SPECREL II.

1. videó

A világ szimmetriái: 3 paraméteres eltolás, 1 paraméteres időeltolás, 3 paraméteres forgatás, 3 paraméteres boost → 2 lehetséges csoport:

- Galilei-csoport (Newtoni-mechanika)
- Poincaré-csoport (Spec-rel) ← Ez a jó

Jelölés:

$$x^\mu = \begin{pmatrix}x^0\\x^\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \mu\in\{0,1,2,3\},\ \alpha\in\{1,2,3\} \qquad x_\mu = \begin{pmatrix}x_0\\x_\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ct\\-x\\-y\\-z\end{pmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\varrho}x^\varrho \quad \text{ahol} \quad g_{\mu\varrho} = \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \underline{0}\\ \underline{0} & -\underline{\underline{1}}\end{pmatrix}$$

$$x^\mu = g^{\mu\varrho}x_\varrho \qquad g^{\mu\varrho}g_{\varrho m} = \delta^\mu_m$$

Lorentz-trafó: $x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\varrho x^\varrho$

Λ olyan, hogy $c^2t^2 - \underline{r}^2 = \text{inv}$

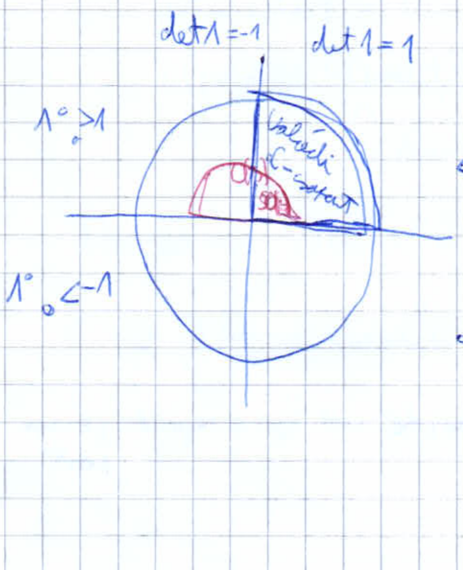
$$x_\mu x^\mu = (ct)^2 + (-r_\alpha) r^\alpha = c^2t^2 - r^2$$

Követelmény: $x^{\mu\prime}x'_\mu = x^\mu x_\mu = \text{inv} \Rightarrow \Lambda^T g \Lambda = g$

Emiatt Λ nem lehet akármilyen:

$$\Lambda^\mu{}_\varrho = \underbrace{\begin{pmatrix}\pm 1 & \underline{0}\\ \underline{0} & \pm\underline{\underline{1}}\end{pmatrix}}_{\text{Tükrözés}} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{\underline{F}}\end{pmatrix}}_{\text{Forgatás}} \underbrace{\begin{pmatrix}\text{ch}\chi & -\underline{n}\,\text{sh}\chi\\ -\underline{n}\,\text{sh}\chi & \underline{\underline{1}} + \underline{n}\circ\underline{n}(\text{ch}\chi - 1)\end{pmatrix}}_{\text{Boost}}$$

$\underline{\underline{F}}\in SO(3)$ $\qquad |\underline{n}| = 1$, $\chi\in\mathbb{R}$



← Teljes Lorentz-csoport

$\underline{V} = c\,\underline{n}\,\text{th}\chi$

A boostok nem alkotnak csoportot, csak az egy paraméteresek (hogy ugyanarra haladjunk)

Variációs számítás

$q_k(t) \quad k \in \{1, 2, \dots f\} \quad f < \infty$

$L(q, \dot{q}, t)$

$S = \int L \, dt = \int L(q(t), \dot{q}(t), t) \, dt$ S minimumát keressük

Olyan q-t függvényt keresünk, amit kicsit változtatva S nem változik

$\delta S = 0$

Ekkor: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_k = Q_k}$$

Spec eset: $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x)$ akkor $p = m\dot{x} \quad Q = F$

$\underline{m\ddot{x} = F}$

Ellenpéldák:

1) $L(q, \dot{q}, t) = \dot{q}$ 2) $L(q, \dot{q}, t) = \cos q \, \dot{q}$ 3) $L(q, \dot{q}, t) = q$

4) $L(q, \dot{q}, t) = \cos q$

1)

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 1 = p \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = 0 = Q \qquad \frac{dp}{dt} = 0 = 0$

ez igaz, de nem hasznos

2) $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \cos q \qquad Q = \frac{\partial L}{\partial q} = -\sin q \, \dot{q}$

$\frac{dp}{dt} = -\sin q \, \dot{q} \qquad \Rightarrow \quad -\sin q \, \dot{q} = -\sin q \, \dot{q}$

deltá

$\Rightarrow$ Ha $L = f(q)\dot{q}$, akkor a módszer nem jó

3)

$L = q \qquad Q = \frac{\partial L}{\partial q} = 1$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

$\frac{dp}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \quad 0 = 1 \quad ???$

4) $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad Q = \frac{\partial L}{\partial q} = \sin q$

$\frac{dp}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \sin q = 0$ Ez ok, de nem fogja a megoldást, ennek ... sok

Magyarázat:

1–2: Ha $L' = L(q, \dot q, t) + \frac{dF}{dt}$ akkor

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{dF}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = S + \underbrace{F(t_2) - F(t_1)}_{C}$$

Mértékszabadsági fok: A Lagrange-hoz teljes deriváltat hozzáadva a fizikai nem változik

3–4: Ha L nem függ $\dot q$-tól, akkor ez egy statikus probléma, a 3 pl. azt mondja, hogy a legtöbb mis megoldás ⇒ ez nem ellentmondás hanem egy probléma nem-megoldását bizonyítom

Minden mechanikai problémát tartozik egy Lagrange függvény. Hogy kapjuk meg?

Szabad test: a teljes szimmetria csoportra invariáns (Nem lehet más erő)
- ez az egyenes vonalú egyenletes mozgás

Ennek is ki kell elégítenie a Lagrange-t, tehát az is ilyen.

$L(\underline{r}, \underline{\dot r}, t)$ — Az időeltolás miatt L nem függ t-től
Az eltolás miatt nem függhet $\underline{r}$-től
Az elforgatás miatt nem függhet $\underline{\dot r}$ irányától csak v-től
A Boost miatt nem függhet v-től.

L konstans ???

DE egy szabad deriválttal eltérő lehet ami: (ezzel boostolhatom)

$$L' = L(v') = L(v) + \frac{dF}{dt} \qquad \text{Ha } \underline{v}' = \underline{v} - \underline{V}$$

$$L(|v - V|) = L(|v|) + \frac{dF}{dt}$$

Ennek a megoldása az $L = v^2$, mert

$$L(|\underline{v} - \underline{V}|) = (\underline{v} - \underline{V})(\underline{v} - \underline{V}) = v^2 - 2\underline{v}\underline{V} + V^2 = L(|v|) + \frac{d}{dt}\left(-2r(t)V + V^2(t)\right)$$

⇒ A Szabad részecske Lagrange-a: $L = \frac{m}{2} v^2$

Miért az utolsó lépésben csináltam ezt? (Lehet konstanttól is)

Ha a részecske nem szabad, adjuk hozzá a $-V(x)$-t

$$L = \frac{m}{2}u^2 - V(x)$$

Később, mikor már van speciel, akkor milyen az L?

ehhez x^μ-t keressük τ fgv-ben

mert $ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 = c\,dt'^2 - dr'^2$ ha $dr' = 0$

$dt' = d\tau \Rightarrow d\tau = ds$

$$d\tau^2 = dt^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \le dt^2$$

$d\tau = \frac{1}{c}ds \Rightarrow$ ez a világvonal ívhossza

Ekkor $\tau = \int d\tau = \int\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,dt$ ← Ez a funkcionál kell, hogy megadja a $x^\mu(\tau)$ függvényt ("nyilvánvaló")

Ezt át kell alakítani hatás dimenzióra

$S = mc^2\int d\tau$ Ennek akkor van minimuma, ha c-vel megy, az nem lehet, ~~de~~

Ennek maximuma van: $\int d\tau \le t_2 - t_1$

$\Rightarrow$ Az $\boxed{S = -mc^2\int d\tau}$ egyenletnek már van minimuma

Olyan koordinátákban írjuk le, hogy jó legyen:

$$S = -mc^2\int d\tau = -mc^2\int dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \int\underbrace{\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}}\right)}_{L(r,\dot{r},t) = L(|u|)}dt$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial L}{\partial r_\alpha} = 0$$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} = -mc^2\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(-\frac{u^2}{c^2}\right) = (-mc^2)\left(-\frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}(u_\beta u_\beta) =$$

$$= m\frac{1}{2\sqrt{\ }}\,2u_\beta\frac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}u_\beta\delta_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{m u_\alpha}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow p = \frac{m u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

mozgásegyenlet: $\frac{dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha = 0 \Rightarrow p_\alpha = \text{const} \Rightarrow u = \text{const}$

Beltrami: $B = \sum_\alpha \dot q_\alpha p_\alpha - L = \sum_\alpha v_\alpha p_\alpha - L = \underline{v}\,\underline{p} - L =$

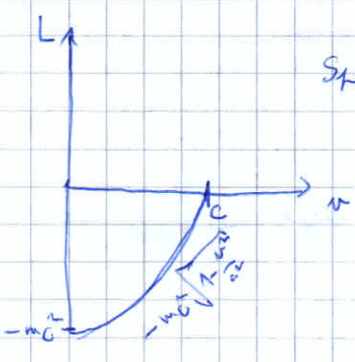
$$= \frac{v\, m\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m\left(\frac{v^2}{\sqrt{\ }} + c^2\sqrt{\ }\right) = \frac{m}{\sqrt{\ }}\left(v^2 + c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right) =$$

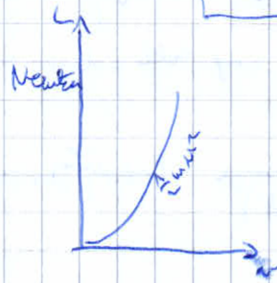
$$= \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

A relativisztikus dinamika alapegyenletei:

$$\boxed{\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad E = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\left(L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$





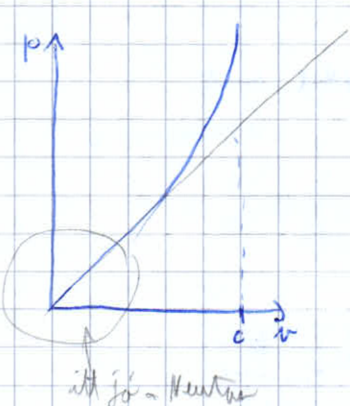
Ha $v \ll c$ $\quad (1+a)^n \sim 1+na$

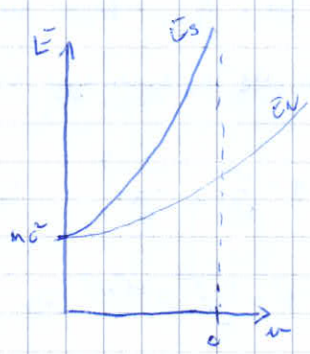
$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq -mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$ ← egy additív konstanssal különbözik a Newtontól

$\Rightarrow$ kis v-re jó a Newton

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq mc^2\left(1-\frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$





Ez még csak szabadrészecske, tehát nem változik a sebesség!!!

Pontrendszerek klasszikusan:

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}(\underset{v_1(t)-v_2(t)}{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}, \dot{\underline{r}}_1 - \dot{\underline{r}}_2)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = F(\quad\quad)$$

relativisztikusan ez nem jó, mert a különböző eseményen függenek a vonatkoztatás

Hogy lehet mégis kezelni?

2 válasz: 1) kontakt kölcsönhatás (ütközési jelenségek)

2) közé teszünk valamit (madzag)

$\Rightarrow$ a közegen át terjed a hatás $\Rightarrow$ mező

$\Rightarrow$ A mező minden pontján meg kell adni a dolgokat.

Emiatt nincs általános Lagrange-függvény, ami mindent leír, de mást lehet ennek dolgozni (jövőre)

Maradjunk a szabadrészecskénél

négy fajta mennyiség: $m, \underline{u}, \underline{p}, E$

$E(m, \underline{u})$; $\underline{p}(m \underline{u})$

$$\frac{p}{E} = \frac{\frac{m\underline{u}}{\sqrt{}}}{\frac{mc^2}{\sqrt{}}} = \frac{u}{c^2} \Rightarrow \boxed{\underline{p} = \frac{E}{c^2}\underline{u}} \quad \underline{p}(E, \underline{u})$$

gondolt részecske sebessége pl. a lendülettel

Ha $m = \frac{E}{c^2}$, akkor visszatért a $\underline{p} = m\underline{u}$ képlet, amit szerettünk, de ez csak egy átírás

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{m^2c^4}{E^2} \Rightarrow *$$

$$p^2 = \frac{m^2u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow p^2 - \frac{p^2u^2}{c^2} = m^2u^2 \Rightarrow p^2 = u^2\left(m^2 + \frac{p^2}{c^2}\right) \Rightarrow u^2 = \frac{p^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}$$

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{p^2/c^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}} = \frac{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}} - \frac{\frac{p^2}{c^2}}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}} = \frac{m^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}$$

$$* \Rightarrow E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{u^2}{c^2}} = m^2c^4\,\frac{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}{m^2} = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad \boxed{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2} \quad E(m, p)$$

SPECREL II.

2. videó

Szabad részecske egyetlen értelmes funkcionálja: $S = C \cdot \int d\tau$

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$ (csak c-nél kisebb sebességre)

$$S = -mc^2 \int d\tau = \int \underbrace{(-mc^2) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{L(r, v, t)} dt$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad p(m, v)$$

EL-egyenlet: $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial r} = 0$

$$E = p v - L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad E(m, v)$$

$\dot{p} = 0$
$p = \text{const}$
$v = \text{const}$

Alakítva: $E(m, p) = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$

$$p(E, v) = \frac{E}{c^2} v$$

Kiválasztottunk egy adott rendszert, ebben írtuk fel a 3D-s változókat, amikhez át térhetünk egyszerűen.

Fel kéne írni 4D-ben

Görbe paraméterezése: $x^\mu(\tau)$

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu \, dx^\mu}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2$$

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \qquad a_\mu u^\mu = 0$$

u komponensei:

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{dt\sqrt{}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{dt\sqrt{}} = \frac{v_\alpha}{\sqrt{}}$$

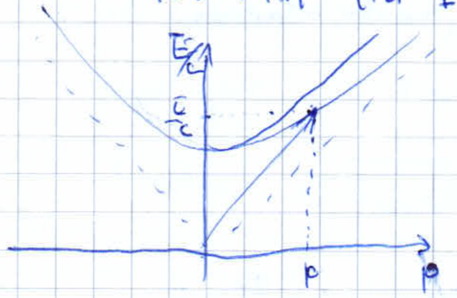
Tehát: $u^\mu = \frac{1}{\sqrt{}} \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}$ $\qquad u_\mu = \frac{1}{\sqrt{}} \begin{pmatrix} c \\ -v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mc}{\sqrt{}} \\ \frac{mv}{\sqrt{}} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{}} \\ \frac{v}{\sqrt{}} \end{pmatrix} = m u^\mu = p^\mu$$ 4-es lendület

$$p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (m u_\mu)(m u^\mu) = m^2 (u_\mu u^\mu) = m^2 c^2 - *$$

$\Rightarrow$ különböző megfigyelők ugyanolyan hosszú p^μ-t látnak

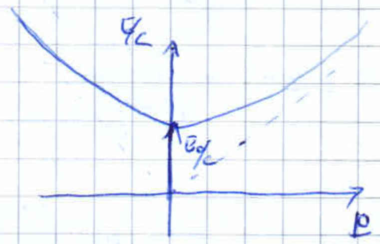
$$* = p_0 p^0 + p_\alpha p^\alpha = (p_0)^2 - \underline{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \underline{p}^2 = m^2 c^2$$



A hiperbola pontjai a különböző megfigyelők által látott 4-es lendület vektorai

Más megközelítés: Tudjuk, hogy $p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \underline{p} \end{pmatrix}$

Adott hosszú p^μ-k hiperbolák:



Van olyan rendszer, ahol $\underline{p} = 0$, ebben E_0 energia van.

$$p_\mu p^\mu = \text{áll} = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = \frac{E_0^2}{c^2} - 0^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} = \underline{p}^2 + \frac{E_0^2}{c^2} \qquad \text{Legyen } \frac{E_0}{c^2} = m$$

$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2 c^2$$

mivel $\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{}} = \frac{\frac{E_0}{c^2}\underline{v}}{\sqrt{}}$ ezt hívjuk a tömegnek.

$$E(\underline{v}) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\boxed{\text{Az energia NEM skalár, hanem vektorkomponens}}$

A

A hatás 4D-ben:

$$\delta S = \delta\left(-mc^2\int d\tau\right) = -mc^2\,\delta\int d\tau = -mc^2\int\delta(d\tau) = -mc\int\delta(c\,d\tau) =$$

$$= -mc\int\delta(ds) = -mc\int\delta\sqrt{ds^2} = -mc\int\frac{1}{2\sqrt{ds^2}}\,\delta(ds^2) = -\frac{mc}{2}\int\frac{1}{ds}\,\delta(ds^2) =$$

$$= -\frac{mc}{2}\int\frac{1}{c\,d\tau}\,\delta(ds^2) = -\frac{m}{2}\int\frac{1}{d\tau}\,\delta(g_{ke}\,dx^k dx^e) = -\frac{m}{2}\int g_{ke}\frac{1}{d\tau}\,\delta(dx^k dx^e) =$$

$$= -\frac{m}{2}\int\frac{g_{ke}}{d\tau}\left(\delta(dx^k)dx^e + dx^k\delta(dx^e)\right) = -\frac{m}{2}\int g_{ke}\left(\delta(dx^k)\frac{dx^e}{d\tau} + \frac{dx^k}{d\tau}\delta(dx^e)\right) =$$

$$= -\frac{m}{2}\int g_{ke}\left(u^e\delta(dx^k) + u^k\delta(dx^e)\right) = -\frac{m}{2}\int\left[g_{ke}u^e\delta(dx^k) + g_{ek}u^e\delta(dx^k)\right] \overset{\text{mivel } g_{ek}=g_{ke}}{=}$$

$$= -\frac{m}{2}\int 2\cdot g_{ke}u^e\delta(dx^k) = -m\int g_{ke}u^e\delta(dx^k) = -m\int u_k\,\delta(dx^k) =$$

$$= -\int(mu_k)\,d\delta x^k = -\int p_k\,d(\delta x^k) = -\int p_k\frac{d(\delta x^k)}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= \underbrace{-\left[p_k\,\delta x^k\right]_{\text{első}}^{\text{első}}}_{=0} + \int\frac{dp_k}{d\tau}\delta x^k\,d\tau = \underbrace{\int\frac{dp_k}{d\tau}\delta x^k\,d\tau}_{\text{Ez legyen 0!!!}}$$

Ez akkor 0, ha a δx^k egy.-ja 0, tehát $\frac{dp_k}{d\tau} = 0$ Ez jött ki korábban is ☺

Mi van nem szabad részecskénél is?

itt nem biztos hogy jók a levezetett $\underline{p}(m,\underline{u})$ $E(m,\underline{u})$ mert ez nem Poincaré-invariáns.

