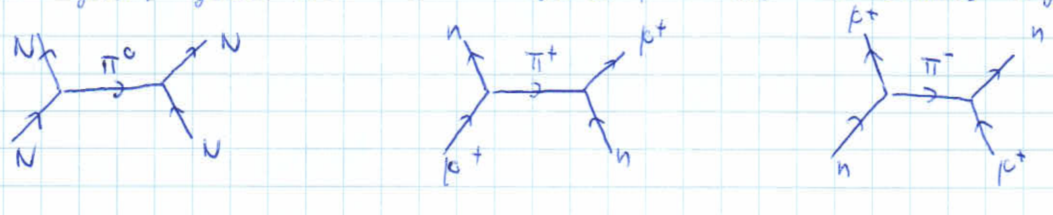
1. Tétel: Yukawa-potenciál és az 1-mezon-kicserélődési potenciál alakja

Cél a nukleonok közötti kölcsönhatás leírása feltéve, hogy a KH-t pionok közvetítik.

Feltevések: – kvantált pionok
– lassú, pontszerű, klasszikus nukleonok (pion visszahatást elhanyagoljuk, ezért $p_\pi < m_N$)

Kis energián, megkülönböztethető nukleonokat feltételezve a t-csatornás folyamat a releváns:



A pionok leírására skalárteret használunk:

Szabad skalártér, ami kielégíti a KG-egyenletet: $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$

A megfelelő Lagrange-i: $\mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

Fourier-komponensekkel felírva: $\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx}\right)\Big|_{k^0=\omega_k}$

$$\text{Ekkor ha } [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$
$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0$$

akkor teljesül a KKR: $[\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$

$$[\phi(t,\mathbf{x}), \phi(t,\mathbf{x}')] = [\pi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')] = 0$$

Hamilton: $H = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\omega_{\mathbf{k}}\left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger\right)$

Egyrészecske állapot: $|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\,a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle$

normálás: $\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3\cdot\underbrace{2\omega_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})}_{\text{így lesz Lorentz-inv.}}$

n-részecske állapot: $|\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\rangle = \prod_{i=1}^{n}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_i}}\,a_{\mathbf{p}_i}^\dagger|0\rangle$.

Egyrészecske szuperpozíció: $\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}|\mathbf{k}\rangle$

$$\langle 0|\phi(\mathbf{x})|\mathbf{p}\rangle = \langle 0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left(a_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\right)\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle =$$

$= e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$ A $|\mathbf{p}\rangle$ állapot helyreprezentációja.

Diszkretizáljuk az állapotokat egy L^3 méretű dobozba!

$$\underline{k} = \underline{n}\,\frac{2\pi}{L} \quad \text{ahol} \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \qquad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \to \frac{1}{V}\sum_{\underline{k}}$$

$$a_{\underline{k}}, a_{\underline{k}}^\dagger \to \frac{a_{\underline{k}}}{\sqrt{V}}, \frac{a_{\underline{k}}^\dagger}{\sqrt{V}} \quad \Rightarrow \quad [a_{\underline{k}}, a_{\underline{k}'}^\dagger] = \delta_{\underline{k}\underline{k}'}$$

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\underline{k}}}} \left(a_{\underline{k}} e^{-i\underline{k}\underline{x}} + a_{\underline{k}}^\dagger e^{i\underline{k}\underline{x}}\right)$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\underline{k}} \omega_{\underline{k}} \left(a_{\underline{k}}^\dagger a_{\underline{k}} + a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^\dagger\right) = \sum_{\underline{k}} \omega_{\underline{k}} \left(N_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\right)$$

n-részecske állapot: $|n_{\underline{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\underline{k}}!}} (a_{\underline{k}}^\dagger)^{n_{\underline{k}}} |0\rangle \qquad \langle n_{\underline{k}} | m_{\underline{k}}\rangle = \delta_{nm}$

$$N_{\underline{k}} |n_{\underline{k}}\rangle = n_{\underline{k}} |n_{\underline{k}}\rangle$$

Ha a skalártér kölcsönhat: $(\Box + m^2)\phi(x) = -\rho(x)$

az ehhez tartozó Lagrange: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \rho(x)\phi(x)$

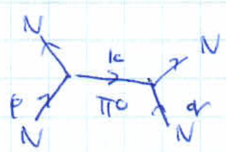
Hamilton: $$H = \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3x \left(\pi^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)\right)}_{H_0} + \underbrace{\int d^3x\, \rho(x)\phi(x)}_{H'}$$

Egyszerűsítések:
- $\phi(x)$ és $\pi(x)$ időfüggetlen (Schr.-kép)
- ρ a nukleonsűrűség, és csak $\underline{x}$-től függ: $\rho(\underline{x}) = \sum_n g_n \delta(\underline{x} - \underline{x}_n)$
- TFH g_n valós konstans
- minden nukleon ugyanúgy hat kölcsön: $g_n = g \quad \forall n$

$$H' = g\int d^3x \sum_n \delta(\underline{x} - \underline{x}_n)\phi(\underline{x}) = g\sum_n \phi(\underline{x}_n) = \frac{g}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\underline{k}}}} \left(a_{\underline{k}} \sum_n e^{-i\underline{k}\underline{x}_n} + a_{\underline{k}}^\dagger \sum_n e^{i\underline{k}\underline{x}_n}\right)$$

tehát H' vagy eltüntet vagy kelt egy mezont.

Töltéssemleges kölcsönhatás:



, kezdetben és végén nincs mezon
, közben van 1db mezon.

Az alábbi megoldását keressük: $(H^0 + \lambda H')|n\rangle = E_n |n\rangle$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$
$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + |n^{(1)}\rangle + |n^{(2)}\rangle + \dots$$

2-odrendű perturbációszámítás: $$E_n^{(2)} = E_n^{(0)} + H'_{nn} - \sum_{m\neq n} \frac{H'_{nm} H'_{mn}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}$$

ahol $E_n^{(0)} = \langle n | H^{(0)} | n\rangle$

Mivel kezdetben nincs mezon $n=0 \Rightarrow \langle 0 | H' | 0\rangle = 0$

$$E_n^{(2)} = -\sum_{\underline{k}} \frac{H'_{0\underline{k}} H'_{\underline{k}0}}{\omega_{\underline{k}}}$$

$$H'_{\underline{k}0} = \langle \underline{k} | H' | 0 \rangle = \text{„emisszió"} = \langle 0 | a_{\underline{k}} \sum_{\underline{t}} \frac{g}{\sqrt{2V\omega_{\underline{t}}}} \left(a_{\underline{t}} \sum_n e^{-i\underline{t}\underline{x}_n} + a_{\underline{t}}^\dagger \sum_n e^{i\underline{t}\underline{x}_n} \right) |0\rangle =$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2V\omega_{\underline{k}}}} \sum_n e^{-i\underline{k}\underline{x}_n}$$

$$H'_{0\underline{k}} = \langle 0 | H' | \underline{k} \rangle = \text{„abszorpció"} = \dots = \frac{g}{\sqrt{2V\omega_{\underline{k}}}} \sum_{n' \neq n} e^{i\underline{k}\underline{x}_{n'}}$$ ← ezért most a mezont egy másik N kell elnyelje.

$$\Rightarrow E_0^{(2)} = -\frac{g^2}{2} \sum_n \sum_{n'\neq n} \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \frac{e^{i\underline{k}(\underline{x}_{n'}-\underline{x}_n)}}{\omega_{\underline{k}}^2} = -\frac{g^2}{2} \sum_n \sum_{n'\neq n} U(\underline{x}_{n'}-\underline{x}_n)$$

Yukawa-potenciál:

$$U(\underline{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \frac{e^{i\underline{k}\underline{x}}}{\omega_{\underline{k}}^2} = \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \frac{e^{i\underline{k}\underline{x}}}{\underline{k}^2+m^2} \longrightarrow \int \frac{d^3\underline{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\underline{k}\underline{x}}}{\underline{k}^2+m^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk\, k^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \frac{e^{ik|\underline{x}|\cos\vartheta}}{k^2+m^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{i|\underline{x}|} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2+m^2} \left(e^{ik|\underline{x}|} - e^{-ik|\underline{x}|} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i |\underline{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2+m^2} e^{ik|\underline{x}|} = \text{reziduum tétel} = \frac{1}{4\pi^2 i |\underline{x}|} \cdot \frac{2\pi i}{2} e^{-m|\underline{x}|} =$$

$$= \frac{e^{-m|\underline{x}|}}{4\pi|\underline{x}|}$$

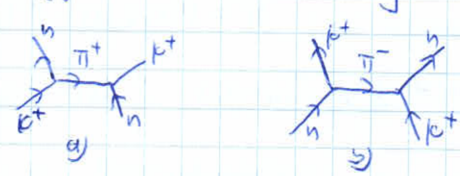
- ha $|\underline{x}| \ll \frac{1}{m}$ $U(\underline{x}) \sim \frac{1}{|\underline{x}|}$ Coulomb
- ha $|\underline{x}| \gg \frac{1}{m}$ $U(\underline{x}) \sim e^{-m|\underline{x}|}$

$\frac{1}{m}$: A kölcsönhatás hatótávja.

$E_2^{(2)} < 0$: $V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}$ $\quad \underline{F} = -\frac{\partial V}{\partial \underline{r}} > 0 \quad \Rightarrow$ vonzó erő

[Valójában ez a σ-modell érvényes, ugyanis π^0 nem skalár.]

<u>Töltéscserével járó kölcsönhatás</u> :



A mezonok töltöttek, ezért komplex skalárteret használunk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j - m^2 \phi_j \phi_j \right) \qquad j = 1,2$$

EL-egyenlet: $(\Box + m^2)\phi_j = 0$

bevezetve $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ $\quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$

$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$ $\qquad$ EL-egyenlet: $(\Box + m^2)\phi^{(*)} = 0$

$\Rightarrow$ ϕ és ϕ^* függetlenül kielégítik a KG-t

Van egy folytonos globális $U(1)$ szimmetria:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$$
$$\phi^*(x) \to \phi^{*\prime}(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x)$$
$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\in SO(2) \simeq U(1)} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

Továbbá egy diszkrét szimmetria: $\phi(x) \leftrightarrow \phi^*(x)$

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}_{Z_2 \text{ reflexió}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Teljes szimmetriacsoport: $O(2)$

Noether-áram: $j^\mu = i\,\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - i\,\phi^*(x)\partial^\mu\phi^*(x)$ $\qquad Q = \int d^3x\; j^0$

Kvantálás:
$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_k e^{-ikx} + b_k^\dagger e^{ikx}\right)$$
$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(b_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx}\right)$$

ahol $[a_k, a_k^\dagger] = [b_k, b_k^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(k-k')$

A töltést kiszámolva: $Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k\right)$

Két fajta, ellentétes töltésű részecske van, az egyiket $a^\dagger$, a másikat $b^\dagger$ gerjeszti

$\phi^\dagger$ kelti a-t, eltünteti b-t. ϕ kelti b-t, eltünteti a-t.

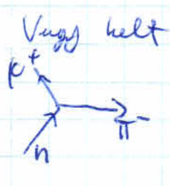
$\phi^\dagger \to \pi^+$, $\phi \to \pi^-$

Ezúttal a kölcsönható tag: $H' = \rho(x)\phi(x) + \rho^*(x)\phi^\dagger(x)$

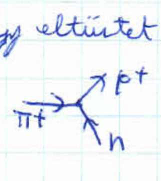
ahol $\rho(x) = \sum_n g_n\,\delta(x - x_n)$ $\quad \rho^*(x) = \sum_n g_n^*\,\delta(x - x_n)$

de most g_n és g_n^* mátrixok, mert a nukleon egy izodublett: $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Első tag: $\rho\phi$. Vagy kelt egy π^--t, vagy eltüntet egy π^+-t:



vagy



mindkettő $n \to p$ átmenet

$$g_n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_n = g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{g}{2}\left(\tau_n^{(1)} - i\,\tau_n^{(2)}\right)$$

$\tau_n^{(i)}$: Az x_n részecskére ható i. Pauli-mátrix.

Mási tag: $\rho^* \phi^+$; Vagy volt egy π^+-t vagy eltüntet egy π^--t.

$p \to n$ átmenet

$$g_n^* = g^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{g^*}{2}\left(\tau_n^{(1)} + i\,\tau_n^{(2)}\right)$$

Másodrendű perturbációszámítás:

$$E_0^{(2)} = -\sum_{m\neq 0} \frac{H'_{0m} H'_{m0}}{E_m^{(0)} - E_0^{(0)}} =$$

itt az $|m\rangle$-ek lehet $|\underline{k}^+\rangle = a_{\underline{k}}^+ |0\rangle$, $|\underline{k}^-\rangle = b_{\underline{k}}^+ |0\rangle$

$$= -\sum_{\underline{k}} \frac{1}{\omega_{\underline{k}}} \Big(\underbrace{H'_{0\underline{k}^+} H'_{\underline{k}^+ 0}}_{a)\ \text{folyamat}} + \underbrace{H'_{0\underline{k}^-} H'_{\underline{k}^- 0}}_{b)\ \text{folyamat}} \Big) =$$

a szemléletes szerepe leírásban

$$= -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{n'\neq n} \left(g_{n'} g_n^* + g_{n'}^* g_n \right) \underbrace{\frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \frac{e^{i\underline{k}(\underline{x}_n - \underline{x}_{n'})}}{\omega_k^2}}_{U(\underline{x}-\underline{x}_n)}$$

ugyanaz a Yukawa, mint korábban.

A potenciál alakja: $V_{12} = -\underbrace{(g_1 g_2^* + g_1^* g_2)}_{\text{mátrix a kétnukleon állapoton}} U(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$

$$g_1 g_2 \left(|N_1\rangle \otimes |N_2\rangle \right) = g_1 |N_1\rangle \otimes g_2 |N_2\rangle$$

$N = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A kétnukleon állapot 4 dimes, általános bázis: n - n, n - p, p - n, p - p

$g_1 g_2^* + g_1^* g_2$ -t kiszámolva:

	n-n	p-n	n-p	p-p
n-n				
p-n			1	
n-p		1		
p-p				

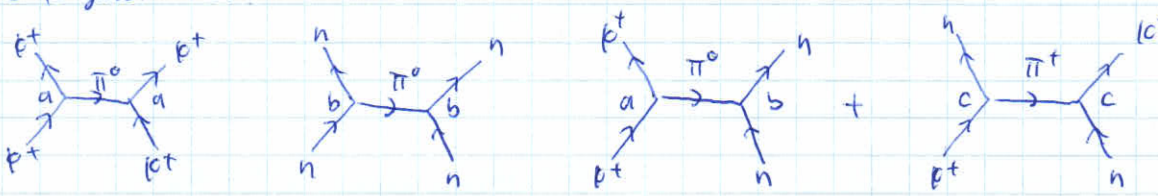
saját állapotok: n-n (0); $\frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np)$ (1); $\frac{1}{\sqrt{2}}(np - pn)$ (-1); p-p (0)

$\Rightarrow$ diagonalizálva:

	n-n	$\frac{1}{\sqrt{2}}(np+pn)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(np-pn)$	p-p
n-n				
$\frac{1}{\sqrt{2}}(np+pn)$		1		
$\frac{1}{\sqrt{2}}(np-pn)$			-1	
p-p				

Szimmetrikus eset: Láttuk mi van π^0 csere és $\pi^\pm$ csere esetén, de a magerő független a résztvevő nukleon töltésétől, úgyhogy szimmetrikusra kell általánosítani. (Kemmer, 1938)

3 folyamat lehet:



I II III

A töltésfüggetlenség azt jelenti, hogy a csatolás a 3 esetben u.a.:

$$|a^2|^2 = |b^2|^2 = |ab + c^2|^2$$

- triviális megoldás: $|a| = |b|$; $c = 0$ nem ez kell
- igazi megoldás: $a = -b$, $c = \pm\sqrt{2}\, a$

$$H' = g' \sum_{j=1}^{3} \sum_n \tau_n^{(j)} \phi_j(x_n)$$

felírva $\sum_j \tau^{(j)} \phi_j = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_3 & -\sqrt{2}\phi^* \\ \sqrt{2}\phi & -\phi_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix}$$

ϕ_j $j = 1, 2, 3$-ra valós skalár terek, tehát a formalizmus ugyanaz, mint eddig:

$$E_0^{(2)} = -\frac{1}{2} g'^2 \sum_{n' \neq n} \vec{\tau}_n \cdot \vec{\tau}_{n'} \underbrace{\frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ik(x_{n'} - x_n)}}{\omega_k^2}}_{U(x_n - x_{n'})} \quad \text{Yukawa-potenciál}$$

Kölcsönhatási potenciál: $V_{12}(r) = -g'^2\, \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2\, U(r)$

Egynukleonos bázisban:

V_{12}	n-n	p-n	n-p	p-p
n-n	A			
p-n		$-A$	$2A$	
n-p		$2A$	$-A$	
p-p				A

$$A = -g'^2\, U(x_1 - x_2)$$

A diagonális elemek a π^0-hoz, az offdiagonálisok $\pi^\pm$-hoz tartoznak.

Diagonalizálva:

V_{12}	nn	$\frac{1}{\sqrt{2}}(np+pn)$	pp	$\frac{1}{\sqrt{2}}(np-pn)$
nn	V_{12}^S			
$\frac{1}{\sqrt{2}}(np+pn)$		V_{12}^S		
pp			V_{12}^S	
$\frac{1}{\sqrt{2}}(np-pn)$				V_{12}^A

Szimmetrikus potenciál: $V_{12}^S = -g'^2 U(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$ vonzó KH

Antiszimmetrikus potenciál: $V_{12}^A = 3g'^2 U(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$ taszító KH

A $|V_{12}^A| : |V_{12}^S| = 3:1$ arány oka az izospin:

A rendszer teljes izospinje: $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$ $\qquad \vec{T}^2 = T(T+1)$

izodublett esetén: $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad \Rightarrow T = 0, 1$

$$\vec{t}^2 = t(t+1) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow T(T+1) = \vec{t}_1^{\,2} + \vec{t}_2^{\,2} + 2\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 = 2T(T+1) - 3 = \begin{cases} -3 & T=0 \\ 1 & T=1 \end{cases}$$

A nukleonok spinjét is figyelembe véve a KH alakja:

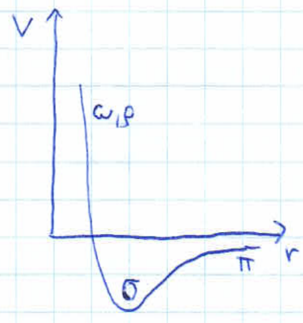
$$V_{12}(\underline{r}) = \frac{f^2}{m_\pi^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{izospin}}}{\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spin}}}{(\vec{\sigma}_1 \vec{\nabla})(\vec{\sigma}_2 \vec{\nabla})} \; \frac{e^{-m_\pi r}}{4\pi r}$$

átírható $= \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{spin-spin}}}{V_{\pi,ss}(r)\, \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tenzor}}}{V_{\pi,t}(r)\, S_{12}(r)} \Big) \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2$ $\qquad S_{12} = \frac{3}{r^2} (\vec{\sigma}_1 \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \vec{r}) - \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$

A legáltalánosabb esetben van még $(\vec{L} \cdot \vec{S})$ és $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$ arányos járulék is.

Valójában a pionok csak a KH egy része.

