, ha olyan $\rho$-t és $\underline{j}$-t adok meg, ami ezt nem tudja, akkor nincs megoldása az egyenletnek.

3): $\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \Rightarrow \sum_i \partial_i F_{0i} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ mivel $F_{00} = 0$, ezért $\Rightarrow$ $\partial^\nu F_{0\nu} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

4) $j^\mu = (\rho, \underline{j})$ $\Rightarrow$ $\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu}$ HF

# RELATIVITÁS

## 8. előadás (11.12.)

forrásos egyenlet:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu \qquad \text{ahol } j^\nu = (\rho, \underline{j})$$

forrásmentes egyenletek

$$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \Rightarrow \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow \partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{32} = 0$$

$$\partial_1 F_{03} + \partial_3 F_{10} + \partial_0 F_{31} = 0$$

$$\partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{21} = 0$$

+4 másik egyenlet, ha az indexeket így szerelgetjük.

végül: $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$ ahol $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

kompaktabb alak F duális tenzorával:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

(E és B -k helyet cserélve benne)

Ezzel: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

Tehát a Maxwell egyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\varepsilon_0} j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

A forrásos Maxwell-egyenletből:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} \partial_\nu j^\nu$$

ez az oldal 0 a szim-antiszim miatt

$\Rightarrow \partial_\nu j^\nu = 0$. kontinuitási egyenlet.

Maxwell-egyenletek megoldása:

TFH $\exists A_\mu$ vektormező, melyre $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta(\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \quad \checkmark$$

a forrásmentes egyenletek ilyenkor automatikusan teljesülnek, a forrásosat kell megoldani!

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{\varepsilon} j_\nu$$

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu = \frac{1}{\varepsilon} j_\nu$$

A második tag miatt ez csatolt diffegyenlet.

DE VÉH $A_\nu$ nem egyértelmű, mert $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f(x)$ trafó esetén (ahol f skalármező)

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu f = F_{\mu\nu}$$

ez a tulajdonság a mértékszabadság, a trafó pedig a mérték-trafó.

HF

HF: A vektormezőben mozgó részecske egyenletei változnak-e mértéktrafó hatására?

Használjuk ki ezt a szabadságot arra, hogy eltüntessük a csatolási tagot!

Ha tudunk mindig olyan $A$-t találni, amire $\partial_\mu A^\mu = 0$, akkor jók vagyunk.

Kérdés: Ha $A_\mu$ adott, akkor létezik-e olyan $f$, amire $\partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu f) = 0$?

$\Box f = -\partial_\mu A^\mu$ ← ezt kell kielégíteni, de ennek mindig van megoldása - Green-fv módszerével.

⇒ Válasz: létezik.

$\partial_\mu A^\mu = 0$ választás mindig lehetséges (Lorenz-mérték)

⇒ A Maxwell-egyenletek Lorenz-mértékben:

$$\Box A_\mu = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\mu \longrightarrow \Box \phi = \frac{1}{\varepsilon} \rho$$

$$\searrow \Box \underline{A} = \frac{1}{\varepsilon} \underline{j}$$

ennek az egyenletnek is mindig van megoldása a Green-fv-vel.

## Mozgó töltés EM-tere.

$P$ eseményünk:

Q töltés a $K'$ origójában van, a $K$-beli teret akarjuk tudni.

$K \longrightarrow K'$

| | |
|---|---|
| $t$ | $t' = t \,\mathrm{ch}\chi - x \,\mathrm{sh}\chi = t \,\mathrm{ch}\chi$ |
| $x=0$ | $x' = x \,\mathrm{ch}\chi - t \,\mathrm{sh}\chi = -t \,\mathrm{sh}\chi$ |
| $y=b$ | $y' = b$ |
| $z=0$ | $z' = 0$ |

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = t^2 \mathrm{sh}^2\chi + b^2$$

$$\underline{B}' = \underline{0}, \quad |\underline{E}'| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{t^2 \mathrm{sh}^2\chi + b^2} \qquad \underline{E}' \parallel \underline{r}'$$

$$\Rightarrow E'_x = \frac{x'}{r'} |\underline{E}'| = -\frac{t \,\mathrm{sh}\chi}{\sqrt{t^2 \mathrm{sh}^2\chi + b^2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{t^2 \mathrm{sh}^2\chi + b^2} = -\frac{Q t \,\mathrm{sh}\chi}{4\pi\varepsilon_0 (t^2 \mathrm{sh}^2\chi + b^2)^{3/2}}$$

$$E'_y = \frac{Qb}{4\pi\varepsilon_0 (t^2 \mathrm{sh}^2\chi + b^2)^{3/2}}$$

$$E'_z = 0$$

Visszaírva $K$-ba: $E_x = E'_x = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{t \,\mathrm{sh}\chi}{(b^2 + t^2 \mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{t \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}}{(b^2 + t^2 v^2/(1-v^2))^{3/2}}$

$$E_y = E'_y \,\mathrm{ch}\chi + B'_z \,\mathrm{sh}\chi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b \,\mathrm{ch}\chi}{(b^2 + t^2 \mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b/\sqrt{1-v^2}}{(b^2 + t^2 v^2/(1-v^2))^{3/2}}$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = B'_x = 0$$

$$B_y = B'_y \,\mathrm{ch}\chi - E'_z \,\mathrm{sh}\chi = 0$$

$$B_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b \,\mathrm{sh}\chi}{(b^2 + t^2 \mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}}$$

$v \ll 1$ esetben: $\operatorname{sh}\chi \approx v$

$$B_z \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{bv}{(b^2+t^2v^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{bv}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|v \times r|}{r^3}$$

Tehát: $\underline{B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{v} \times \underline{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \frac{\underline{v} \times \underline{r}}{r^3}$

Érdekesség: $\frac{E_x}{E_y} = -\frac{t}{b} \operatorname{th}\chi \approx -\frac{tv}{b} = \frac{r_x}{r_y} \Rightarrow \underline{E} \parallel \underline{r}$-rel.