Próbáljuk a megszokott mennyiségeket általánosítani: $\underline{u}, \underline{a}, m, \underline{p}, E, P, \underline{F}$

képleteket várjuk $\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{a}$; $\frac{d}{dt}(\underline{p}) = \underline{F}$; $m\underline{a} = \underline{F}$; $E = \frac{mu^2}{2}$ $\underline{p} = m\underline{u}$ ...

Amit eddig biztosan tudunk: $\underline{p} = \frac{m\underline{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Ezek ellentmondanak a fentieknek, ezért ki kell válogatni részeket, amit igazán tartunk.

Próbálkozunk.

Legyen $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$

TFH $m = \text{const}$

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = m\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \underline{v}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$= m\left[\underline{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \underline{v}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{}^3}\right)\frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m\left[\frac{\underline{a}}{\sqrt{}} - \frac{1}{2}\underline{v}\frac{1}{\sqrt{}^3}\left(-\frac{1}{c^2}\right)\frac{dv^2}{dt}\right] =$$

$$= m\left[\frac{\underline{a}}{\sqrt{}} + \frac{\underline{v}}{2c^2}\frac{1}{\sqrt{}^3}\,2\underline{v}\,\underline{a}\right] = m\left[\frac{\underline{a}}{\sqrt{}} + \frac{1}{c^2}\frac{\underline{v}(\underline{v}\,\underline{a})}{\sqrt{}^3}\right] =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{}}\left[\underline{a} + \frac{1}{c^2}\frac{\underline{v}(\underline{v}\,\underline{a})}{\sqrt{}^2}\right] = \frac{m}{\sqrt{}}\left[\underline{a} + \frac{1}{c^2}\frac{(\underline{v}\circ\underline{v})\,\underline{a}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\underline{\underline{I}} + \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{c^2-v^2}\right]}_{\underline{\underline{M}}}\underline{a} = \underline{\underline{M}}(\underline{v})\,\underline{a}$$

Ez alapján a új mozgásegyenlet: $\underline{F} = \underline{\underline{M}}\,\underline{a}$ ahol $\underline{\underline{M}}$ [illegible]

A Newton törvény lényege: $\underline{a} = \frac{1}{m}\underline{F}$, tehát itt $\underline{a} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{F}$

Ha $\underline{\underline{A}} = \sum \lambda_k \underline{\underline{P}}^k$ akkor $\underline{\underline{A}}^{-1} = \sum \frac{1}{\lambda_k}\underline{\underline{P}}^k$

Ha $\underline{v} = v\,\underline{n}$ akkor $\underline{\underline{M}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\underline{\underline{I}} + \frac{v^2}{c^2-v^2}\underbrace{(\underline{n}\circ\underline{n})}_{\underline{\underline{P}}}\right] = \frac{m}{\sqrt{}}\left(\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{Q}} + \frac{v^2}{c^2-v^2}\underline{\underline{P}}\right) =$

$$= \frac{m}{\sqrt{}}\left(\underline{\underline{Q}} + \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\underline{\underline{P}}\right) = \frac{m}{\sqrt{}}\underline{\underline{Q}} + \frac{m}{\sqrt{}^3}\underline{\underline{P}}$$

Ha $\underline{F} = \underline{\underline{M}}\,\underline{a} = \left[\frac{m}{\sqrt{}}(1-\underline{n}\circ\underline{n}) + \frac{m}{\sqrt{}^3}\underline{n}\circ\underline{n}\right]\underline{a}$

a) Ha $\underline{a} \parallel \underline{v} \parallel \underline{n}$

$\underline{\underline{P}}\,\underline{a} = \underline{a}$

$\underline{\underline{Q}}\,\underline{a} = \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{F} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{}^3}}_{m_e}\underline{a}$

b) $\underline{a} \perp \underline{v} \parallel \underline{n}$

$\underline{\underline{P}}\,\underline{a} = \underline{0}$

$\underline{\underline{Q}}\,\underline{a} = \underline{a}$

$\Rightarrow \underline{F} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{}}}_{m_t}\underline{a}$

Azaz a tömeg függ gyorsítás irányától $m_e > m_t$

DE az erő vektor hogy transzformálódik? Arról nem tudunk semmit

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{\sqrt{\;}}{m}\underline{\underline{Q}} + \frac{\sqrt{\;}^3}{m}\underline{\underline{P}} = \frac{\sqrt{\;}}{m}\left(\underline{\underline{Q}} + \sqrt{\;}^2\underline{\underline{P}}\right) = \frac{\sqrt{\;}}{m}\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{P}} + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\underline{\underline{P}}\right) = \frac{\sqrt{\;}}{m}\left(\underline{\underline{1}} - \frac{u^2}{c^2}\underline{\underline{P}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\;}}{m}\left(\underline{\underline{1}} - \frac{u^2(\underline{n}\circ\underline{n})}{c^2}\right) = \frac{\sqrt{\;}}{m}\left(\underline{\underline{1}} - \frac{\underline{u}\circ\underline{u}}{c^2}\right)$$

inverz képlet: $\underline{a} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{F} = \frac{\sqrt{\;}}{m}\left(\underline{\underline{1}} - \frac{\underline{u}\circ\underline{u}}{c^2}\right)\underline{F}$

$$m\,\underline{a} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(1-\frac{\underline{u}\circ\underline{u}}{c^2}\right)\underline{F} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(\underline{F} - \frac{1}{c^2}\underline{u}(\underline{u}\,\underline{F})\right)$$

$$\boxed{m\,\underline{a} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[\underline{F} - \frac{1}{c^2}\underline{u}(\underline{u}\,\underline{F})\right]}$$

Adott feltevésekkel ez jön ki, de azok nem igazak, azt önkényesen választottuk

---

Írjuk 4D-ben Newtont:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

Mi az a 4-es erő? Nem ismerjük a fizikai jelentését

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\underline{p})_\alpha = \frac{d(\underline{p})_\alpha}{dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\;}}\left(\frac{d\underline{p}}{dt}\right)_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(\underline{F})_\alpha$$

$$F^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{d}{\sqrt{\;}\,dt}\left(\frac{E}{c}\right) = \frac{1}{c\sqrt{\;}}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{P}{c}\right)$$

Tehát $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} P \\ \underline{F} \end{pmatrix}$ a 4-es erő

TFH $m =$ konst

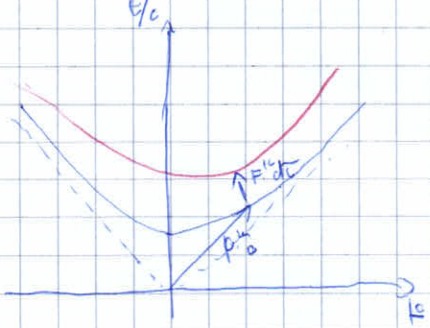
$$F^\mu = \frac{d}{d\tau}p^\mu = \frac{d}{d\tau}(m u^\mu) = m\frac{d}{d\tau}u^\mu = m a^\mu$$

$$F^\mu u_\mu = m a^\mu u_\mu = 0$$

Az erő merőleges lenne a sebességre?

Skalármező gradiense ellenpélda, tehát ugyanúgy jó

Nem emelhetjük ki m-et



$$dp^\mu = F^\mu d\tau$$

Az $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = (mc^2)^2$ miatt a p^μ-vel az alsó hiperbolán van. Az erő $d\tau$ idő alatt megváltoztatja p^μ-t az F^μ irányában, ezért átmegy a felső hiperbolára.

Most nézzük meg rendesen   Tudjuk: $p^k = M u^k$

$$F^k = \frac{dp^k}{d\tau} = \frac{dM}{d\tau} u^k + M \frac{du^k}{d\tau} \qquad / u_k$$

$$F^k u_k = \frac{dM}{d\tau} \underbrace{u^k u_k}_{c^2} + M \underbrace{a^k u_k}_{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2} F^k u_k \qquad (1)$$

$$d(Mc^2) = F_k \, dx^k \quad \Leftarrow \text{ relativisztikus munkatétel}$$

A munkavégzés megváltoztatja a részecske tömegét

Visszahelyettesítés:

$$F^k = \frac{dM}{dt} u^k + M \frac{du^k}{d\tau} = \left(\frac{1}{c^2} F_e u^e\right) u^k + M \frac{du^k}{d\tau}$$

$$M \frac{du^k}{d\tau} = F^k - u^k \frac{1}{c^2} F^e u_e$$

$$\underbrace{M \frac{du^k}{d\tau} = \left(\delta^k_e - \frac{u^k u_e}{c^2}\right) F^e}_{} \qquad (2-4)$$

F'^e ez a sebességre merőleges komponense F^e-nek, mert a () között projektorom

Ez csak 3 független egyenlet, mert u_k-val beszorozva (lin kombinációval) 0-t kapunk, ami azt jelenti, hogy nem független.

Klasszikusan az $\underline{F}$ erő $\perp$ komponense betartja a pályát $F_\perp = \frac{mv^2}{R}$ sugarú pályán; a $\parallel$ komponens változtatja a sebességet.

Itt a $\perp$ komponens u^k irányát módosítja (2-4)', a $\parallel$ komponens a p^k hosszát, de mivel az u^k hossza állandó és $p^k = M u^k$, ezért a $\parallel$ komponens M-et változtatja (1)

SPECREL II.

9. videó

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \underline{p} \end{pmatrix} = m u^\mu = \begin{pmatrix} \frac{mc}{\sqrt{\;}} \\ \frac{m\underline{v}}{\sqrt{\;}} \end{pmatrix}$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2$$

$$\boxed{F^\mu = \frac{d}{d\tau} p^\mu}$$ Newton II.

Ha $p^\mu = M u^\mu$

$$F^\mu = \frac{d}{d\tau}(M u^\mu) = \frac{dM}{d\tau} u^\mu + M \frac{du^\mu}{d\tau} \qquad / \cdot u_\mu$$

$$F^\mu u_\mu = \frac{dM}{d\tau} \underbrace{u^\mu u_\mu}_{c^2} + M \underbrace{\frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu}_{0}$$

$$\frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2} F_\mu u^\mu \Rightarrow \boxed{dM = \frac{1}{c^2} F_\mu dx^\mu}$$ Munkatétel

$$F^\mu = \frac{1}{c^2} F^\ell u_\ell u^\mu + M \frac{du^\mu}{d\tau}$$ Erő hosszanti komponense

$$M \frac{du^\mu}{d\tau} = \underbrace{\left(\delta^\mu_\ell - \frac{u^\mu u_\ell}{c^2}\right)}_{Q^\mu{}_\ell} F^\ell$$ Erő merőleges komponense

Az erő hosszanti komponense az $|p|$-t változtatja, ami a M.
Az erő merőleges komponense a p^μ irányát változtatja.

Spec esetek

① $F_\mu u^\mu = 0$ Pl.: $F_\mu = A_{\mu\ell} u^\ell$ ahol $A_{\mu\ell} = -A_{\ell\mu}$

$$F_\mu u^\mu = A_{\mu\ell} u^\ell u^\mu = 0$$

itt a tömeg állandó, így a projektor nem kell $\quad M \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu$

pl.: elektromágneses erő

② $F_\mu = g \partial_\mu \phi$ ahol $\phi : M \to \mathbb{R}$

Van-e ilyen? Először azt hitték, a magerő ilyen, aztán kiderült, hogy nem, de végülis a Higgs-erő ilyen.

$$dM c^2 = F_\mu dx^\mu = g \partial_\mu \phi \, dx^\mu = g \, d\phi \Rightarrow \int$$

$$M c^2 = g\phi + m c^2$$

$$M(x) = m + \frac{g}{c^2}\phi(x)$$

Ha az erő egy gradiens, akkor a tömeg a skalártértől függ.
Higgs szerint $m = 0$ minden részecskére, a tömeg csak g-től függ.

Nordström akarta a specrellel leírni a gravitációt, és ő azt mondta, hogy

$$F_\mu = M \partial_\mu \phi$$

$$\frac{d}{d\tau}(M u^\mu) = \frac{dM}{d\tau} u^\mu + M \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu = M \partial^\mu \phi \qquad / \cdot u_\mu$$

$$(*) \quad \frac{dM}{d\tau}\underbrace{u^k u_k}_{c^2} + M\underbrace{a^k u_k}_{0} = M u^k \partial_k \phi \qquad \frac{dx^k}{d\tau}\partial_k\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\tau}$$

$$\frac{dM}{d\tau}c^2 = M\frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\frac{1}{M}dM = \frac{1}{c^2}d\phi \quad \Rightarrow \quad \ln M = \frac{1}{c^2}\phi + \ln m$$

$$\underline{M = m e^{\phi/c^2}}$$ visszahelyettesítve

$$\frac{dM}{d\tau}u^k + M\frac{du^k}{d\tau} = M\partial^k\phi$$ (*)-t kiírva

$$\frac{1}{c^2}M u^k u^l \partial_l \phi + M\frac{du^k}{d\tau} = M\partial^k\phi$$

$$\frac{du^k}{d\tau} = \left(\delta^l_k - \frac{u^k u_l}{c^2}\right)\partial^l\phi$$

viszont a tömeg függ a helytől, de a mozgásegyenlet független a tömegtől (mint galilei)

Ez csak nagyon kicsit tér el a Newtontól, de nem nagyon is amúgy is az áltrel a jó

Legyen $F_k = g\partial_k\phi$ ahol ϕ nem függ az időtől (létezik olyan rendszer, ahol nem függ)

$$\frac{d}{d\tau}(M u_k) = g\partial_k\phi$$

$$\frac{d}{d\tau}(M u_0) = g\partial_0\phi = g\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$ teljesítmény nulla

$$\frac{Mc}{\sqrt{\quad}} = \frac{E}{c} = \text{const} \qquad E = \frac{Mc^2}{\sqrt{\quad}} = \frac{mc^2 + \frac{g\phi(r)}{c^2}}{\sqrt{\quad}} = \text{áll}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2 + \frac{g\phi(r)}{c^2}}{E}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2 + \frac{g\phi}{c^2}}{E}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\quad\right)^2$$

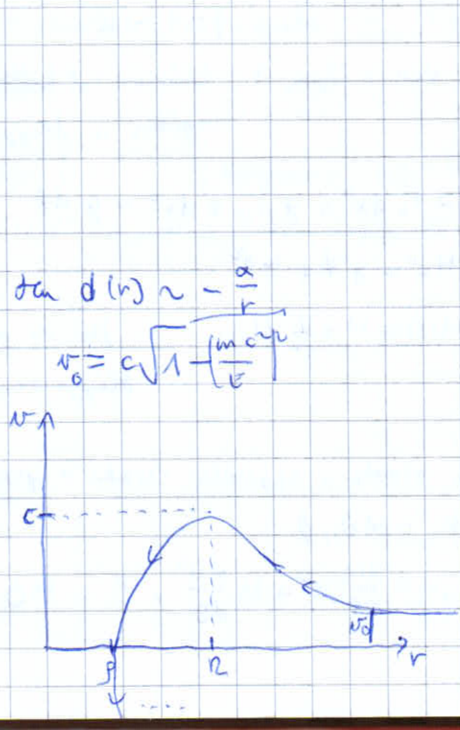
$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2 + \frac{g\phi}{c^2}}{E}\right)^2}$$

Ha $\phi(r) \sim -\frac{\alpha}{r}$

$$v_0 = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$$

$$\phi(R) = -\frac{mc^2}{g}$$

$$\phi(\rho) = \frac{-E - mc^2}{g}$$



Amikor $r = R$, akkor a tömeg 0 szerint ott elérhetjük a c-t, utána a tömeg < 0 szerint csökken.

Mi van, ha $F_\mu = \frac{1}{M}\partial_\mu \phi$

TFH van ilyen és szabadjon hú!

$$\frac{d}{d\tau}(M u^\mu) = F^\mu = \frac{1}{M}\partial^\mu \phi$$

$$\frac{dM}{d\tau} u^\mu + M a^\mu = \frac{1}{M}\partial^\mu \phi \qquad / \cdot u_\mu$$

$$\frac{dM}{d\tau}\underbrace{u^\mu u_\mu}_{c^2} + M\underbrace{a^\mu u_\mu}_{0} = \frac{1}{M}\underbrace{u_\mu \partial^\mu \phi}_{\frac{d\phi}{d\tau}}$$

$$c^2 dM = \frac{1}{M} d\phi$$

$$M\, dM = \frac{1}{c^2} d\phi \implies M = \sqrt{m^2 + \frac{2\phi(x)}{c^2}}$$

ugyanúgy:

$$M\frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\delta^\mu_\nu - \frac{u^\mu u_\nu}{c^2}\right)\frac{1}{M}\partial_\nu \phi$$

TFH $\partial_0 \phi = 0$ nem függ az időtől

$\mu = 0$-ra:

$$\frac{d}{d\tau}(M u_0) = F_0 = 0 \qquad M u_0 = \text{áll}$$

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c^2\sqrt{m^2 + \frac{2\phi(x)}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll}$$

$\mu = \alpha$-ra:

$$\frac{d}{d\tau}(M u^\alpha) = \frac{1}{M}\partial^\alpha \phi$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{M \underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{M}(-\underline{\nabla}\phi)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underbrace{\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{E \text{ a konst, így kiemelhető}}\underline{v}\right) = -\frac{c^2}{M}\underline{\nabla}\phi$$

$$E\frac{d\underline{v}}{d\tau} = -\frac{c^2}{M}\underline{\nabla}\phi$$

$$E\frac{d\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = -\frac{c^2}{M}\underline{\nabla}\phi$$

$$E^2\frac{d\underline{v}}{dt} = -c^4\underline{\nabla}\phi$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -\frac{c^4}{E^2}\underline{\nabla}\phi \qquad \text{ha } V(\underline{r}) = \frac{c^4}{E^2}\phi(\underline{r})$$

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = -\underline{\nabla}V(\underline{r})}$$

A gyorsulás egy potenciál $\ominus$ gradiense

a sebesség $V(\underline{r})$-től függ, így lehetne $v > c$.

Az eddigiek szintaktikailag helyes, de tartalmilag nem.

Meg kéne tudni állapítani, hogy hülyeség-e.