általánosan:

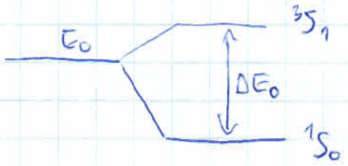


2. tétel: Hadrontömegek a kvarkmodell hiperfinom (spin-spin) kölcsönhatásából

A legtöbb hadron valamelyik $SU(3)_F$ - multiplettbe tartozik, de többsin a megfelelő összetételű hadronok tömege nem egyezik pl.: $m_n \approx 939\,MeV$

$m_{\Delta^0} \approx 1232\,MeV$

hiperfinom felhasadás H-atom esetén:



$$\Delta E_0 = \frac{8}{3} g_p \frac{m_e}{m_p} \alpha^2 |E_0|^2 \approx 5{,}88 \cdot 10^{-6}\,eV$$

$$\lambda = \frac{ch}{\Delta E_0} \approx 21\,cm$$

Ez megfigyelhető pl. kozmikus sugárzásban

Elsőrendű perturbációszámítással: $E_{hf}^{(1)} = \frac{2}{3}\mu_1\mu_2 |\psi(0)|^2$ ahol $\mu_i = \frac{e_i}{m_i} S_i$

mágneses momentum

$|\psi(0)|$ S-állapot hullámfv-e.

$$\Rightarrow E_{hf}^{(1)} = \frac{8\pi\alpha}{3} |\psi(0)|^2 \frac{\langle \vec S_1 \vec S_2 \rangle}{m_1 m_2}$$

mivel $(\vec S_p + \vec S_e)^2 = S_p(S_p+1) + S_e(S_e+1) + 2\vec S_p \vec S_e$

$$\Rightarrow \langle \vec S_p \vec S_e \rangle = \frac{1}{2}\left(S(S+1) - S_p(S_p+1) - S_e(S_e+1)\right) = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{ha } S=0 \\ \frac{1}{4} & \text{ha } S=1 \end{cases}$$

Kvarkok esetén a helyzet hasonló, de a potenciál $\left.\begin{aligned} V_{q\bar q}(r) &= -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} \\ V_{qq}(r) &= -\frac{2}{3}\frac{\alpha_s}{r} \end{aligned}\right\}$ kis r-re.

Tehát az energián:

$$E_{hf}^{(1)}(q\bar q) = \frac{32\pi\alpha_s}{9 m_1 m_2} |\psi(0)|^2 \langle \vec S_q \cdot \vec S_{\bar q} \rangle$$

$$E_{hf}^{(1)}(q_1 q_2) = \frac{16\pi\alpha_s}{9 m_1 m_2} |\psi(0)|^2 \langle \vec S_{q_1} \vec S_{q_2} \rangle$$

Feltéve, hogy a tömeg a Schrödinger-egyenlet alapállapoti megoldásából jön:

$$M(q_1, \bar q_2) = m_1 + m_2 + a\frac{\vec S_1 \cdot \vec S_2}{m_1 m_2}$$ mezonokra

$$M(q_1, q_2, q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + A\left(\frac{\vec S_1 \vec S_2}{m_1 m_2} + \frac{\vec S_1 \vec S_3}{m_1 m_3} + \frac{\vec S_2 \vec S_3}{m_2 m_3}\right)$$ barionokra

Barionok

$$j(j+1) = \vec{J}^2 = (\vec{S}_1+\vec{S}_2+\vec{S}_3)^2 = \vec{S}_1^2+\vec{S}_2^2+\vec{S}_3^2+2(\vec{S}_1\vec{S}_2+\vec{S}_1\vec{S}_3+\vec{S}_2\vec{S}_3)$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} \vec{S}_i\vec{S}_j = \frac{1}{2}\left(j(j+1)-3s(s+1)\right) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{ha } j=\frac{3}{2} \quad \text{dekuplet}\\ -\frac{3}{4} & \text{ha } j=\frac{1}{2} \quad \text{oktet}\end{cases}$$

Tehát 3 azonos tömegű kvark esetén (feltéve, hogy $m_u = m_d$)

$$M_N = 3m_u - \frac{3A}{4m_u^2} \qquad \text{(oktet)} \qquad (*)$$

$$M_\Delta = 3m_u + \frac{3A}{4m_u^2} \qquad (*)$$

(dekuplet)

$$M_\Omega = 3m_s + \frac{3A}{4m_s^2} \qquad (*)$$

A dekuplet többi eleme szintén egyszerű, mert $j=\frac{3}{2}$, tehát minden párra $j_{ij}=1$

$$\Rightarrow \vec{S}_i\vec{S}_j = \frac{1}{2}\left(\vec{J}_{ij}^2-\vec{S}_i^2-\vec{S}_j^2\right) = \frac{1}{2}\left(j_{ij}(j_{ij}+1)-2s(s+1)\right) = \frac{1}{4}$$

$$M_{\Sigma^*} = 2m_u+m_s+\frac{A}{4}\left(\frac{1}{m_u^2}+\frac{2}{m_u m_s}\right) \qquad (*)$$

$$M_{\Xi^*} = m_u+2m_s+\frac{A}{4}\left(\frac{2}{m_u m_s}+\frac{1}{m_s^2}\right) \qquad (*)$$

Az oktettben Σ és Λ is két könnyű és egy s-kvarkot tartalmaz. A két könnyű kvark cseréjére antiszimmetrikusnak kell lennie a hf-nek. A színrész antiszimmetrikus, tehát a spin + flavor rész szimmetrikus kell legyen.

Σ izotriplet $\Rightarrow I=1 \Rightarrow$ szimmetrikus izospinrész $\Rightarrow$ szimmetrikus spinrész $\Rightarrow j=1$

Λ izoszinglett $\Rightarrow I=0 \Rightarrow$ antiszim. 〃 $\Rightarrow$ antiszimmetrikus 〃 $\Rightarrow j=0$

$$\vec{S}_{e_1}\cdot\vec{S}_{e_2} = \frac{1}{2}\left(j_{e_1e_2}(j_{e_1e_2}+1)-2\cdot s_{e}(s_{e}+1)\right) = \begin{cases}\frac{1}{4} & \Sigma\\ -\frac{3}{4} & \Lambda\end{cases}$$

$$\vec{S}_{e_1}\vec{S}_s+\vec{S}_{e_2}\cdot\vec{S}_s = \underbrace{\vec{S}_{e_1}\cdot\vec{S}_{e_2}+\vec{S}_{e_1}\cdot\vec{S}_s+\vec{S}_{e_2}\cdot\vec{S}_s}_{-\frac{3}{4}} - \vec{S}_{e_1}\vec{S}_{e_2} = \begin{cases}-\frac{1}{2} & \Sigma\\ 0 & \Lambda\end{cases}$$

$$M_\Sigma = 2m_u+m_s+\frac{A}{4}\left(\frac{1}{m_u^2}-\frac{4}{m_u\cdot m_s}\right) \quad (*) \qquad M_\Lambda = 2m_u+m_s-\frac{3A}{4m_u^2} \quad (*)$$

A Ξ dublettben egy könnyű és két s-kvark van. A két s-kvark cseréjére a flavor szimmetrikus, a szín antiszimmetrikus, tehát a spin szimmetrikus $\Rightarrow S_{ss}=1$

$$\vec{S}_e(\vec{S}_{s_1}+\vec{S}_{s_2}) = (\vec{S}_{s_1}+\vec{S}_{s_2})^2 = \vec{S}_{s_1s_2}^2 = S_{ss}(S_{ss}+1) = 2$$

$$\vec{S}_{s_1}\vec{S}_{s_2} = \frac{1}{2}\left((\vec{S}_{s_1}+\vec{S}_{s_2})^2-\vec{S}_{s_1}^2-\vec{S}_{s_2}^2\right) = \frac{1}{2}\left(S_{ss}(S_{ss}+1)-2\cdot s_s(s_s+1)\right) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$M_\Xi = 2m_s+m_u+\frac{A}{4}\left(\frac{1}{m_s^2}-\frac{4}{m_u m_s}\right) \qquad (*)$$

A (*) -gal jelölt képletek megadják a 8 multiplet tömegét: N, Σ, Λ, Ξ

$\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$

3 paraméter van: m_u, m_s, A

Illesztve a mérési adatokra: $m_u = 363$ MeV

$m_s = 538$ MeV

$A = 4m_u^2 \cdot 50$ MeV

Ezekkel a paraméterekkel az elméleti értékek 1%-hibán belül vannak.

$\Rightarrow$ elég jó modell. (A kis eltérés EM miatt van)

mezonok

$$\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2 = \frac{1}{2}\left(j(j+1) - 2s(s+1)\right) = \begin{cases} -\frac{3}{4} & j=0 \quad \text{pszeudoskalár mezonok} \\ \frac{1}{4} & j=1 \quad \text{vektor mezonok} \end{cases}$$

$$M_K = m_u + m_s - \frac{3a}{4m_u \cdot m_s}, \qquad M_\pi = 2m_u - \frac{3a}{4m_u^2}$$

$$M_{K^*} = m_u + m_s + \frac{a}{4m_u \cdot m_s}, \qquad M_\omega = 2m_u + \frac{a}{4m_u^2}$$

Ez nem diagonális η_1 és η_8-ra (és hasonlóan nézve $\pi^0, \rho^0, \omega, \phi$-re van)

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right) \qquad \eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\right)$$

$$M(u\bar{u}) = 2m_u - \frac{3a}{4m_u^2}, \quad M(d\bar{d}) = 2m_d - \frac{3a}{4m_d^2}, \quad M(s\bar{s}) = 2m_s - \frac{3a}{4m_s^2}$$

Ez alapján: $$M_{\eta_8} = \frac{1}{6}\left(M(u\bar{u}) + M(d\bar{d}) + 4M(s\bar{s})\right) = \frac{2}{3}m_u + \frac{4}{3}m_s - \frac{a}{4m_s^2} - \frac{a}{2m_u^2}$$

$$M_{\eta_1} = \frac{1}{3}\left(M(u\bar{u}) + M(d\bar{d}) + M(s\bar{s})\right) = \frac{4}{3}m_u + \frac{2}{3}m_s - \frac{a}{2m_u^2} - \frac{a}{4m_s^2}$$

A valóságban η és η' az η_1 és η_8 keveréke, de praktikusan $\eta \equiv \eta_8$, η'-t pedig kihagyjuk.

Erre illesztve $m_u = m_d = 308$ MeV

$m_s = 483$ MeV

$a = 4m_u^2 \cdot 159 \text{ MeV} \approx 2{,}29 \cdot A$

itt is 1%-a hiba kivéve η és η'-t.

A baj ott van, hogy η' nem egy pszeudo Goldstone-bozon, de ez már bonyolultabb.

3. tétel: A 2-részecske fázisintegrál és a 2→2 szórás HKM-képletének általánosítása a pion spinjének meghatározásában

Nézzük a $a+b \to c+d$ folyamatot! Lendületek: p_a, p_b, p_c, p_d

Az összerakható Lorentz-invariánsok: $p_a^2=m_a^2$; $p_b^2=m_b^2$; $p_c^2=m_c^2$; $p_d^2=m_d^2$

$p_a p_b$; $p_a p_c$; $p_a p_d$; $p_b p_c$; $p_b p_d$; $p_c p_d$

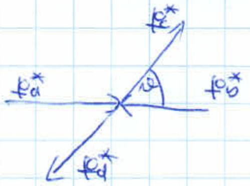
Az impulzusmegmaradás: $p_a+p_b=p_c+p_d$ 4 feltétel, tehát az alsó 6-ból csak 2 független.

Célszerűbb Mandelstam-változókkal dolgozni:

$$s=(p_a+p_b)^2=(p_c+p_d)^2$$
$$t=(p_a-p_c)^2=(p_d-p_b)^2$$
$$u=(p_a-p_d)^2=(p_c-p_b)^2$$

Ugyanígy, a 3-ból csak 2 független: $s+t+u=m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2$

Mivel invariánsok, ezért TKP-ban is igaz, hogy $s=(p_a^*+p_b^*)^2=(p_c^*+p_d^*)^2$



Mivel def szerint $\vec{p}_a^*+\vec{p}_b^*=0$ ezért $\sqrt{s}$ a teljes energia a TKP rendszerben: $p_a^*+p_b^*=\begin{pmatrix}\sqrt{s}\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ p_a^*(p_a^*+p_b^*)=E_a^*\sqrt{s}$$
$$=\frac{1}{2}\left((p_a^*+p_b^*)^2+p_a^{*2}-p_b^{*2}\right)$$

$$\Rightarrow\ E_a^*=\frac{1}{2\sqrt{s}}(s+m_a^2-m_b^2) \qquad \text{ugyanígy:}\quad E_c^*=\frac{1}{2\sqrt{s}}(s+m_c^2-m_d^2)$$
$$E_b^*=\frac{1}{2\sqrt{s}}(s+m_b^2-m_a^2) \qquad E_d^*=\frac{1}{2\sqrt{s}}(s+m_d^2-m_c^2)$$

Legyen $p_* := \vec{p}_a^* = -\vec{p}_b^*$

Mivel $s=(p_a^*+p_b^*)^2=p_a^{*2}+p_b^{*2}+2p_a^*p_b^*=m_a^2+m_b^2+2E_a^*E_b^*+2p_*^2$

$$\Rightarrow\ p_*^2=\frac{s-m_a^2-m_b^2}{2}-E_a^*E_b^*=\frac{s-m_a^2-m_b^2}{2}-\frac{s^2-(m_a-m_b)^2}{4s}=$$
$$=\frac{s^2-2s(m_a^2+m_b^2)+(m_a^2-m_b^2)^2}{4s}=\frac{\lambda(s,m_a^2,m_b^2)}{4s}$$

Källén-függvény: $\lambda(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=(x-y-z)^2-4yz$

Ugyanígy: $p'_*=\vec{p}_c^*=-\vec{p}_d^* \ \Rightarrow\ p'^2_*=\dfrac{\lambda(s,m_c^2,m_d^2)}{4s}$

Tekintsük az alábbi integrált: $I(s; m_c^2, m_d^2) = \int \frac{d^3\mathbf{p}_c}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_c} \int \frac{d^3\mathbf{p}_d}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_d} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(x - p_c - p_d)$

ahol $x = p_a - p_b$ és $\omega_i^2 = \mathbf{p}_i^2 + m_i^2$

Innentől minden a TKP rendszerben értendő, tehát $x = \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$

Felbontva $\delta^{(4)}$-t:

$$I(s, m_c^2, m_d^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_c}{\omega_c} \int \frac{d^3\mathbf{p}_d}{\omega_d} \delta(\sqrt{s} - \omega_c - \omega_d)\, \delta^{(3)}(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int d^3\mathbf{p}_c \frac{\delta\left(\sqrt{s} - \sqrt{\mathbf{p}_c^2 + m_c^2} - \sqrt{\mathbf{p}_c^2 + m_d^2}\right)}{\sqrt{(\mathbf{p}_c^2 + m_c^2)(\mathbf{p}_c^2 + m_d^2)}} =$$ $d^3\mathbf{p}$-t felbontva $d\Omega\, dp\, p^2$-re

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \int_0^\infty dp\, p^2 \frac{\delta\left(\sqrt{s} - \sqrt{p^2 + m_c^2} - \sqrt{p^2 + m_d^2}\right)}{\sqrt{(p^2 + m_c^2)(p^2 + m_d^2)}}$$

új változó: $w(p) := \sqrt{p^2 + m_c^2} + \sqrt{p^2 + m_d^2} - \sqrt{s}$

$$\frac{dw}{dp} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_c^2}} + \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_d^2}} \quad \Rightarrow \quad dw = \frac{\sqrt{p^2 + m_c^2} + \sqrt{p^2 + m_d^2}}{\sqrt{(p^2 + m_c^2)(p^2 + m_d^2)}}\, p\, dp$$

$$I(s, m_c^2, m_d^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \int_{m_c + m_d - \sqrt{s}}^{\infty} dw\, p(w)\, \delta(w) = \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \cdot p(w=0)\, \Theta(\underbrace{\sqrt{s} - m_c - m_d}_{E^* \geq \sum_i m_i})$$

Mi lesz $p(w=0)$? $\quad 0 = w(\bar{p}) = \sqrt{\bar{p}^2 + m_c^2} + \sqrt{\bar{p}^2 + m_d^2} - \sqrt{s}$

$$\Rightarrow \quad s = 2\bar{p}^2 + m_c^2 + m_d^2 + 2\sqrt{(\bar{p}^2 + m_c^2)(\bar{p}^2 + m_d^2)} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow (s - m_c^2 - m_d^2)^2 + 4\bar{p}^4 - 4\bar{p}^2(s - m_c^2 - m_d^2) = 4\left(\bar{p}^4 + \bar{p}^2(m_c^2 + m_d^2) + m_c^2 m_d^2\right)$$

$$\Rightarrow \bar{p}^2 = \frac{(s - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}{4s} = \frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{4s}$$

(*) miatt ellenőrizni kell, hogy $s - 2\bar{p}^2 - m_c^2 - m_d^2 \geq 0$ (nem hamis gyök-e)

$$s - \frac{(s - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}{2s} - m_c^2 - m_d^2 = \frac{1}{2s}\left(2s^2 - \left(s^2 - 2s(m_c^2 + m_d^2) + (m_c^2 + m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2\right) - 2s(m_c^2 + m_d^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2s}\left(s^2 - (m_c^2 + m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2\right) \geq \frac{1}{2s}\left((m_c + m_d)^4 - (m_c^2 + m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2s}\left(4m_c m_d (m_c^2 + m_d^2)\right) \geq 0 \quad \checkmark$$

Tehát $I(s, m_c^2, m_d^2) = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}}{s} \int d\Omega$ (itt Ω a TKP rendszerben értendő)

Nézzük a HKM-t:

$$\sigma = \frac{1}{4\omega_a \omega_b |\underline{v}_a - \underline{v}_b|} \int d\Pi_{LIPS} \, |M(p_a, p_b, p_c, p_d)|^2 \qquad \text{ahol } d\Pi_{LIPS} = \frac{d^3p_c}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_d}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_c \cdot 2\omega_d} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d)$$

Nézzük a nevezőt:

$$4\omega_a^2 \omega_b^2 |\underline{v}_a - \underline{v}_b|^2 = 4\omega_a^2 \omega_b^2 \left(\frac{\underline{p}_a}{\omega_a} - \frac{\underline{p}_b}{\omega_b}\right)^2 = 4\left(\omega_a^2 \underline{p}_b^2 + \omega_b^2 \underline{p}_a^2 - 2\omega_a \omega_b \underline{p}_a \underline{p}_b\right) =$$

$$= 4\left[(\underline{p}_a^2 + m_a^2)\underline{p}_b^2 + (\underline{p}_b^2 + m_b^2)\underline{p}_a^2 - 2\omega_a \omega_b \underline{p}_a \cdot \underline{p}_b\right] =$$

$$= 4\left[(\omega_a \omega_b - \underline{p}_a \underline{p}_b)^2 - (\underline{p}_a^2 + m_a^2)(\underline{p}_b^2 + m_b^2) + m_a^2 \underline{p}_b^2 + m_b^2 \underline{p}_a^2 + \underline{p}_a^2 \underline{p}_b^2\right]$$

$$= 4\left[(\omega_a \omega_b - \underline{p}_a \underline{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2\right] = 4\left((p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2\right) = 4\left[\left(\frac{1}{2}(s - m_a^2 - m_b^2)\right)^2 - m_a^2 m_b^2\right] =$$

$$= (s - m_a^2 - m_b^2) - 4m_a^2 m_b^2 = \lambda(s, m_a^2, m_b^2)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \int d\Pi_{LIPS} \, |M(s,t)|^2 = \qquad \text{mivel } \int d\Pi_{LIPS} \text{ u.a. mint } I(s, m_c^2, m_d^2)$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \int d\Omega_{CM} |M(s,t)|^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} |M(s,t)|^2$$

TFH c és d részecske közül az egyik (ϑ, φ) irányba megy. Ekkor a másik iránya $(\pi - \vartheta, -\varphi)$.