Gondolhatnánk, hogy nyilvánvaló, de nem az.

HF HF: $E(r, \varphi)$

HF HF: másik megoldás

$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ -t keressük!

2 releváns mennyiségtől függ

$u^\mu$: töltés sebessége; $x^\mu = x^\mu_P - x^\mu_Q$

A tenzoralakban: $F^{\mu\nu} = (x^\mu u^\nu - x^\nu u^\mu)\, \underset{\text{skalár}}{f}(x_\mu x^\mu, x^\mu u_\mu)$

$f$-t az együtthatók valahogy egyszerűen tűntetni.

## Klasszikus térelmélet

végtelen sok szabadsági fok

$x(t) \to \phi_k(t)$ ahol $\phi_k$ mező.

$S = \int L\, dt \to L = \int \mathcal{L}(\underline{x})\, d^3x$ ahol $\mathcal{L}(\underline{x})$ Lagrange-sűrűség az $\underline{x}$-beli mezőktől és deriváltjaitól függ

lokalitás: nincs olyan, hogy $\phi(x)\phi(y)$, mert a távoli mezők egymással nem hatnak kölcsön közvetlen

$\Rightarrow$ $S = \int \mathcal{L}(\phi_k(x), \partial_\mu\phi_k(x), \partial_\mu\partial_\nu\phi_k(x), x)\, d^4x$. Zárt rendszer esetén ez nem $\Rightarrow$ nem függhet $x$-től.

tapasztalat: a világot jól leírja, ha csak 1. deriváltak vannak:
$\mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu\phi_k)$

Lorentz-invariancia $\to$ $S$ skalár $\to$ $\mathcal{L}$ skalár

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu\phi_k)\, d^4x$$

$S$ funkcionálja, de $\mathcal{L}$ már csak fv-e $\phi$-nek és $\partial_\mu\phi$-nek

Kérdés: mik a mozgásegyenletek?
A hatás variációját keressük: $\delta S = 0$

# RELATIVITÁS

9. előadás (11. 19.)

## Klasszikus térelmélet

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)\, d^4x$$

$\delta S = 0$ úgy, hogy időben a határokon $\delta\phi_k = 0$

feltesszük, hogy $\phi_k$ és $\partial_\mu \phi_k \to 0$ a térbeli végtelenben

$$\delta S = \int \left( \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta(\partial_\mu \phi_k) \right) d^4x = \int d^4x \left( \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta \phi_k \right) + \int d^4x \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_k} \partial_\mu \delta\phi_k =$$

$$= \int d^4x \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_k \int d^4x\, \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k \right)}_{\oint df_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k = 0} + \int d^4x \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k \right) =$$

$\oint df_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k = 0$ mert $\phi$ és $\partial\phi$ a határokon 0.

$$\Rightarrow \delta S = \int \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \right) \delta\phi_k \overset{!}{=} 0 \quad \forall\, \delta\phi_k\text{-ra}.$$

$\Rightarrow$ EL egyenlet mezőkre:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \qquad \forall k\text{-ra}}$$

$\mathcal{L}$ nem egyértelmű, csak egy 4-es divergencia erejéig:

$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)$ ahol $f^\mu$ a határokon 0, akkor $S' = S$ és a mozgásegyenletek nem változnak

HF

## Energiaimpulzus tenzor szimmetriákból

Noether-tétel: minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó mennyiség.

szimmetria: $\phi_k \to \phi_k + \delta\phi_k$ úgy, hogy $S$ nem változik

$\Rightarrow$ a hatás csak egy 4-es divvel változhat:

$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu$ (adott esetben $J$ is lehet 0.)

$$\delta\mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \partial_\mu(\delta\phi_k) = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k + \sum_k \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k \right) - \sum_k \delta\phi_k \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} =$$

$$= \sum_k \delta\phi_k \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \right)}_{=0} + \sum_k \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\phi_k \right)$$

$=0$ a mozgásegyenletek miatt.

Ha $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$, akkor

$$\partial_\mu\Big(\underbrace{\sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)}\delta\phi_k - \mathcal{J}^\mu}_{j^\mu}\Big)=0$$

$j^\mu \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$ tehát ez megmarad.

1. példa:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$$

ennek van egy szimmetriája: fázistolás: $\phi \to \phi e^{i\alpha}$, $\phi^* \to \phi\, e^{-i\alpha}$ ha $\alpha = $ konst.

ha $\alpha \ll 1$ írd $\alpha = \delta\alpha$

$\delta\phi = i\phi\delta\alpha$, $\delta\phi^* = -i\phi\delta\alpha$

Mivel $\mathcal{L}$ invariáns $\mathcal{J}=0 \Rightarrow j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta\phi^* =$

$$= i\partial^\mu\phi^*\phi\,\delta\alpha - i\,\partial^\mu\phi\,\phi^*\,\delta\alpha = \delta\alpha\left(i\partial^\mu\phi^*\phi - \partial^\mu\phi\,\phi^*\right)$$

2. példa

téridő eltolás: $x^\nu \to x^\nu - \delta a^\nu$

ha $\phi$ skalártér: $\phi(x^\nu) \to \phi(x^\nu + \delta a^\nu) = \phi(x) + \delta a_\nu \partial^\nu\phi + \mathcal{O}(|\delta a|^2)$