Akkor hülyeség, ha ezen alapuló más ami hülyeség

$$M=\sqrt{m^2+\frac{2\phi}{c^2}} \qquad E=c^2\sqrt{\frac{m^2+\frac{2\phi}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

E szerint, így, ha $v>c$, akkor $m^2+\frac{2\phi}{c^2}<0$, tehát $M\notin\mathbb{R}$, ami hülyeség

Mari-paradoxon: A formailag helyes képletek van listája, hogy tartalmilag igazak.

Szabad részecske hatásintegrálja: $S=-mc^2\int d\tau$ volt

A (q), B (x) A teljes rendszeré: $S_{teljes}=S_A+S_B+S_{kH}$

$S_A[q]$, $S_B[x]$ $\qquad S_{kH}=g\,F[x,q]$ ha $g=0$ akkor a két rendszer nem hat egymásra

Ekkor ha q szerint variálunk: $\delta q \quad \delta(S_A+gF)$

$\delta x \quad \delta(S_B+gF)$

Ez külön A hatása B-re és fordítva, de egyszerre nem jó, sajna ☹

Mi adott mezőben mozgó részecskét nézünk, tehát csak δq-t (x adott)

$S_{sz}=-mc^2\int d\tau$

$H(x)$ skalármező

$A_\mu(x)$ 4-vektormező

$$S=-mc^2\int d\tau-g\int H(x)\,d\tau-\frac{e}{c}\int A_\mu(x)\,dx^\mu$$

Ez a külső sk. és vk. mezőben mozgó részecske hatásintegrálja

$$=\int\Big[-mc^2-gH(x)-\frac{e}{c}A_\mu(x)\overbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}^{u^\mu}\Big]d\tau=$$

$$=\int\Big[-M(\underline{r},t)c^2-\frac{e}{c}\frac{\phi c-\underline{A}\,\underline{u}}{\sqrt{}}\Big]\sqrt{}\,dt=$$

$$=\int\underbrace{\Big[-M(x)c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-e\phi(x)+\frac{e}{c}\underline{A}(x)\underline{u}\Big]}_{L(\underline{r},\underline{u},t)}dt$$

$$A^\mu(x)=\begin{pmatrix}\phi(\underline{r},t)\\ \underline{A}(\underline{r},t)\end{pmatrix} \qquad A_\mu=\begin{pmatrix}\phi\\ -\underline{A}\end{pmatrix}$$

$$A_\mu u^\mu=A_0u^0+A_\alpha u^\alpha=\frac{\phi c}{\sqrt{}}+\frac{(-\underline{A})_\alpha(\underline{u})_\alpha}{\sqrt{}}$$

$$=\frac{\phi c-\underline{A}\,\underline{u}}{\sqrt{}}$$

$$mc^2+gH(x)=M(\underline{r},t)c^2$$

Tehát 4-es mezőkben mozgó részecske ~~hatása~~ L-ja:

$$L(\underline{r},\underline{u},t)=-M(\underline{r},t)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,c^2-e\phi(\underline{r},t)+\frac{e}{c}\underline{u}\,\underline{A}(\underline{r},t)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = -Mc^2 \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}A_\alpha = -Mc^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{e}{c}A_\alpha =$$

$$= M\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}(v^2) + \frac{e}{c}A_\alpha = \frac{Mv_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_\alpha$$

$$\underline{p} = \frac{M\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\underline{A}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial L}{\partial r_\alpha} = -\partial_\alpha M\cdot c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\,\partial_\alpha \phi + \frac{e}{c}\partial_\alpha(\underline{v}\,\underline{A})$$

$$\underline{Q} = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, g\,\underline{\nabla} H - e\underline{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\underline{\nabla}(\underline{v}\,\underline{A}) = *$$

$$(\underline{u}\times \mathrm{rot}\,\underline{v})_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\beta(\mathrm{rot}\,v)_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\beta\,\varepsilon_{\gamma\mu\nu}\partial_\mu v_\nu =$$

$$= (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})u_\beta\partial_\mu v_\nu = u_\beta\partial_\alpha v_\beta - u_\beta\partial_\beta v_\alpha$$

$$(\underline{v}\times \mathrm{rot}\,\underline{u})_\alpha = \quad " \quad " \quad " \quad = v_\beta\partial_\alpha u_\beta - v_\beta\partial_\beta u_\alpha$$

$$+ : \left[(\underline{u}\times\mathrm{rot}\,\underline{v}) + (\underline{v}\times\mathrm{rot}\,\underline{u})\right]_\alpha = u_\beta\partial_\alpha v_\beta - u_\beta\partial_\beta v_\alpha + v_\beta\partial_\alpha u_\beta - v_\beta\partial_\beta u_\alpha =$$

$$= \partial_\alpha(u_\beta v_\beta) - (\underline{u}\,\underline{\nabla})v_\alpha - (\underline{v}\,\underline{\nabla})u_\alpha$$

$$\underline{\nabla}(\underline{u}\,\underline{v}) = \underline{u}\times\mathrm{rot}\,\underline{v} + \underline{v}\times\mathrm{rot}\,\underline{u} + (\underline{u}\,\underline{\nabla})\underline{v} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{u}$$

$$\underline{\nabla}(\underline{v}\,\underline{A}) = \underline{v}\times\mathrm{rot}\,\underline{A} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{A}$$

$$* = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, g\,\underline{\nabla} H - e\,\underline{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\left(\underline{v}\times\mathrm{rot}\,\underline{A} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{A}\right)$$

mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\underline{p} = \underline{Q}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\underline{A}\right) = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, g\,\underline{\nabla} H - e\underline{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\left(\underline{v}\times\mathrm{rot}\,\underline{A} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{A}\right)$$

mivel

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}A_\alpha(\underline{r}(t),t)\right) = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\beta}\frac{dr_\beta}{dt}}_{v_\beta\partial_\beta A_\alpha}\right) = \frac{e}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{A}$$

$(\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{A}$ kiesik

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, g\,\underline{\nabla} H - e\,\underline{\nabla}\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\underline{v}\times\mathrm{rot}\,\underline{A})$$

$$= -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, g\,\underline{\nabla} H + e\left[\underbrace{\left(-\underline{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right)}_{E(\underline{r},t)} + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underbrace{\mathrm{rot}\,\underline{A}}_{B(\underline{r},t)}\right]$$

Tehát $\frac{d}{dt}\left(\frac{M\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, g\, \underline{\nabla} H + e\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)$ a mozgásegyenlet

$$\frac{dM}{dt}\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }} + M\frac{d}{dt}\left(\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }}\right) = \dots$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{g}{c^2}\frac{dH}{dt} = \frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + (\underline{v}\underline{\nabla})H\right)$$

$$\frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial H}{\partial t}+(\underline{v}\underline{\nabla})H\right)\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }} + M\left[\frac{\underline{a}}{\sqrt{\ }} + \underline{v}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ }^3}\right)\left(-\frac{1}{c^2}\right)2\underline{v}\underline{a}\right] = \dots$$

$$\frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial H}{\partial t}+(\underline{v}\underline{\nabla})H\right)\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }} + M\left[\frac{\underline{a}}{\sqrt{\ }} + \underline{v}\frac{1}{\sqrt{\ }^3}\frac{1}{c^2}(\underline{v}\underline{a})\right] = \dots$$

$$\frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial H}{\partial t}+(\underline{v}\underline{\nabla})H\right)\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }} + \frac{M}{\sqrt{\ }}\left(\underline{\underline{I}} + \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2}\right)\underline{a} = \dots$$

$$\frac{M}{\sqrt{\ }}\left(\underline{\underline{I}} + \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{c^2-v^2}\right)\underline{a} = -g\left[\sqrt{\ }\,\underline{\nabla}H + \frac{1}{c^2}(\underline{v}\underline{\nabla})H\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }} + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{1}{c^2}\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }}\right] + e\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)$$

$$\dots = -g\sqrt{\ }\left[\underline{\underline{I}} + \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{c^2-v^2}\right]\underline{\nabla}H - \frac{g}{c^2}\frac{\underline{v}}{\sqrt{\ }}\frac{\partial H}{\partial t} + \dots$$

$\underline{v} = v\,\underline{n}$

$\underline{\underline{I}} + \frac{v^2}{c^2-v^2}\underline{n}\circ\underline{n} = *$ $\qquad$ $\underline{\underline{P}} = \underline{n}\circ\underline{n}$, $\quad \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} - \underline{n}\circ\underline{n}$

$$* = \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{Q}} + \frac{v^2}{c^2-v^2}\underline{\underline{P}} = \frac{c^2}{c^2-v^2}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{Q}} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{Q}} = (\ )$$

$$(\ )^{-1} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{Q}} - \frac{v^2}{c^2}\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}} - \frac{v^2}{c^2}\underline{n}\circ\underline{n} = \underline{\underline{I}} - \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{c^2}$$

$$\frac{M\underline{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\underline{\nabla}H - \frac{g}{c^2}\underbrace{\left(\underline{\underline{I}} - \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{c^2}\right)\underline{v}}_{\underline{v} - \frac{\underline{v}v^2}{c^2} = \underline{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\ }}\frac{\partial H}{\partial t} + e\underbrace{\left(\underline{\underline{I}} - \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{c^2}\right)\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)}_{\underline{E}(\ ) + \frac{1}{c}\left(\underline{v}\times\underline{B} - \frac{\underline{v}\,\overbrace{(\underline{v}(\underline{v}\times\underline{B}))}^{0}}{c^2}\right)}$$

$$\frac{M\underline{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\underline{\nabla}H - \frac{g}{c^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\underline{v}\frac{\partial H}{\partial t} + e\left(\underline{\underline{I}} - \frac{\underline{v}\circ\underline{v}}{c^2}\right)\underline{E} + \frac{e}{c}(\underline{v}\times\underline{B})$$

$$\frac{M\underline{a}}{\sqrt{\ }} = -g\sqrt{\ }\left(\underline{\nabla}H + \frac{1}{c^2}\underline{v}\frac{\partial H}{\partial t}\right) + e\left(\underline{E} - \frac{\underline{v}(\underline{v}\underline{E})}{c^2}\right) + \frac{e}{c}(\underline{v}\times\underline{B}) \qquad \Big/ \frac{m}{M}\sqrt{\ }$$

$$m\underline{a} = -g\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{m}{M}\left(\underline{\nabla}H + \frac{1}{c^2}\underline{v}\frac{\partial H}{\partial t}\right) + e\sqrt{\ }\frac{m}{M}\left(\underline{E} - \frac{\underline{v}(\underline{v}\underline{E})}{c^2}\right) + \frac{e}{c}\sqrt{\ }\frac{m}{M}(\underline{v}\times\underline{B})$$

$$\frac{m}{M} = \frac{m}{m+\frac{g}{c^2}H} = \frac{1}{1+\frac{gH}{mc^2}} \qquad g\underline{\nabla}H = \underline{\nabla}(gH) = \nabla(Mc^2 - mc^2) = \nabla(Mc^2)$$

~~ma~~ $$m\underline{a} = -\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)m\left(\frac{\underline{\nabla}(Mc^2) + \frac{1}{c^2}\underline{u}\frac{\partial}{\partial t}(Mc^2)}{M}\right) + \cdots$$

$$m\underline{a} = -\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)mc^2\,\frac{\left[\underline{\nabla} + \frac{1}{c^2}\underline{u}\frac{\partial}{\partial t}\right]M}{M} + \cdots$$

$$\ln\frac{M}{m} = \ln\left(1+\frac{gH}{mc^2}\right)$$

$$\boxed{m\underline{a} = -mc^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(\underline{\nabla} + \frac{1}{c^2}\underline{u}\frac{\partial}{\partial t}\right)\ln\left(1+\frac{gH(\underline{r},t)}{mc^2}\right) + e\,\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{gH}{mc^2}}\left(\underline{E}-\frac{\underline{u}(\underline{u}\cdot\underline{E})}{c^2}\right) + \frac{e}{c}\,\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{gH}{mc^2}}\,\underline{u}\times\underline{B}}$$

SPECREL II.

4. videó

variációs számítás 4-es vektorokkal: u.a. m. előző órán

$H(x)$; $x = (ct, \underline{x})$ $A^k(x) = \begin{pmatrix} \phi(\underline{x}, t) \\ \underline{A}(\underline{x}, t) \end{pmatrix}$ $A_k(x) = \begin{matrix} \phi(\underline{x}, t) \\ -\underline{A}(\underline{x}, t) \end{matrix}$

$$S = -mc^2 \int d\tau - g \int H(x)\, d\tau - \frac{e}{c} \int A_k(x)\, dx^k$$

Az előző órán a 4-es vektorokat kifejtettük, de most nézzük brute-force!

Legyen $M(x) = m + \frac{g}{c^2} H(x)$

$$S = -\int M(x) c^2 d\tau - \frac{e}{c} \int A_k(x)\, dx^k$$

$$\delta S = -c^2 \int \delta(M(x)\, d\tau) - \frac{e}{c} \int \delta(A_k(x)\, dx^k) =$$

$$= -c^2 \int \left[\delta M(x) \cdot d\tau + M(x)\, \delta d\tau \right] - \frac{e}{c} \int \left[\delta A_k(x) \cdot dx^k + A_k(x)\, \delta dx^k \right] =$$

$$= -c^2 \int \left[\frac{\partial M(x)}{\partial x^k} \delta x^k d\tau + M(x)\, \delta\left[\frac{\sqrt{ds^2}}{c} \right] \right] - \frac{e}{c} \int \left[\frac{\partial A_k(x)}{\partial x^l} \delta x^l dx^k + A_k(x)\, \delta(dx^k) \right] =$$

$$= -c^2 \int \partial_k M\, \delta x^k d\tau - c \int M(x) \frac{1}{2\sqrt{ds^2}} \underbrace{\delta(g_{kl}\, dx^k dx^l)}_{2 g_{kl}\, dx^l \delta(dx^k)} - \frac{e}{c} \int \partial_l A_k\, \delta x^l dx^k - \frac{e}{c} \int A_k(x)\, \delta(dx^k) =$$

$$= -c^2 \int \partial_k M\, \delta x^k d\tau - \int M(x) \frac{1}{c\, d\tau} g_{kl}\, dx^l \delta(dx^k) - \frac{e}{c} \int \overbrace{\partial_l A_k\, \delta x^l \frac{dx^k}{d\tau}}^{\partial_k A_l \delta x^k u^l d\tau} d\tau - \frac{e}{c} \int A_k(x)\, \delta(dx^k) =$$

$$= \int \left(-c^2 \partial_k M - \frac{e}{c} (\partial_k A_l) u^l \right) \delta x^k d\tau - \int \left(M(x) g_{kl} u^l + \frac{e}{c} A_k(x) \right) \delta(dx^k) =$$ mivel $\delta(dx^k) = d(\delta x^k)$

$$= -\int \left(c^2 \partial_k M + \frac{e}{c} (\partial_k A_l) u^l \right) \delta x^k d\tau - \int \left(M u_k + \frac{e}{c} A_k \right) \frac{d(\delta x^k)}{d\tau} d\tau =$$ parciális

$$= -\int \left(c^2 \partial_k M + \frac{e}{c} (\partial_k A_l) u^l \right) \delta x^k d\tau + \int \frac{d}{d\tau} \left(M u_k + \frac{e}{c} A_k \right) \delta x^k d\tau =$$

$$= \int \left(\frac{d}{d\tau} \left(M u_k + \frac{e}{c} A_k \right) - c^2 \partial_k M - \frac{e}{c} (\partial_k A_l) u^l \right) d\tau\, \delta x^k \stackrel{!}{=} 0$$ $\forall \delta x^k$-ra $\Rightarrow$ a zárójeles rész 0

$$\frac{d}{d\tau} \left(M u_k + \frac{e}{c} A_k \right) = c^2 \partial_k M + \frac{e}{c} (\partial_k A_l) u^l$$ Ez a mozgásegyenlet

$$\frac{d}{d\tau} A_k(x(\tau)) = \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \frac{dx^l}{d\tau} = (\partial_l A_k) u^l$$

$$\frac{d}{d\tau} (M u_k) = c^2 \partial_k M + \frac{e}{c} \left(\partial_k A_l - \partial_l A_k \right) u^l$$ ez is mozgásegyenlet

Mivel $M c^2 = m c^2 + g H$

$\partial_k M c^2 = g\, \partial_k H$

$$\frac{d}{d\tau}(M u_k) = g\,\partial_k H + \frac{e}{c}\left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right) u^l \qquad (*)$$

Ez a múlt órai végképlet 4-es vektor megfelelője.

Mivel ez ekvi az előző órai 3-as vektoregyenlettel, ennek komponensei nem függetlenek

Legyen $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k = -F_{lk}$ ez a Rot A

$$\frac{dM}{d\tau} u_k + M \frac{du_k}{d\tau} = g\,\partial_k H + \frac{e}{c}\left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right) u^l \qquad / \cdot u^k$$

$$\frac{dM}{d\tau} \underbrace{u_k u^k}_{c^2} + \underbrace{M \frac{du_k}{d\tau} u^k}_{0} = \underbrace{g\, u^k \partial_k H}_{\frac{d}{d\tau} H} + \frac{e}{c} \underbrace{F_{kl} u^l u^k}_{0}$$

$$\frac{d M c^2}{d\tau} = g \frac{dH}{d\tau}$$

Ebből indultunk ki, ezért nem független a 4 komponens.