Ha $c \neq d$ megkülönböztethetők $\Rightarrow \int d\varphi \, d(\cos\vartheta) = 4\pi$

Ha $c = d$ megkülönböztethetetlen $\Rightarrow$ minden esetet 2-szer számolnánk $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int d\varphi \, d(\cos\vartheta) = 2\pi$

Ha a kezdeti és végső nyalábok spinje nem polarizáltak, akkor összegezni kell:

$$d\sigma = \frac{1}{(2j_a+1)(2j_b+1)} \sum_{\lambda_i \lambda_f} d\sigma(\lambda_i, \lambda_f) \qquad \text{ahol } j_i \text{ a spin}$$

λ_i pedig a lehetséges spinállapot.

Mivel $\sqrt{\frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} = \frac{p'_*}{p_*}$ szerint

$$d\sigma(a+b \to c+d) = \frac{\sum_{\lambda_i \lambda_f} |M(s,t,\lambda_i,\lambda_f)|^2 \, d\Omega_{CM}^F}{64\pi^2 s (2j_a+1)(2j_b+1)} \frac{p'_*}{p_*}$$

Megfordítva:

$$d\sigma(c+d \to a+b) = \frac{\sum_{\lambda_i \lambda_f} |M(s,t,\lambda_i,\lambda_f)|^2 \, d\Omega_{CM}^i}{64\pi^2 s (2j_c+1)(2j_d+1)} \frac{p_*}{p'_*}$$

T-szimmetria miatt M elemei megegyeznek a két képletben, tehát

$$\frac{d\sigma(a+b\to c+d)}{d\sigma(c+d\to a+b)}=\frac{p_*'^2}{p_*^2}\,\frac{(2j_c+1)(2j_d+1)}{(2j_a+1)(2j_b+1)}\,\frac{d\Omega^F_{CM}}{d\Omega^I_{CM}}$$

A megkülönböztethetetlenség miatt $\frac{d\Omega^F_{CM}}{d\Omega^I_{CM}}=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{ha "}a\neq b\text{" és "}c=d\text{"}\\ 2 & \text{ha "}a=b\text{" és "}c\neq d\text{"}\\ 1 & \text{ha "}a=b\text{" és "}c=d\text{" vagy "}a\neq b\text{" és "}c\neq d\text{"}\end{cases}$

Alkalmazzuk ezt a $d+\pi^+\leftrightarrow p+p$ folyamatra

$$\frac{d\sigma(d+\pi^+\to p+p)}{d\sigma(p+p\to d+\pi^+)}=\frac{1}{2}\,\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)^2}{(2\cdot 1+1)\cdot(2j_{\pi^+}+1)}\cdot\frac{p_*'^2}{p_*^2}=\frac{2}{3(2j_{\pi^+}+1)}\,\frac{p_*'^2}{p_*^2}$$

A mérések alapján $j_{\pi^+}=0$.

4. tétel: Keresztezési szimmetria és következményei a π - π - szórási amplitúdóra

A 2 -> 2 folyamatok általános alakja:

$$a + b \to c + d$$

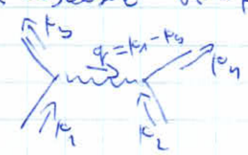
Mandelstam - változók:

$$s = (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2$$
$$t = (p_1-p_3)^2 = (p_4-p_2)^2$$
$$u = (p_1-p_4)^2 = (p_3-p_2)^2$$

A perturbációszámítás legalacsonyabb rendjében 3 - féle képet osztályozhatjuk:

- s - csatornás folyamat: A virtuális részecske $\sqrt{s} = p_1 + p_2$ impulzusú

- t - csatornás folyamat: A virtuális részecske $\sqrt{t} = p_1 - p_3$ impulzusú

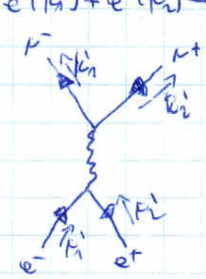


- u - csatornás folyamat: A virtuális részecske $\sqrt{u} = p_1 - p_4$ impulzusú

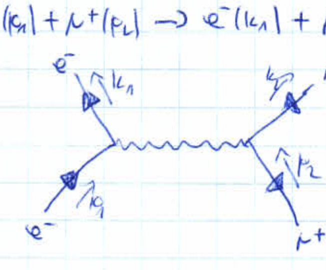
$q = p_1 - p_4$

Keresztezési szimmetria: A szórási amplitúdó kifejezhető másik folyamat szórási amplitúdójával ha a két folyamatban kicseréljük valamely részecske - antirészecske állapotot a keresztezett folyamatra.

Pl.: $e^-(p_1') + e^+(p_2') \to \mu^-(k_1') + \mu^+(k_2')$ $\qquad$ $e^-(p_1) + \mu^+(p_2) \to e^-(k_1) + \mu^+(k_2)$



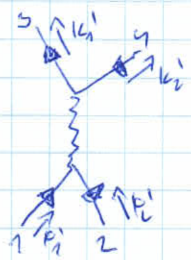
$M'(p_1', p_2', k_1', k_2')$



$M(p_1, p_2, k_1, k_2)$

$$\sum_{spin} |M(p_1, p_2, k_1, k_2)|^2 = \sum_{spin} |M'(p_1, -k_1, -p_2, k_2)|^2 (-1)^2$$

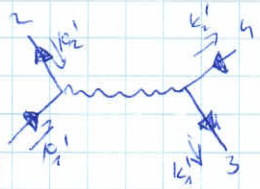
a kereszteződés :



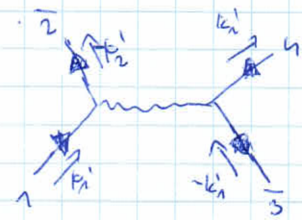
2 és 3 átfordítjuk $\longrightarrow$

$\longrightarrow$

átrendezve $\longrightarrow$



2 és 3 antirészecske $\longrightarrow$



formálisan: $a(p_1')+b(p_2')\to c(k_1')+d(k_2')$

$$a(p_1')+\bar c(-k_1')\to \bar b(-p_2')+d(k_2')$$
$$\underset{p_1}{\parallel}\qquad \underset{p_2}{\parallel}\qquad \underset{k_1}{\parallel}\qquad \underset{k_2}{\parallel}$$

általánosan: $\sum_{spin}|M(p_1\cdots p_n)|^2=(-1)^F\sum_{spin}|M'(p_1'\cdots p_n')|^2$

ahol F: a keresztezett részecskék száma

$p_i'=-p_i$ a keresztezett részecskékre.

Ez csak formális, hiszen $-p_i=(-E,-\mathbf{p})$ ami nem fizikai állapot

TFH az eredeti $a(p_1')+b(p_2')\to c(p_3')+d(p_4')$ s-csatornás!

1. keresztezés: $a(p_1')+\bar c(-p_3')\to \bar b(-p_2')+d(p_4')$

az impulzusok: $p_1=p_1'$, $p_2=-p_3'$, $p_3=-p_2'$, $p_4=p_4'$

$s'=(p_1'+p_2')^2=(p_1-p_3)^2=t$

$t'=(p_1'-p_3')^2=(p_1+p_2)^2=s$ $\qquad s\leftrightarrow t$

$u'=(p_1'-p_4')^2=(p_1-p_4)^2=u$

$\Rightarrow$ t-csatornás folyamat.

2. kereszteződés: $a(p_1')+\bar d(-p_4')\to \bar b(-p_2')+c(p_3')$

impulzusok: $p_1=p_1'$, $p_2=-p_4'$, $p_3=p_3'$, $p_4=-p_2'$

$s'=(p_1'+p_2')^2=(p_1-p_4)^2=u$

$t'=(p_1'-p_3')^2=(p_1-p_3)^2=t$ $\qquad s\leftrightarrow u$

$u'=(p_1'-p_4')^2=(p_1+p_2)^2=s$

$\Rightarrow$ u-csatornás folyamat.

Tekintsük az alábbi folyamatot: $\pi_\alpha(p_1) + \pi_\beta(p_2) \longrightarrow \pi_\gamma(p_3) + \pi_\delta(p_4)$

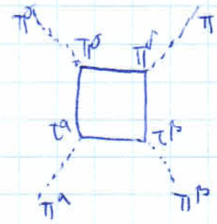
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ izospin indexek : 1, 2, 3.

1. keresztezödés: $\pi_\alpha(p_1) + \bar{\pi}_\gamma(-p_3) \to \bar{\pi}_\beta(-p_2) + \pi_\delta(p_4)$ $\qquad s \leftrightarrow t$

2. keresztezödés: $\pi_\alpha(p_1) + \bar{\pi}_\delta(-p_4) \to \pi_\gamma(p_3) + \bar{\pi}_\beta(-p_2)$ $\qquad s \leftrightarrow u$

A nukleon-pion KH Lagrange-fn: $\mathcal{L}_{\pi N} = i g \bar{\psi} \gamma^5 \pi^a \tau^a \psi$

Ez alapján a legalacsonyabb rendű folyamat:



A belső fermionhurok trace-e:

mert $\mathrm{tr}\,\tau = 0$

$$\mathrm{tr}(\tau^\alpha \tau^\beta \tau^\delta \tau^\gamma) = \mathrm{tr}\left[(\delta_{\alpha\beta} \mathbb{1} + i \varepsilon_{\alpha\beta\sigma} \tau_\sigma)(\delta_{\delta\gamma} \mathbb{1} + i \varepsilon_{\delta\gamma\varrho} \tau_\varrho)\right] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma}\, \mathrm{tr}\,\mathbb{1} - \varepsilon_{\alpha\beta\sigma} \varepsilon_{\delta\gamma\varrho} \underbrace{\mathrm{tr}(\tau_\sigma \tau_\varrho)}_{2\delta_{\sigma\varrho}} + 0 =$$

$$= 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} - 2\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\varepsilon_{\sigma\delta\gamma} = 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - 2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$$

Tehát az átmeneti mátrix általános alakja:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t,u) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} A(s,t,u) + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} B(s,t,u) + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} C(s,t,u)$$

1. keresztezödés után: $T_{\alpha\gamma\beta\delta}(t,s,u) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} A(t,s,u) + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} B(t,s,u) + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} C(t,s,u)$

2. keresztezödés után: $T_{\alpha\delta\gamma\beta}(u,t,s) = \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta} A(u,t,s) + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} B(u,t,s) + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} C(u,t,s)$

Szimmetria továbbá a Bose-Einstein szimmetria, ami alapján a két végállapot is felcserélhető: $\gamma \leftrightarrow \delta$, $t \leftrightarrow u$

$$T_{\alpha\beta\delta\gamma}(s,u,t) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} A(s,u,t) + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} B(s,u,t) + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} C(s,u,t)$$

A szimmetriák miatt $T_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t,u) \underset{K1}{=} T_{\alpha\gamma\beta\delta}(t,s,u) \underset{K2}{=} T_{\alpha\delta\gamma\beta}(u,t,s) \underset{BE}{=} T_{\alpha\beta\delta\gamma}(s,u,t)$

A megfelelő $\delta\delta$ tagok együtthatói egyenlők. Ebből:

$B(s,t,u) = A(t,s,u)$ (*)
$C(s,t,u) = C(t,s,u)$
$C(s,t,u) = A(u,t,s)$ (*)
$B(u,t,s) = B(s,t,u)$
$A(s,u,t) = A(s,t,u)$
$B(s,t,u) = C(s,u,t)$

(*) képleteket kihasználva

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t,u) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} A(s,t,u) + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} A(t,s,u) + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} A(u,t,s)$$

projektorok

2 pion rendszernek 9-féle izospin állapota van $(3\cdot 3)$. Ennek az irreducibilis felbontása: $\underset{}{3\otimes 3} = \underset{T=0}{1} \oplus \underset{T=1}{3} \oplus \underset{T=2}{5}$

Mivel $\vec T = \vec t_1 + \vec t_2$ ezért $\vec T^2 = T(T+1) = (\vec t_1 + \vec t_2)^2 = \vec t_1^{\,2} + \vec t_2^{\,2} + 2\vec t_1 \vec t_2 =$

$$= t_1(t_1+1) + t_2(t_2+1) + 2\vec t_1 \vec t_2$$

A π izospinje $t_\pi = 1$, tehát

$$\vec t_1 \vec t_2 = \frac{1}{2}T(T+1) - 2 = \begin{cases} -2 & T=0 \\ -1 & T=1 \\ +1 & T=2 \end{cases}$$

Tekintsük az alábbi kombinációkat:

	$T=0$	$T=1$	$T=2$
$\vec t_1 \vec t_2 + 2 =$	0	1	3
$\vec t_1 \vec t_2 + 1 =$	-1	0	2
$\vec t_1 \vec t_2 - 1 =$	-3	-2	0

A i. állapotra való projektáláshoz a többit akarjuk kinullázni, tehát

$$P^{(2)} = \frac{1}{6}(\vec t_1 \vec t_2 + 2)(\vec t_1 \vec t_2 + 1)$$

$$P^{(1)} = \frac{1}{2}(\vec t_1 \vec t_2 + 2)(1 - \vec t_1 \vec t_2)$$

$$P^{(0)} = \frac{1}{3}(\vec t_1 \vec t_2 + 1)(\vec t_1 \vec t_2 - 1)$$

Kihasználva, hogy $\langle \pi_\beta | t^a | \pi_\alpha \rangle = (t^a)_{\beta\alpha} = -i\,\varepsilon_{\beta\alpha a}$

$$P^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle \pi_\alpha \pi_\beta | P^{(2)} | \pi_\gamma \pi_\delta \rangle = \frac{1}{6}\langle \alpha\beta | (\vec t_1 \vec t_2 + 2)(\vec t_1 \vec t_2 + 1) | \gamma\delta \rangle =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\rho,\sigma=1}^{3} \langle \alpha\beta | \vec t_1 \vec t_2 + 2 | \rho\sigma \rangle \langle \rho\sigma | \vec t_1 \vec t_2 + 1 | \gamma\delta \rangle =$$

$$= \frac{1}{6}\Big((-i\varepsilon_{\alpha\rho i})(-i\varepsilon_{\beta\sigma i}) + 2\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} \Big)\Big((-i\varepsilon_{\rho\gamma j})(-i\varepsilon_{\sigma\delta j}) + \delta_{\rho\gamma}\delta_{\sigma\delta} \Big) =$$

$$= \frac{1}{6}\Big(-\delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho} + 2\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} \Big)\Big(-\delta_{\rho\sigma}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\rho\delta}\delta_{\gamma\sigma} + \delta_{\rho\gamma}\delta_{\sigma\delta} \Big) =$$

$$= -\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \right)$$

Hasonlóan:

$$P^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \right) \qquad P^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$$

Belátható, hogy teljesül a $\sum_{\rho,\sigma=1}^{3} P^{(i)}_{\alpha\beta\rho\sigma} P^{(i')}_{\rho\sigma\gamma\delta} = \delta_{ii'} P^{(i)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ projektor-azonosság.

Hattassuk őket az átmeneti mátrixra:

$$T^{(0)}(s,t,u) = P^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} T_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t,u) = 3A(s,t,u) + A(t,s,u) + A(u,t,s)$$

$$T^{(1)}(s,t,u) = P^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} T_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t,u) = A(t,s,u) - A(u,t,s)$$

$$T^{(2)}(s,t,u) = P^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} T_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t,u) = A(t,s,u) + A(u,t,s)$$

azaz $T_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t,u) = \sum_{I=0}^{2} P^{(I)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, T^{I}(s,t,u)$

Tudjuk, hogy s, t, u nem függetlenek, hiszen $s+t+u=4m^2$.

$T^{(I)}$ csak 2 független paramétertől függ, ezek lehetnek s és t, vagy TKP rendszerbeli szöge s és ϑ. Legyen ez utóbbi, és bontsuk ki a parciális hullámok szerint:

$$T^I(s,\vartheta) = 32\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, P_l(\cos\vartheta)\, t_l^I(s)$$

l: pálya-impulzusmomentum

P_l: Legendre-polinom

ahol $$t_l^I(s) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\, P_l(\cos\vartheta)\, T^I(s, \cos\vartheta)$$

Állítás: $4m^2 < s < 16m^2$ tartományban t_l^I felbontható

$$t_l^I = q^{2l}\left(\underbrace{a_l^I}_{\text{szórási hossz}} + \underbrace{b_l^I}_{\text{effektív hatótávolság}} q^2 + O(q^4)\right) \qquad q^2 = \frac{1}{4}(s-4m^2)$$

továbbá $$t_l^I(s) = \sqrt{\frac{s}{s-4m^2}}\, e^{i\delta_l^I} \sin\delta_l^I$$ δ_l^I: fázistolás

a_l^I és δ_l^I a szórási kísérletekben kimérhetők.

5. tétel: Unitaritás és az optikai tétel, valamint alkalmazásaik az egy-hurok sajátenergia kiszámolásában

Legyen egy rendszer kezdeti állapota $|i\rangle$, és jelölje P_n annak a valószínűségét, hogy egy idő után $|n\rangle$ állapotban találjuk!

Ha $\{|n\rangle \mid n\in \mathbb{N}\}$ teljes halmaz, akkor $\sum_n P_n = 1$.