$\delta\phi = \delta a_\nu \partial^\nu\phi$

$\mathcal{L}$ maga is skalár: $\delta\mathcal{L} = \delta a_\nu \partial^\nu \mathcal{L} = \partial_\mu(\delta a_\nu \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}) = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$

$$j^\mu = \sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)}\delta a_\nu \partial^\nu\phi_k - \delta a_\nu \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = \delta a_\nu\Big(\underbrace{\sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)}\partial^\nu\phi_k - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}}_{T^{\mu\nu}}\Big)$$

mivel $\partial_\mu j^\mu = 0$ $\forall a_\nu$-re, ezért

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

$T^{\mu\nu}$: energia-impulzus tenzor

Más módon bevezetve:

klasszikusan a Hamilton: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ és $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$

akkor hasonló a térelméletben $\sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)}\partial^\mu\phi_k - \mathcal{L}$ ez nem lehet E sűrűség, hisz skalár-szerű (még csak az id.

tenzort kell írni belőle: $T^{\mu\nu} = \sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)}\partial^\nu\phi_k - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}$

HF

HF: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

Tehát:

$$T^{\mu\nu} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \partial^\nu \phi_k - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}$$ Energia impulzus tenzor.

megmaradási törvények: $$0 = \int_{x^0 \text{ fix}} \partial_\mu T^{\mu\nu} d^3x = \int_{x^0 \text{ fix}} \partial_0 T^{0\nu} d^3x + \int_{x^0 \text{ fix}} \partial_i T^{i\nu} d^3x =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x^0 \text{ fix}} T^{0\nu} d^3x\right) + \oint \underbrace{df_i\, T^{i\nu}}_{0 \text{ határán miatt}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x^0 \text{ fix}} T^{0\nu} d^3x\right) = 0 \Rightarrow \int_{x^0 \text{ fix}} T^{0\nu} dx \quad \text{fix}$$

$E = \int T^{00} d^3x$ energia $\Rightarrow$ $T^{00}$ energia sűrűség

$p_i = \int T^{0i} d^3x$ impulzus $\Rightarrow$ $T^{0i}$ impulzus sűrűség

$$0 = \int_{V \text{ fix}} \partial_\mu T^{\mu\nu} d^3x = \frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{0\nu} d^3x + \int_{\partial V} df_i T^{i\nu} d^3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{0\nu} d^3x = -\int_{\partial V} df_i T^{i\nu} d^3x$$

$\nu = 0$ esetén ez az E áram sűrűség
$\nu = j$ esetén az $p_j$ áramsűrűség

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} E \text{ sűrűség} & \text{imp sűrűség} \\ \hline E \text{ áram sűrűség} & p \text{ áram sűrűség} \end{array}\right)$$

A $T^{\mu\nu}$ csak annyira meghatározott, hogy a $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ teljesüljön.

Tehát $T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Lambda^{\rho\mu\nu}$ alak, $\Lambda$ tetszőleges $\Lambda^{\rho\mu\nu} = -\Lambda^{\mu\rho\nu}$ alakú tenzor

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T'^{\mu\nu}$$

Ez a szabadság lehetővé teszi $T^{\mu\nu}$ szimmetrizálását.

<u>Impulzus momentum:</u>

klasszikus pontrendszerre: $J^{\mu\nu} = \sum_i x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu$

folytonos esetre: $\sum_i \to \int d^3x$
$p_i^\nu \to T^{0\nu}$

tehát: $$J^{\mu\nu} = \int \underbrace{(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu})}_{\text{impulzus momentum sűrűség}} d^3x$$

Legyen $M^{\alpha\mu\nu} := x^\mu T^{\alpha\nu} - x^\nu T^{\alpha\mu}$ !

Ekkor $M^{\alpha\mu\nu}$ az impulzus momentum sűrűség.

Az impulzus momentum megmaradás: $\partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} = 0$

$$\partial_\alpha \left( x^\mu T^{\alpha\nu} - x^\nu T^{\alpha\mu} \right) = 0$$

$$\delta_\alpha^\mu T^{\alpha\nu} + x^\mu \underbrace{\partial_\alpha T^{\alpha\nu}}_{0} - \delta_\alpha^\nu T^{\alpha\mu} - x^\nu \underbrace{\partial_\alpha T^{\alpha\mu}}_{0} = 0$$

$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0 \Rightarrow$ T-nek szimmetrikusnak kell lennie az imp. megmaradás miatt

Tehát egy szim. $T^{\mu\nu}$ olyan anyagi rendszert ír le, melyre teljesül az $\varepsilon$, $\underline{p}$, $\underline{J}$ megmaradás.

<u>EM tér leírása</u>

Mit legyen a fundamentális mező? $F_{\mu\nu}$ vagy $A_\mu$?

Az derül ki, hogy $A_\mu$ a célszerű, mert $F_{\mu\nu}$ antiszim. és akkor plusz kényszerek kellenének.

Keressük $\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$-t, ami 1. skalár
2. mérték invariáns (legalább a hatás)

Milyen kombinációk jöhetnek szóba?
a két invariáns kombináció: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ill. $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$

HF

HF: belátni, hogy $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ egy teljes div, ezért mindegy, hogy hozzáírjuk-e.

$\mathcal{L} = a F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ki tudja-e adni a Maxwell-egyenletet?

Nem, hiszen nem szerepel benne $j^\nu$. $\Rightarrow$ A forrásokat még be kell vinni.

+ A töltések és a mező KH-ja.

Emlékszünk, hogy $S_{int} = -q\int A_\mu dx^\mu$

Nincs külön mező-töltés és töltés-mező KH, a hatás u.a.

kovariáns általánosítás: $S = -\int A_\mu j^\mu d^4x$

Tipp: $\mathcal{L} = a F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$    de ez már nem mérték inv., hiszen csak A-t tartalmazza.

Kérdés mi történik: $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$

$$\delta\mathcal{L} = -(A_\mu + \partial_\mu f) j^\mu + A_\mu j^\mu = -\partial_\mu f\, j^\mu = -\partial_\mu (f j^\mu) + f\, \partial_\mu j^\mu$$

Ha van töltésmegmaradás, akkor $\partial_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{L} = -\partial_\mu (f j^\mu) \Rightarrow \delta S = 0$.