Ezt visszaírva $(*)$-ba:

$$\frac{g}{c^2} u^l \partial_l H\, u_k + M \frac{du_k}{d\tau} = g\, \delta_k^l \partial_l H + \frac{e}{c} F_{kl} u^l$$

$$M \frac{du_k}{d\tau} = g\left(\delta_k^l - \frac{u^l u_k}{c^2}\right)\partial_l H + \frac{e}{c} F_{kl} u^l$$

$$= \left(\delta_k^l - \frac{u^l u_k}{c^2}\right)\left(g\,\partial_l H + \frac{e}{c} F_{lm} u^m\right) \qquad / \cdot \frac{m}{M} = \frac{1}{1 + \frac{gH}{mc^2}}$$

$$\boxed{m \frac{du_k}{d\tau} = \left(\delta_k^l - \frac{u^l u_k}{c^2}\right) mc^2 \partial_l \ln\left(1 + \frac{gH}{mc^2}\right) + \frac{e}{c} \frac{F_{kl} u^l}{1 + \frac{gH}{mc^2}}}$$

Miért variálgattunk és nem helyettesítettük be hatásba a Lagrange-t?

mert nincs relativisztikus Lagrange.

x^k variálása u^k-t is variálja és $u^k u_k = c^2$ elromlik

ha viszont $x^k(\tau)$ helyett $x^k(w)$ és $\tau(w)$-t veszünk

$$\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dx^k/dw}{d\tau/dw} = \frac{\dot{x}^k}{\dot{\tau}}$$ nincs ilyen feltétel.

emiatt a $u^k u_k = c^2$ összefüggés Lagrange multiplikátorral figyelembe vehetjük

Mivel mi felel meg: $q \to x^k$; $\dot{q} \to \frac{dx^k}{d\tau} = u^k$, $L(q,\dot{q},t) \to L(x^k, u^k, \tau)$

Ha a rendszer időben állandó, akkor $L(x^k, \dot{x}^k, \tau)$ nem függ τ-tól $\Rightarrow$ ez Beltrami

$S = \int L\,dt \to \underline{S = \int L(x^k, u^k)\,d\tau}$ cél: $L(x^k, u^k)$-t akarjuk megkapni

$x^k(\tau(w)) = x^k(w)$

$\dot{x}^k = \frac{dx^k}{dw}$

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 = \frac{1}{c^2} g_{ke}\, dx^k dx^e = \frac{1}{c^2} g_{ke} \frac{dx^k}{dw}\frac{dx^e}{dw}\, dw^2$$

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{ke}\dot{x}^k \dot{x}^e}\, dw$$

$$u^k = \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dx^k/dw}{d\tau/dw} = \frac{c\dot{x}^k}{\sqrt{g_{em}\dot{x}^e \dot{x}^m}}$$

$$S = \int \underbrace{\left[L\left(x^k, u^k = \frac{c\dot{x}^k}{\sqrt{g_{em}\dot{x}^e\dot{x}^m}}\right) \frac{1}{c}\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\right]}_{\Lambda(x^k, \dot{x}^e)} dw$$

$\Lambda(x^k, \dot{x}^e) \leftarrow$ Ezt variálva ki jön az, ami mindjárt másképp is ki fog.

A multiplikált funkcionál:

$$S' = \int \underbrace{\left[L(x^k, u^k) - \frac{M(\tau)}{2}\left(g_{ke}u^k u^e - c^2\right)\right]}_{L'(x^k, u^k, M, \dot{M})} d\tau$$

Legyen $p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k}$ $\quad Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k}$ $\quad F_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k$

$p'_k = \frac{\partial L'}{\partial u^k}$ $\quad Q'_k = \frac{\partial L'}{\partial x^k}$

$$p'_k = \frac{\partial L}{\partial u^k} - \frac{M}{2} 2 g_{ke} u^e = p_k - M u_k$$

$$Q'_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = Q_k$$

Így az EL-egyenletek: $\boxed{\frac{d}{dt} p'_k = Q_k}$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{M}}}_{0} = \frac{\partial L'}{\partial M}} \Rightarrow$$

$\frac{\partial L'}{\partial M} = -\frac{1}{2}\left(g_{ke}u^k u^e - c^2\right)$

$$\frac{d}{d\tau}\left(p_k - M u_k\right) = Q$$

$$\frac{d p_k}{d\tau} - \frac{d(M u_k)}{d\tau} = Q_k$$

$$\frac{d(M u_k)}{d\tau} = \frac{d p_k}{d\tau} - Q_k$$

$$\boxed{\frac{d(M u_k)}{d\tau} = F_k} \Rightarrow \frac{dM}{d\tau} u_k + M \frac{d u_k}{d\tau} = F_k \quad / \cdot u^k$$

$$\frac{dM}{d\tau} u_k u^k + M \frac{d u_k}{d\tau} u^k = F_k u^k$$

$$M \frac{d u_k}{d\tau} = F_k - \frac{1}{c^2} u_k u^l F_l \quad \leftarrow \quad \frac{dM}{d\tau} c^2 = F_k u^k$$

$$\boxed{M \frac{d u_k}{d\tau} = \left(\delta_k^l - \frac{u^l u_k}{c^2}\right) F_l}$$

Mennyi az M?

Mivel $L' = L - \frac{M}{2}\left(g_{kl} u^k u^l - c^2\right)$ nem függ τ-tól,

nem [illegible].

$$B' = p_k' u^k - L' = (p_k - M u_k) u^k - L + \frac{M}{2}\overbrace{\left(g_{kl} u^k u^l - c^2\right)}^{0} =$$

$$= p_k u^k - L - M u_k u^k = B - M c^2$$

Ez konstans (sőt megválasztható, hogy 0)

$$B = M c^2$$

Relativisztikus Lagrange-formalizmus:

$$L(x^k, u^k)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k}$$

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k}$$

$$F_k = \frac{d p_k}{d\tau} - Q_k$$

$$B = p_k u^k - L$$

$$M = \frac{B}{c^2}$$

$$\frac{d}{d\tau}(M u_k) = F_k$$

$$M \frac{d u_k}{d\tau} = \left(\delta_k^l - \frac{u_k u^l}{c^2}\right) F_l$$

Spec esetek

① Szabad részecske

$$L = -mc^2$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k} = 0$$

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$$

$$F_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k = 0$$

$$B = p_k u^k - L = -L = mc^2$$

$$M = \frac{B}{c^2} = m$$

$$\frac{d}{d\tau}(m u_k) = 0$$

$$m\frac{du^k}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad u^k = \text{const}$$

kijött, ami megfigyelés alapján is

② 4-es skalármező

$$S = -\int mc^2 d\tau - \int g H d\tau \qquad L = -mc^2 - gH(x)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k} = 0 \qquad Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = -g\,\partial_k H \qquad F_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k = g\,\partial_k H$$

$$B = p_k u^k - L = -L = +mc^2 + gH(x)$$

$$M = \frac{B}{c^2} = m + \frac{g}{c^2}H(x) \qquad \text{(Novodamszki)}$$

$$\frac{d}{d\tau}(M u_k) = g\,\partial_k H$$

$$M\frac{du_k}{d\tau} = \left(\delta_k^e - \frac{u_k u^e}{c^2}\right) g\,\partial_e H$$

$$m\frac{du^k}{d\tau} = \left(\delta_k^e - \frac{u_k u^e}{c^2}\right) mc^2\,\partial_e \ln\left(1 + \frac{gH}{mc^2}\right)$$

③ 4-es vektormező

$$S = -mc^2\int d\tau - \frac{e}{c}\int A_k(x)\,dx^k = \int\left(-mc^2 - \frac{e}{c}A_k(x)\,u^k\right)d\tau$$

$$L = -mc^2 - \frac{e}{c}A_k(x)\,u^k$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k} = -\frac{e}{c}A_k(x) \qquad Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = -\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[-mc^2 - \frac{e}{c}A_e(x)u^e\right] = -\frac{e}{c}(\partial_k A^e)u^e$$

$$F_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k = -\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^e}\frac{dx^e}{d\tau} - (\partial_k A_e)u^e\right) = \frac{e}{c}\left(\partial_k A_e - \partial_e A_k\right)u^e = \frac{e}{c}F_{ke}u^e$$

$$B = p_k u^k - L = \left(-\frac{e}{c}A_k(x)\right)u^k + mc^2 + \frac{e}{c}A_k(x)u^k = mc^2 \qquad M = \frac{B}{c^2} = m = \text{const}$$

$$m\frac{du_k}{d\tau} = \frac{e}{c}F_{ke}u^e$$

④ Skalár tér

$$S = -mc^2\int d\tau - g\int H(x)\, d\tau - \frac{e}{c}\int A_k(x)\, dx^k$$

$$L = -mc^2 - gH(x) - \frac{e}{c}A_k(x)u^k$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k} = -\frac{e}{c}A_k(x)$$

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = -g\,\partial_k H - \frac{e}{c}(\partial_k A_\ell)u^\ell$$

$$\frac{dp_k}{d\tau} = -\frac{e}{c}(\partial_\ell A_k)u^\ell$$

$$F_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k = \frac{e}{c}(\partial_k A_\ell - \partial_\ell A_k)u^\ell + g\,\partial_k H$$

$$B = p_k u^k - L = \left(-\frac{e}{c}A_k\right)u^k + mc^2 + gH + \frac{e}{c}A_k u^k = mc^2 + gH$$

$$M = \frac{B}{c^2} = m + \frac{g}{c^2}H(x)$$

$$\frac{d(Mu_k)}{d\tau} = g\,\partial_k H + \frac{e}{c}F_{k\ell}u^\ell$$

$$M\frac{du_k}{d\tau} = \left(\delta_k^\ell - \frac{u_k u^\ell}{c^2}\right)g\,\partial_\ell H + \frac{e}{c}F_{k\ell}u^\ell$$

⑤ Tenzormező

$$T_{k\ell}(x) = T_{\ell k}(x) \quad \longrightarrow HF$$

⑥

$$S = -c^2\int \mu(x)\, d\tau \qquad L = -\mu(x)c^2 \qquad p_k = 0. \qquad Q_k = -c^2\partial_k\mu$$

$$F = c^2\partial_k\mu \qquad B = p_k u^k - L = \mu(x)c^2 \qquad M = \mu(x)$$

$$\frac{d}{d\tau}(\mu(x)u_k) = c^2\partial_k\mu$$

$$\mu\frac{du_k}{d\tau} = \left(\delta_k^\ell - \frac{u_k u^\ell}{c^2}\right)c^2\partial_\ell\mu \qquad\qquad m\frac{du_k}{d\tau} = mc^2\left(\delta_k^\ell - \frac{u_k u^\ell}{c^2}\right)\partial_\ell \ln\left(\frac{\mu(x)}{m}\right)$$

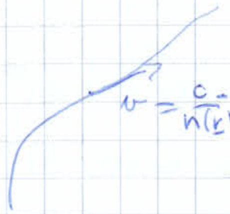
Ez tetszőleges skalármező

6

6/a $\mu = m + \frac{g}{c^2}H(x)$

6/b $\mu = m\, e^{\varphi(x)/c^2}$

6/c $\mu = \sqrt{m + \frac{2\varphi(x)}{c^2}}$



$v = \frac{c_0}{n(\underline{r})}$ $ds = v\,dt$

$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{c_0} n(\underline{r})$

$S = \frac{1}{c_0}\int n(\underline{r})\,ds$ Fermat-elv: $\delta S = 0$

Ez tehát olyan, mint egy skalármezőben mozgó részecske hatásfüggvénye

Mi van, ha nem üveg, hanem kristály

$n(\underline{r}, \underline{e})$

Itt: $S = \int n(\underline{r}, \underline{e})\,ds \quad \sim L(\underline{x}, \underline{u})$

Ez nagyon az általános eset. Itt a w paraméter helyett az idő

A kölcsönhatások másik modellje: kontaktkölcsönhatás (ütközés)

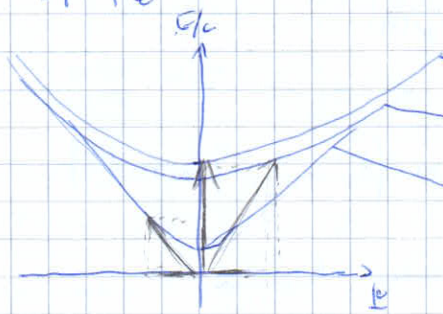
$S = \sum_a (-m_a c^2)\int d\tau_a$

$p^a_k = m_a v^a_k$

$P_k = \sum p_k$ ez elvileg megmaradó

Vegyünk egy egyszerű folyamatot:

$n^0 \to p^+ + e^-$



$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = (m_n c^2)^2$

$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = (m_p c^2)^2$

$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = (m_e c^2)^2$

Feladat: Az eredeti (neutron) 4-es impulzust felbontani két különbözőre, amik a proton és elektron hiperboláin vannak.

p irányú: $\frac{m v_e}{\sqrt{1-\frac{v_e^2}{c^2}}} + \frac{m v_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} = 0$

$\frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\frac{v_e^2}{c^2}}} + \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} = m_n c^2$

Kifejezhetjük p-vel:

$$p_e + p_p = 0$$

$$\sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} + \sqrt{(m_p c^2)^2 + (p_p c)^2} = m_n c^2$$

kiszámítható, hogy mekkora adott sebességű elektron lép ki, de a valóságban eloszlást kapunk

$\Rightarrow$ neutrínó

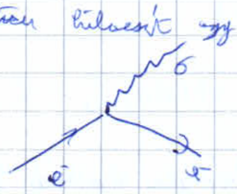
Az eloszlást már a kvantummechanika adja meg

A relativisztikus kvantumelmélet egy határterülete, amiből az ilyen [illegible] vannak

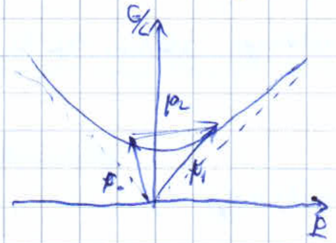
SPECREL II.

5. videó

Elektron kibocsát egy fotont:



Az elektron megengedett energiája u. a.



p_2 csak térszerű lehet, ami nem lehet 4-es impulzus $\Rightarrow$ az $a \to a+b$ folyamatot nem létezik

DE a kvantum ED ilyen lépéseket elmossa, mert csak a végső dolgokat kell nézni

itt jók, de közben nem

Tanulság: a közbenső részecskék nem a megfelelő tömeghéjon van rajta
a kinematika szempontjából mindegy, mert csak a kezdeti és végső állapot számít

---

4-es vektor-mező:

$$S=-mc\int d\tau-\frac{e}{c}\int A_\mu(x)\,dx^\mu \qquad \text{ahol } A^\mu(x)=\begin{pmatrix}\phi(x)\\ \underline{A}(x,t)\end{pmatrix} \qquad A_\mu=\begin{pmatrix}\phi(x)\\ -\underline{A}(x,t)\end{pmatrix}$$

$$S=\int\left(-mc^2-\frac{e}{c}A_\mu u^\mu\right)d\tau=$$

$$=\int\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{e}{c}\phi+\frac{e}{c}\underline{A}\,\underline{v}\right)dt$$

$$m\frac{d}{dt}\frac{\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=e\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)$$

ahol $\underline{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\phi$

$\underline{B}=\underline{\nabla}\times\underline{A}$

4-es változat:

$$m\frac{du_\mu}{d\tau}=\frac{e}{c}F_{\mu\varrho}u^\varrho$$

ahol $F_{\mu\varrho}=\partial_\mu A_\varrho-\partial_\varrho A_\mu$

$F_{00}=0$

$$F_{0\alpha}=\partial_0 A_\alpha-\partial_\alpha A_0=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\underline{A})_\alpha-\partial_\alpha\phi=\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\phi\right)_\alpha=E_\alpha$$

$$F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha=\partial_\alpha(-\underline{A})_\beta-\partial_\beta(-\underline{A})_\alpha$$

Ha $\underline{B}=\underline{\nabla}\times\underline{A}$ $\quad B_\sigma=\varepsilon_{\sigma\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta$

Hodge-duálisa: $b_{\alpha\beta}=-\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}B_\sigma=$

$$=-\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\varepsilon_{\sigma\mu\nu}\partial_\mu A_\nu=$$

$$=-(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}-\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})\partial_\mu A_\nu=-(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)=F_{\alpha\beta}$$

$\Downarrow$

$$F_{\mu\varrho}=\begin{pmatrix}0 & \underline{E}\\ -\underline{E} & \underline{\underline{b}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}\Leftarrow$$

$\underline{E}$ és $\underline{B}$ valójában ugyanaz a mennyiség az ED-ben

Hodge dualitás

$$\cancel{\dim = N \quad A_{i_1 i_2 \ldots i_k} \rightarrow \hat{A}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \ldots}$$

$\dim = N$

$$\underbrace{A_{i_1 i_2 \cdots i_k}}_{k} \longrightarrow \underbrace{\hat{A}_{j_1 j_2 \cdots j_{N-k}}}_{N-k} = \frac{1}{k!} \underbrace{\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_{N-k} i_1 i_2 \cdots i_k}}_{N} A_{i_1 i_2 \cdots i_k}$$

antiszimmetrikusak!

4 dimenzióban a két indexes tenzornak két indexes van

$$F_{k\ell} \longrightarrow \hat{F}^{k\ell} = \varepsilon^{k\ell m p} F_{mp}$$

$$\hat{F}^{00} = 0$$

$$\hat{F}^{01} = \frac{1}{2}\varepsilon^{01mp} F_{mp} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{0123} F_{23} + \varepsilon^{0132} F_{32}\right) = F_{23} = -B_x$$

$$\hat{F}^{02} = -B_y \quad \hat{F}^{03} = -B_z$$

$$\hat{F}^{12} = \frac{1}{2}\varepsilon^{12mp} F_{mp} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{1203} F_{03} + \varepsilon^{1230} F_{30}\right) = F_{03} = E_z$$

$$\hat{F}^{k\ell} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & +E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{B} \\ \underline{B} & -\underline{e} \end{pmatrix} \quad \text{ahol} \quad e_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma$$

Tehát

$$F_{k\ell} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{E} \\ -\underline{E} & \underline{\underline{b}} \end{pmatrix} \quad \text{ahol} \quad b_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma$$

$$F^{k}{}_{\ell} = g^{kp} F_{k\ell} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \underline{E} \\ -\underline{E} & \underline{\underline{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{E} \\ \underline{E} & -\underline{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

$$F_{k}{}^{\ell} = F_{kp} g^{p\ell} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{E} \\ -\underline{E} & \underline{\underline{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{E} \\ -\underline{E} & -\underline{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

$$F^{k\ell} = g^{kp} F_{pq} g^{q\ell} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \underline{E} \\ -\underline{E} & \underline{\underline{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{E} \\ \underline{E} & \underline{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}_{k\ell} = \varepsilon_{k\ell mp} \hat{F}^{mp} = \begin{pmatrix} 0 & +\underline{B} \\ -\underline{B} & -\underline{\underline{e}} \end{pmatrix}$$

$$\partial_e \hat{F}^{ke} = \frac{1}{2}\partial_e\left(\varepsilon^{kemp}F_{mp}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^{kemp}\,\partial_e\left(\underbrace{\partial_m A_p}_{0} - \underbrace{\partial_p A_m}_{0}\right) = 0$$

A rotáció-tenzor, és annak duálisának divergenciája is 0.