Az S-mátrixot használva, a rendszer végállapota $S|i\rangle$, tehát a valószínűség:

$$P_n = |\langle n|S|i\rangle|^2$$

Ebből:

$$1 = \sum_n |\langle n|S|i\rangle|^2 = \sum_n \langle i|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle$$

Legyenek $|a\rangle$ és $|b\rangle$ ortonormáltak! $|i\rangle = \frac{\alpha|a\rangle+\beta|b\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}$ kezdőállapottal

$$1 = \frac{1}{|\alpha|^2+|\beta|^2}\left[|\alpha|^2\langle a|S^\dagger S|a\rangle + |\beta|^2\langle b|S^\dagger S|b\rangle + \alpha^*\beta\langle a|S^\dagger S|b\rangle + \alpha\beta^*\langle b|S^\dagger S|a\rangle\right]$$

Kihasználva, hogy $\alpha=1, \beta=0$ vagy $\alpha=0, \beta=1$ esetén $\langle a|S^\dagger S|a\rangle = \langle b|S^\dagger S|b\rangle = 1$, az előbbi kifejezésből az alábbi marad:

$$\alpha^*\beta\langle a|S^\dagger S|b\rangle + \alpha\beta^*\langle b|S^\dagger S|a\rangle = 0$$

Legyen α és β olyan, hogy $\alpha^*\beta = -\alpha\beta^*$ vagy $\alpha^*\beta = \alpha\beta^*$ $\Rightarrow$ $\langle a|S^\dagger S|b\rangle = \langle b|S^\dagger S|a\rangle = 0$

$\Rightarrow S^\dagger S = SS^\dagger = \mathbb{1}$ (Azt kell belátni, hogy mivel $S^\dagger S|b\rangle \perp |a\rangle$ $\forall |a\rangle\perp|b\rangle$, ezért $S^\dagger S = \mathbb{1}\cdot\lambda$ ahol $\lambda=1$. Hasonlóan $SS^\dagger$-ra)

Az unitaritás következményeként lehet levezetni az optikai tételt:

$$S = 1 + iT \leftarrow \text{transzfer mátrix.}$$

S unitér $\Rightarrow$ $\mathbb{1} = S^\dagger S = (\mathbb{1}-iT^\dagger)(\mathbb{1}+iT) = \mathbb{1} + i(T-T^\dagger) + T^\dagger T \Rightarrow \underline{i(T^\dagger - T) = T^\dagger T}$ (*)

Kiemelve az impulzus megmaradást: $T = (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right) M$

$$\langle f|S-\mathbb{1}|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right)\underbrace{\langle f|M|i\rangle}_{\text{erre írhatók fel a Feynman-szabályok}}$$

(*) bal oldalából:

$$\langle f|i(T^\dagger - T)|i\rangle = i\langle f|T^\dagger|i\rangle - i\langle f|T|i\rangle = i\langle i|T|f\rangle^* - i\langle f|T|i\rangle =$$
$$= i(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum p_i - \sum p_f\right)\left(M^*(f\to i) - M(i\to f)\right)$$

(*) jobb oldalából:

$$\langle f|T^\dagger T|i\rangle = \sum_x \int d\Pi_x \langle f|T^\dagger|x\rangle\langle x|T|i\rangle =$$
$$= \sum_x (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_f p_f - p_x\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_i p_i - p_x\right)\int d\Pi_x M(i\to x) M^*(f\to x)$$

ahol $d\Pi_x = \prod_{j\in x}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_j}$

A két kifejezés egyezőségéből:

$$M(i\to f) - M^*(f\to i) = i \sum_x \int d\Pi_x (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(\sum_i p_i - \sum_f p_x\Big) M(i\to x)\, M^*(f\to x)$$

általános optikai tétel.

Spec eset: $i = f = A$ (tovább-szórás)

akkor $M(A\to A) - M^*(A\to A) = 2i\,\mathrm{Im}\, M(A\to A)$

$M(A\to A)\, M^*(A\to A) = |M(A\to A)|^2$

tehát.

$$2\,\mathrm{Im}\, M(A\to A) = \sum_x \int d\Pi_x (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_x)\, |M(A\to A)|^2$$

Ha A 2-részecske állapot, akkor a HKM

$$\sigma(A\to x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}} \int d\Pi_x (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_x)\, |M(A\to A)|^2$$

vagyis

$$\mathrm{Im}\, M(A\to A) = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \sum_x \sigma(A\to x) = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}\ \sigma_{tot}$$

Ha A 1-részecske állapot, akkor bomlásállandó:

$$\Gamma(A\to x) = \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_x (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_x)\, |M(A\to x)|^2$$

vagyis

$$\mathrm{Im}\, M(A\to A) = m_A \sum_x \Gamma(A\to x) = m_A\, \Gamma_{tot}$$

$\Gamma_{tot} \sim \frac{1}{\tau}$ ← bomlási idő

A perturbációszámítás legalacsonyabb rendjében x egy 2-részecske állapot, $M(A\to A)$ pedig egy egy-hurok integrál (hurokintegrál):

Im  $\sim \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_1\omega_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2)$ $\Big|$  $\Big|^2$

$M(A\to A)$ $\qquad\qquad$ $M(A\to x)$

A $\Phi \to \varphi\varphi$ folyamathoz tartozó transzfermátrix:  $\qquad \mathcal{H}_I = \frac{g}{2}\int d^3x\, \Phi(x)\varphi^2(x)$

$$T_{fi} = \langle k_1' k_2' |\, -i\frac{g}{2} \int dt \int d^3x\, \Phi(x,t)\, \varphi^2(x,t)\, | k_1\rangle$$

feltételezve, hogy $\Phi(x,t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\Omega_p} \left[A_p e^{-ipx} + A_p^+ e^{ipx}\right]$

$$\varphi(x,t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^+ e^{ipx}\right)$$

valamint $|k_1\rangle = \sqrt{2\Omega_{k_1}}\, A^+_{k_1}|0\rangle \qquad |k_1' k_2'\rangle = \sqrt{2\omega_{k_1'}}\sqrt{2\omega_{k_2'}}\, a^+_{k_1'} a^+_{k_2'}\, |0\rangle$

$$T_{fi} = -ig\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - k_1' - k_2') \quad \Rightarrow \quad |M_{fi}|^2 = g^2$$

Kiszámolva a bomlásállandót:

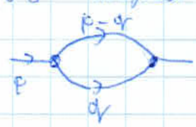
$$\Gamma(\phi\to\ell\ell) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{végállapot}\\ \text{felcserélési szimmetria}}}{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{2M}\int\frac{d^3\underline{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\underline{k}_1}}\int\frac{d^3\underline{k}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\underline{k}_2}}\ \overbrace{(2\pi)^4\delta^{(3)}(\underline{k}_1+\underline{k}_2)\,\delta(\omega_1+\omega_2-M)}^{\delta^{(4)}(p-p_1-p_2)\ \text{TKP-rendszerben.}}\ \underbrace{|M_{fi}|^2}_{g^2} =$$

$$= \frac{g^2}{16M}\int\frac{d^3\underline{k}_1}{(2\pi)^2}\ \frac{\delta(2\omega_{k_1}-M)}{\omega_{k_1}^2} = \frac{g^2\,4\pi}{16M\cdot4\pi^2}\int_0^\infty dk\,k^2\ \frac{\delta\left(\sqrt{k^2+m^2}-M\right)}{k^2+m^2} =$$

$$= \frac{g^2}{16M\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{k^2}{k^2+m^2}\ \frac{\delta\left(k-\sqrt{\frac{M^2}{4}-m^2}\right)}{2\sqrt{1-\frac{4m^2}{M^2}}} = \frac{g^2}{32\pi M}\sqrt{1-\frac{4m^2}{M^2}}$$

Áttérve TKP rendszerből tetszőleges rendszerbe: $\Gamma(s) = \dfrac{g^2}{32\pi\sqrt{s}}\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}$

A buborékintegrál:



$$= \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{n!}}}{\frac{1}{2!}}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{külső élek}\\ \text{permutációja}\\ \text{miatt}}}{2}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ \text{belső élek}\\ \text{párosítása miatt}}}{2}\left(-\frac{ig}{2}\right)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,G_0(q)\,G_0(p-q) = -\frac{g^2}{2}\,B(s=p^2)$$

ahol $B(s)$ csupán a buborék járuléka a külső élek nélkül.

Az optikai tétel alapján tehát: $\operatorname{Im}B(s) = -\dfrac{\Theta(s-4m^2)}{16\pi}\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}$

(Ha $s<4m^2$, a folyamat nem mehet végbe, így ebben az esetben a gondolatmenet érvénytelen, nincs bomlás, ezért ekkor $\operatorname{Im}B = 0$.)

B valós része a képzetes rész ismeretében már számolható a diszperziós relációkkal. Mivel logaritmikus divergencia van, ezért a kivonásos diszperziós relációt kell használni:

$$\operatorname{Re}B(s) = \operatorname{Re}B(\mu^2) + \frac{s-\mu^2}{\pi}\,P\!\int_{4m^2}^{\infty}ds'\,\frac{\operatorname{Im}B(s')}{(s'-\mu^2)(s'-s)}$$

Ennek a módszernek a szerepe ugyanaz, mint a renormalizálásé.

6. tétel: Diszperziós relációk és a különbségi diszperziós reláció koncepciója

A diszperziós relációk összekapcsolják a komplex fv-k valós és képzetes részét.

Kauzalitás: Semmilyen jel nem terjedhet gyorsabban, mint a fény.
mikroszkopikus szinten: A térszerűen elválasztott téroperátorok felcserélnek

Kapcsolat a QFT-ben a renormalizációval.
Egy fv Fourier-trafója analitikusan folytatható lesz, erre írunk majd fel feltételeket $\Rightarrow$ A diszperziós relációk a renormalizációval függnek össze.

TFH egy rendszer egy $I(t)$ bemeneti jel hatására $R(t)$ választ ad, és közöttük a kapcsolat lineáris. A szuperpozíció elve alapján:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')\, I(t')$$

Időeltolási szimmetriát feltételezve $G(t,t')$ $G(t-t')$ alakú, mert egy eltolásra:

ha $I(t)$ éles jel: $I_1(t) = I_0\,\delta(t'-t_0)$

$$\Rightarrow R_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')\, I_0\,\delta(t'-t_0) = I_0\, G(t-t_0)$$

$$I_2 = I_1(t'-\tau) = I_0\,\delta(t'-t_0-\tau)$$

$$\Rightarrow R_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')\, I_0\,\delta(t'-t_0-\tau) = I_0\, G(t-t_0-\tau)$$

$$\Rightarrow R_1(t) = R_2(t+\tau)$$

A kauzalitás miatt nem akarjuk, hogy visszafelé hasson $\Rightarrow G(t<0) = 0$

$$\Rightarrow G(t-t') = 0 \quad t' > t. \quad \Rightarrow \quad R(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t-t')\, I(t')$$

Követelmények G-re:
- $G(t)$ ne legyen szinguláris, hiszen véges választ akarunk.
- $G(t\to\infty) = 0$, vagyis a rendszerben legyen disszipáció
- Ahhoz, hogy a Fourier értelmes legyen, az kell, hogy $G(t)$ lecsengése gyorsabb legyen, mint $\frac{1}{t}$ $\quad t\to\infty$ esetén.

Legyen $\tilde{G}(\omega) = \int_0^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, G(t)$ (Fourier)

Ha a követelmények teljesülnek, akkor $\tilde{G}(\omega)$ kiterjeszthető a komplex síkra és

1) $\lim_{|z|\to\infty} |\tilde{G}(z)| = 0$ ha $\operatorname{Im} z \geq 0$

bizonyítás: $z := \omega + i\eta \quad \eta > 0$

$$\tilde{G}(z) = \int_0^{\infty} dt\, G(t)\, e^{i\omega t}\, \underbrace{e^{-\eta t}}_{\text{csökken}} \Rightarrow \tilde{G}(z) \text{ véges.}$$

z-t trigonometrikus alakba írva: $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad 0 < \alpha < \pi$

$$|e^{izt}| = \underbrace{|e^{i|z|\cos\alpha t}|}_{1} \cdot e^{-t|z|\sin\alpha}$$

ha $\sup G(t) = M_G$ akkor

$$|\tilde{G}(z)| \leq M_G \int_0^{t} dt\, e^{-t|z|\sin\alpha} = \frac{M_G}{|z|\sin\alpha} \to 0$$

2) Analitikus a felső félsíkon.

Ui.: $\frac{d^n \tilde{G}(z)}{dz^n} = i^n \int_0^\infty dt\, t^n\, G(t)\, e^{i\omega t} e^{-\eta t}$ létezik, mivel $e^{-\eta t}$ miatt.

A létezés miatt integrálhatunk az alábbi kontúron:

Mivel nincs belül pólus, ezért $\oint_C \frac{\tilde{G}(z)}{z-\alpha}\, dz = 0$

Integrálási darabok:

(a) egyenes szakaszok: $\lim_{r\to 0}\left[\int_{-R}^{\alpha-r} \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega-\alpha}\, d\omega + \int_{\alpha+r}^{R} \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega-\alpha}\, d\omega\right] = \mathrm{def}\ R = P\int_{-R}^{R} \frac{\tilde{G}(x)}{x-\alpha}\, dx$

(b) nagy körön: $\int_\Gamma \frac{\tilde{G}(z)}{z-\alpha}\, dz =$ $R\to\infty$ esetén $G(z)\to 0$ $= 0$

(c) kis körön: $\int_\gamma \frac{\tilde{G}(z)}{z-\alpha}\, dz = \tilde{G}(\alpha)\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} + \int_\gamma dz\, \frac{\tilde{G}(z)-\tilde{G}(\alpha)}{z-\alpha} =$ $\quad z-\alpha \equiv r e^{i\varphi}$, $dz = i r e^{i\varphi} d\varphi$

$$= \tilde{G}(\alpha)\int_\pi^0 \frac{i r e^{i\varphi} d\varphi}{r e^{i\varphi}} + \underbrace{\int_\pi^0 i r e^{i\varphi} d\varphi \left(f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(z-\alpha) + \cdots\right)}_{\lim_{r\to 0}\, = 0} =$$

$$= -\tilde{G}(\alpha)\, i\pi$$

$(a)+(b)+(c) = 0 \implies P\int_{-R}^{R} \frac{\tilde{G}(x)}{x-\alpha}\, dx = i\pi\, \tilde{G}(\alpha)$

$G \to f$ jelöléssel

$$f(\omega) = \frac{1}{i\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, f(\omega')\, \frac{1}{\omega'-\omega}$$

Szétbontva $f(\omega) = f_R(\omega) + i f_I(\omega)$ alakban.

$$\boxed{f_R(\omega) = \frac{1}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \frac{f_I(\omega')}{\omega'-\omega} \qquad f_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \frac{f_R(\omega')}{\omega'-\omega}}$$

Ha $G(t)$ valós, akkor $G^*(t) = G(t)$, akkor $\tilde{G}(\omega) = \int_0^\infty dt\, G(t)\, e^{i\omega t}$ és
$\tilde{G}^*(\omega) = \int_0^\infty dt\, G^*(t)\, e^{-i\omega^* t} = \int_0^\infty dt\, G(t)\, e^{-i\omega^* t} =$
$= \tilde{G}(-\omega^*)$
$\implies \tilde{G}(\omega) = \tilde{G}^*(-\omega^*)$

Kihasználva a $f(\omega) = f^*(-\omega^*)$ feltételt $\leftarrow$

$f_R(-\omega) = f_R(\omega)$

$f_I(-\omega) = -f_I(\omega)$

$$\implies f_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P\left(\int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'-\omega} + \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\right) f_I(\omega') \overset{\omega'\to-\omega'}{=} \frac{1}{\pi} P\int_0^\infty d\omega' \left(\frac{f_I(\omega')}{\omega'-\omega} - \frac{f_I(-\omega')}{\omega'+\omega}\right) = \frac{1}{\pi} P\int_0^\infty d\omega'\, f_I(\omega')\, \frac{2\omega'}{\omega'^2-\omega^2}$$

$$f_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} P\left(\int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'-\omega} + \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\right) f(\omega') \underset{\omega'\to-\omega'}{=} -\frac{1}{\pi} P\int_0^\infty d\omega' \left(\frac{f_R(\omega')}{\omega'-\omega} - \frac{f_R(-\omega')}{\omega'+\omega}\right) = \frac{2\omega}{\pi} P\int_0^\infty d\omega'\, \frac{f_R(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}$$

Kramers-Kronig-relációk

A teljes függvény is kifejezhető a képzetes résszel:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f_I(\omega)}{\omega' - \omega - i\varepsilon}$$

mert $\frac{1}{\omega'-\omega-i\varepsilon} = P\frac{1}{\omega'-\omega} + i\pi\delta(\omega'-\omega)$ így

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f_I(\omega')}{\omega'-\omega-i\varepsilon} = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f_I(\omega')}{\omega'-\omega} + i\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f_I(\omega')\delta(\omega'-\omega) = f_R(\omega) + i f_I(\omega) = f(\omega)$$

Titchmarsh-tétel: Ha $G(t)$ függvényre és $\tilde{G}(\omega)$ Fourier-transzformáltjára teljesül az alábbiak közül legalább az egyik, akkor az összes teljesül:

(i) $G(t<0) = 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{G}(u+iv)|^2 du < C \qquad v>0$ valamilyen $C\in\mathbb{R}$-re

(iii) $\mathrm{Re}\,\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\,G(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega'$

(iv) $\mathrm{Im}\,\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,G(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega'$

Mi van, ha $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ nem cseng le elég gyorsan? Vonjunk ki belőle egy olyat, ami ugyanolyan lassan cseng le, és az már jó lesz:

$f_1(\omega) := \frac{f(\omega) - f(u)}{\omega - u}$ Erre már alkalmazható a Cauchy-integrál tétel, és teljesül a levezetett azonosság!

$$f_1(\omega) = \frac{1}{i\pi} P\int_{-R}^{R} dx \frac{f_1(x)}{x-\omega} + \int_\Gamma dz \frac{f_1(z)}{z-x}$$ Visszaírva f-re:

$$f(\omega) = f(u) + \frac{\omega-u}{i\pi}\left[P\int_{-R}^{R} dx \frac{f(x)}{(x-\omega)(x-u)} - f(u) P\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x-\omega)(x-u)}\right] +$$

$$+ (\omega-u)\left[\int_\Gamma dz \frac{f(z)}{(z-\omega)(z-u)} - f(u)\int_\Gamma dz \frac{1}{(z-\omega)(z-u)}\right]$$

2. integrál: $f(u)\frac{(\omega-u)}{i\pi} P\int_{-R}^{R} dx \frac{1}{(x-\omega)(x-u)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parciális törtekre} \\ \text{bontás}}}{=} \frac{f(u)}{i\pi}\left(P\int_{-R}^{R} dx \frac{1}{x-\omega} - P\int_{-R}^{R} dx \frac{1}{x-u}\right) \xrightarrow[\text{ha } R\to\infty]{} 0$

3. integrál: $\int_\Gamma dz \frac{f(z)}{(z-\omega)(z-u)} \sim \frac{1}{|z|^{1+b}} \to 0$ ha $|f(z)| < C R^{1-b}$

4. integrál: $\int_\Gamma dz \frac{1}{(z-\omega)(z-u)} \to 0$ mert a görbe mentén $\frac{1}{z^2} \to 0$

$\Rightarrow$ Csak az 1. integrál ad járulékot:

$$f(\omega) = f(u) + \frac{\omega-u}{i\pi}\, P\int_{-R}^{R} d\omega' \frac{f(\omega')}{(\omega'-\omega)(\omega'-u)}$$

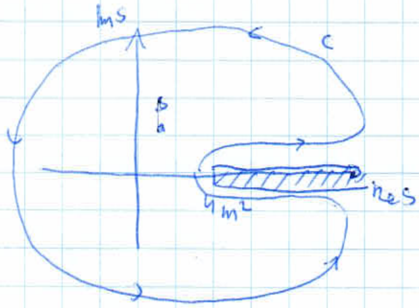
egyszeres különbségi diszperziós reláció

Szétbontva: $$f_R(\omega) = f_R(u) + \frac{\omega-u}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f_I(\omega')}{(\omega'-u)(\omega'-\omega)}$$

$$f_I(\omega) = f_I(u) - \frac{\omega-u}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f_R(\omega')}{(\omega'-u)(\omega'-\omega)}$$

Megírva a teljes alakot: $$f(\omega) = f(u) + \frac{\omega-u}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f_I(\omega')}{(\omega'-\omega-i\varepsilon)(\omega'-\omega-i\varepsilon)}$$

Példa: Tekintsük az alábbi propagátort $G(s) = \frac{1}{p^2-m^2-\Sigma(s)}$ ahol Σ a hurok sajátenergiája: $i\Sigma(s) =$ —O— , új kétrészecske állapot miatt a minimális küszöb $4m^2$.