HF

HF: $a = \frac{\varepsilon_0}{4}$

RELATIVITÁS

10. előadás (11.26.)

$$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon_0}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

Ennek a energia-impulzus tenzora

1) töltések nélkül: $j^\mu = 0$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} =$$

$$= -\varepsilon_0 F^{\mu\sigma}\partial^\nu A_\sigma + \frac{\varepsilon_0}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$T^{00} = HF = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2+B^2) - \varepsilon_0 \underline{E}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2+B^2) + \varepsilon_0 \underline{E}\nabla\phi =$$ HF

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2+B^2) + \underline{\nabla}(\varepsilon_0 \underline{E}\phi)$$

$$T^{0i} = \varepsilon_0(\underline{E}\times\underline{B})_i + \varepsilon_0 \underline{\nabla}(A_i \underline{E})$$

Együtt kaptunk nem a amit vártunk, ettől egy teljes div-vel eltérnek

Mivel ezekre ezek az integrálásnál eltűnnek:

$$E = \int T^{00} d^3x = \int \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2+B^2)\,d^3x$$

$$P_i = \int T^{0i} d^3x = \int \varepsilon(\underline{E}\times\underline{B})_i\, d^3x$$

Ennek az oka, hogy az energia-impulzus tenzor nem szimmetrikus képlés, de szimmetrizálható.

A szimmetrikus része:

$$T^{\mu\nu} = \underbrace{-\varepsilon_0 F^{\mu\sigma}F^\nu{}_\sigma + \frac{\varepsilon_0}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}_{\text{ez szimmetrikus}} - \underbrace{\varepsilon_0 F^{\mu\sigma}\partial_\sigma A^\nu}_{*}$$

$$* = -\varepsilon_0 F^{\mu\sigma}\partial_\sigma A^\nu = \varepsilon_0 F^{\sigma\mu}\partial_\sigma A^\nu = \varepsilon_0\partial_\sigma(F^{\sigma\mu}A^\nu) - \varepsilon_0(\partial_\sigma F^{\sigma\mu})A^\nu =$$

$$= \varepsilon_0 \partial_\sigma \Lambda^{\sigma\mu\nu}$$ ahol $\Lambda^{\sigma\mu\nu} = F^{\sigma\mu}A^\nu$

$\sigma \leftrightarrow \mu$ antiszim.

így tehát a szimmetrikus energia impulzus tenzor

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \varepsilon_0\partial_\sigma\Lambda^{\sigma\mu\nu} = \varepsilon_0 F^{\mu\sigma}F_\sigma{}^\nu + \frac{\varepsilon_0}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \Rightarrow \partial_\mu\Theta^{\mu\nu}$$

$\Theta$ már csak a térerősségektől függ

A komponensek: $\Theta^{00} = \frac{\varepsilon}{2}(E^2+B^2) = u$ energiasűrűség

$\Theta^{0i} = \Theta^{i0} = \varepsilon_0(\underline{E}\times\underline{B})_i = g_i$ Poynting-vektor

$\Theta^{ij} = -\varepsilon_0\left[E^iE^j + B^iB^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}(E^2+B^2)\right]$

megmaradási törvények:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$$

$\nu = 0$ $\quad \partial_\mu \Theta^{\mu 0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{s} = 0$ $\quad$ E megmaradás

$\nu = i$ $\quad \partial_\mu \Theta^{\mu i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j} = 0$ $\quad$ $P_i$ megmaradás.

2)

Mi van, ha vannak töltések

Nem számoljuk ki újra $\Theta$-t, azt mondjuk, hogy az előbbi eredményünk a mező E-imp tenzor, de annak nem van levezetés jó a megmaradás:

Állítás: $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -F^{\nu\sigma} j_\sigma$

Biz.: $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \varepsilon_0 \left[\partial_\mu \left(F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu\right) + \frac{1}{4}\partial^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right] = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{\varepsilon_0} j^\sigma F_\sigma{}^\nu + F^{\mu\sigma} \partial_\mu F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta}\right] \Rightarrow$

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma = \varepsilon_0 \underbrace{\left[F^{\mu\sigma} \partial_\mu F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta}\right]}_{\text{Erről kéne belátni, hogy 0.}}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\left(F_{\mu\sigma}\partial^\mu F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma}\partial^\mu F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma}\partial^\nu F^{\mu\sigma}\right) = \frac{\varepsilon_0}{2} F_{\mu\sigma}\left(\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\nu F^{\mu\sigma}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} F_{\mu\sigma}\left(\partial^\mu F^{\sigma\nu} - \partial^\sigma F^{\nu\mu}\right) = 0 \text{ mert } \mu\sigma \text{ cserére } F \text{ antiszim, } [\,] \text{ pedig szim.}$$

$\square$

Tehát $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma = 0$. Mi tehát a második tag?

(+F) $\quad F^{\nu\sigma} j_\sigma = \big(\underbrace{\underline{j}\,\underline{E}}_{\text{Hőfejlődés}},\ \underbrace{\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}}_{\text{erősűrűség } f_i}\big)$

$\underline{F} = \int \underline{f}\, d^3x = \frac{dP_{\text{tölt}}}{dt}$ $\quad$ Joule-hő sűrűség

A megmaradási törvények:

$$\int(\partial_\mu \Theta^{\mu i} + f_i)\, d^3x = \frac{d}{dt}\left(\int \Theta^{0i} d^3x\right) + \overbrace{\int \partial_j \Theta^{ij} d^3x}^{0} + F^i \Longrightarrow$$

$x^0$ fix

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(P^i_{\text{mező}} + P^i_{\text{töltések}}\right) = 0$$

ugyanígy a 0. komponens: $\frac{d}{dt}\left(P^0_{\text{mező}} + P^0_{\text{töltések}}\right) = 0$

Tehát a teljes négyes impulzus marad meg.