Speciálisan:

$$\partial_e \hat{F}^{0e} = \partial_0 \hat{F}^{00} + \partial_\beta \hat{F}^{0\beta} = -\partial_\beta\left(\underline{B}_\beta\right) = -\operatorname{div}\underline{B} = 0$$

$$\partial_e \hat{F}^{\alpha e} = \partial_0 \hat{F}^{\alpha 0} + \partial_\beta \hat{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{B}\right)_\alpha + \partial_\beta\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}E_\gamma\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\underline{E}\right)_\alpha = 0$$

Vagyis
$$\boxed{\begin{matrix}\operatorname{div}\underline{B} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\underline{E}\end{matrix} \iff \partial_e \hat{F}^{ke} = 0}$$

ahol $F_{ke} = \partial_k A_e - \partial_e A_k$

$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$

$\underline{B} = \operatorname{rot}\underline{A}$

Elektrodinamikában fordítva volt. az $\underline{E}$ és $\underline{B}$ -hez vezettük be $\underline{A}$-t és ϕ-t

Relativisztikusan a sorrend az, hogy egy A_k négyespotenciálból számoljuk $\underline{E}$ és $\underline{B}$

A második két Maxwell a második sajátmechanikájának függ, de azt még nem vesszük. Ehhez kéne a hatástalanul tag a lattérintegrálban.

Végtelen sok másik létezhet, ebből csak a legegyszerűbb az ED, de a fenti Maxwellek a többire is érvényes

Kiszabadulás kiha:

Ha $\operatorname{div}\underline{B} = 0$ akkor létezik $\underline{A}$, ami $\underline{B} = \operatorname{rot}\underline{A}$

de végtelen sok ilyen $\underline{A}$ van: $\underline{B} = \operatorname{rot}\left(\underline{A} + \underline{\nabla}\chi(\underline{r},t)\right) = \operatorname{rot}\underline{A} + \underbrace{\operatorname{rot}\left(\underline{\nabla}\chi(\underline{r},t)\right)}_{0}$

$\operatorname{rot}\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\left(\underline{A} + \underline{\nabla}\chi\right)$ de így $\underline{E}$ változik

mértéktranszformáció:

$A \to A' = A + \underline{\nabla}\chi \qquad (1)$

$\phi \to \phi' = \phi + ? \qquad (2)$

$\underline{B} \to B' = \operatorname{rot}A' = \operatorname{rot}(A) + \operatorname{rot}\nabla\chi = B$ mindenképpen

$\underline{E} \to \underline{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial A'}{\partial t} = \nabla\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(A + \nabla\chi) = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\underbrace{\left(\phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)}_{\phi} =$

Tehát $? = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$

(1) és (2) a másodfajú lokális mértéktranszformáció

Ezt hogy kell 4D-ben?

$$A^k = \begin{pmatrix}\phi \\ \underline{A}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\phi' \\ \underline{A}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi \\ \underline{A} + \underline{\nabla}\chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi \\ \underline{A}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\underline{\nabla}\end{pmatrix}\chi$$

$$A_k = \begin{pmatrix}\phi \\ -\underline{A}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\phi' \\ -\underline{A}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi \\ -\underline{A} - \underline{\nabla}\chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi \\ -\underline{A}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \underline{\nabla}\end{pmatrix}\chi$$

$A_k \to A_k' = A_k - \partial_k\chi$

$F_{ke} \to F_{ke}' = \partial_k A_e' - \partial_e A_k' = \partial_k\left(A_e - \partial_e\chi\right) - \partial_e\left(A_k - \partial_k\chi\right) = \partial_k A_e - \partial_e A_k - \partial_k\partial_e\chi + \partial_e\partial_k\chi =$

$= \partial_k A_e - \partial_e A_k = F_{ke}$

A hatás vagy transzformációin?

$$S_{kt} = -\frac{e}{c}\int A_k dx^k$$

$$S'_{kt} = -\frac{e}{c}\int A'_k dx^k = -\frac{e}{c}\int (A_k - \partial_k \chi)\, dx^k = -\frac{e}{c}\int A_k dx^k + \frac{e}{c}\int \partial_k \chi\, dx^k =$$

$$= -\frac{e}{c}\int A_k dx^k \,|- \chi(\text{kezd}) - \chi(\text{vég})|$$

A hatás nem marad ínv, de a variálás után már az.

Ha es vektormezőben mozgó részecske mozgásegyenlete:

$$m\frac{du_k}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ke} u^e \qquad \text{ahol} \quad F_{ke} = \partial_k A_e - \partial_e A_k$$

$k=\alpha$:

BO: $-m\frac{du_\alpha}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau}(m u_\alpha) = \left(\frac{dp}{d\tau}\right)_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{dp}{dt}\right)_\alpha$

JO: $\frac{e}{c}\left(-F_{\alpha e} u^e\right) = -\frac{e}{c}\left(F_{\alpha 0} u^0 + F_{\alpha\beta} u^\beta\right) = -\frac{e}{c}\left(E_\alpha \frac{c}{\sqrt{}} + b_{\alpha\beta}\frac{v_\beta}{\sqrt{}}\right)$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_\alpha = eE_\alpha - \frac{e}{c}\left(-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma v_\beta\right) = e\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\underline{p} = e\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)$$

$k=0$

BO: $m\frac{du_0}{d\tau} = m\frac{d\frac{c}{\sqrt{}}}{d\tau} = \frac{d\frac{E}{c}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{}}\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$

JO: $\frac{e}{c}F_{0e}u^e = \frac{e}{c}\left(F_{00}u^0 + F_{0\alpha}u^\alpha\right) = \frac{e}{c}\frac{E_\alpha v_\alpha}{\sqrt{}}$

$$\frac{dE}{dt} = e\underline{E}\,\underline{v} \qquad \text{(munkatétel)}$$

Térjünk át más koordinátára:

$$F^{ke\,\prime} = \Lambda^k{}_p \Lambda^e{}_q F^{pq} \qquad \text{ahol} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \text{ch}\,\chi & -\underline{n}\,\text{sh}\,\chi \\ -\underline{n}\,\text{sh}\,\chi & \underline{1} + \underline{n}\circ\underline{n}\,(\text{ch}\,\chi - 1) \end{pmatrix}$$

$$E'_\alpha = F'^{\alpha 0} = \Lambda^\alpha{}_p \Lambda^0{}_q F^{pq} = \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^0{}_q F^{0q} + \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^0{}_q F^{\beta q} =$$

$$= \left(\underbrace{\Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^0{}_0 F^{00}}_{0} + \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^0{}_\gamma F^{0\gamma}\right) + \left(\Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^0{}_0 F^{\beta 0} + \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^0{}_\gamma F^{\beta\gamma}\right) =$$

$$= (-n_\alpha\,\text{sh}\,\chi)(-n_\gamma\,\text{sh}\,\chi)(-E_\gamma) + (\delta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta(\text{ch}\,\chi - 1))\,\text{ch}\,\chi\,(+E_\beta) + (\delta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta(\text{ch}\,\chi - 1))(-n_\gamma\,\text{sh}\,\chi)(-\varepsilon_{\beta\gamma\mu} B_\mu) =$$

$$= -n_\alpha(n_\gamma E_\gamma)\,\text{sh}^2\chi + E_\alpha\,\text{ch}\,\chi + n_\alpha(n_\beta E_\beta)(\text{ch}^2\chi - \text{ch}\,\chi) + \varepsilon_{\alpha\gamma\mu} n_\gamma B_\mu\,\text{sh}\,\chi + \underbrace{n_\alpha n_\beta n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma\mu}}_{0} B_\mu\,\text{sh}\,\chi(\text{ch}\,\chi - 1) =$$

$$= E_\alpha\,\text{ch}\,\chi + n_\alpha(\underline{n}\underline{E})(\text{ch}^2\chi - \text{sh}^2\chi - \text{ch}\,\chi) + (\underline{n}\times\underline{B})_\alpha\,\text{sh}\,\chi = n_\alpha(\underline{n}\underline{E}) + \text{ch}\,\chi\,(E_\alpha - n_\alpha(\underline{n}\underline{E})) + (\underline{n}\times\underline{B})_\alpha\,\text{sh}\,\chi$$

$$\underline{E}' = \underline{n}(\underline{n}\underline{E}) + \text{ch}\,\chi\left(\underline{E} - \underline{n}(\underline{n}\underline{E})\right) + \text{sh}\,\chi\,(\underline{n}\times\underline{B})$$

$$b_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma \qquad \Big| \cdot \varepsilon_{\mu\alpha\beta}$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = -(\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma\alpha}) B_\gamma = -(\delta_{\mu\gamma}\delta_{\alpha\alpha} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\alpha\gamma})B_\gamma = -2\delta_{\mu\gamma} B_\gamma = -2B_\mu$$

$$B_\alpha = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_{\beta\gamma}$$

$$B'_\alpha = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b'_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F'^{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta{}_\rho \Lambda^\gamma{}_\varphi F^{\rho\varphi} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\Lambda^\beta{}_0\Lambda^\gamma{}_\varphi F^{0\varphi} + \Lambda^\beta{}_\mu \Lambda^\gamma{}_\varphi F^{\mu\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underbrace{\Lambda^\beta{}_0\Lambda^\gamma{}_0 F^{00}}_{0} + \Lambda^\beta{}_0\Lambda^\gamma{}_\nu F^{0\nu} + \Lambda^\beta{}_\mu\Lambda^\gamma{}_0 F^{\mu 0} + \Lambda^\beta{}_\mu\Lambda^\gamma{}_\nu F^{\mu\nu}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big[(-n_\beta \operatorname{sh}\chi)(\delta_{\gamma\nu} + n_\gamma n_\nu(\operatorname{ch}\chi-1))(-E_\nu) + (\delta_{\beta\mu}+n_\beta n_\mu(\operatorname{ch}\chi -1))(-n_\gamma \operatorname{sh}\chi)(E_\mu) +$$
$$+ (\delta_{\beta\mu}+n_\beta n_\mu(\operatorname{ch}\chi-1))(\delta_{\gamma\nu}+n_\gamma n_\nu(\operatorname{ch}\chi-1))(-\varepsilon_{\mu\nu\lambda}B_\lambda)\Big] =$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big[n_\beta E_\gamma \operatorname{sh}\chi + \overbrace{n_\beta n_\gamma n_\nu E_\nu(\operatorname{ch}\chi-1)\operatorname{sh}\chi}^{\text{szimmetrikus} \Rightarrow 0} - E_\beta n_\gamma \operatorname{sh}\chi + \overbrace{n_\beta n_\gamma n_\mu E_\mu (\operatorname{ch}\chi-1)\operatorname{sh}\chi}^{\text{szimmetrikus} \Rightarrow 0} - \varepsilon_{\beta\gamma\lambda}B_\lambda -$$
$$- \varepsilon_{\mu\gamma\lambda} n_\beta n_\mu B_\lambda(\operatorname{ch}\chi-1) - \varepsilon_{\beta\nu\lambda} n_\gamma n_\nu B_\lambda(\operatorname{ch}\chi-1) - \overbrace{n_\beta n_\mu n_\gamma n_\nu(\operatorname{ch}\chi-1)^2\varepsilon_{\mu\nu\lambda}B_\lambda}^{\text{szimmetrikus} \Rightarrow 0}\Big] =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[(n\times E)_\alpha \operatorname{sh}\chi - (E\times n)_\alpha \operatorname{sh}\chi - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\lambda\beta} B_\lambda - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\lambda\mu} n_\beta n_\mu B_\lambda(\operatorname{ch}\chi-1) - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\beta\nu\lambda} n_\gamma n_\nu B_\lambda(\operatorname{ch}\chi-1)\Big] =$$

$$= -(n\times E)_\alpha \operatorname{sh}\chi + (\overbrace{\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\lambda}}^{2\delta_{\alpha\lambda}}) B_\lambda + (\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}) n_\beta n_\mu B_\lambda(\operatorname{ch}\chi-1) + (\delta_{\gamma\nu}\delta_{\alpha\lambda} - \delta_{\gamma\lambda}\delta_{\alpha\nu}) n_\gamma n_\nu B_\lambda(\operatorname{ch}\chi-1) =$$

$$= -(n\times E)_\alpha \operatorname{sh}\chi + \frac{1}{2}2 B_\alpha + \frac{1}{2}(n_\beta n_\beta B_\alpha - n_\alpha n_\beta B_\beta)(\operatorname{ch}\chi-1) + \frac{1}{2}(n_\gamma n_\gamma B_\alpha - n_\alpha n_\lambda B_\lambda)(\operatorname{ch}\chi-1) =$$

$$= -(n\times E)_\alpha \operatorname{sh}\chi + B_\alpha + (B_\alpha - n_\alpha n_\beta B_\beta)(\operatorname{ch}\chi-1) = -(n\times E)_\alpha \operatorname{sh}\chi + B_\alpha \operatorname{ch}\chi - n_\alpha n_\beta B_\beta(\operatorname{ch}\chi-1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{B}' &= \underline{n}(\underline{n}\underline{B}) + \operatorname{ch}\chi(\underline{B} - \underline{n}(\underline{n}\underline{B})) - \operatorname{sh}\chi(\underline{n}\times\underline{E}) \\ \underline{E}' &= \underline{n}(\underline{n}\underline{E}) + \operatorname{ch}\chi(\underline{E} - \underline{n}(\underline{n}\underline{E})) + \operatorname{sh}\chi(\underline{n}\times\underline{B}) \end{aligned}}$$

emlékezt.:

sebességgel: $\operatorname{sh}\chi = \operatorname{ch}\chi \operatorname{th}\chi = \operatorname{ch}\chi \frac{v}{c}$; $\underline{n}\operatorname{sh}\chi = \operatorname{ch}\chi \frac{\underline{v}}{c}$, $\operatorname{ch}\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$\underline{E}' = \underline{n}(\underline{n}\underline{E}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\underline{E} - \underline{n}(\underline{n}\underline{E}) + \frac{1}{c}(\underline{v}\times\underline{B})\right] = \underline{E}_\parallel + \frac{1}{\sqrt{\;}}\left[\underline{E}_\perp + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}_\perp\right]$$

$$\underline{B}' = \underline{n}(\underline{n}\underline{B}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\underline{B} - \underline{n}(\underline{n}\underline{B}) - \frac{1}{c}(\underline{v}\times\underline{E})\right] = \underline{B}_\parallel + \frac{1}{\sqrt{\;}}\left[\underline{B}_\perp - \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{E}_\perp\right]$$

Tehát $\underline{E}'_\parallel = \underline{E}_\parallel$ és $\underline{B}'_\parallel = \underline{B}_\parallel$

$\underline{E}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{\;}}(\underline{E}_\perp + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B})$ és $\underline{B}'_\perp = \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{E}_\perp)$

Ezen komplexen ált. : $\underline{F} = \underline{E} + i\underline{B}$

$$\underline{F}' = \underline{n}(\underline{n}\underline{F}) + \operatorname{ch}\gamma\,(\underline{F} - \underline{n}(\underline{n}\underline{F})) + \operatorname{sh}\gamma\,[\underline{n} \times (\underline{B} - i\underline{E})] = \underline{n}(\underline{n}\underline{F}) + \operatorname{ch}\gamma\,(\underline{F} - \underline{n}(\underline{n}\underline{F})) + i\operatorname{sh}\gamma\,(\underline{n} \times \underline{F}) =$$

$$= \underline{n}(\underline{n}\underline{F}) + \cos(i\gamma)\,(\underline{F} - \underline{n}(\underline{n}\underline{F})) - \sin(i\gamma)\,(\underline{n} \times \underline{F})$$

Ez az $\underline{F}$ vektor $\underline{n}$ tengely körüli $i\gamma$ szögű elforgatása (formailag)

$\Rightarrow$ A Lorentz-transzf. kezelhető a Rodrigues-formulával

$\Rightarrow$ Tanulság : $F^2 = F'^2$

$$F^2 = (\underline{E} + i\underline{B})(\underline{E} + i\underline{B}) = \underline{E}^2 - \underline{B}^2 + 2i\underline{E}\underline{B}$$

Komplex alakban inv., ha a Re és Im is az, tehát:

$$\boxed{\begin{gathered} E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2 \\ E'B' = EB \end{gathered}}$$

Ha a tér minden pontján $\underline{E} \perp \underline{B}$ és $|E| = |B|$ akkor ez egy olyan jelenség, ami minden megfigyelő szerint invariáns : <u>FÉNY</u>

SPEC REL II.

6. videó

előző óra végén: $E' = (\underline{\ })E + (\underline{\ })B$, $B' = (\underline{\ })B + (\underline{\ })E$ amiből $E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2 = \alpha$, $E'B' = EB = \beta$

Legyen egy rendszerben $E' \times B' = 0$!