Alkalmazzuk itt is a Cauchy-t:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C ds' \frac{f(s')}{s'-s}$$

Mivel $\mathrm{Disc}\, f(s) = 2i\, \mathrm{Im}\, f(s)$

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{2i\, \mathrm{Im}\, f(s')}{s'-s}$$

Legyen s a valós tengely mentén (ill. kis ε-nal felette):

$$f(s\in\mathbb{R}) = f(s+i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int ds' \frac{2i\, \mathrm{Im}\, f(s')}{s'-s-i\varepsilon}$$

használjuk fel, hogy $\frac{1}{s'-s-i\varepsilon} = P\frac{1}{s'-s} + i\pi\delta(s'-s)$

Ha $s<4m^2$, akkor a $\delta(s'-s)$ nem ad járulékot és a főérték se kell:

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\mathrm{Im}\, f(s)}{s'-s}$$

Ha $s>4m^2$ akkor f-nek lesz valós és képzetes része is:

$$\mathrm{Re}\, f(s) + i\, \mathrm{Im}\, f(s) = \frac{1}{\pi} P\int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\mathrm{Im}\, f(s)}{s'-s} + \frac{1}{2\pi i}(2i)(i\pi)\, \mathrm{Im}\, f(s)$$

$$\mathrm{Re}\, f(s) = \frac{1}{\pi} P\int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\mathrm{Im}\, f(s')}{s'-s}$$

7. tétel: Királis szimmetria, szimmetriasértés és az áramok divergenciája, az árammegmaradás esetei és az áramalgebra

Adott Lagrange-sűrűség: $\mathcal{L}(\{\phi_i\},\{\partial_\mu \phi_i\})$, mozgásegyenlet: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}=0$ $\forall i$-re.

Legyen egy globális belső szimmetriatranszformáció: $\phi_i(x)\to\phi_i'(x)=\phi_i-i\varepsilon_a t^a_{ij}\phi_j(x)$

ahol t^a a szimmetriacsoport a indexű generátora: $[t^a,t^b]=i\,C^{abc}t^c$

C^{abc}: struktúra állandó

Lokálissá téve a transzformációt: $\varepsilon_a\to\varepsilon_a(x)$

$$\delta\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi',\partial\phi')-\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_j}\delta\phi_j+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}\delta(\partial_\mu\phi_j)=\text{kiszámolható}=$$

$$=\varepsilon_a(x)\left[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_j}t^a_{jk}\phi_k-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}t^a_{jk}\partial_\mu\phi_k\right]+\partial_\mu\varepsilon_a(x)\left[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}t^a_{jk}\phi_k\right]=$$

$$=\varepsilon_a(x)\partial_\mu J^\mu_a+\partial_\mu\varepsilon_a(x)\cdot J^\mu_a \qquad \text{ahol } J^\mu_a=-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}t^a_{jk}\phi_k$$

feltéve, hogy a mozgásegyenlet teljesül.

Ez alapján: $\delta\mathcal{L}$ a J^μ_a és $\partial_\mu J^\mu_a$ funkcionálja $\Rightarrow$ $J^\mu_a=\frac{\partial\,\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varepsilon_a(x))}$, $\partial_\mu J^\mu_a=\frac{\partial\,\delta\mathcal{L}}{\partial\varepsilon_a(x)}$

$\Rightarrow$ Ha $\delta\mathcal{L}=0$ $\forall\varepsilon_a$ esetén, akkor $\partial_\mu J^\mu_a=0$

$$Q_a(t)=\int d^3\underline{x}\,J^0_a(t,\underline{x}) \quad\Rightarrow\quad \partial_t Q_a=0 \quad\Rightarrow\quad [Q_a,H]=0$$

töltés- és árammegmaradás.

Q_a kifejezhető a terekkel: $Q_a(t)=-i\int d^3\underline{x}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_j)}t^a_{jk}\phi_k=-i\int d^3\underline{x}\,\Pi_j(x)\,t^a_{jk}\phi_k(x)$

ϕ és Π kommutálásából Q-ra is összefüggések láthatók be:

1) $[Q_a(t),\phi_k(t,\underline{x})]=-t^a_{kj}\phi_j(t,x)$ azaz Q_a megvalósítja a szimmetria trafót:

$$\phi_i(x)\to\phi_i'(x)=e^{i\varepsilon_a Q_a}\phi_i(x)\,e^{-i\varepsilon_a Q_a}$$

2) $[Q_a(t),Q_b(t)]=i\,C_{abc}Q_c(t)$ azaz Q-k kielégítik a Lie-algebrát, így általános generátorai a szimmetriacsoportnak. (lásd 1))

3) A Hilbert tér trafója $|\alpha\rangle\to|\alpha'\rangle=(1+i\varepsilon_a G_a(t))|\alpha\rangle$. Belátható, hogy $[G_a(t),\phi_j(x)]=[Q_a(t),\phi_j(x)]$ tehát G_a-t értelmezhetjük Q_a-ként.

Mivel ezek az összefüggések Q_a terekkel való kifejezéséből és a kommutációs relációkból következnek, ezért akkor is igazak, ha a transzformáció nem szimmetria.

A QCD Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{q}_f \left(i\gamma^\mu D_\mu - m_f\right) q_f - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu}$$

$f \in \{u,d,s,c,b,t\}$ flavor

$a \in \{1 \dots 8\}$

ahol $D_\mu = \partial_\mu - i g_s \underbrace{A^a_\mu \frac{\lambda^a}{2}}_{A_\mu}$

λ^a: szín-térben tartozó Gell-Mann-mátrix

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g_s f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

A királis szimmetria a $\mathcal{L}_{QCD}$ szimmetriája a királis határesetben, azaz, amikor $m_f = 0$.

$\Rightarrow$ A kvarktömegek megsértik a királis szimmetriát.

Alacsony energián csak u, d, s kvarkok vannak, mert a többinek $m_f > 1$ GeV. Így:

$$\mathcal{L}^0_{\substack{QCD\\ light}} = \underbrace{(\bar u, \bar d, \bar s)}_{\bar q} \begin{pmatrix} i\not{D} & & \\ & i\not{D} & \\ & & i\not{D} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}}_{q} - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

$\mathcal{L}_{\substack{m\\ light}} = -\bar q M q$ ahol $M = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix}$ de ezzel egyelőre nem foglalkozunk.

A Lorentz-csoport felbontható direkt szorzatra: $SO(1,3) = SU(2) \times SU(2)$

$SO(1,3)$ reprezentációi az $SU(2)$ repr-jainak szorzata:

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$: balkezes Weyl-spinor: $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \vec{K} = \frac{i}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \psi_L$ 2 Dim

↑ antihermitikus

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$: jobbkezes Weyl-spinor $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \vec{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \psi_R$ 2 Dim

↳ is

$\Lambda = e^{i\vartheta_i J_i + i\beta_i K_i}$ $\quad$ Mivel $K^+ = -iK$ ezért Λ antiunitér. $\quad \psi'_{L/R} = \Lambda \psi_{L/R}$

Mivel $SO(1,3)$ nem kompakt nem is létezik véges dimenziójú unitér repr.

A Dirac-tér két Weyl-spinor: $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ $\quad \psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ 4 Dim

A Dirac-mátrixok királis reprezentációja: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

projektorok: $P_R = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma_5\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad P_L = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma_5\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \equiv \psi_R$$

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \psi_L$$

jelölés szintjén u.a. mint a Weyl-spinor, de valójában ezek bispinorok

$$\Rightarrow \psi = \psi_R + \psi_L$$

Könnyen belátható, hogy P-k projektorok, mert
- $P_{L/R}^2 = P_{L/R}$
- $P_L P_R = P_R P_L = 0$
- $P_R + P_L = 1$

Néhány azonosság:

- $\gamma_5 = P_R - P_L$
- $P_R q_R = q_R \quad , \quad P_L q_L = q_L$
- $P_R q_L = P_L q_R = 0$
- $\bar{q}_R = \bar{q} P_L \quad , \quad \bar{q}_L = \bar{q} P_R$
- $\Gamma_1 \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5\} \qquad \Gamma_2 \in \{1\!\!1, \gamma^5, \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\}$

$$P_R \Gamma_1 P_R = P_L \Gamma_1 P_L = 0$$
$$P_L \Gamma_2 P_R = P_R \Gamma_2 P_L = 0$$

- $\bar{q}\,\Gamma_1 \psi = \bar{q}_R \Gamma_1 \psi_R + \bar{q}_L \Gamma_1 \psi_L$

$$\bar{q}\,\Gamma_2 \psi = \bar{q}_R \Gamma_2 \psi_L + \bar{q}_L \Gamma_2 \psi_R$$

bizonyítás γ-k antikommutálásával

Ez alapján a Lagrange-sűrűség:

$$\underset{\text{eiget}}{\mathcal{L}^0_{QCD}} = \bar{q}_R i \not{D} q_R + \bar{q}_L i \not{D} q_L - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \qquad \text{itt most } q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

Ennek nyilván szimmetriája az alábbi:

$$q_L \to q_L' = U_L q_L \qquad U_L = e^{-i\sum_{a=1}^{8} \vartheta_L^a \frac{\lambda_a}{2}} e^{-i\vartheta_L} = e^{-i\sum_{j=0}^{8} \vartheta_L^j \frac{\lambda_j}{2}}$$

$$q_R \to q_R' = U_R q_R \qquad U_R = e^{-i\sum_{a=1}^{8} \vartheta_R^a \frac{\lambda_a}{2}} e^{-i\vartheta_R} = e^{-i\sum_{j=0}^{8} \vartheta_R^j \frac{\lambda_j}{2}}$$

itt a λ-k a flavor-transzformációt felelnek. $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, 1\!\!1_3 \; , \; \vartheta^0_{L/R} = \vartheta_{L/R} \cdot \sqrt{6}$

A szimmetriacsoport: $U(3)_L \times U(3)_R \cong SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$

generátorral $\qquad 8 + 8 + 1 + 1 = 18$

Az infinitezimális ϑ együtthatókat x-függővé téve, majd ezek szerint deriválva megkaphatók az áramok. Összesen 18 db van, ezeket szintén a paritásnak megfelelően:

$$L^\mu_a = \frac{\partial \delta \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial(\partial_\mu \vartheta_L^a)} = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L \qquad \partial_\mu L^\mu_a = \frac{\partial \delta \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial \vartheta_L^a} = 0$$

$$R^\mu_a = \frac{\partial \delta \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial(\partial_\mu \vartheta_R^a)} = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \qquad \partial_\mu R^\mu_a = \frac{\partial \delta \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial \vartheta_R^a} = 0$$

$$L^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial(\partial_\mu \vartheta_L)} = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L \qquad \partial_\mu L^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial \vartheta_L} = 0$$

$$R^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial(\partial_\mu \vartheta_R)} = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \qquad \partial_\mu R^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}^0_{QCD}}{\partial \vartheta_R} = 0$$

R^μ_a és L^μ_a a $SU(3)_L \times SU(3)_R$ transzformációra a $(8,1)$ és $(1,8)$ ábrázolás szerint transzformálódnak.

R^μ és L^μ az $U(1)_L \times U(1)_R$ trafóra ugyanaz (hisz mindkettő 1D-s)

Bevezetve a lin. komb.-jukat:

$$V^\mu_a = R^\mu_a + L^\mu_a = \bar{q}\, \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2}\, q \qquad \text{oktett vektoráram}$$

$$A^\mu_a = R^\mu_a - L^\mu_a = \bar{q}\, \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2}\, q \qquad \text{oktett axiálvektor-áram}$$

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\, \gamma^\mu q \qquad \text{szinglett vektoráram} \quad \text{(barionszám-áram)}$$

$$A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\, \gamma^\mu \gamma_5 q \qquad \text{szinglett axiálvektor-áram}$$

ez mindig megmarad (exakt. szimt.)

Ezek paritás hatására:

$$P\, V^\mu_a(t,\underline{x}) = V_{a\mu}(t,-\underline{x})$$

$$P\, A^\mu_a(t,\underline{x}) = -A_{a\mu}(t,-\underline{x})$$

A terek a paritás hatására:

$$P\, q_R(t,\underline{x}) = \gamma_0\, q_L(t,-\underline{x})$$

$$P\, q_L(t,\underline{x}) = \gamma_0\, q_R(t,-\underline{x})$$

$$P\, \bar{q}_R(t,\underline{x}) = \bar{q}_L(t,-\underline{x})\,\gamma_0$$

$$P\, \bar{q}_L(t,\underline{x}) = \bar{q}_R(t,-\underline{x})\,\gamma_0$$

A szimmetriacsoport ehhez a kombinációhoz is felírható:

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_L \times U(1)_R \sim SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$$

transzformációk: $\vartheta^i_V = \frac{1}{2}(\vartheta^i_R + \vartheta^i_L)$ $\qquad$ $\vartheta^i_A = \frac{1}{2}(\vartheta^i_R - \vartheta^i_L)$

$$P_V = P_L + P_R = \mathbb{1} \qquad P_A = P_R - P_L = \gamma^5$$

$$\delta q = -i\left(\vartheta^i_V \frac{\lambda_i}{2} + \vartheta^i_A \frac{\lambda_i}{2}\gamma_5\right) q$$

Mi van, ha figyelembe vesszük a tömegeket?

A Lagrange-sűrűség tömegfüggése: $\mathcal{L}_m = -\bar{q} M q = -(\bar{q}_R M q_R + \bar{q}_L M q_L)$

ahol $$M = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix} = \frac{m_u + m_d + m_s}{\sqrt{3}}\, \underset{\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbb{1}}{\underset{\parallel}{\lambda_0}} + \frac{\frac{m_u+m_d}{2} - m_s}{\sqrt{3}}\,\lambda_8 + \frac{m_u - m_d}{2}\,\lambda_3$$

Ez már nem invariáns a királis transzformációra $\Rightarrow$ Az áramok nem maradnak meg.

Kiszámolva a divergenciákat:

$$\partial_\mu L^\mu_a = \frac{\partial \delta\mathcal{L}_m}{\partial \vartheta^a_L} = -i\left(\bar{q}_L \frac{\lambda_a}{2} M q_R - \bar{q}_R M \frac{\lambda_a}{2} q_L\right)$$

$$\partial_\mu R^\mu_a = \frac{\partial \delta\mathcal{L}_m}{\partial \vartheta^a_R} = -i\left(\bar{q}_R \frac{\lambda_a}{2} M q_L - \bar{q}_L M \frac{\lambda_a}{2} q_R\right)$$

$$\partial_\mu L^\mu = \frac{\partial \delta\mathcal{L}_m}{\partial \vartheta_L} = -i\left(\bar{q}_L M q_R - \bar{q}_R M q_L\right)$$

$$\partial_\mu R^\mu = \frac{\partial \delta\mathcal{L}_m}{\partial \vartheta_R} = -i\left(\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M q_R\right)$$

$\Rightarrow$

$$\partial_\mu V^\mu_a = i\,\bar{q}\left[M, \frac{\lambda_a}{2}\right] q$$

$$\partial_\mu A^\mu_a = i\,\bar{q}\,\gamma_5\left[M, \frac{\lambda_a}{2}\right] q$$

$$\partial_\mu V^\mu = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 2i\,\bar{q}\,\gamma_5 M q$$

A királis algebra az $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V$ globális szimmetria töltéseinek kommutátorait tartalmazza a királis határesetben: $m_u = m_d = m_s = 0$

A töltések:
$$Q_L^a(t) = \int d^3\underline{x}\, L_0^a(x) = \int d^3\underline{x}\, q^+(t,\underline{x})\, P_L \frac{\lambda^a}{2} q(t,\underline{x})$$
$$Q_R^a(t) = \int d^3\underline{x}\, R_0^a(x) = \int d^3\underline{x}\, q^+(t,\underline{x})\, P_R \frac{\lambda^a}{2} q(t,\underline{x})$$
$$Q_V(t) = \int d^3\underline{x}\, V_0(x) = \int d^3\underline{x}\, q^+(t,\underline{x})\, q(t,\underline{x})$$

Q_A-t nem írjuk, mert az $U(1)_A$ szimmetria anomális, és fizikailag nem releváns

Szimmetria miatt mindhárom megmarad: $[Q_L^a, H_{QCD}^0] = [Q_R^a, H_{QCD}^0] = [Q_V, H_{QCD}]$

q^+ és q antikommutálásából, valamint a P és λ mátrixok viszonyából az alábbi összefüggések vezethetők le:

$$\left.\begin{aligned}
&[Q_L^a(t), Q_L^b(t)] = i\, C^{abc} Q_L^c(t) \\
&[Q_R^a(t), Q_R^b(t)] = i\, C^{abc} Q_R(t) \\
&[Q_L^a(t), Q_R^a(t)] = 0
\end{aligned}\right\}$$

Vegyük észre, hogy az első 3 zárt algebrát ad. Q_L-re és Q_R-re.

$$[Q_{L/R}^a(t), Q_V(t)] = 0$$

Az $SU_V(3) \otimes SU_A(3) \otimes U(1)_V$ csoporttal kifejezve: $Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a$

$Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a$

$$[Q_V^a(t), Q_V^a(t)] = i\, C^{abc} Q_V^c(t)$$
$$[Q_V^a(t), Q_A^a(t)] = i\, C^{abc} Q_A^c(t)$$

ezek miatt már nem zárt a Q_A-ra.

$$[Q_A^a(t), Q_A^b(t)] = i\, C^{abc} Q_V^c(t)$$
$$[Q_{A/V}^a(t), Q_V(t)] = 0$$

Áramokra kiterjesztve:

$$[Q^a(t), J_0^b(\underline{x},t)] = i\, C^{abc} J_0^c(\underline{x},t)$$ előzőekből levezethető. A Lorentz kovariancia miatt

$$[Q^a(t), J_\mu^b(\underline{x},t)] = i\, C^{abc} J_\mu^c(\underline{x},t)$$

itt az áram és a töltés az adott paritással értendő pl $[Q_L^a, L_\mu^b]$ vagy $[Q_R^a, R_\mu^b]$.

$$[J_0^a(\underline{x},t), J_0^b(\underline{y},t)] = i\, C^{abc} J_0^c(\underline{x},t)\, \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{y})$$ szintén a töltésekből következik

DE az általában már kell a felületi tag:
$$[J_0^a(\underline{x},t), J_i^b(\underline{y},t)] = i\, C^{abc} J_i^b(\underline{x},t)\, \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{y}) + S_{ij}^{ab}(x) \frac{\partial}{\partial y_i} \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{y})$$

8. tétel: Globális folytonos szimmetria sértése, Goldstone-tétel, Goldstone-bozonok

$O(3)$ szigma-modell szimmetriasértése:

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}, \partial_\mu \vec{\phi}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi}\, \partial^\mu \vec{\phi} - V(\phi) \qquad \text{ahol } V(\phi) = \frac{m^2}{2} \vec{\phi}^T \vec{\phi} + \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi}^T \vec{\phi})^2$$

$$\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

Ha $\lambda > 0$ és $m^2 < 0$ akkor nemtriviális minimumok vannak.

A rendszernek szimmetriája az alábbi: $\phi_i \to \phi_i' = e^{-i\alpha_k T^k} \phi_i$

ahol $T^k_{ij} = -i\,\varepsilon_{ijk} \Rightarrow [T^i, T^j] = i\,\varepsilon_{ijk} T^k$

Ez egy $SO(3)$ szimmetria.