## Relativisztikus kvantummechanika (ilyen amúgy nincs)

Hogyan foglaljuk össze a kvantummechanikát és a specrelt?

Próbáljuk meg felírni a Schr. egyenletet kovariáns alakban.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

Ez nem kovariáns, hiszen időben 1., térben 2. deriválti.

DE ez a egyenlet tulajdonképpen az az $E = \frac{p^2}{2m} + V$ relációt fejezi ki, amiről tudjuk, hogy tényleg nem jó.

Ha a analógiát követjük $\hat{E} \sim i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ és $\hat{p} \sim -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

relativisztikusan tudjuk, hogy $E^2 = p^2 + m^2$ ha $V=0$

$\Rightarrow E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$. Ezt beírhatjuk egy diffegy formájában:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2\nabla^2\psi + m^2\psi \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\Box + \frac{m^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0$$

Ez már egy kovariáns egyenlet

Klein – Gordon – egyenlet.

Tehát a négyes impulzus kvantálása: $p^\mu \to \hat{p}^\mu = i\hbar\partial^\mu = (\underbrace{i\hbar\partial_t}_{\hat{E}}, \underbrace{-i\hbar\nabla}_{\hat{p}})$

Mik a megoldások:

síkhullám: $\psi(\underline{x}, t) = A\, e^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu}$

beírva: $\left(\frac{1}{\hbar^2}p_\mu p^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$. Tényleg megoldás, ha $p_\mu p^\mu = m^2$.

Általános megoldás a síkhullám 1 db feltétellel $\Rightarrow$

$p_\mu$-nek 3 db komponense független: $p_0^2 - p^2 = m^2 \Rightarrow \underset{E}{p_0} = \pm\sqrt{p^2+m^2}$

Általános $p$-hez létezik 2 db megoldás: $\to E = \sqrt{p^2+m^2} \geq m$

$\searrow E = -\sqrt{p^2+m^2} \leq -m$

1. érdekesség: vannak negatív energiájú állapotok

2. érdekesség: Mi $\psi$ jelentése? a Schr. esetén volt a $\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 + \operatorname{div} j = 0$ összefüggés

van-e ennek megfelelője:

[A $\psi \to \psi e^{i\varphi}$ egy szimmetria, ezért van konzervatív mennyiség.]

$$\left.\begin{aligned}\psi^*\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi &= 0\\ \psi\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi^* &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi^*\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi - \psi\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi^* = 0$$

$$\psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = 0$$

$$\psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi + \partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi - \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = 0 \Rightarrow \partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi) - \partial_\mu(\psi\partial^\mu\psi^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) = 0$$

Tehát ∃ egy olyan mennyiség, aminek deriváltja 0:

$\partial_\mu j^\mu = 0$ ahol $j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right)$

$j^\mu = (\rho, \underline{j})$ ahol $\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*\right)$

$\underline{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \psi^*\right)$ $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$

Van tehát egy megmaradó áram, de $\rho$ nem feltétlen pozitív

SŐT

Mivel a KG egyenlet időben másodrendű, ezért $t = 0$-ban 2 szabad paramétert megadhatok: $\psi$-t és $\dot{\psi}$-t, tehát $\rho$ tetszőleges valós szám lehet.

$\Rightarrow$ nem lehet valószínűségi értelmezést adni.

# RELATIVISZTIKUS

11. előadás (12.03.)

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \dot\psi - \psi \dot\psi^*\right)$$

$\int \rho \, dx$ megmarad, de ebből negatív is

Mi akkor a jelentése?

Ha $\psi$ egy töltött részecskét ír le $\Rightarrow$ $\rho$: töltéssűrűség, töltésmegmaradás

$$\rho = \frac{i\hbar e}{2m}\left(\psi^* \dot\psi - \psi \dot\psi^*\right)$$

Tehát $j^\mu = \frac{i\hbar e}{2m}\left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right)$

ha ez pozitív: megtalálási valószínűség

ha negatív: antirészecske megtalálási valószínűsége.

Kiírt konkrétabban: síkhullám megoldás:

$$\psi = A e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} = A e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{k}\underline{x} - Et)}$$

tetszőleges $\underline{p}$-re: $E = \pm\sqrt{m^2 + |\underline{p}|^2} = \pm E_p \qquad (E_p \geq m)$

$$\psi_\pm = A e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{k}\underline{x} \mp E_p t)}$$

$$\rho_\pm = \frac{i\hbar e}{2m}\left(|\psi_\pm|^2\left(\mp \frac{i}{\hbar} E_p\right) - |\psi_\pm|^2\left(\pm \frac{i}{\hbar} E_p\right)\right) =$$

$$= \pm \frac{e}{m}|\psi_\pm|^2 E_p$$

Általában $\psi$-nek van Tulajdonítható valószínűségi értelme ...

Minden keletkezhet új részecske, a teljes töltés megmaradás

$\Rightarrow$ Az egyrészecske-kvantummechanikán úgy alapból van vmi, $\Rightarrow$ kvantumtérelmélet kell.

Bizonyos esetekben jó: Dirac-egyenlet. („De az csak erőlködés.")

## Dirac-egyenlet

A Klein-Gordon-egyenlet fő problémája, hogy időben is másodrendű.

Próbáljunk elsőrendű egyenletet konstruálni! $\quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$

de úgy hogy kovariáns legyen $\Rightarrow$ $\hat{H}$-ban csak 1. rendű deriváltak legyenek.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \beta m\right)\psi$$

$\alpha$ és $\beta$ nem lehetnek számok, mert nem teljesülne a $E_p$ relációból.

Legyenek mátrixok!