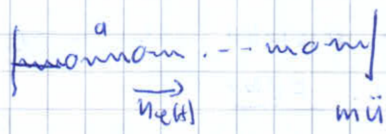
$$\alpha = E_0^2 - B_0^2 \quad \beta = E_0 B_0$$

Sajátérték probléma F-re: $F^k{}_e v^e = \lambda v^k$

ennek sajátértékei: E_0, B_0, iE_0, iB_0

Mezők leírása

golyós rugós rendszer



$$m\ddot u_e(t) = k(u_{e+1}-u_e) + k(u_{e-1}+u_e)$$

$N \to \infty$

$m \to 0$

$a \to 0$

$Na \to L$

$mN \to M$

$k \to \infty$

ka = véges

A eltolás után $\dfrac{\frac{u-u}{a} - \frac{u-u}{a}}{a} \to \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Hullám

ugyanez Lagrange-ból:

$$L = \sum_e^N \left[\frac{m\dot u_e^2}{2} - \frac{k}{2}(u_e-u_{e-1})^2 - \overbrace{\frac{k}{2}(u_{e+1}-u_e)^2}^{\text{Csak az egyik ilyen tag kell}}\right]$$

$$p_e = \frac{\partial L}{\partial \dot u_e} = m\dot u_e$$

$$q_e = \frac{\partial L}{\partial u_e}$$

Határátmenet: $m = \frac{M}{N}$, $k = \frac{b}{a}$, $N = \frac{L}{a}$

$$L = \sum_e^N \left[\frac{M}{N}\frac{\dot u_e^2}{2} - \frac{b}{2a}\left(\frac{u_e-u_{e-1}}{a}\right)^2 a^2\right] = \sum \left(\frac{M}{L} a \frac{\dot u_e^2}{2} - \frac{b}{2}a\left(\frac{u_{e-1}-u_e}{a}\right)^2\right)$$

$$L \to = \int \left[\frac{M}{2L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{b}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx$$

$$q_e(t) \to u(x,t)$$

$$L(q,\dot q) \to L = \int dx\, \mathcal{L}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, x, t\right)$$ Lagrange-sűrűség-függvény

Így a mezőelméletek hatásintegrálja:

$$S = \int L\, dt = \int dt \int d^3 r\, \mathcal{L}\left(\phi(\underline{r},t), \frac{\partial \phi}{\partial t}, \underline{\nabla}\phi, \underline{r}, t\right)$$

Mivel $x'^k = A^k{}_l\, x^l$ ezért $d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x = \det \Lambda\, d^4x = d^4x$

tehát a $S = \int \mathcal{L} \frac{1}{c} d^4x = \int \mathcal{L}' \frac{1}{c} d^4x'$ -ben $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, tehát skalár

Egy feltételt teszünk, ha a normálvektor benne van a síkban

$$S = \int \frac{d^4x}{c} \mathcal{L}\left(\phi_a(x), \partial_k \phi(x), x\right)$$

Variálás $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi = \phi + \varepsilon \eta(x)$ $\quad \eta$ a szabadság

$$\partial_k \phi \to \partial_k \phi' = \partial_k \phi + \partial_k(\delta\phi) = \partial_k \phi + \delta(\partial_k \phi)$$

$$\delta S = S[\phi + \delta\phi] - S[\phi]$$

$$\delta S = \int \left[\mathcal{L}(\phi + d\phi, \partial_k(\phi + d\phi), x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_k \phi, x)\right] \frac{d^4x}{c} =$$

$$= \int \left[\sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta\phi_a + \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)} \delta(\partial_k \phi_a)\right] \frac{d^4x}{c} = \int \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta\phi_a + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)} \partial_k(\delta\phi_a)}_{\partial_k\Big(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)} \delta\phi_a}_{v^k}\Big) - \partial_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)}\right) \delta\phi_a}\right] \frac{d^4x}{c} = *$$

$$\int_V d^4x\, \partial_k v^k \overset{\text{Gauss}}{=\!=} \oint_{\partial V} dS_k\, v^k$$ Mivel $\delta\phi_a$ a határon 0, ez a tag kiesik

$$* = \int \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)}\right] \delta\phi_a(x) \frac{d^4x}{c} \overset{!}{=} 0 \quad \forall\, \delta\phi_a\text{-ra}$$

Ez alapján az EL-egyenlet mezőkre:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \partial_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)}\right)$$

Konkrét példák

① adott $\phi(x)$ és $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi)$ [Spec eset: $V_1(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2$

$V_2(\phi) = -\alpha\cos\phi$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\varrho}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\varrho\phi - V(\phi) = \frac{1}{2} g^{\varrho m}\,\partial_\varrho\phi\,\partial_m\phi - V(\phi)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{1}{2} g^{\varrho m}\left[\frac{\partial(\partial_\varrho\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_m\phi + \partial_\varrho\phi\,\frac{\partial(\partial_m\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] = \frac{1}{2} g^{\varrho m}\left[\delta^\mu{}_\varrho\,\partial_m\phi + \partial_\varrho\phi\,\delta^\mu{}_m\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{\mu m}\partial_m\phi + g^{\varrho\mu}\partial_\varrho\phi\right] = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\phi + \partial^\mu\phi\right) = \partial^\mu\phi = g^{\mu\varrho}\partial_\varrho\phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \partial_\mu\left[\partial^\mu\phi\right] = \partial_\mu\partial^\mu\phi = \Box\phi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -V'(\phi)$$

EL-egyenlet: $\boxed{\Box\phi = -V'(\phi)}$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \Delta\phi = -V'(\phi)$$

Spec eset: $V_1(\phi)$ $\Box\phi = -\mu^2\phi$ KG-egyenlet

$V_2(\phi)$ $\Box\phi = \sin\phi$ bonyi

TFH: $\phi(x,y,z,t) = f(x)$

ekkor $\Box\phi = -\frac{d^2\phi}{dx}$ $\Rightarrow$ $-\frac{d^2\phi}{dx^2} = -V'(\phi)$

$\phi''(x) = V'(\phi)$ $\quad /\cdot\phi'(x)$

(Átírásban $\phi \to x$, $x \to t$, $V \to -U$ $\quad \ddot{x}(t) = -U'(t)$ Newton)

$$\phi''(x)\,\phi'(x) = V'(\phi)\,\phi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\phi'(x)^2}{2}\right) = \frac{dV}{d\phi}\frac{d\phi}{dx} = \frac{d[V(\phi(x))]}{dx}$$

$$\frac{\phi'(x)^2}{2} - V(\phi) = E = \text{const} \doteq 0$$

[A $\phi = \eta$ megoldás, mert $\frac{d\phi}{dx} = 0$ és ha $V(\phi=\eta) = 0$]

SPEC REL II.

7. videó (szerintem az előző óra hiányzott)

$$A^{\mu}(x) = \begin{pmatrix} \phi(\underline{r},t) \\ \underline{A}(\underline{r},t) \end{pmatrix}$$

$$F_{k\ell} = \partial_k A_\ell - \partial_\ell A_k = \begin{pmatrix} 0 & \underline{E} \\ -\underline{E} & \underline{B} \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

$$\downarrow$$

$$\hat{F}^{k\ell} = \frac{1}{2}\varepsilon^{k\ell mp} F_{mp} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{B} \\ -\underline{B} & \underline{E} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\ell \hat{F}^{k\ell} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla \underline{B} = 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\nabla \times \underline{E} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{k\ell} F^{k\ell}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial F_{k\ell}} = -\frac{1}{2} G^{k\ell} = \frac{1}{2} F^{k\ell} \qquad G_{k\ell} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{D} \\ -\underline{D} & \underline{H} \end{pmatrix}$$

vákuum: $\underline{D} = \underline{E}$, $\underline{H} = \underline{B}$

$$\partial_\ell G^{k\ell} = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \nabla \underline{D} = 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \nabla \times \underline{H} \end{matrix}$$

---

vákuumban a négy egyenlet:

$$\begin{cases} \nabla \underline{E} = 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \nabla \times \underline{B} \\ \nabla \underline{B} = 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\nabla \times \underline{E} \end{cases}$$

DE $\begin{pmatrix} E' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}$ -nél E' és B'-re u.a. a fenti egyenletrendszer mint B és E

$\Rightarrow$ A két rendszerből kijött egyenletek ugyanazok, elforgathatók

A forrástag elrontja a szimmetriát

(Tudjuk, hogy az inhomogén maxwell: $\nabla \underline{D} = \rho$; $\nabla \times \underline{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{j}\right)$)

Ha lenne mágneses töltés, az akkor kiegészítené a többi egyenletet: $\nabla \underline{E} = \rho_e$ $\quad \nabla \underline{B} = \rho_m$

$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} j_e \quad \nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} j_m$

A fenti trafó itt is invariáns. Forgassuk úgy, hogy a mágneses forrástag eltűnjön!
egy részecskére ez oké, de többre nem

Nem ez a kísérleti tapasztalat, ugyanis nincs mágneses töltés, hanem minden részecskére $\frac{\rho_E}{\rho_m}$ u.a.

nem vákuum heli maxwell

Ehhez írjuk a hatást általában:

$$S = -mc^2\int d\tau - g\int H(x)\,d\tau = -\int(\underbrace{mc^2+gH}_{M(x)})\,d\tau$$

ki kell egészíteni a mező anyagán vett részét: $+\int\frac{d^4x}{c}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - V(x)\right)$

variálom: $\delta x(\tau)$ variálom a higgs-mezőt: δH $\quad \downarrow$

$$\Box H = -V'(H)$$

de ha van részecske is, akkor mi van?

A második tagot írjuk fel 4-es integrálként. Mondjuk, hogy több részecske van.

$$S = -\sum_a m_a c^2\int d\tau_a - \sum_a g_a\int H(x_a(\tau_a))\,d\tau_a + S_H$$

Egy részecske lokális „most síkjában" $\underline{R}^0(\tau)$-ban van. Az 1-t másképp felírva:

$$1 = \int\delta(\underline{r}_0^0 - \underline{R}^0(\tau))\,d^3\underline{r}^0$$

$$S = -\sum_a\int(m_a c^2 + g_a H_a(x_a(\tau)))\,d\tau_a \cdot \int d^3\underline{r}\,\delta(\underline{r}^0 - \underline{R}_a(\tau_a)) =$$

$$= \sum_a -\iint -c^2 M_a(x_a(\tau_a))\,\delta(r^0 - R_a(\tau_a))\,\underbrace{d\tau_a d^3\underline{r}_a^0}_{\frac{d^4x}{c}}$$

Ez lefedi az egész teret, de a δ miatt csak a pályán van értéke

$$= \sum_a\int\left(-c^2 M_a(x_a(\tau_a))\,\delta(\underline{r}_a^0 - \underline{R}_a(\tau_a)\right)\frac{d^4x}{c}$$

$M_a(x_a(\tau_a))$-t parametrizálhatom $M(\underline{r},t)$-ként is, hiszen ahol nincs részecske ott a δ miatt az érték úgyis 0. $\Rightarrow$ A $\sum$ előrehozható és átnevezhető M_a-n

$$= -\int\left(-c^2 M(x)\underbrace{\sum_a\delta(\underline{r} - \underline{R}_a(t))}_{\rho_0(\underline{r},t)}\right)\frac{d^4x}{c}$$

$\rho_0(\underline{r},t)$: részecskeszám-sűrűség

Kompaktul:

$$S = -\sum_a m_a c^2\int d\tau_a \underbrace{\underbrace{- \sum_a g_a\int H(x)\,d\tau_a}_{-\int g_a H(x)\rho_0(x)\frac{d^4x}{c}} + \int\frac{d^4x}{c}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - V(H)\right)}_{\int\frac{d^4x}{c}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - V(H) - \rho_0(x)H\right)}_{\mathcal{L}(H,\partial H)}}$$

Ezt kell variálni

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu H} = \partial^\mu H$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu H)}\right) \partial_\mu \partial^\mu H = \Box H$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H} = -V'(H) - \rho_0(x)$$

$$\Box H = -V'(H) - \rho_0(x)$$

$$\boxed{\Box H + V'(H) = -\rho_0(x)}$$

Spec eset: $V = \frac{1}{2}\mu^2 H^2 \quad V' = \mu^2 H$

$$\Box H + \mu^2 H = -\rho_0(x)$$

Ⅴ Vektormező: $S = -mc^2 \int d\tau - \frac{e}{c}\int dx^\mu A_\mu(x)$ $\quad \delta x(\tau)$-val $\quad m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$

$$+\int \frac{d^4x}{c} \mathcal{L}_{EM}(F)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

ugyanez a trükk

$$S = \sum_a m_a c^2 \int d\tau_a - \frac{1}{c} \sum_a e_a \int dx_a^\mu A_\mu(x_a(\tau_a))$$

$$\int \underbrace{d\tau_a}_{1 = \int d^3 r\, \delta(r - r_a(\tau))} \frac{dx^\mu}{d\tau_a} A_\mu(x_a(\tau_a))$$

$$S_{kh} = -\frac{1}{c} \sum_a e_a \int \frac{d^4x}{c} A_\mu(x_a(\tau_a))\, \delta(r - r_a(\tau)) u^\mu =$$

$$= -\frac{1}{c}\int \frac{d^4x}{c} A_\mu(x) \underbrace{c\sum_a e_a u_a^\mu(\tau_a)\, \delta(r - r_a(\tau))}_{j^\mu(x) \quad \text{4-es áramsűrűség}} = \int \frac{d^4x}{c}\left(-\frac{1}{c} A_\mu(x) j^\mu(x)\right)$$

$$S_{em} = \int \frac{d^4x}{c}\left(\mathcal{L}_{EM}(F) - \frac{1}{c} A_\mu(x) j^\mu(x)\right)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu G^{\nu\mu} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu G^{\nu\mu} = -\frac{1}{c} j^\nu$$

működik

Mi a fizikai jelentése j^μ-nek:

$$j^0 = \sum_a e_a \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \delta(r - R) = c \sum_a e_a \frac{\delta}{\sqrt{\;}} = c \sum_a e_a \delta \quad \text{töltéssűrűség}$$

transzformált δ $\quad$ közönséges δ

$$j^\alpha = \sum e_a \frac{v_\alpha}{\sqrt{\;}} \delta = \sum e v_\alpha \delta \quad \Rightarrow \quad j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j \end{pmatrix}$$

mivel $G^{ek} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{D} \\ \underline{D} & \underline{H} \end{pmatrix}$

$e=0$ -ra az egyenlet:

$$\partial_k G^{0k} = \underbrace{\partial_0 G^{00}}_{0} + \partial_\beta G^{0\beta} = \partial_\beta (-D)_\beta = -\operatorname{div} \underline{D}$$

$$-\frac{1}{c} j^0 = -\frac{1}{c} c\rho = -\rho \quad \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \underline{D} = \rho}$$

$e=\alpha$ -ra:

$$\partial_k G^{\alpha k} = \partial_0 G^{\alpha 0} + \partial_\beta G^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D})_\alpha + \partial_\beta(-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma) =$$

$$= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right) - (\operatorname{rot} H)_\alpha$$

$$-\frac{1}{c} j^\alpha = -\frac{1}{c}(j)_\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \underline{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D}{\partial t} + \underline{j}\right)$$

Teljes Maxwell egyenletrendszer

$$A^k \longrightarrow F_{ke} = \partial_k A_e - \partial_e A_k$$

$$\mathcal{L}_{EM}(F_{ke}) \longrightarrow G^{ke} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{ke}} \quad \leftarrow \text{anyagi egyenlet}$$

két egyenlet: $\boxed{\begin{aligned} &\partial_e \tilde{F}^{ke} = 0 \\ &\partial_e G^{ke} = -\frac{1}{c} j^k \end{aligned}}$ $\leftarrow$ homogén egyenlet, $\leftarrow$ inhomogén egyenlet

lefordítva 3D-re: $A^e = \begin{pmatrix} \phi \\ \underline{A} \end{pmatrix}$ $F \rightarrow$ $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$

anyagi egyenletek: $\underline{D}(\underline{E}, \underline{B})$

$\underline{H}(\underline{E}, \underline{B})$

homogén egyenletek: $\underline{\nabla}\,\underline{B} = 0$

$\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$

inhomogén egyenletek: $\underline{\nabla}\,\underline{D} = \rho$

$\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \underline{\nabla} \times \underline{H} = -\frac{1}{c}\underline{j}$

Inhomogén divja

$$\partial_k \partial_e G^{ke} = -\frac{1}{c}\partial_k j^k$$

Mivel G^{ke} antisym

$$\frac{1}{c}\partial_k j^k = 0$$

$\Rightarrow j^k$ négyesáram teljesen önkényes:

$$\partial_0 j^0 + \partial_\alpha j^\alpha = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \nabla \underline{j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \underline{j} = 0$$

kontinuitás

Spec eset: vákuumban:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{ke} F^{ke} \qquad G_{ke} = F_{ke}$$

$H = B$

$E = D$

inhomogénből: $\partial^e F_{ke} = -\frac{1}{c} j_k$

$$\partial^e(\partial_k A_e - \partial_e A_k) = -\frac{1}{c} j_k$$

$$\partial_k(\partial^e A_e) - \partial^e \partial_e A_k = -\frac{1}{c} j_k$$

Ezt szabadon választhatjuk, legyen 0

kontinuitás $\rightarrow$ $\boxed{\partial^e A_e = 0}$

$\boxed{\Box A_k = \frac{1}{c} j_k}$ $\Big\} \Leftarrow$

3D-re: $\rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} &\Box \phi = \rho \\ &\Box \underline{A} = \frac{1}{c}\underline{j} \end{aligned}}$ D'Alembert-egyenletek

$$S_{kh} = -\frac{1}{c}\int \frac{d^4x}{c} A_\mu j^\mu$$

mérték transzformáció $\quad S'_{kh} = -\frac{1}{c}\int A'_\mu j' d^4x = -\frac{1}{c}\int (A_\mu + \partial_\mu \chi) j^\mu d^4x =$

$$= -\frac{1}{c}\int A_\mu j^\mu d^4x - \frac{1}{c}\int (\partial_\mu \chi) j^\mu d^4x =$$

$$= -\frac{1}{c}\int A_\mu j^\mu d^4x - \frac{1}{c}\int \left[\underbrace{\partial_\mu(\chi j^\mu)} - \chi(\partial_\mu j^\mu)\right]$$

Ha a végtelenbe lecseng, akkor 0 a Gauss-tétel miatt

$$\Delta S_{mérték} = \frac{1}{c}\int \chi \partial_\mu j^\mu d^4x \stackrel{!}{=} 0$$

Ahhoz, hogy a mértékinvariancia érvényes legyen a hatásra, az kell, hogy $\partial_\mu j^\mu \stackrel{!}{=} 0$, vagyis töltésmegmaradás

"Az óra második fele hiányzik"

SPEC REL II.

8. videó

Anyagban terjedő fény:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} & \underline{G} \\ -\underline{G} & \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \underline{E} \\ \underline{E} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \\ & \underline{B} \end{pmatrix}$$

ezt általában nem lehet megcsinálni, de ha az közeg áll

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1}{c^2}\, \underline{u} \circ \underline{u} \qquad \underline{\underline{Q}} = 1 - \underline{\underline{P}}$$

$$\underbrace{P^k_e P^q_e F^{ke}}_{0} + \underbrace{PQF + QPF}_{\varepsilon(\,)} + \underbrace{QQF}_{\frac{1}{\mu}(\,)} = F \qquad = G$$

Az jött ki:

$$\underline{D} = \underline{\underline{\alpha}}\, \underline{E} + \underline{\underline{\beta}}\, \underline{B} \qquad (1)$$

$$\underline{H} = \underline{\underline{\gamma}}\, \underline{E} + \underline{\underline{\delta}}\, \underline{B} \qquad (2)$$

ezt kell Maxwellbe beírni:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{div} \underline{D} &= 0 \\ \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

Ez rossz lenne

$(1)\cdot\alpha^{-1} \Rightarrow \quad \underline{E} = \underline{\underline{\alpha}}^{-1}\underline{D} - (\alpha^{-1}\beta)\,\underline{B}$

$(2) - \quad \underline{H} = \underline{\underline{\gamma}}\,\underline{E} + \delta\,\underline{B}$

$\underline{D}$ és $\underline{B}$ legyen független

TFH: $\underline{E} = E_0\, e^{i\underline{k}\underline{r}}\, e^{-i\omega t}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

$\underline{\nabla} \to i\underline{k}$

beírva:

$$\left.\begin{aligned} & i\underline{k}\,\underline{B} = 0 \\ & i\underline{k} \times \underline{E} = +\frac{1}{c}\, i\omega\, \underline{B} \quad \Rightarrow \quad \underline{k} \times \underline{E} = \frac{\omega}{c}\underline{B} \\ & \underline{k}\,\underline{D} = 0 \\ & \underline{k} \times \underline{H} = -\frac{\omega}{c}\underline{D} \end{aligned}\right\}$$

$\underline{E}$-t, $\underline{H}$-t kifejezve, $\underline{D}, \underline{B}, \underline{k}, \omega, \underline{v}$ -re kapunk egyenleteket

$\underline{D}$ és $\underline{B}$ komponenseire ez homogén egyenlet lesz, aminek akkor van m.o., ha $\det = 0$.