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2 \phi^T + \lambda (\phi^T \phi) \cdot \phi^T \quad \Rightarrow \quad \vec{\phi} = 0 \quad \text{lokális maximum}$$
$$|\vec{\phi}| = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \quad \text{lokális minimum}$$

Legyen $v := \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$, $\vec{\phi}_{min} := v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{\phi}_{min}$ általános egyensúlyi állapot, de nem invariáns $SO(3)$-ra, ugyanis

$$T^1 \vec{\phi}_{min} = \begin{pmatrix} & & \\ & & -i \\ & i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ -iv \\ \\ \end{pmatrix} \qquad T^2 \vec{\phi}_{min} = \begin{pmatrix} & & i \\ & & \\ -i & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$T^3 \vec{\phi}_{min} \begin{pmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ v \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \text{spontán szimmetriasértés}$$

T^3 annihilálja $\vec{\phi}_{min}$-t, így ezen $\vec{e}_z$ körüli forgatásra inv: $e^{-i\alpha T^3} \vec{\phi}_{min} = \vec{\phi}_{min}$

Bevezetve $\phi_3 = v + \eta(x)$ és $\rho^2 := \phi_1^2 + \phi_2^2$ teret, a potenciál:

$$V(\eta, \rho, v) = \frac{1}{2}(-2m^2)\,\eta^2 + \lambda v \eta (\rho^2 + \eta^2) + \frac{\lambda}{4} (\rho^2 + \eta^2)^2 - \frac{\lambda}{4} v^4$$

ϕ_1 és ϕ_2 tereknek nincs tömeg járuléka csak csatolás η-val $\Rightarrow m^2_{\phi_1} = m^2_{\phi_2} = 0$

η tömeges járuléka az első tag $\Rightarrow m^2_\eta = -2m^2 > 0$

$\Rightarrow$ A két szimmetriasértő generátorra megjelent két tömegtelen állapot.

Általános esetben: legyen a $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűség invariáns az alábbira:

$$\phi_i \to \phi_i' = \phi_i + \delta\phi_i \ , \quad \delta\phi_i = -i\,\varepsilon_a t^a_{ij}\,\phi_j$$

ahol t^a mátrixok a G csoport generátorai, számuk n_G.

TFH $\vec{\phi}_{min}$ egy nem triviális minimum!

A $\vec{\phi}_{min} + \vec{\chi}$-hoz tartozó potenciált sorbafejtve:

$$V(\vec{\phi}_{min} + \vec{\chi}) = V(\vec{\phi}_{min}) + \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{min}}}_{} \cdot \chi_i + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{min}} \cdot \chi_i \chi_j + \cdots$$

$= 0$ a ϕ_{min} minimumsága miatt.

$$M^2_{ij} := \left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{min}}$$

M^2, szimmetrikus a Young-tétel miatt
, pozitív definit a minimum léte miatt.

Mivel $\mathcal{L}$ invariáns a G csoportra, ezért $V(\vec{\phi}_{min}) = V(\vec{\phi}_{min} + \delta\vec{\phi}_{min})$

$$\Rightarrow V(\vec{\phi}_{min}) = V(\vec{\phi}_{min}) + \frac{1}{2}\delta\phi_{min} M^2 \delta\phi_{min} \quad \Rightarrow \delta\phi_{min} M^2 \delta\phi_{min} = 0$$

$\Rightarrow$ M^2 szimmetrikussága miatt $M^2\delta\phi_{min} = 0$.

Ennek tetszőleges ε_a paraméterre igaznak kell lennie, amiből $\underline{M^2 t^a \vec{\phi}_{min} = 0}$

A t^a generátorokat két félé oszthatjuk.

1) $t^a\vec{\phi}_{min} = 0$, ahhól következik a $M^2 t^a \phi_{min} = 0$

Ha $\vec{\phi}_{min}$ invariáns a $H \subset G$ részcsoportra, akkor H generátorai ilyenek.

2) Van $n_G - n_H$ db generátor, amire $t^a\vec{\phi}_{min} \neq 0$, de $M^2 t^a \vec{\phi}_{min} = 0$.

Ez azt jelenti, hogy $t^a\vec{\phi}_{min}$ az M^2 mátrix 0 sajátértékéhez tartozó sajátállapot, tehát tömege 0 $\to$ Goldstone-bozon.

Spontán szimmetriasértésnél tömegtelen Goldstone-bozonok jelennek meg, annyi darab, ahány generátor sérül.

Ha a szimmetria csak közelítő volt, akkor kis tömegű pszeudo Goldstone-bozonok lesznek.

Konkrétan az SO(3) esetén:

$$\vec\Phi(x) \to \vec\Phi'(x) = e^{-i\alpha_k T^k}\vec\Phi(x) =$$ ← belsőn ható operátorral felírva

$$= e^{-i\alpha_k Q_k}\vec\Phi(x)\, e^{i\alpha_k Q_k}$$ ← H-n ható operátorral felírva

ahol a Q_k töltések is alkalmas generátorai SO(3)-nak: $[Q_i, Q_j] = i\varepsilon_{ijk}Q_k$

Feltéve, hogy a 3 komponensből az egyik várható értéke nem 0:

$$\langle 0|\phi_3|0\rangle = v \neq 0 \quad , \quad \langle 0|\phi_1|0\rangle = \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0$$

Belátjuk, hogy $Q_1|0\rangle \neq 0$, $Q_2|0\rangle \neq 0$ valamint ezek a Q_1 és Q_2-höz tartozó Goldstone-bozonok.

Vegyük az alábbi forgatást: $\vec\alpha = (0, \frac{\pi}{2}, 0)$. Ennek hatása:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}T^2}\vec\Phi = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_3\\ \phi_2\\ -\phi_1\end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{2}Q_2}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}e^{-i\frac{\pi}{2}Q_2}$$

$$\Longrightarrow \phi_3 = e^{i\frac{\pi}{2}Q_2}\phi_1 e^{-i\frac{\pi}{2}Q_2} \Rightarrow v = \langle 0|e^{i\frac{\pi}{2}Q_2}\phi_1 e^{-i\frac{\pi}{2}Q_2}|0\rangle$$

Ha $Q_2|0\rangle = 0$ akkor $e^{-i\frac{\pi}{2}Q_2}|0\rangle = |0\rangle$, tehát $v = \langle 0|\phi_1|0\rangle = 0$

de $v \neq 0$ ami ellentmondás, így $\underline{Q_2|0\rangle \neq 0}$.

$Q_1|0\rangle \neq 0$ ugyanígy belátható a $\vec\alpha = (\frac{\pi}{2}, 0, 0)$-val.

Megjegyzés: Ez az egész formális, mert a $Q_i(t) = \int d^3x\, J_0(x,t)$ operátor a Hilbert-téren hatva divergens, de mivel a kommutátorok a lényeg, ezért jó ez.

Kommutátor összefüggés alapján $\phi_n = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ken}[Q_k, \phi_e]$, vegyük $n=3$-ra:

$$\phi_3 = -\frac{i}{2}\left([Q_1,\phi_2] - [Q_2,\phi_1]\right) \Longrightarrow 0 \neq v = -\frac{i}{2}\left(\langle 0|[Q_1,\phi_2]|0\rangle - \langle 0|[Q_2,\phi_1]|0\rangle\right)$$

Vegyük az $\vec\alpha = (0, 0, \frac{\pi}{2})$ forgatást:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}T^3}\vec\Phi = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\phi_2\\ \phi_1\\ \phi_3\end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{2}Q_3}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}e^{-i\frac{\pi}{2}Q_3}$$

$\vec Q$-ra ugyanez

$$\Rightarrow \langle 0|[Q_2,\phi_1]|0\rangle = \langle 0|\left[-e^{i\frac{\pi}{2}Q_3}Q_1 e^{-i\frac{\pi}{2}Q_3}, e^{i\frac{\pi}{2}Q_3}\phi_2 e^{-i\frac{\pi}{2}Q_3}\right]|0\rangle =$$

$$= \langle 0| - e^{i\frac{\pi}{2}Q_3}Q_1\phi_2 e^{-i\frac{\pi}{2}Q_3} + e^{i\frac{\pi}{2}Q_3}\phi_2 Q_1 e^{-i\frac{\pi}{2}Q_3}|0\rangle = -\langle 0|[Q_1,\phi_2]|0\rangle$$

$$\Rightarrow v = -i\langle 0|[Q_1,\phi_2]|0\rangle = -i\int d^3x\, \langle 0|[J_1^0(x), \phi_2(0)]|0\rangle =$$

$$= -i \sum_n \int d^3x \left(\langle 0|J_1^0(x)|n\rangle\langle n|\phi_2(0)|0\rangle - \langle 0|\phi_2(0)|n\rangle\langle n|J_1^0(x)|0\rangle\right)$$

ahol $\sum_n$ a P_n-ekre való kiintegrálás, így a $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ teljes projektor rendszer.

Tudjuk, hogy az eltolás generátora az impulzus, így egy általános téroperátor:

$$F(x) = e^{i\hat{p}x} F(0)\, e^{-i\hat{p}x}$$

Impulzus sajátállapotokkal beszorozva: $\langle q_f | F(x) | q_i \rangle = e^{-ix(q_i - q_f)} \langle q_f | F(0) | q_i \rangle$

Ez alapján:

$$\langle 0 | \mathcal{J}^0_a(x) | n \rangle = e^{-iE_nt + ik_nx} \overbrace{\langle 0 | \mathcal{J}^0_a(0) | n \rangle}^{c_n}$$

$$\langle n | \mathcal{J}^0_a(x) | 0 \rangle = e^{iE_nt - ik_nx} \underbrace{\langle n | \mathcal{J}^0_a(0) | 0 \rangle}_{c_n^*}$$

$|n\rangle$-t úgy választva, hogy $k_n = 0$ és $\langle 0 | \mathcal{J}^0_a(x) | n \rangle \neq 0$, $\langle n | \phi_b(0) | 0 \rangle \neq 0$

$$v = -i(2\pi)^3 \sum_n \delta^{(3)}(k_n) \left(c_n e^{-iE_nt} - c_n^* e^{iE_nt} \right) = -i(2\pi)^3 \sum_n |c_n| \left(e^{i(\varphi_n - E_nt)} - e^{-i(\varphi_n - E_nt)} \right) =$$

$$= 2|c_n| \sin(\varphi_n - E_nt)$$

Mivel v t-független, ezért a $E_n \neq 0$ állapotoknak ki kell esniük.

$\Rightarrow$ Csak olyan állapotok adnak járulékot, amikre $k_n = 0$-ból $E_n = 0$ következik

$\Rightarrow m = 0$.

megjegyzés: itt a $\vec{\phi}$ komponensei elemi terek voltak, ezért a vákuumérték eltűnését könnyű volt látni, de a QCD-ben $\bar{q}q$ operátorok vannak, amik a kvark-gluon csatolás miatt bonyolultabbak, és nem kezelhetők perturbatívan.

9. tétel: Spontán szimmetriasértés a QCD-ben, a paritáspartnerek hiánya, és a spontán szimmetriasértés szükséges és elégséges feltétele.

A királis határesetben a QCD-nek szimmetriája az $SU(3)_L \times SU(3)_R \sim SU(3)_V \times SU(3)_A$ csoport, de a hadron spektrumban csak az $SU(3)_V$ ábrázolásait látjuk (oktett és dekuplett).
Miért? ...

Az $SU(3)_V$ Wigner–Weyl-módon valósul meg:

$[Q_V^a, H_{QCD}^0] = 0$, tehát a rendszernek szimmetriája

$Q_V^a |0\rangle = 0 \quad a \in \{1 \dots 8\}$ és a töltés annihilálja a vákuumot.

Vafa–Witten-tétel: Az alapállapot invariáns $SU(3)_V \times U(1)$-re is

$$Q_V^i |0\rangle = 0 \quad i \in \{0, \dots 8\}$$

Coleman tétel: Az alapállapot szimmetriája megszabja a spektrumot is.

$\Longrightarrow$ A hadron spektrumban $SU(3)_V \times U(1)$ ábrázolásai jelennek meg: $SU(3)$ multiplettjei a barionszám szerint osztályozva; barion és mezon oktettek és dekuplettek.

A multiplettek állapotai ennek megfelelően transzformálódnak:

$$[Q_V^a(t), \phi_b(t, \underline{x})] = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{adott ábrázolásra jellemző}}}{t^a_{bc}} \phi^c(t, \underline{x})$$

Az $SU(3)_A$ Nambu–Goldstone-módon valósul meg!

$[Q_A^a, H_{QCD}^0] = 0$ ez is szimmetriája a rendszernek

$Q_A^a |0\rangle \neq 0 \quad a \in \{1 \dots 8\}$ de az alapállapot nem invariáns rá.

A Goldstone-tétel alapján • létezik O^a operátor ami $\langle 0 | O^a | \phi^b \rangle \neq 0$

• ezeknek $\phi^b(x)$ pszeudo Goldstone-bozonok, amik úgy transzformálódnak, mint Q_A^b:

$$P\, \phi_b(t, \underline{x}) = -\phi_b(t, \underline{x})$$

$$[Q_V^a, Q_b(x)] = i f_{abc} \phi_c(x)$$

$SU(3)_A$ sértés esetén (π, K, η) mezonok

$SU(2)_A$ sértés esetén π mezonok

Paritáspartnerek

Legyen $|\alpha, +\rangle$ eleme a barionoktettnek!

$$H_{QCD}^0 |\alpha, +\rangle = E_\alpha |\alpha, +\rangle$$

$$P\, |\alpha, +\rangle = +1\, |\alpha, +\rangle$$

Képezzük a $|\psi_{a\alpha}\rangle = Q_A^a |\alpha, +\rangle$ állapotot, ennek tulajdonságai:

$$H_{QCD}^0 |\psi_{a\alpha}\rangle = H_{QCD}^0 Q_A^a |\alpha+\rangle = Q_A^a H_{QCD}^0 |\alpha, +\rangle = E_\alpha Q_A^a |\alpha, +\rangle = E_\alpha |\alpha, +\rangle$$

$$P |\psi_{a\alpha}\rangle = P Q_A^a |\alpha, +\rangle = -Q_A^a P |\alpha, +\rangle = -Q_A^a |\alpha, +\rangle = -|\psi_{a,\alpha}\rangle$$

ugyanolyan energiájú, ellentétes paritású állapot

Kifejezzük $|\psi_{a\alpha}\rangle$-t egy hipotetikus, negatív paritású multiplettel:

$$|\psi_{a\alpha}\rangle = Q_A^a|\alpha,+\rangle = \sum_\beta |\beta,-\rangle\langle\beta,-|Q_A^a|\alpha,+\rangle = -\sum_\beta t^a_{\beta\alpha}|\beta,-\rangle$$

$\Rightarrow$ A $SU(3)_V \times SU(3)_A$ csoport irreducibilis ábrázolásában, ha vesszük a negatív paritású $\phi_c(x)$ terek egy halmazát, akkor $\exists$ hasonló pozitív paritású $\phi'_b(x)$ terek halmaza úgy, hogy $[Q_A^a, \phi'_b(x)] = -t^a_{bc}\,\phi_c(x)$

DE a valóságban ezt nem látjuk. Ennek oka az alábbi:

Ha $\phi'_b(x)$-t a $b^+_{\alpha+}|0\rangle$-val keltjük, akkor fenti miatt $[Q_A^a, b^+_{\alpha+}] = -t^a_{\alpha\beta}\, b^+_{\beta-}$

$$\Rightarrow -\sum_\beta t^a_{\beta\alpha}|\beta,-\rangle = |\psi_{a\alpha}\rangle = Q_A^a|\alpha,+\rangle = Q_A^a b^+_{\alpha+}|0\rangle = -\sum_\beta t^a_{\alpha\beta} b^+_{\beta-}|0\rangle + b^+_{\alpha+}Q_A^a|0\rangle =$$

$$= -\sum_\beta t^a_{\beta\alpha}|\beta,-\rangle + b^+_{\alpha+}Q_A^a|0\rangle$$

Mivel $Q_A^a|0\rangle \neq 0$, „ezért" az egyenlőség nem igaz, így ez nem egy irreducibilis reprezentáció. Ezért nem látunk paritáspartnereket.

Szinglet kvark kondenzátum

Bevezethető a skalár- és pszeudoskalár kvark sűrűség:

$$S_i(x) = \bar q(x)\lambda_i q(x)$$

$$P_i(x) = \bar q(x)\gamma_5\lambda_i q(x) \qquad i\in\{0\ldots8\}$$

Tudjuk, hogy $Q_V^a(t) = \int d^3x\, q^+(t,x)\frac{\lambda_a}{2}q(t,x)$

q-k antikommutálásából és γ-k és λ-k kommutálásából adódnak:

$$[Q_V^a, S_0] = 0$$

$$[Q_V^a, S_b] = i f_{abc} S_c \qquad a,b,c\in\{1\ldots8\}$$

$$S_a = -\frac{i}{3} f_{abc}[Q_V^b, S_c]$$

$$\Rightarrow \langle 0|S_a|0\rangle = -\frac{i}{3} f_{abc}\langle 0|[Q_V^b, S_c]|0\rangle = \left(Q_V^a|0\rangle = 0\right) \text{ miatt } = 0$$

királis határesetben

$a=3$-ra: $S_3 = (\bar u\ \bar d\ \bar s)\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ d\\ s\end{pmatrix} = \bar u u - \bar d d$

$a=8$-ra: $S_8 = (\bar u\ \bar d\ \bar s)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ d\\ s\end{pmatrix} = \bar u u + \bar d d - 2\bar s s$

$$\langle S_3\rangle = \langle S_8\rangle = 0 \Rightarrow \langle\bar u u\rangle = \langle\bar d d\rangle = \langle\bar s s\rangle$$

Mivel QCD-ben a $\bar q q$ operátor a skalár, szinglet operátor, és a $\bar q q = \bar q_L q_R + \bar q_R q_L$ kifejezés miatt a transzformációt [illegible], ezért $\langle\bar q q\rangle$ csak akkor 0, ha $\bar q q$ invariáns $\Rightarrow$ $\langle\bar q q\rangle$ alkalmas rendparaméter a szimmetriasértésre, ha ez $\neq 0$, akkor van szimmetriasértés:

$$0 \neq \langle\bar q q\rangle = \langle\bar u u + \bar d d + \bar s s\rangle = 3\langle\bar u u\rangle = 3\langle\bar d d\rangle = 3\langle\bar s s\rangle$$

$$S_0 = \bar q\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\mathbb{1}\,q \Rightarrow \langle S_0\rangle \neq 0$$

Kiszámolva $Q_A^a(t)$ és $P_a(t,\underline{x})$ kommutátorát szintén érdekes.

$$i\left[Q_A^a(t), P_a(t,\underline{x})\right] = \begin{cases} \bar{u}u + \bar{d}d & a=1,2,3 \\ \bar{u}u + \bar{s}s & a=4,5 \\ \bar{d}d + \bar{s}s & a=6,7 \\ \frac{1}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + 4\bar{s}s) & a=8 \end{cases}$$

nincs szumma a-ra

Mivel $\langle \bar{u}u + \bar{d}d\rangle = \langle \bar{u}u + \bar{s}s\rangle = \langle \bar{d}d + \bar{s}s\rangle = \frac{2}{3}\langle \bar{q}q\rangle$

és $\frac{1}{3}\langle \bar{u}u + \bar{d}d + 4\bar{s}s\rangle = \frac{1}{3}\langle \bar{q}q\rangle + \langle \bar{s}s\rangle = \frac{2}{3}\langle \bar{q}q\rangle$

$$\langle 0| i[Q_A^a, P_a(t,\underline{x})]|0\rangle = \frac{2}{3}\langle \bar{q}q\rangle$$

Akkor, ha $\langle \bar{q}q\rangle \neq 0$, $Q_A^a|0\rangle \neq 0$ is kell, ami spontán szimmetriasértést jelent

Az SO(3) szigma-modelljében alkalmazott módszerrel itt is levezethető, hogy a $i\int d^3\underline{x}\, \langle 0|[A_0^a(t,\underline{x})\, P_a(0)]|0\rangle \neq 0$ egyenlőtlenség tömegtelen állapotokhoz vezet $\Rightarrow$ Goldstone-bozonok. Ezeket $|\phi_b(p)\rangle$-vel jelölve, az kell hogy

- $\langle 0|P_a(0)|\phi_b(p)\rangle \neq 0$
- $\lim_{p^0\to 0} \frac{1}{p^0}\langle 0|A_0^a(0)|\phi_b(p)\rangle \neq 0$

Tehát $\langle 0|A_0^a(0)|\phi_b(p)\rangle = i p_0 F_0 \delta_{ab}$ valamilyen $F_0 \neq 0$ konstansra

Lorentz-kovariancia alapján pedig $\underline{\langle 0|A_\mu^a(0)|\phi_b(p)\rangle = i p_\mu F_0 \delta_{ab}}$

F_0 a Goldstone-bozonok bomlási állandója, és ennek a $F_0 \neq 0$ ténye szükséges feltétele a spontán szimmetriasértésnek.