Tudjon alábbiakat:

- $\rho$ legyen pozitív valség, ami megmarad

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \psi_i^* \geq 0$$

- Stimmeljen az E-p reláció
- Legyen kovariáns

Az E-p reláció a KG-egyenlettel adni

⇒ A Dirac-egyenlet megoldásainak a KG-t is meg kell oldani

⇒ $\forall \psi_i$ megoldása a KG-nak

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \left(-\hbar \nabla^2 + m^2\right)\psi_i \qquad \text{KG}$$

Másrészt viszont $-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-i\hbar \sum_k \alpha_k \partial_k + \beta m\right)\psi\right]_i =$

$$= \sum_j i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[-i\hbar \sum_k \alpha_k \partial_k + \beta m\right]_{ij} \psi_j = \sum_j \left(-i\hbar \sum_k \alpha_k \partial_k + \beta m\right)_{ij} i\hbar \frac{\partial \psi_j}{\partial t} =$$

$$= \sum_j \left[-i\hbar \sum_k \alpha_k \partial_k + \beta m\right]_{ij} \sum_\ell \left(-i\hbar \sum_p \alpha_p \partial_p + \beta m\right)_{j\ell} \psi_\ell =$$

Tehát:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \left(\left[-i\hbar \sum_k \alpha_k \partial_k + \beta m\right]\left[-i\hbar \sum_p \sum_p + \beta m\right] \psi\right)_i \stackrel{!}{=} \left(\left(-\hbar^2 \sum_k \partial_k^2 + m^2\right) \mathbb{1} \psi\right)_i$$

azaz:

$$\begin{cases} \sum_{kp} \partial_k \partial_p \alpha_k \alpha_p \stackrel{!}{=} \sum_\ell \partial_\ell^2 \\ \sum_k \alpha_k \beta + \sum_p \beta \alpha_p \stackrel{!}{=} 0 \\ \beta^2 \stackrel{!}{=} 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \{\alpha_k, \alpha_p\} = 2\delta_{kp} \mathbb{1} \\ \{\alpha_k, \beta\} = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{array}}$$

A legegyszerűbb 4 amivel ezt meg lehet csinálni, az 4

egy lehetséges reprezentáció:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Leszármaztatható a kovariancia feltételek (házi)

Dirac-egyenlet 4-es alakja:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar \sum_i \alpha_i \partial_i + \beta m\right)\psi \qquad | \cdot \beta$$

$$i\hbar \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar \sum_i \alpha_i \partial_i + m)\psi \qquad \gamma_0 := \beta \quad \gamma_i := \alpha_i$$

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

$$\boxed{\left(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0}$$

Ez a 4-es egyenlet

$\gamma^\mu$: Dirac-mátrixok

Tulajdonságai: $\gamma^{0+} = \gamma^0$

$(\gamma^i)^+ = (\beta\alpha_i)^+ = \alpha_i^+ \beta^+ = \alpha_i \beta = -\beta\alpha_i = -\gamma^i$

$(\gamma^0)^2 = 1$

$\gamma^i \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0$

$\gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i$ Általában: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

Négyesáram: $j^\mu = \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi$

$j^0 = \psi^+ \psi = \rho$

$j^i = \psi^+ \alpha_i \psi = j_i$

Dirac-konjugált: $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$

$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

Állítás: $j^\mu$ 4-es vektor

$\bar{\psi}\psi = \psi^+ \gamma^0 \psi$ skalár

Biz.: (most ez nagyon a bizonyítás? [videó!!!!])

Dirac-egyenlet kovarianciájából

$\Lambda$: $K' \to K$ transzf.

$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^{\nu'}$

Kérdés: hogy transzformál $\psi$? $\psi(x) = R(\Lambda)\psi'(\Lambda^{-1}x)$

$K$: $(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

$K'$: $(i\hbar \gamma^{\mu'} \partial_\mu' - m)\psi' = 0$ (*)

$\gamma$-k választásán múlnak, ezt a konvenció követi, így $\gamma^\mu$-k egyformák minden rendszerben u.a.-k

Mivel $\infty$ reprezentáció van, melyre $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ igaz elvárt, tehát ez a konvenció megtehető

Ez alapján $i\hbar\left(\gamma^{\mu}\Lambda_\mu{}^\nu\partial'_\nu - m\right) R\psi' = 0$ $\qquad / \cdot R^{-1}$

$$i\hbar R^{-1}\gamma^{\mu} R\Lambda_\mu{}^\nu\partial'_\nu - i\hbar m\psi = 0$$

Ez mikor fogja u.a.-t adni, mint (*)?

Akkor, ha $R^{-1}\gamma^\mu R\Lambda_\mu{}^\nu\partial'_\nu = \gamma^\mu\partial'_\mu$

$$\Rightarrow \underline{R^{-1}\gamma^\mu R\Lambda_\mu{}^\nu = \gamma^\nu} \quad \Rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu\gamma^\mu = R\gamma^\nu R^{-1}$$

Ebből kapjuk meg R mátrixokat

R általában nem unitér

DE 3D forgatásra $[R,\gamma_0]=0 \Rightarrow R$ unitér

# RELATIVITÁS
12. előadás (12. 10.)

A Dirac-egyenlet így kovariáns, hogy $\psi, \psi'$

$$\psi = R\psi' \quad , \text{ahol} \quad \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = R^{-1}\gamma^\mu R$$

pl.: tértükrözés $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \gamma^0 &= R^{-1}\gamma^0 R \Rightarrow R\gamma^0 = \gamma^0 R \\ \gamma^i &= -R^{-1}\gamma^i R \Rightarrow R\gamma^i = -\gamma^i R \end{aligned}\right\} \text{ az megoldás } \gamma^0.$$

$\Rightarrow R = c\cdot\gamma^0$

$P\psi = c\cdot\gamma^0\psi$

$P^2\psi = c^2\gamma^0\psi \qquad$ Mivel $P^2 = P$ szerint $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\varphi}$

konvenció: $c = 1$

Tehát: $\quad P\psi(t, \underline{x}) = \gamma^0\psi(t, -\underline{x})$

pl 2: térbeli forgatás

QM-en láttuk, hogy van a részecskének imp. momentuma.