Azt felírva kapjuk az $\omega(\underline{k}, \underline{v})$ diszperziós relációt

Mezők energetikai viszonyai

pontmechanika: $L(q, \dot{q}, t)$

$$B = \sum p_k \dot{q}_k - L \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Ha $L = \frac{1}{2} A_{ke}(q,t)\dot{q}_k \dot{q}_e + B_k(q,t)\dot{q}_k + C(q,t)$

akkor $B = \frac{1}{2} A_{ke}(q,t)\dot{q}_k \dot{q}_e - C(q,t)$

és $p_k = A_{ke}(q,t)\dot{q}_e$ ahol A: Hesse-mátrix invertálható

$\underline{\dot{q}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{p}$ ezt megoldva, Hamilton-fgv: $H(p,q) = \frac{1}{2} D_{ke}(q,t) p_k p_e$

ezt kéne ~~~~ átvinni relativisztikusra

mezőknél: $\mathcal{L}(\phi, \partial_k \phi, x) \qquad \phi(x)$

EL-egyenlet: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)}$

$B = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi_a)} \partial_k \phi_a - \mathcal{L}_a$ DE van itt kell használni

valójában: $\Theta_k{}^e = \sum_a (\partial_k \phi_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e \phi_a)} - \mathcal{L}\delta_k^e$ kanonikus energia-impulzus tenzor

$$f_k = \partial_e \Theta_k{}^e = \underbrace{\sum_a \partial_e(\partial_k \phi_a)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e \phi_a)}}_{\text{kiesik}} + \sum_a (\partial_k \phi_a)\partial_e\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e \phi_a)}\right) - \underbrace{\delta_k^e \partial_e \mathcal{L}}_{\partial_k \mathcal{L}} = *$$

$$\partial_k \mathcal{L} = \left[\sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a}\partial_k \phi_a + \underbrace{\sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e \phi_a)}\partial_k(\partial_e \phi_a)}_{\text{kiesik}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k}\right]$$

$$* = \sum_a \partial_k \phi_a \underbrace{\left[\partial_e\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e \phi_a)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a}\right]}_{\text{EL miatt } 0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k}$$

Tehát $\boxed{\partial_e \Theta_k{}^e = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k}}$ ez felel meg a Beltrami-tételnek

mi a Θ?

$$\Theta^{ke} = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & \frac{1}{c}\underline{S} \\ \hline c\underline{g} & -\underline{\underline{\sigma}} \end{array}\right) \qquad f^k = \begin{pmatrix} \frac{w}{c} \\ \underline{f} \end{pmatrix}$$

$\partial_\varrho \Theta^{k\varrho} = ?$

$k=0$ $\quad \partial_\varrho \Theta^{0\varrho} = \partial_0 \Theta^{00} + \partial_\alpha \Theta^{0\alpha} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + \partial_\alpha \frac{1}{c}(\underline{S})_\alpha = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \underline{S}\right) = 0$ ha $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \underline{S}\right) dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon \, dV = -\oint \underline{S}\, d\underline{F}$$

Míg ε energia sűrűség, addig $\underline{S}$ az energia áram sűrűség
Poynting vektor

lokális E-megmaradás

ha $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \neq 0$, akkor $\quad \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \underline{S}\right) = f^0 = \frac{1}{c} w$

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon \, dV = -\oint \underline{S}\, d\underline{F} + \int w \, dV$$

w: időegység alatt keletkező energiasűrűség

$k = \alpha$

$$\partial_\varrho \Theta^{\alpha\varrho} = \partial_0 \Theta^{\alpha 0} + \partial_\beta \Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\frac{1}{\partial t}(c\underline{g})_\alpha + \partial_\beta(-\underline{\underline{\sigma}})_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial t} g_\alpha - \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} = f_\alpha$$

$f_\alpha = 0$, ha $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$, vagyis, ha Lagrange nem függ a helytől
eddig az impulzus maradt meg

$\underline{g}$: impulzus sűrűség

$\underline{\underline{\sigma}}$: impulzus áram sűrűség = erő sűrűség = feszültség tenzor

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\underline{g}\, dV - \int \nabla \underline{\underline{\sigma}}\, dV = \int \underline{f}\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int \underline{g}\, dV}_{\underline{P}} = \oint \underline{\underline{\sigma}}\, d\underline{F} + \int \underline{f}\, dV$$

Ez a megmaradási egyenlet

felszíni erő $\quad$ térfogati erősűrűség

Mit jelent relativisztikusan a térfogati integrál?

térszerű felületet kell felvenni és azon integrálni

ha ez valahogy a „most felülete" akkor az eddig ismert

+ az adott rendszerben megkapjuk az összenergiát és összimpulzust

th $\quad$ ha a ~~divf~~ div 0, akkor tetszőleges felületre azonos

DE az egyensúly feltétele a forgatónyomatéki egyensúly is, így a $\underline{\underline{\sigma}}$ tenzornak szimmetrikusnak kellett lennie

de itt az energiaimpulzus tenzor nem szimmetrikus

CIKI VAN

Meg lehet változtatni Θ-t úgy, hogy ne változtasson se a divet se a integrált

$$\Theta_k'^{\,e} = \Theta_k^{\,e} + \partial_m \Psi_k^{\,em} \qquad \text{ahol } \Psi_k^{\,em} = -\Psi_k^{\,me}$$

$$\partial_e \Theta_k'^{\,e} = \partial_e \Theta_k^{\,e} + \underbrace{\partial_e \partial_m \Psi_k^{\,em}}_{0}$$

Az integrál: $P'_k = \frac{1}{c}\int \Theta'_{ke}\, dS^e = \frac{1}{c}\int \Theta_{ke}\, dS^e + \frac{1}{c}\int \partial_m \Psi_k^{\,em}\, dS^e$

Viszont Ψ megváltoztatja az energiasűrűséget. Hogy lehet ezt kimutatni? gravitációval, amihez által térne

Mit tudunk az impulzus momentumról?

x_a^k ; p_a^k $\qquad J^{ke} = \sum_a \left(x_a^k p_a^e - x_a^e p_a^k \right) = -J^{ek}$ impulzus momentum tenzor

$$x^k = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \qquad p^k = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

$$J^{\alpha\beta} = \sum_a \left(x_a^\alpha p_a^\beta - x_a^\beta p_a^\alpha \right) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{J})_\gamma$$

$$J^{0\alpha} = \sum_a \left(x_a^0 p_a^\alpha - x_a^\alpha p_a^0 \right) = \sum_a \left(ct (\mathbf{p}_a)_\alpha - (\mathbf{r}_a)_\alpha \frac{E_a}{c} \right) = (\mathbf{K})_\alpha$$

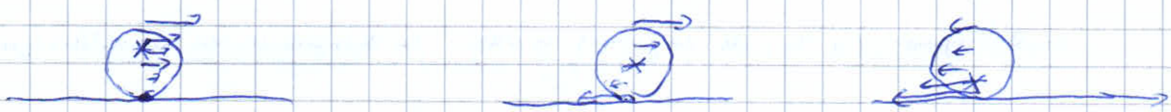
$$\left(\sum \frac{E_a}{c^2} \mathbf{r}_a \right)_\alpha = \left(\sum \mathbf{p}_a \right) t - \frac{1}{c} \mathbf{K}$$

$$\frac{\sum \frac{E_a}{c^2} \mathbf{r}}{\sum \frac{E}{c^2}} = \underbrace{c^2 \frac{\sum \mathbf{p}}{\sum E}}_{\mathbf{V}} t - \frac{c}{\sum E} \mathbf{K} \qquad \left[\frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 \frac{m v}{\sqrt{\ }}}{\frac{m c^2}{\sqrt{\ }}} = v \right]$$

$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V} t + \mathbf{R}_0$ ← a tömegközépponttal analóg „energiaközéppont" mozgása

Ennek értelmes helye van a J tenzorban

Hol van a vonatnak "tömegközéppontja"?



hogyan transzformálódik a TKP? elég bonyi, ez nem egy fizikai mennyiség
A TKP-nak nincs fizikai értelme, ez csak egy szemléletes izé

Vissza erőelmélethez

Mi egy megmaradó mennyiség az impulzus: $P^k = \frac{1}{c}\int T^{kl}\, dS_l$ (Ahol T^{kl} a Θ^{kl} úgy transzformált verziója, hogy az "igazi" legyen)

$$\partial_l T^{kl} = 0$$

Az impulzusmomentum egy tenzor, így ha ennek a sűrűségét akarjuk felírni, kell egy 3 indexes 4-es impulzusmomentum-sűrűség-tenzor:

$$J^{kl} = \frac{1}{c}\int N^{klm}\, dS_m$$

hogy lokálisan is megmaradjon $\partial_m N^{klm} = 0$ kell.

Hogy keressük N^{klm}-t? Tudjuk, hogy $J^{kl} = \sum_a (x_a^k p_a^l - x_a^l p_a^k)$. Ezt kell valahogy folytonossá tenni

$dP^k = \frac{1}{c} T^{kl}\, dS_l$ impulzus

$$dJ^{kl} = x^k dP^l - x^l dP^k$$

$$\Rightarrow J = \int \left(x^k \frac{1}{c} T^{lm} dS_m - x^l \frac{1}{c} T^{km} dS_m\right) \Rightarrow N^{klm} = x^k T^{lm} - x^l T^{km}$$

ellenőrizzük:

$$\partial_m N^{klm} = (\partial_m x^k) T^{lm} + \underbrace{x^k \partial_m T^{lm}}_{0} - (\partial_m x^l) T^{km} - \underbrace{x^l \partial_m T^{km}}_{0} = \delta_m^k T^{lm} - \delta_m^l T^{km} =$$

$= T^{lk} - T^{kl} \overset{!}{=} 0$, tehát az igazi energia-impulzus tenzor szimmetrikus

Mivel T^{kl} szimmetrikus, két dolog következik:

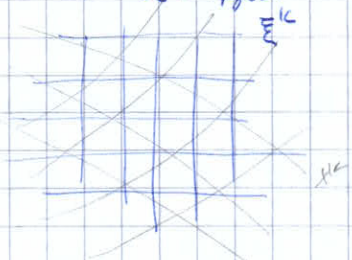
1) σ szimmetrikus

eredetileg a forgásszimmetria miatt volt szimmetrikus, most Lorentz-szimmetria van, annak részcsoportja a forgás, tehát ez egy spec eset

2) $\frac{1}{c}\underline{S} = c\underline{g}$ vagyis $\underline{S} = c^2 \underline{g}$

ahol energiaáram van, ott impulzus is van: az energiának van tehetetlensége

Tétel alapjai



ξ^k és x^k különböző koordinátarendszer

$x(\xi) \longleftrightarrow \xi(x)$

pl.: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$ $\quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$z = r\cos\vartheta$ $\quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$\vec{\xi}$-vel szinguláris! nekünk olyan kell, ami sehol sem az.

Lokálisan affin $\eta_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ DE $d\xi^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} dx^p$

$$ds^2 = \eta_{kl}\, d\xi^k d\xi^l \Rightarrow$$

$$= \underbrace{\eta_{kl} \left(\frac{d\xi^k}{dx^p}\right)\left(\frac{d\xi^l}{dx^q}\right)}_{g_{pq}(x)} dx^p dx^q$$

$ds^2 = g_{pq}(x)\, dx^p dx^q$ ez az helytől függő metrikus tenzor

Azt kell kitalálni, hogy g-t mi határozza meg. Ehhez fel kell írni a téridő hatásának variálását, ami a metrikus tenzortól függ

Ricci-féle görbület: $R(g, \partial g, \partial\partial g)$

ezt konstanssal kell szorozni: $k \sim \frac{c^4}{G}$

$+ \mathcal{L}_M(\phi, \partial\phi)$

$\mathcal{L}_{TOTAL} = k R(g, \partial g, \partial\partial g) + \mathcal{L}_M(\phi, \partial\phi)$

δg-t variálva geometriai részt kapunk

$\delta\phi$-t az anyagot jellemző dolgot. $\Rightarrow$ Az anyag görbíti a teret

Gravitációs egyenlet: Newton: $\Box\phi = G\rho$

Einstein: $\Box g_{kl} = G T_{kl}$

A jakobi det: $J = \sqrt{|g|}$

$$S_{TOTAL} = \int \sqrt{|g|}\, d^4x \left(\mathcal{L}_{MATERIAL}(\phi, \partial\phi) + k R(g, \partial g, \partial\partial g)\right)$$

Ezt kell variálni δg^{kl} szerint $\quad \frac{1}{2} T_{kl}\sqrt{|g|}\,\delta g^{kl} - \frac{k}{2} E_{kl}\sqrt{|g|}\,\delta g^{kl}$

$\delta(\mathcal{L}_M \sqrt{|g|}) = \frac{1}{2} T_{kl}\sqrt{|g|}\,\delta g^{kl}$ $\quad$ Ez a energia-impulzus tenzor Hilbert szerinti defje.

Ha ebből kifejezzük és kapunk egy T_{kl}-t, akkor az általánosat elfogadjuk visszavezethetőnek speciálisan.

$$g^{ik} g_{km} = \delta^i_m \qquad / \delta g$$

$$\delta g^{ik} g_{km} + g^{ik} \delta g_{km} = 0 \qquad / \cdot g_{ik}$$

$$g_{ik} g_{lm} \delta g^{kl} + \delta g_{im} = 0 \implies \delta g_{im} = - g_{ik} g_{ml} \delta g^{kl}$$

$$A^{im} \delta g_{im} = - A^{im} g_{ik} g_{lm} \delta g^{kl} = - A_{kl} \delta g^{kl}$$

a determináns $g = \sum_l g_{kl} [g_{kl}]$ ahol $[g_{kl}]$ a aldet

$\delta g = \sum_l \delta g_{kl} [g_{kl}]$ [illegible] $(g^{-1})_{kl} = \dfrac{[g_{lk}]}{\det g}$

ezért $[g_{kl}] = g (g^{-1})_{lk} = g\, g^{lk}$

így $\delta g = g\, g^{lk} \delta g_{kl}$

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{-g}$$

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g) = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g) g^{lk} \delta g_{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{lk} \delta g_{lk} = \underline{- \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{kl} \delta g^{kl}}$$

Ebből:

$$\delta(\mathcal{L}_M \sqrt{-g}) = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{kl}} \delta g^{kl} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_M \left(- \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{kl} \delta g^{kl} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \delta g^{kl} \underbrace{\left(2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{kl}} - \mathcal{L}\, g_{kl} \right)}_{T_{kl} = T_{lk}}$$

Így tehát megkaptuk T-t, megjósolva speciálisan

SPECREL II.

9. videó

Mozgó anyag: $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$

E-p-tenzor: $\Theta_k{}^e = \sum_a \partial_k \phi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e \phi_a)} - \mathcal{L}\delta_k^e$

Betartani: $\partial_e \Theta_k{}^e = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k}$

Eltranszformálva: $\Theta'_k{}^e = \Theta_k{}^e + \partial_m \Psi_k{}^{em}$ ahol $\Psi_k{}^{em} = -\Psi_k{}^{me}$

a betartani szerint is igaz marad, de az energia és impulzus-sűrűség más

A négyesimpulzus-momentum-megmaradáshoz az kell, hogy $\Theta_k{}^e = T_{ke}$ szimmetrikus legyen! ez az igazi.

Gyakorlati eljárást az általánosból tudjuk: (Mant szerint a két módszer ekvivalens)

$$S = \int \sqrt{-g}\, \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, g) \, d^4x$$

$$\delta S = \int \sqrt{-g}\, \frac{1}{2} T_{ke}\, \delta g^{ke}\, d^4x$$

Tudjuk, hogy $\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ke}\delta g^{ke}$

$T_{ke}\delta g^{ke} = T^{ke}\delta g_{ke}$

$g = \det g_{ke}$

ebből megkapjuk T_{ke}-t: $T_{ke} = 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ke}} - \mathcal{L} g_{ke}$

Spec esetek

1) ϕ skalármező

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_k \phi\, \partial^k \phi - V(\phi)$$

$$\text{EM}: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e \phi)} = \partial^e \phi \implies \Box\phi = -V'(\phi)$$

$$\Theta_k{}^e = \partial_k \phi\, \partial^e \phi - \delta_k^e \left(\frac{1}{2}\partial_m \phi\, \partial^m \phi - V(\phi)\right)$$

$$\Theta_{ke} = \partial_k \phi\, \partial_e \phi - g_{ke}\left(\frac{1}{2} g^{mp} \partial_m \phi\, \partial_p \phi - V(\phi)\right) = \Theta_{ek}$$ valóban szimmetrikus

Hilbert-féle: $\mathcal{L}$ (g-től is függő) $= \frac{1}{2} g^{ke} \partial_k \phi\, \partial_e \phi - V(\phi)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ke}} = \frac{1}{2}\partial_k \phi\, \partial_e \phi$$

$$T_{ke} = \partial_k \phi\, \partial_e \phi - g_{ke}\left(\frac{1}{2} g^{mp}\partial_m \phi\, \partial_p \phi - V(\phi)\right)$$ mivel már a $\Theta_k{}^e$ is szimmetrikus volt, ez is az.

$$T^{ke} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{1}{c}\underline{S} \\ c\underline{g} & -\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = T_{00} = \partial_0 \phi\, \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V$$

$$\underline{S} \sim \dot{\phi}\, \nabla \phi$$

$$T_{ke} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\frac{1}{c}\underline{S} \\ -c\underline{g} & -\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix}$$

2) EM-tér

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ke}F^{ke} \qquad \text{ahol } F_{ke} = \partial_k A_e - \partial_e A_k$$

$$\Theta_k{}^e = \partial_k A_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_e A_m)} - \mathcal{L}\,\delta_k^e = \partial_k A_m F^{me} - \mathcal{L}\,\delta_k^e$$

$\Theta_{ke} = \partial_k A^m F_{me} - \mathcal{L}\, g_{ke}$ Ez már nem szimmetrikus, sőt nem is mérték invariáns