A $\langle \bar{q}q\rangle \neq 0$ elégséges feltétel volt, mert ebből következett a $Q_A^a(t)|0\rangle \neq 0$ feltétel, ami a spontán szimmetriasértést fejezi ki.

10. tétel: A PCAC hipotézis, Goldberger–Treiman-reláció és a királis Ward-azonosságok elemei

A spontán szimmetriasértés szükséges feltétele a pionterén komponenseire:

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = i\delta^{ab} f_\pi q_\mu e^{-iqx}$$

a fizikailag megvalósuló pionállapottal felírva:

$$\langle 0 | A_\mu^1(x) \pm i A_\mu^2(x) | \pi^\mp(q) \rangle = i f_\pi \sqrt{2} q_\mu e^{-iqx}$$

Differenciálva, és kihasználva, hogy $q_\mu \partial^\mu e^{-iqx} = -i q_\mu q^\mu e^{-iqx} = -i m_\pi^2 e^{-iqx}$:

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^b(x) \rangle = \delta^{ab} f_\pi m_\pi^2 e^{-iqx} \qquad \text{és}$$

$$\langle 0 | \partial^\mu (A_\mu^1(x) \pm i A_\mu^2(x)) | \pi^\mp(q) \rangle = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 e^{-iqx}$$

Mivel $\partial^\mu A_\mu^a(x)$ pszeudoskalár, és a $|\pi^a(q)\rangle$ pion-állapot kvantumszámaival rendelkezik, definiálhatunk egy interpoláló pion téroperátort:

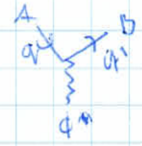
$$\phi^a(x) = \frac{\partial^\mu A_\mu^a(x)}{f_\pi m_\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \langle 0 | \phi^a(x) | \pi^b(q) \rangle = \delta^{ab} e^{-iqx}$$

A PCAC hipotézis szerint, a $\partial^\mu A_\mu^a$ divergencia minden helyettesíthető egy ugyanolyan kvantumszámokkal rendelkező térrel. A mátrixelemek nem-nulla volta fejezi ki a spontán szimmetriasértést.

Vegyünk egy $|A(q)\rangle$ és $|B(q')\rangle$ hadronállapotot, legyen köztük az impulzustranszfer $Q^2 = (q-q')^2$, ami $-m_\pi^2 \le Q^2 \le m_\pi^2$. TFH ekkor a alábbi mátrixelem sima függvény Q-val:

$$\langle B(q') | (\Box + m_\pi^2) \phi_\pi | A(q) \rangle = (-Q^2 + m_\pi^2) \langle B(q') | \phi_\pi(x) | A(q) \rangle$$

Egyébként a $\langle B | \phi | A \rangle$ az alábbi vertex járuléka:



Ha A neutron, B proton, akkor ϕ_π π^+-nak felel meg, és a KG-miatt

$$(\Box + m_\pi^2) \phi_\pi(x) = j_{\pi^+}(x) \quad \Rightarrow \quad \langle p(q') | \phi_\pi^+(x) | n(q) \rangle = \frac{1}{m_\pi^2 - Q^2} \langle p(q') | j_{\pi^+}(x) | n(q) \rangle$$

Felhasználva a PCAC hipotézist, miszerint $\partial^\mu A_\mu^a = f_\pi m_\pi^2 \phi_\pi^a$

valamint hogy $\phi_\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 + i\phi^2)$

$$\langle p(q') | \partial^\mu (A_\mu^1 + i A_\mu^2) | n(q) \rangle = \frac{\sqrt{2} f_\pi m_\pi^2}{m_\pi^2 - Q^2} \langle p(q') | j_{\pi^+} | n(q) \rangle$$

A jobboldal a $n \to p$ folyamat pionos mátrixeleme.

$$\langle p(q') | j_{\pi^+}(0) | n(q) \rangle = i\sqrt{2}\, g_{\pi NN}(Q^2)\, \bar{u}_p(q') \gamma_5 u_n(q)$$

A baloldal a gyenge adatainkból, amit a β-bomlásnál láttunk:

$$iQ^\mu \langle p(q') | A_\mu^1 + i A_\mu^2 | n(q) \rangle = iQ^\mu \bar{u}_p(q') \left[\gamma_\mu \gamma_5 g_A(Q^2) + Q_\mu \gamma_5 h_A(Q^2) \right] u_n(q)$$

∂^μ-t kiírtuk az eltolás inv. miatt beírva az egyenletbe:

$$\bar u_p(q')\left[\not{q}\gamma_5\, g_A(Q^2) + Q^2\gamma_5 h_A(Q^2)\right] u_n(q) = \frac{2 f_\pi m_\pi^2}{m_\pi^2 - Q^2}\, g_{\pi NN}(Q^2)\,\bar u_p(q')\gamma_5 u_n(q)$$

Dirac-egyenletet kihasználva $\bar u_p$ és u_n-re az alábbira jutunk:

$$2 m_N g_A(Q^2) + Q^2 h_A(Q^2) = \frac{2 f_\pi m_\pi^2}{m_\pi^2 - Q^2}\, g_{\pi NN}(Q^2)$$

Mivel a $\langle p|\phi|n\rangle$ mátrixelemet simának feltételezzük, azaz $-m_\pi^2 < Q^2 < m_\pi^2$ tartományban

$g_{\pi NN}(0) \approx g_{\pi NN}(m_\pi^2) \equiv g_{\pi NN}$. $Q^2 = 0$-t felírva:

$$m_N g_A(0) = f_\pi g_{\pi NN} \Rightarrow \underset{\text{erős KH-t jellemző}}{\frac{m_N}{g_{\pi NN}}} = \underset{\text{gyenge KH-t jellemző}}{\frac{f_\pi}{g_A(0)}}$$

Mivel ezek mind kimérhetők, jellemezhetjük az eltérést:

Goldberger–Treiman-eltérés: $\Delta = 1 - \dfrac{m_N g_A(0)}{f_\pi g_{\pi NN}} = (2{,}259 \pm 0{,}591)\,\%$

Amikor királis limitben vagyunk, és $SU(2)_V \times SU(2)_A$ csoport tényleg szimmetria, akkor

$\partial^\mu A^a_\mu = 0 \Rightarrow m_\pi^2 = 0$ azaz π valódi Goldstone-bozon.

AGT-reláció akkor is levezethető: $m_N g_A(0) = f_\pi g_{\pi NN}(0)$, de akkor már egzaktul teljesülnie kell.

Ez alapján Δ az explicit szimmetriasértés mértéke.

Vegyük a következő kifejezést: $\partial^\mu_x \partial^\nu_y T(A^a_\mu(x) A^b_\nu(y))$

Felhasználva, hogy $T(A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)) = \Theta(x_0 - y_0) A^a_\mu(x) A^b_\nu(y) + \Theta(y_0 - x_0) A^b_\nu(y) A^a_\mu(x)$

és $\partial^\mu \Theta(x) = \delta^{\mu 0}\delta(x_0)$

$$\partial^\mu_x \partial^\nu_y T(A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)) = T(\partial^\mu A^a_\mu(x)\, \partial^\nu A^b_\nu(y)) - \partial^\mu_x\left(\delta(x_0 - y_0)\left[A^a_\mu(x), A^b_0(y)\right]\right) + \delta(x_0 - y_0)\left[A^a_0(x), \partial^\nu A^b_\nu(y)\right]$$

Beszorozva $\langle N(p_2)|$ és $|N(p_1)\rangle$ állapotokkal, és véve a Fourier-t:

$$q_1^\nu q_2^\mu \int d^4x\, e^{iq_2x} \langle N(p_2)| T(A^a_\mu(x) A^b_\nu(0)) |N(p_1)\rangle =$$

$$= \int d^4x\, e^{iq_1x} \Big(\langle N(p_2)| T(\partial^\mu A^a_\mu(x)\, \partial^\nu A^b_\nu(0)) |N(p_1)\rangle +$$

$$+ i q_2^\mu \langle N(p_2)| \delta(x_0) \left[A^a_\mu(x), A^b_0(0)\right] |N(p_1)\rangle +$$

$$+ \langle N(p_2)| \delta(x_0) \left[A^a_0(x), \partial^\nu A^b_\nu(0)\right] |N(p_1)\rangle \Big)$$

Királis Ward-azonosság

A királis Ward azonosság fontos, mert kis energián ($q_1 \to 0$, $q_2 \to 0$) sok folyamat során használható.

Néhány megjegyzés:

- A baloldal 3. tagja egy szigma-kommutátor
- Az első tag a $\pi - N$ szórás átmeneti mátrix számításánál is előkerül (pl.)
- A második tag akár potenciál is kiszámítható [hosszú levezetés]

11. tétel: Az explicit szimmetriasértés megvalósulása a szigma-tagon keresztül

Gyakran előkerül az alábbi kifejezés (σ-kommutátor):

$$\sigma^{ab} = i \int d^3\underline{x} \left[A_0^a(\underline{x},0), \partial^\mu A_\mu^b(0) \right] .$$

Mátrixelemei: $\sigma_0^{ab} = i\int d^3\underline{x} \, \langle 0| \left[A_0^a(\underline{x},0), \partial^\mu A_\mu^b(0) \right] |0\rangle$

vagy $\sigma_{\alpha\beta}^{ab} = i\int d^3\underline{x} \, \langle \beta(p)| \left[A_0^a(\underline{x},0), \partial^\mu A_\mu^b(0) \right] |\alpha(p)\rangle$

Példa: Az axiálvektoráram divergenciája PCAC alapján:

$$\delta_{ab} m_a^2 f_a^2 = \langle 0|\partial^\mu A_\mu^a(0)|\pi^b(p)\rangle = \text{LSZ alapján} =$$

$$= \frac{i(m_b^2-p^2)}{f_b^2 m_b^2} \int d^4x \, e^{-ipx} \langle 0| \underbrace{T\left(\partial^\mu A_\mu^a(0)\partial^\nu A_\nu^b(x)\right)}_{\partial^\mu A_\mu^a(0)\partial^\nu A_\nu^b(x) + \delta(x_0)\left[\partial^\nu A_\nu^b(x), \partial^\mu A_\mu^a(0)\right]} |0\rangle =$$

Az első tagnál a ∂^ν eltolási invariancia miatt kijön p^ν, ami $p\to 0$ esetén nem ad járulékot.

A második tag parciális miatt $\langle 0|\delta(x_0)\left[A_0^b(x), \partial^\mu A_\mu^a(0)\right]|0\rangle$ lesz.

$$\Rightarrow \delta_{ab} m_a^2 f_a^2 = -i\int d^4x \, \langle 0|\delta(x_0)\left[A_0^b(x), \partial^\mu A_\mu^a(0)\right]|0\rangle =$$

$$= -i\int d^4x \, \langle 0|\left[A_0^b(\underline{x},0), \partial^\mu A_\mu^a(0)\right]|0\rangle = -\sigma_0^{ab}$$

Két fontos összefüggés:

1) Mivel $\partial^\mu A_\mu^b(0) = i\left[H_{QCD}^m, A_0^b(0)\right]$ és $H_{QCD}^m = \int d^3\underline{y} \, \mathcal{H}_{QCD}^m(\underline{y},0)$

valamint $Q_A = \int d^3\underline{x} \, A_0^a(\underline{x},0)$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{ab} = i\int d^3\underline{x} \, \langle\beta(p)|\left[A_0^a(\underline{x},0), \partial^\mu A_\mu^b(0)\right]|\alpha(p)\rangle = i\langle\beta(p)|\left[Q_A^a(0), \partial^\mu A_\mu^b(0)\right]|\alpha(p)\rangle =$$

$$= -\int d^3\underline{y} \, \langle\beta(p)|\left[Q_A^a(0), \left[\mathcal{H}_{QCD}^m(\underline{y},0), A_0^b(0)\right]\right]|\alpha(p)\rangle = \text{eltolási invariancia miatt, és } \underline{y}\to-\underline{y} =$$

$$= -\int d^3\underline{y} \, \langle\beta(p)|\left[Q_A^a(0), \left[\mathcal{H}_{QCD}^m(0), A_0^b(\underline{y},0)\right]\right]|\alpha(p)\rangle =$$

$$= \langle\beta(p)|\left[Q_A^a(0), \left[Q_A^b(0), \mathcal{H}_{QCD}^m\right]\right]|\alpha(p)\rangle \quad *$$

2) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$ miatt

$$\left[Q_A^a, \left[Q_A^b, \mathcal{H}_{QCD}^m\right]\right] + \left[Q_A^b, \left[\mathcal{H}_{QCD}^m, Q_A^a\right]\right] + \left[\mathcal{H}_{QCD}^m, \overbrace{\left[Q_A^a, Q_A^b\right]}^{i f_{abc} Q_V^c}\right] = 0$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{ab} - \sigma_{\alpha\beta}^{ba} = -i f_{abc} \langle\beta(p)|\underbrace{\left[\mathcal{H}_{QCD}^m, Q_V^c\right]}_{\partial^\mu V_\mu^c(0)}|\alpha(p)\rangle$$

ami a $m_u = m_d = m_s$ esetén $\partial^\mu V_\mu(0) = 0$

$$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}^{ab} = \sigma_{\alpha\beta}^{ba}$$

*: Mivel $\mathcal{H}_{QCD}^{(m)}$-vel való kommutálás az explicit szimmetriasértés nélkül 0, ezért σ jelentése a szimmetriasértés mértéke.

A QCD Hamiltonja: $\mathcal{H}_{QCD} = \mathcal{H}^{c}_{QCD} + \mathcal{H}^{(m)}_{QCD}$ ahol $\mathcal{H}_{QCD} = \bar{q} M q$

$$M = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix}$$

M-t a GM-mátrixokkal felírva:

$M = c_0 \lambda_0 + c_3 \lambda_3 + c_8 \lambda_8$ ahol $c_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(m_u + m_d + m_s)$

$c_3 = \frac{1}{2}(m_u - m_d)$

$c_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}(m_u + m_d) - m_s\right]$

A skalár sűrűség: $S_j(x) = \bar{q}(x) \lambda_j q(x) \Rightarrow \mathcal{H}^{(m)}_{QCD} = c_0 S_0 + c_3 S_3 + c_8 S_8$

A pszeudoskalár sűrűség: $P_j(x) = i \bar{q}(x) \gamma_5 \lambda_j q(x)$

kommutátorok: $[Q^a_A, S_j] = i\, d_{ajk} P_k$, $[Q^a_A, P_j] = -i\, d_{ajk} S_k$

ahol $d_{ajk} = \frac{1}{4}[\{\lambda_a, \lambda_b\}\lambda_c]$ teljesen szimmetrikus struktúra állandó

Ez alapján:

$$\sigma^{ab} = [Q^a_A, [Q^b_A, \mathcal{H}^{(m)}_{QCD}]] = i c_j d_{bjk} [Q^a_A, P_k] = c_j d_{jbk} d_{kal} S_l$$

kiszámolva $a=b=1$-re: $\sigma^{11} = \frac{m_u + m_d}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d)$

ugyanezt kapjuk $a=b=2,3$-ra is.

kiszámolva $a=b=4$-re: $\sigma^{44} = \frac{m_u + m_s}{2}(\bar{u}u + \bar{s}s)$

ugyanezt kapjuk: $a=b=5,6,7$-re is

kiszámolva $a=8$-ra: $\sigma^{88} = \frac{1}{6}(m_u + m_d)(\bar{u}u + \bar{d}d) + \frac{1}{6}(m_u - m_d)(\bar{u}u - \bar{d}d) + \frac{4}{3} m_s \bar{s}s$

A $\sigma^{aa} = m_a^2 f_a^2$-t használva, megkapjuk a Gell-Mann-Oakes-Renner-relációkat:

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{m_u + m_d}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle$$

$$f_K^2 m_K^2 = -\frac{m_u + m_s}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{s}s | 0 \rangle$$

$$f_\eta^2 m_\eta^2 = -\frac{m_u + m_d}{6} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle + \frac{4 m_s}{3} \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle$$

$Q^a_V|0\rangle = 0$ esetén $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle = \frac{1}{3}\langle \bar{q}q \rangle$ volt érvényes.

($m_u = m_d \neq 0$ esetén csak $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$)

TFH $m_u \neq m_d \neq m_s$ esetén is igaz, továbbá $f_\pi = f_K = f_\eta \equiv f$!

Az $\hat{m} = \frac{m_u + m_d}{2}$ tömeget bevezetve, a GMOR-t használva:

$m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{2}{3} \hat{m} \langle \bar{q}q \rangle$, $m_K^2 f_K^2 = -\frac{1}{3}(\hat{m} + m_s)\langle \bar{q}q \rangle$, $m_\eta^2 f_\eta^2 = -\frac{2}{9}(\hat{m} + 2m_s)\langle \bar{q}q \rangle$

$\Rightarrow 4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2$ Gell-Mann-Okubo-tömegreláció

Az első 2 és a 1. és 3 összefüggésből két módon számolhatjuk ki $\hat{m}/m_s$ arányt:

$$r_1 = \frac{\hat{m}}{m_s} = \frac{m_\pi^2}{2m_K^2 - m_\pi^2} \quad , \quad r_2 = \frac{\hat{m}}{m_s} = \frac{2m_\pi^2}{3m_\eta^2 - m_\pi^2}$$

Mért értékek: $m_\pi = 135\,\mathrm{MeV}$, $m_K = 496\,\mathrm{MeV}$, $m_\eta = 548\,\mathrm{MeV}$

$$\Rightarrow r_1 \approx \frac{1}{26} \,, \; r_2 \approx \frac{1}{24} \;\Rightarrow\; m_s \gg \hat{m}$$

Tehát $SU(2)\times SU(2)$ sokkal jobb szimmetria, mint $SU(3)\times SU(3)$.