$\psi$ 2 db feles spinűt tartalmaz $\qquad$ Spin operátor: $S_i = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix}\sigma_i & \\ & \sigma_i\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A Dirac-egyenlet 2 db feles spinű részecskét ír le (részecske és antirészecske)

Továbbá $R$ nem unitér: $\gamma_0 R^\dagger = R^{-1}\gamma_0$

Tehát kovariáns transzformáció: $\psi = R\psi'$

$$\psi^\dagger = \psi'^\dagger R^\dagger$$

$$\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0 = \psi'^\dagger R^\dagger\gamma^0 = \psi'^\dagger\gamma^0 R^{-1} = \bar\psi' R^{-1}$$

$\Rightarrow \bar\psi\psi = \bar\psi' R^{-1} R\psi' = \bar\psi'\psi' \leftarrow$ skalár

$$j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi = \bar\psi' R^{-1}\gamma^\mu R\psi' = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi'\gamma^\nu\psi' = \Lambda^\mu{}_\nu j'^\nu$$

Síkhullám megoldás:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = \left(\sum_i \alpha_i \hat{p}_i + m\beta\right)\psi$$

legyen $\psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$ ahol $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}$

$\chi = \begin{pmatrix}\chi_1 \\ \chi_2\end{pmatrix}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix}0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0\end{pmatrix} p_i \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \sum_i \sigma_i \hat{p}_i \chi + m\varphi \\ i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \sum_i \sigma_i \hat{p}_i \varphi - m\chi \end{aligned}\right\}$$

legyen $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t}$

kapjuk:
$$\varepsilon\varphi = \sum_i \hat{\sigma}_i \hat{p}_i \chi + m\varphi$$
$$\varepsilon\chi = \sum_i \hat{\sigma}_i \hat{p}_i \varphi - m\chi$$

legyen $\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_0 \\ \chi_0\end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\,\underline{x}} \Rightarrow \hat{p}_i \to p_i$

ezzel:
$$\left.\begin{aligned} (\varepsilon - m)\varphi - \sum_i \sigma_i p_i \chi &= 0 \\ -\sum_i \sigma_i p_i \varphi_0 + (\varepsilon + m)\chi &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Akkor van megoldás, ha $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - m)\mathbb{1} & -\sum_i \sigma_i p_i \\ -\sum_i \sigma_i p_i & (\varepsilon + m)\mathbb{1} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 = p^2 + m^2 \quad \text{(HF)}$$

HF

Itt is az a különbség, hogy $p$ tetszőleges: $\varepsilon = \pm\sqrt{p^2+m^2} = \pm E_p$

megoldás: $\chi_0 = \dfrac{\sum_i \sigma_i p_i}{\varepsilon + m}\varphi_0$ amiből: $\psi_{p,\lambda} = N\begin{pmatrix}\varphi_0 \\ \dfrac{\underline{\sigma}\,\underline{p}}{\varepsilon + m}\varphi_0\end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\,\underline{x} - \lambda E_p t)}$

HF

Mi a $\varphi_0$-ra vonatkozó szabadság?
a spinnel kapcsolatos, DE $[\hat{H}, \hat{S}_i] \neq 0$ (HF)

Kéne találni olyan operátort, ami kommutál $H$-val, és lefixálja $\psi_0$-t

Helicitás: A spin mozgás irányán vett vetülete.

$$\hat{\Lambda}_S = \sum_i \hat{S}_i \frac{\hat{p}_i}{|\hat{p}|}$$

Állítás: $[\hat{\Lambda}_S, \hat{H}] = 0$ HF: $[\hat{S}\hat{p}, \hat{H}] = 0$

$$[\hat{p}^2, \hat{H}] = 0$$

(HF)

$\hat{\Lambda}_S$ nem Lorentz-invariáns, mert a mozgás iránya megfordítható boosttal,

kivéve 0 tömegű részecskében (pl.: foton)

Mozogjon a részecske $z$ irányban

$$p = (0, 0, p_z)$$

$$\hat{\Lambda}_S = \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Ilyen s.á.: $+\frac{\hbar}{2}$-re: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$-\frac{\hbar}{2}$-re: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\psi_{p\lambda+\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{m+\lambda E_p} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\,\underline{x} - \lambda E_p t)}$$

$$\psi_{p\lambda-\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z}{m+\lambda E_p} \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\,\underline{x} - \lambda E_p t)}$$

A normálási feltétel: $\int \psi^{\dagger}_{p\lambda s} \psi_{p'\lambda' s'} \, d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\underline{p} - \underline{p}')$

---

Eddig kell

---

Dirac-egyenlet KH (külső EM tér) esetén

Ilyenkor kanonikus impulzus: $p^\mu = p^\mu_{\text{mech}} + QA^\mu$

QM: $p^\mu \to i\hbar\partial^\mu$

Hamilton: $H = \sqrt{m^2 + (\underline{p} - Q\underline{A})^2} + e\phi$

Dirac: $i\hbar\partial^\mu \to i\hbar\partial^\mu - QA^\mu$

tehát a Dirac-egyenlet: $\left[i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar}eA_\mu\right) + m\right]\psi = 0$

ill. a Hamilton-operátor: $\hat{H} = \sum_i \alpha_i(\hat{p}_i - eA_i) + \beta m + e\phi$ a kettő ekvi.

A továbbiakban csak statikus, centrális potenciállal foglalkozunk.