Az $SU(3)\to SU(2)$ sértésért a $\mathcal{H}^{(m)}_{QCD}$-ból a $c_8 S_8$ tag felel. ennek nagysága:

$$\frac{c_8}{c_0} = -\sqrt{2}\left(1 - 3\frac{\hat{m}}{m_s}\right) \longrightarrow \text{elméleti érték} = \sqrt{2} \qquad m_u = m_d = 0 \text{ esetén}$$

$$\searrow \text{mért érték} = -2\sqrt{2}\,\frac{m_K^2 - m_\pi^2}{2m_K^2 + m_\pi^2} \approx -1,25$$

Továbbá az áramok:

$$\partial^\mu V_\mu^a = i\left[c_0(S_0 - \sqrt{2}S_8), Q_V^a\right] = 0 \qquad a = 1,2,3\text{-ra}$$

$$\partial^\mu A_\mu^a = i\left[c_0(S_0 - \sqrt{2}S_8), Q_A^a\right] = 0 \qquad \text{megmaradnak.}$$

$\Rightarrow$ A 3 könnyű kvark esetén az $SU(2)_L\times SU(2)_R$ szimmetria, ezért a $m_u = m_d = 0$ feltételezés jó közelítés.

11. tétel: A lineáris szigma-modell és az S-hullámú π-π-szórási hossz levezetése az $O(4)$ szimmetriájú részéből

Van egy tömegtelen fermiondublettünk, amik kölcsönhatnak egy pszeudoskalár-izotriplett pionnal és egy skalár-izoszinglett σ-mezonnal.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{SB}$$

S: szimmetrikus rész

SB: szimmetriasértő rész

$$\mathcal{L}_S = \bar{\psi}\left[i\partial\!\!\!/ - g(\sigma \mathbb{1} - i\vec{\pi}\vec{\tau}\gamma_5)\right]\psi + \frac{1}{2}\left[(\partial\vec{\pi})^2 + (\partial\sigma)^2\right] - \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2$$

$$\mathcal{L}_{SB} = +h\sigma$$

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad \psi = \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \end{pmatrix}$$

Bevezetve $\Sigma = \sigma\mathbb{1} - i\vec{\tau}\vec{\pi}$ és $\Sigma^+ = \sigma\mathbb{1} + i\vec{\tau}\vec{\pi}$ tereket, a $\mathcal{L}_S$ átírható a Weyl-spinoros alakra:

$$\mathcal{L}_S = \bar{\psi}_L i\partial\!\!\!/ \psi_L + \bar{\psi}_R i\partial\!\!\!/ \psi_R - g(\bar{\psi}_L \Sigma \psi_R + \bar{\psi}_R \Sigma^+ \psi_L) + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^+\right) -$$
$$- \frac{1}{4}\mu^2 \mathrm{Tr}(\Sigma^+\Sigma) - \frac{1}{16}\lambda\left(\mathrm{Tr}(\Sigma^+\Sigma)\right)^2$$

Transzformációs szabályok:

$$\psi_R \to \psi_R' = R\psi_R \qquad \bar{\psi}_R \to \bar{\psi}_R' = \bar{\psi}_R R^+$$
$$\psi_L \to \psi_L' = L\psi_L \qquad \bar{\psi}_L \to \bar{\psi}_L' = \bar{\psi}_L L^+$$
$$\Sigma \to \Sigma' = L\Sigma R^+ \qquad \Sigma^+ \to \Sigma'^+ = R\Sigma^+ L^+$$

Ahol L és R önkényes $SU(2)$-beli mátrixok: $L = e^{-i\vartheta_L^a \frac{\tau^a}{2}}$, $R = e^{-i\vartheta_R^a \frac{\tau^a}{2}}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}_S$ invariáns $SU(2)_L \times SU(2)_R$ szimmetriára

Σ transzformációs szabályaiból levezethető σ és $\vec{\pi}$ transzformációs szabályai is:

$$\sigma \to \sigma' = \sigma - \frac{1}{2}(\vec{\vartheta}_L - \vec{\vartheta}_R)\vec{\pi},$$
$$\vec{\pi} \to \vec{\pi}' = \vec{\pi} + \frac{1}{2}(\vec{\vartheta}_L - \vec{\vartheta}_R)\sigma + \frac{1}{2}\left[(\vec{\vartheta}_L + \vec{\vartheta}_R) \times \vec{\pi}\right]$$

Bevezetve $\vec{\vartheta}_V = \frac{1}{2}(\vec{\vartheta}_L + \vec{\vartheta}_R)$ és $\vec{\vartheta}_A = \frac{1}{2}(\vec{\vartheta}_L - \vec{\vartheta}_R)$

$$\sigma \to \sigma' = \sigma + \vec{\vartheta}_A\vec{\pi}$$
$$\vec{\pi} \to \vec{\pi}' = \vec{\pi} - \vec{\vartheta}_A\sigma + \vec{\vartheta}_V \times \vec{\pi}$$

ezzel együtt felírva, újrafogalmazva a fermionokat is:

$$\psi \to \psi' = \psi - i\vec{\vartheta}_V \frac{\vec{\tau}}{2}\psi - i\vec{\vartheta}_A \frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5\psi$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} + i\bar{\psi}\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\vartheta}_V + i\bar{\psi}\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\vartheta}_A$$

Noether-áramok a szokásos módon (trafót lokálissá téve):

$$J^\mu_{L,a} = \frac{\partial\delta\mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu\vartheta_L^a)} = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\psi_L + \frac{1}{2}(\sigma\partial^\mu\pi^a - \pi^a\partial^\mu\sigma) + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\pi^b\partial^\mu\pi^c$$

$$J^\mu_{R,a} = \frac{\partial\delta\mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu\vartheta_R^a)} = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\psi_R - \frac{1}{2}(\sigma\partial^\mu\pi^a - \pi^a\partial^\mu\sigma) + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\pi^b\partial^\mu\pi^c$$

vektor és axiálvektor áramokra áttérve: $V^a_\mu = J^a_{R\mu} + J^a_{L\mu}$, $A^a_\mu = J^a_{R\mu} - J^a_{L\mu}$

$$V^a_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\frac{\tau^a}{2}\psi + \varepsilon_{abc}\pi^b\partial_\mu\pi^c$$

$$A^a_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi - \sigma\partial_\mu\pi^a + \pi^a\partial_\mu\sigma$$

Mozgásegyenletek miatt ezek megmaradnak: $\partial_\mu J^\mu_{L,a} = \partial_\mu\frac{\partial\delta\mathcal{L}_s}{\partial(\partial_\mu\vartheta^a_L)} = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\vartheta^a_L} = 0$

$$\partial_\mu J^\mu_{R,a} = \partial_\mu\frac{\partial\delta\mathcal{L}_s}{\partial(\partial_\mu\vartheta^a_R)} = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\vartheta^a_R} = 0$$

Vegyük figyelembe SB-t is!

$$\mathcal{L}_{SB} = h\sigma \,, \qquad \delta\sigma = \vartheta^a_A\pi^a \Rightarrow \delta\mathcal{L}_{SB} = h\vartheta^a_A\pi^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\mu J^\mu_{L,a} = \partial_\mu\frac{\partial\delta\mathcal{L}_{SB}}{\partial\partial_\mu\vartheta^a_L} = h\pi^a\frac{\partial\vartheta_A}{\partial\vartheta^a_L} = -\frac{1}{2}h\pi^a$$

$$\partial_\mu J^\mu_{R,a} = \text{u.a.} = \frac{1}{2}h\pi^a$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\partial^\mu V^a_\mu &= 0\\ \partial^\mu A^a_\mu &= h\pi^a\end{aligned}}$$

Tehát a vektoráram megmarad, míg az axiálvektor-áram a π-térrel lesz arányos (PCAC-cal összhangban)

Töltésalgebra:

$$Q^a_{L/R}(t) = \int d^3\underline{x}\, J^a_{0\,L/R}(t,\underline{x})$$

$$Q^a_V(t) = \int d^3\underline{x}\, V^a_0(t,\underline{x})$$

$$Q^a_A(t) = \int d^3x\, A^a_0(t,x)$$

$$[Q^a_{L/R}(t), Q^b_{L/R}(t)] = i\varepsilon_{abc}Q^c_{L/R}(t)$$

$$[Q^a_L(t), Q^a_R(t)] = 0$$

$$[Q^a_V(t), Q^b_V(t)] = i\varepsilon_{abc}Q^c_V(t)$$

$$[Q^a_V(t), Q^b_A(t)] = i\varepsilon_{abc}Q^c_A(t)$$

$$[Q^a_A(t), Q^b_A(t)] = i\varepsilon_{abc}Q^c_V(t)$$

$$[Q^a_{L/R}, \psi_{L/R}] = -\frac{\tau^a}{2}\psi_{L/R}$$

$$[Q^a_{L/R}, \sigma] = \pm\frac{i}{2}\pi^a$$

$$[Q^a_{L/R}, \pi^b] = \mp\frac{i}{2}\sigma\delta_{ab} + \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\pi^c$$

$$[Q^a_V, \sigma] = 0$$

$$[Q^a_A, \sigma] = -i\pi^a$$

$$[Q^a_V, \pi^b] = i\varepsilon_{abc}\pi^c$$

$$[Q^a_A, \pi^b] = i\sigma\delta_{ab}$$

A szigma-kommutátor: $[Q^a_A, [Q^b_A, \mathcal{H}_{SB}]] = -ih[Q^a_A, \pi^b] = -h\sigma\delta_{ab}$

arányos σ-val $\Rightarrow$ innen a név.

A spontán szimmetriasértés alapján

$$V(\sigma, \pi) = \frac{m^2}{2}\rho^2 + \frac{\lambda}{4}(\rho^2)^2 - h\sigma \qquad (\rho^2 = \sigma^2 + \pi^2) \quad \text{potenciál esetén}$$

$h=0$ esetben a nem triviális minimum $\rho^2 = v^2$, $v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$.

$h=0$ esetén az irány nem számít, de $h \neq 0$ esetén σ irányában van

$\Rightarrow \langle 0|\sigma|0\rangle = v$, $\langle 0|\pi|0\rangle = 0$

Végezzünk egy $\sigma' = \sigma - v$ eltolást $\langle 0|\sigma'|0\rangle = 0$ lesz, de a fermion-járulék változik:

$$g\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\pi}\vec{\tau}\gamma_5)\psi \to \underbrace{gv\bar{\psi}\psi}_{\text{olyan, mint egy tömegjárulék.}} + g\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\pi}\vec{\tau}\gamma_5)\psi$$

$\Rightarrow h \neq 0$-ra a $\langle 0|\sigma'|0\rangle = 0$ feltétel a tömegtelen fermionnak tömeget ad:

$$m_N = gv$$

A potenciál deriváltjából adódnak a mezonok tömege: $m_\sigma^2 = m^2 + 3\lambda v^2$

$$m_\pi^2 = m^2 + \lambda v^2 = \text{minimum egyenlet miatt} = \frac{h}{v}$$

$\Rightarrow h=0$ esetén π tényleg Goldstone.

Tehát 5 paraméter segítségével a tömegeket: m^2, λ, g, h, v

$$m_\sigma^2 = m^2 + 3\lambda v$$
$$m_\pi^2 = m^2 + \lambda v^2 = \frac{h}{v}$$
$$m_N = gv$$

Ha ismernénk v-t, akkor a mezontömegekből illeszthetnénk a többit.

PCAC alapján $v = f_\pi$ értékben rögzíthetjük. (Van más mód is, de u.a. adja.)

O(4) modell π-π-szórás

Nézzük a lokális Lagrange-t:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\varphi})(\partial^\mu\vec{\varphi}) - \frac{1}{2}m^2\vec{\varphi}^2 - \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}^2)^2 + h\cdot\varphi_1(x)$$

ahol $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ $\quad \varphi_1(x) = \sigma(x)$

$$\varphi_{a+1}(x) = \pi_a(x) \quad a \in \{1,2,3\}$$

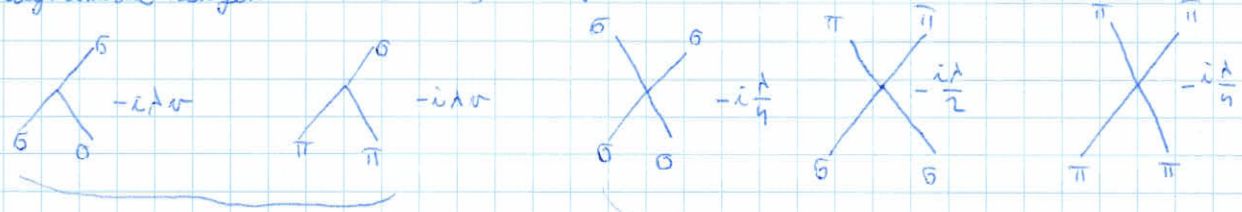
A spontán szimmetriasértés az alábbi eltoláshoz vezet: $\vec{\varphi}(x) \to (v + \sigma(x), \pi_a(x))$ $\quad a \in \{1,2,3\}$

Ennek hatására a Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma) - \frac{1}{2}\underbrace{(m^2 + 3\lambda v^2)}_{m_\sigma^2 \text{ tömegtag}}\sigma^2(x) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})(\partial^\mu\vec{\pi}) - \frac{1}{2}\underbrace{(m^2 + \lambda v^2)}_{m_\pi^2 \text{ tömegtag}}\vec{\pi}^2 -$$

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{2}m^2v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 - hv\right)}_{V_{cl} \text{ klasszikus potenciál}} - v\sigma\underbrace{\left(m^2 + \lambda v^2 - \frac{h}{v}\right)}_{\frac{1}{v}\frac{d}{dv}V_{cl}(v)} - \underbrace{\lambda v\sigma^3 - \lambda v\sigma\vec{\pi}^2}_{\text{köbös csatolás}} - \underbrace{\frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{4}(\vec{\pi}^2)^2 - \frac{\lambda}{2}\sigma^2\vec{\pi}^2}_{\text{4-edrendű csatolás}}$$

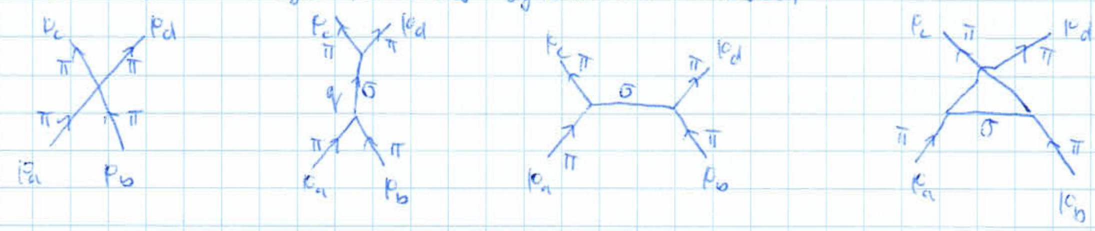
diagramok szintjén 5-féle csúcs lehet:



hármas csatolás

negyedrendű csatolás

Ezekből a ismert lehetséges faszintű diagram ($\pi\pi$-szórásra)



1. rend   s-csatorna   t-csatorna   u-csatorna

1. rend járuléka: a-t 4 féleképpen választhatjuk, b választása szerint 3 esetre bonthatjuk, és c és d mentén 2-féle lehetőség

$$\Rightarrow i M^{(1)}_{abcd} = 2\cdot 4\cdot\left(-i\frac{\lambda}{4}\right)\left(\delta_{ab}\delta_{cd}+\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}\right)$$

2. rend járuléka: a-t 4 féleképpen választjuk itt is, de a struktúra miatt a többi külső élet ez meghatározza. A vertexek adnak egy 2-es faktort, de ezt az $\frac{1}{2!}$ ejti ki. Ez ugyanígy s-re, t-re, u-ra is

$$\Rightarrow i M^{(2)}_{abcd} = 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2!}(-i\lambda v)^2\left(\delta_{ab}\delta_{cd}\frac{1}{s-m_\sigma^2+i\varepsilon}+\delta_{ac}\delta_{bd}\frac{1}{t-m_\sigma^2+i\varepsilon}+\delta_{ad}\delta_{bc}\frac{1}{u-m_\sigma^2+i\varepsilon}\right)$$

A teljes faszintű járulék kereszteződési szimmetria miatt

$$M_{abcd}(s,t,u) = A(s,t,u)\delta_{abcd} + A(t,s,u)\delta_{ac}\delta_{bd} + A(u,t,s)\delta_{ad}\delta_{bc}$$

a jelen esetben $A(s,t,u) = -2\lambda-(2\lambda v)^2\frac{1}{s-m_\sigma^2+i\varepsilon}$ (csak s-függés van)

A különböző izospin komponensek:
$$M^0(s,t,u) = 3A(s,t,u)+A(t,s,u)+A(u,t,s)$$
$$M^1(s,t,u) = A(t,s,u)-A(u,t,s)$$
$$M^2(s,t,u) = A(t,s,u)+A(u,t,s)$$

Beírva a konkrét $A(s,t,u)$-t, és kiértékelve, legyen $s=4m_\pi^2$, $t=0$, $u=0$

$$M^0(4m_\pi^2,0,0) = -10\lambda-\frac{12\lambda^2v^2}{4m_\pi^2-m_\sigma^2}+\frac{8\lambda^2v^2}{m_\sigma^2} \qquad M^1(4m_\pi^2,0,0)=0$$

$$M^2(4m_\pi^2,0,0) = -4\lambda+\frac{8\lambda^2v^2}{4m_\sigma^2}$$

korábbiak alapján
$$\left.\begin{aligned} m_\pi^2 &= m^2+\lambda v^2 \\ m_\sigma^2 &= m^2+3\lambda v^2 \\ v &= f_\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{m_\sigma^2-m_\pi^2}{2v^2} = \frac{m_\sigma^2-m_\pi^2}{2f_\pi^2}$$

$$M^0 = \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2}\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2}\right)\frac{7m_\sigma^2+8m_\pi^2}{m_\sigma^2-4m_\pi^2} \approx \frac{7m_\pi^2}{f_\pi^2}$$

$$M^2 = -\frac{2m_\pi^2}{f_\pi^2}\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2}\right) \approx -\frac{2m_\pi^2}{f_\pi^2}$$

$m_\sigma \gg m_\pi$ -vel közelítettünk, mert m_σ még benne a modellben.

szórási hosszúságot definiálva az S-hullámú ($\ell=0$) módusra:

$$a_0^I = \frac{1}{32\pi} M^I$$

$f_\pi = \frac{130{,}41}{\sqrt{2}}$ MeV és $m_{\pi^+} = 139{,}57$-tel számolva

$a_0^{I=0} = 0{,}1595$

$a_0^{I=2} = -0{,}0456$

mért értékek

$a_0^{I=0} = 0{,}26 \pm 0{,}05$

$a_0^{I=2} = -0{,}028 \pm 0{,}012$

Ha a λ-t megillesztjük, és kapunk $m_\sigma^2 = 450$ MeV-t, akkor

$a_0^{I=0} = 0{,}26$

$a_0^{I=2} = -0{,}0412$ ez elfogadhatóbb