$e\phi = V(r)$ , $A_i = 0$

ilyenkor: $\hat{H} = \hat{H}_0 + V(r)$

$H_0$ kommutál $\underline{J} = \underline{L} + \underline{S} = \underline{r} \times \underline{p} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \underline{\sigma} & \\ & \underline{\sigma} \end{pmatrix}$ teljes imp. momentummal

$V(r)$ gömbszimmetrikus $\Rightarrow$ ez is kommutál $\underline{J}$-vel $\Rightarrow [\hat{H}, \hat{J}_i] = 0$

+ tértükrözés miatt $P = \gamma^0$ , $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$

A $\hat{H}$, $\hat{J}^2$, $J_3$, $\underline{P}$ közös sajátvektorait keressük

A változók szeparálásakor részben használjuk:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_{jem} \\ \chi_{je'm} \end{pmatrix} \quad \text{ahol } e \neq e'$$

tértükrözés miatt $\psi \to \gamma^0 \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix}$

$$P\begin{pmatrix} \varphi(\underline{x},t) \\ \chi(\underline{x},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(-\underline{x},t) \\ -\chi(-\underline{x},t) \end{pmatrix}$$

Ha ez $\psi$ $P$ s.á.-je, akkor $P\psi(\underline{x},t) = \pm\psi(-\underline{x},t)$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\underline{x},t) = \pm\varphi(-\underline{x},t)$$
$$\chi(\underline{x},t) = \mp\chi(-\underline{x},t)$$

tehát ha $\varphi$ páros $\chi$ ptlan
ha $\chi$ páros $\varphi$ ptlan. $\Rightarrow$ ezért van tehát $e$ és $e'$ u.a.

Mivel csak feles spinű részecskéket nézünk, ezért $j = e \pm \frac{1}{2}$ $\Rightarrow e = j \pm \frac{1}{2}$

Mivel $e$-k különbözők $e = j + \frac{1}{2}$
$e' = j - \frac{1}{2}$

Legyen $\varphi(r, \vartheta, \varphi) = i\, g(r)\, \Omega_{jem}(\vartheta, \varphi)$
$\chi(r, \vartheta, \varphi) = -f(r)\, \Omega_{je'm}(\vartheta, \varphi)$ kiderül, hogy a két $\Omega$ u.a.
"csak ne úgy fel" (konzultáció)

A Dirac-egyenlet:

$$\hat{\underline{\sigma}}\, \hat{\underline{p}}\, \chi + m\varphi + V(r)\varphi = E\varphi$$
$$\hat{\underline{\sigma}}\, \hat{\underline{p}}\, \varphi - m\chi + V(r)\chi = E\chi$$

megmutatható: $-(\hat{\underline{\sigma}}\,\underline{p})\,\Omega_{jem} = -\frac{i}{r}\hbar(1+k)\,\Omega_{je'm}$
$-(\hat{\underline{\sigma}}\,p)\,\Omega_{je'm} = -\frac{i}{r}\hbar\,(1-k)\,\Omega_{jem}$

ahol $k = -(j+\frac{1}{2})$ ha $j = e + \frac{1}{2}$
$k = +(j+\frac{1}{2})$ ha $j = e - \frac{1}{2}$ az $\underline{L}\underline{S}$ csatolást veszi

Ha ezeket visszaírjuk, akkor Ω-k kiesnek, és a radiális egyenleteket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} &\hbar \frac{dg}{dr} + (1+\kappa)\hbar \frac{g(r)}{r} - \left[E + m - V(r)\right] f(r) = 0 \\ &\hbar \frac{df}{dr} + (1-\kappa)\hbar \frac{f(r)}{r} + \left[E - m - V(r)\right] g(r) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Mi van, ha hozzáadjuk a Coulomb-potenciált?

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \qquad \text{új változók: } \quad F := rf, \quad G := rg$$

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{\kappa}{r} G + \left[\frac{E+m}{\hbar} + \frac{Z\alpha}{r}\right] F$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\kappa}{r} F - \left[\frac{E-m}{\hbar} + \frac{Z\alpha}{r}\right] G$$

Megoldás menete: 1. $r \to 0$ viselkedés

2. $r \to \infty$

3. ezeket leválasztva hatványsorok formájában keressük, így kapjuk.

1)
$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dr} &= -\frac{\kappa}{r} G + \frac{Z\alpha}{r} F \\ \frac{dF}{dr} &= \frac{\kappa}{r} F - \frac{Z\alpha}{r} G \end{aligned}\right\} \qquad F = a r^{\gamma}, \quad G = b r^{\gamma}$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$$

+ kell választani a divergencia miatt  + feltétel: $Z\alpha < |\kappa|$

$\Rightarrow Z < \frac{1}{\alpha}$

és tényleg nincs 137-nél nagyobb elem.

2) $r \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dr} &= \frac{E+m}{\hbar} F \\ \frac{dF}{dr} &= -\frac{E-m}{\hbar} G \end{aligned}\right\}$$

Legyen $\rho = 2\lambda r$ ahol $\lambda = \frac{\sqrt{m^2 - E^2}}{\hbar}$

$G(r), F(r) \sim e^{\pm \rho/2} \leftarrow$ $e^{-}$-t kell választani.

3) Legyen $G(\rho) = \sqrt{m+E}\, e^{\rho/2}(\phi_1 + \phi_2)$ és $F(\rho) = \sqrt{m-E}\, e^{-\rho/2}(\phi_1 - \phi_2)$

Ezek $\phi_1$ és $\phi_2$-re $\quad \phi_1 = \rho^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \rho^j \quad \phi_2 = \rho^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \rho^j$

rekurziós feltétel: $\alpha_m = \frac{(1+n')(2-n')\dots(m-n')}{m!\,(2j+1)\dots(2j+m)}\,\alpha$. $\beta$ is hasonló. A normálhatóság miatt véges $\Rightarrow$ $n'$ egész.

A megfelelő kvantumszámok: $n = n' + |\kappa| = n' + j + \frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow \quad E = \pm m\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}\right]^2}\right]^{\frac{1}{2}}$