Hilbert szerint: $\mathcal{L}(g\text{-től is}) = -\frac{1}{4} F_{ke} g^{kp} g^{eq} F_{pq} = -\frac{1}{4} g^{kp} g^{eq} F_{ke} F_{pq} = -\frac{1}{4} g^{tp} g^{sq} F_{ts} F_{pq}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ke}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial g^{tp}}{\partial g^{ke}} g^{sq} + g^{tp}\frac{\partial g^{sq}}{\partial g^{ke}}\right) F_{ts}F_{pq} = -\frac{1}{4}\left(\delta_k^t \delta_e^p g^{sq} + g^{tp}\delta_k^s \delta_e^q\right) F_{ts}F_{pq} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(F_{ks}F_{eq} g^{sq} + g^{tp} F_{tk} F_{pe}\right) = -\frac{1}{4}\left(F_k{}^q F_{eq} + F^p{}_k F_{pe}\right) =$$

$$= +\frac{1}{2} F_k{}^q F_{qe}$$

$$T_{ke} = 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ke}} - \mathcal{L}\, g_{ke} = F_k{}^q F_{qe} + g_{ke}\frac{1}{4}F_{pq}F^{pq} \quad \text{ez már szimmetrikus}$$

$$F_{ke} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{E} \\ -\underline{E} & \underline{\underline{b}} \end{pmatrix} \qquad F_k{}^e = \begin{pmatrix} & -\underline{E} \\ -\underline{E} & -\underline{\underline{b}} \end{pmatrix} \qquad F^k{}_e = \begin{pmatrix} & \underline{E} \\ \underline{E} & -\underline{\underline{b}} \end{pmatrix} \qquad F^{ke} = \begin{pmatrix} & -\underline{E} \\ \underline{E} & \underline{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = T_{00} = F_0{}^q F_{q0} - \mathcal{L}\, g_{00} = F_0{}^0 F_{00} + F_0{}^\alpha F_{\alpha 0} - \mathcal{L}\, g_{00} = E^2 - \mathcal{L} = E^2 - \frac{E^2 - B^2}{2} = \frac{E^2 + B^2}{2}$$

ez az energiasűrűség (ezt már tanultam ✓)

$$-\frac{1}{c}S_\alpha = T_{0\alpha} = F_0{}^q F_{q\alpha} - \mathcal{L}\cdot 0 = F_0{}^0 F_{0\alpha} + F_0{}^\beta F_{\beta\alpha} = (-\underline{E})_\beta(-\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}B_\gamma) = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}E_\beta B_\gamma = -(\underline{E}\times\underline{B})_\alpha$$

$\Rightarrow \underline{S} = c(\underline{E}\times\underline{B})$ (ez is stimmel ✓)

$\underline{g} = \frac{1}{c^2}\underline{S} = \frac{1}{c}(\underline{E}\times\underline{B})$ (impulzus sűrűség, ez is stimmel ✓)

$$(-\underline{\underline{\sigma}})_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} = F_\alpha{}^q F_{q\beta} - \mathcal{L}\, g_{\alpha\beta} = F_\alpha{}^0 F_{0\beta} + F_\alpha{}^\gamma F_{\gamma\beta} + \delta_{\alpha\beta}\mathcal{L} = (-E)_\alpha(+\underline{E})_\beta + (-\underline{\underline{b}})_{\alpha\gamma}(\underline{\underline{b}})_{\gamma\beta} + \delta_{\alpha\beta}\mathcal{L} =$$

$$= -E_\alpha E_\beta + \varepsilon_{\alpha\gamma\mu}B_\mu(-\varepsilon_{\gamma\beta\nu}B_\nu) + \delta_{\alpha\beta}\mathcal{L} = -E_\alpha E_\beta + \varepsilon_{\alpha\mu\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta\nu}B_\mu B_\nu + \delta_{\alpha\beta}\mathcal{L} =$$

$$= -E_\alpha E_\beta + (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\mu\beta})B_\mu B_\nu + \delta_{\alpha\beta}\mathcal{L} = -E_\alpha E_\beta + B^2\delta_{\alpha\beta} - B_\alpha B_\beta + \delta_{\alpha\beta}\frac{E^2 - B^2}{2} =$$

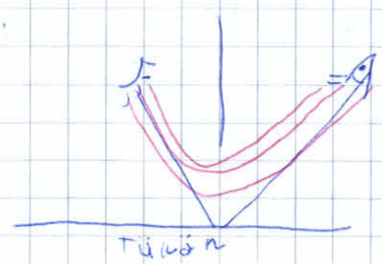
$$= -E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta + \delta_{\alpha\beta}\frac{E^2 + B^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta} = E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \delta_{\alpha\beta}\frac{E^2 + B^2}{2}$$

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{E}\circ\underline{E} + \underline{B}\circ\underline{B} - \varepsilon\,\underline{\underline{I}}$ Maxwell-féle feszültség-tenzor

Vegyük a teret lineáris, de energetikai szempontból kvadratikus, tehát az E-re vonatkozó problémák nem lineárisak

pl.:

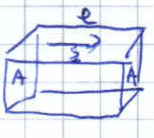


az energia kanyarodik

Milyen gyorsan áramlik a energia?

Tegyük, hogy $T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{1}{c}\underline{S} \\ c\underline{g} & -\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix}$ továbbá $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \iff \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \underline{S} = 0$

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial t} = \mathrm{Div}\,\underline{\underline{\sigma}}$$



össz: $E = A \ell \varepsilon$

Az átfolyó energia $A|\underline{S}|\Delta t$

Ha V a sebesség $\Delta t = \frac{\ell}{V}$

tehát: $AS\frac{\ell}{V} = A\ell\varepsilon \Rightarrow \boxed{V = \frac{S}{\varepsilon}}$

E-M esetben $\underline{V} = \frac{(c\,\underline{E}\times\underline{B})}{\frac{E^2+B^2}{2}} = 2c\frac{\underline{E}\times\underline{B}}{E^2+B^2}$

számtani-mértani miatt

$$|\underline{V}| = \frac{2c|\underline{E}\times\underline{B}|}{E^2+B^2} \le c\frac{2|E||B|}{E^2+B^2} = c\frac{\sqrt{E^2}\sqrt{B^2}}{\frac{E^2+B^2}{2}} \le c$$

akkor lesz az $|\underline{V}| = c$, ha $E \perp B$ (első miatt) és ha $E^2 = B^2$

vagyis ha $E^2 - B^2 = 0$ és $\underline{E}\,\underline{B} = 0$ $\iff F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$

tehát, ha a tér kiterjedt tartományban ↑ igaz ez

Ha ez létezik akkor ez az összes koordinátarendszerben invariáns, mert így az anyag sebesség mindenhol c.

Létezik ilyen: FÉNY

DE VIGYÁZAT: két fény összege nem fény, mert ott már $E \perp B$ nem igaz

$\boxed{\partial_\nu T^{\mu\nu} = f^\mu}$

$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{1}{c}\underline{S} \\ c\underline{g} & -\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix}$ $f^\mu = \begin{pmatrix} \frac{w}{c} \\ \underline{f} \end{pmatrix}$ a mozgásegyenletek: $\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \underline{S} &= w \\ \frac{\partial \underline{g}}{\partial t} - \nabla \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{f} \end{aligned}}$

Ha $\underline{V} = \frac{\underline{S}}{\varepsilon} = \frac{c^2 \underline{g}}{\mu c^2} = \frac{\underline{g}}{\mu} \Rightarrow \underline{g} = \mu \underline{V}$ μ: tömegsűrűség jellegű állandó

Ekkor a mozgás egyenletei: $\frac{\partial c^2\mu}{\partial t} + \nabla(c^2\mu\underline{V}) = w \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla(\mu\underline{V}) = \frac{w}{c^2}$ (1) ⇐ forrás

anyagváltozás anyagáramlás

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}\underline{V} + \mu\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = \nabla\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}$$

(1)-t beírva ebbe: $\underline{V}\left(-\nabla(\mu\underline{V}) + \frac{w}{c^2}\right) + \mu\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = \nabla\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}$ (2)

örvényes folyt

$$\left(\underline{v}\left[\underline{\nabla}(\mu\underline{v})\right]\right)_\alpha = v_\alpha \partial_\beta(\mu v_\beta) = \partial_\beta(\mu v_\alpha v_\beta) - \mu v_\beta \partial_\beta v_\alpha = \left[\underline{\nabla}(\mu\underline{v}\circ\underline{v}) - \mu(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v}\right]_\alpha$$

$+\underline{v}\frac{w}{c^2}$

(ey): $-\underline{\nabla}(\mu\underline{v}\circ\underline{v}) + \mu(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} + \mu\frac{\partial v}{\partial t} = \underline{\nabla}\underline{\sigma} + \underline{f}$

$$\mu\underbrace{\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \mu\underline{v}(\underline{\nabla}\underline{v})\right)} + \underline{v}\frac{w}{c^2} = \nabla\left(\underline{\sigma} + \mu(\underline{v}\circ\underline{v})\right) + \underline{f}$$

szubsztanciális derivált : $\frac{dv}{dt}$

w : teljesítmény $\Rightarrow$ $\frac{w}{c^2}$: időegység alatti tömegtermelés, tehát $v\frac{w}{c^2} = v\frac{\partial\mu}{\partial t}$

így a egyenlet: $\boxed{\frac{d}{dt}(\mu\underline{v}) = \underline{f} + \underline{\nabla}\left(\mu(\underline{v}\circ\underline{v}) + \underline{\sigma}\right)}$ Euler - egyenlet

bal oldal : Az impulzusváltozás. 2 dolog miatt változik : tömegsűrűség és sebesség változás

jobb oldal : külső erő

+ impulzus áramlás : konduktív és konvektív tenzorok 1Divja

Ha a lineáris optikát átvittük hidrodinamikára, akkor a hidrodinamikát is vissza kéne vinni a lineáris $\underline{E}$ és $\underline{B}$ vektorokra, de ezt nem lehet tetszőleges $\underline{\sigma}$ és más $(\underline{v}\circ\underline{v})$-t visszavezetni

Ám itt több csalás volt:

- 1 : $\frac{d\mu}{dt}$ = átalakításnál több csalás van
- 2 : a hővezetésnél olv. úgy $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}dt + (\underline{v}\underline{\nabla})T$

  Így a $\frac{\partial v}{\partial t}$-nek egy valódi gyorsulásnak kéne lennie, de mivel $\underline{v} = \frac{S}{\varepsilon}$ volt, ez nem úgy transzformálódik mint fizikai mennyiség. ennek nincs semmi értelme

Összetett rendszer E-p-tenzorát hogy számítsuk ki?
hatásával:

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$T^{ke}_{(1)} \qquad T^{ke}_{(2)} \qquad T^{ke}_{(1+2)}$$

Ha kijönne, hogy $T^{ke}_{(1+2)} = 0$, akkor a Θ felbomlik két részre a két rendszerre

Ha az egyik rendszer az EM mező, a másik pontrészecske, akkor az jön ki, hogy zárt ~~rendsz~~ rendszerre fel lehet bontani a mennyiség és az impulzust két rendszerre. $\partial_e T^{ke} = 0$ ilyenkor

Ideális relativisztikus hidrodinamika

Főtételek: $dE = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN$

$$E(S,V,N) \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = T \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} = -p$$

$$E = TS - pV + \mu N$$

$$0 = S\,dT - V\,dp + N\,d\mu$$

Lokális mennyiségek:

$$\varepsilon = \frac{E}{V}\ ;\ \sigma = \frac{S}{V}\ ;\ n = \frac{N}{V} \qquad \text{sűrűségek}$$

$$e = \frac{E}{N}\ ;\ s = \frac{S}{N}\ ;\ v = \frac{V}{N} \qquad \text{fajlagosok}$$

$$d\varepsilon = d\left(\frac{E}{V}\right) = \frac{dE}{V} - \frac{E}{V^2}dV = \frac{T\,dS - p\,dV + \mu\,dN}{V} - \frac{TS - pV + \mu N}{V^2}dV =$$

$$= T\left(\frac{dS}{V} - S\frac{dV}{V}\right) - p\underbrace{\left(\frac{dV}{V} - \frac{dV}{V}\right)}_{0} + \mu\left(\frac{dN}{V} - N\frac{dV}{V^2}\right) = T\,d\left(\frac{S}{V}\right) + \mu\,d\left(\frac{N}{V}\right) = T$$

$$\Rightarrow \boxed{d\varepsilon = T\,d\sigma + \mu\,dn} \quad \text{Főtétel sűrűséges alakja}$$

A Gibbs-Duhem-et is leosztani: $\sigma\,dT + n\,d\mu = dp$

Összeadva: $d(\varepsilon + p) = d(T\sigma + n\mu)$ Ez gyakorlatilag az Euler-képlet leosztva és differenciálva

Fajlagos mennyiségekkel:

$$de = d\left(\frac{E}{N}\right) = \frac{dE}{N} - \frac{E\,dN}{N^2} = \frac{T\,dS - p\,dV + \mu\,dN}{N} - \frac{TS - pV + \mu N}{N^2}dN =$$

$$= T\left(\frac{dS}{N} - \frac{S}{N^2}dN\right) - p\left(\frac{dV}{N} - \frac{V}{N^2}dN\right) = T\,d\left(\frac{S}{N}\right) - p\,d\left(\frac{V}{N}\right)$$

$$\boxed{de = T\,ds - p\,dv}$$

Gibbs-Duhem: $s\,dT - v\,dp + d\mu = 0$

Entalpia: $H = E + pV$ $\qquad \frac{H}{V} = \frac{E}{V} + p = \varepsilon + p$ entalpia sűrűség

$$w = \frac{H}{N} = \frac{E}{N} + \frac{pV}{N} = e + pv = \frac{E/V}{N/V} + \frac{p}{N/V} = \frac{\varepsilon + p}{n} \qquad \text{fajlagos entalpia}$$

$$\cancel{dw = d\left((\varepsilon + p)/n\right) = \frac{d(T\sigma + n\mu)}{n} =}$$

A fajlagos entalpia nagyon fontos lesz, ezért differenciáljuk:

$$dw = d\left(\frac{\varepsilon+p}{n}\right) = d\left(\frac{T\sigma+n\mu}{n}\right) = *$$

$$\sigma = \frac{S}{V} = \frac{S}{N}\frac{N}{V} = sn \qquad * = d(Ts+\mu) = d(e+pv)$$

$$d\varepsilon = Td\sigma + \mu dn = T(n\,ds + s\,dn) + \mu dn = Tn\,ds + (Ts+\mu)dn = Tn\,ds + w\,dn$$

$$\Rightarrow \boxed{d\varepsilon = w\,dn + Tn\,ds} \qquad \varepsilon(n,s)$$ ez kell, ua!

$$\varepsilon + p = T\sigma + n\mu = n(Ts+\mu) = nw$$

$$dp = d(nw) - d\varepsilon = n\,dw + w\,dn - d\varepsilon = n\,dw + w\,dn - w\,dn - Tn\,ds$$

$$\boxed{dp = n\,dw - Tn\,ds}$$ Megvan

Tehát:

$\varepsilon(n,s)$ létezik ahol $d\varepsilon = w\,dn + Tn\,ds$

$p(w,s)$ létezik ahol $dp = n\,dw - Tn\,ds$

Ez kell továbbá később

mi kell a hidrodinamikához?

$$S = -mc^2\int d\tau_{el}$$ 1 részecskére

Sokra

$$S = -\sum m_a c^2\int d\tau_a = -\sum_a mc^2\int dV_a^{(0)}\,\delta(r-r_a) = -\int\frac{d^4x}{c}\sum_a m_a c^2\,\delta(r-r_a)$$

Folytonos közegre $m_a c^2\,\delta(r-r_a)$ az energiasűrűség

$$S = -\int\frac{d^4x}{c}\,\varepsilon(n,s)$$ nincs súrlódás, ezt úgy kezeljük, hogy nem termelődik entrópia, tehát $s =$ áll

Ebben nincs benne a sebesség, pedig az a rendszerben. Ide kell az a Hilbertes cucc

$$S \xrightarrow{\delta g^{ke}} T^{ke} \longrightarrow \partial_e T^{ke} = 0$$ Ez lesz a mozgásegyenlet

de A metrika változtatásával a sűrűség fog változni, így ezt a variálás

$$S = -\int\sqrt{-g}\,\frac{d^4x}{c}\,\varepsilon(n,s)$$ és $$\delta S = \int\sqrt{-g}\,\frac{d^4x}{c}\,\frac{1}{2}T_{ke}\,\delta g^{ke}$$ -ből fogjuk kiolvasni a T-t

SPECREL II.

10. videó

Energia-sűrűség: $\varepsilon(n, s)$ $\qquad \varepsilon = \frac{E}{V} \quad n = \frac{N}{V} \quad s = \frac{S}{N}$

$p(n, s) \qquad w = \frac{H}{N} = \frac{E + pV}{N} = \frac{\varepsilon + p}{n}$

$$d\varepsilon = w\,dn + Tn\,ds$$

$$dp = n\,dw - Tn\,ds$$

$$S = -mc^2\int d\tau = -\sum_a m_a c^2 \int d\tau_a = -c^2\sum\int m_a\,d\tau_a = -c^2\sum_a \iint m_a\,\delta(r - R_a)\,d\tau_a\,dV = -c^2\sum_a \int m_a\,\delta(r - R_a)\frac{d^4x}{c} =$$

$$= -\int \underbrace{\sum_a m_a c\,\delta(r - R)}_{\varepsilon}\frac{d^4x}{c} = -\int \varepsilon\frac{d^4x}{c} \implies \mathcal{L} = -\varepsilon(n, s)$$

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\delta n - \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\delta s = -w\,\delta n - Tn\,\delta s$$

A metrikák változtatására s nem változik, így $\delta s = 0$

A részecskeszám N is független a metrikától: $\delta N = 0$

mivel $N = \int n(r)\,dV = \int \frac{n}{d\tau}\,\underbrace{d\tau\,dV_0}_{d\Omega = \sqrt{-g}\frac{d^4x}{c}}$

$N = \int\left(\frac{n}{d\tau}\sqrt{-g}\right)\frac{d^4x}{c}$ $\qquad$ variálva:

$$0 = \delta\left(\frac{n}{d\tau}\sqrt{-g}\right) \implies \frac{\delta\left(\frac{n}{d\tau}\sqrt{-g}\right)}{\frac{n}{d\tau}\sqrt{-g}} = 0 \implies \frac{\delta n}{n} - \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} + \frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = 0 \qquad (1)$$

$$\delta d\tau = \delta\left(\frac{1}{c}ds\right) = \delta\frac{1}{c}\sqrt{ds^2} = \frac{1}{c}\frac{1}{2\sqrt{ds^2}}\delta(ds^2) = \frac{1}{2c\sqrt{ds^2}}\delta(g_{ke}x^k x^e) =$$

$$= \frac{1}{2c^2 d\tau}\delta g_{ke}\,dx^k dx^e = \frac{-1}{2c^2 d\tau}dx_k dx_e\,\delta g^{ke} = -\frac{u_k u_e}{2c^2}d\tau\,\delta g^{ke}$$

Beírva (1)-be: $\quad \frac{\delta n}{n} + \frac{u_k u_e}{2c^2}\delta g^{ke} - \frac{1}{2}g_{ke}\delta g^{ke}$

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{1}{2}\left(g_{ke} - \frac{u_k u_e}{c^2}\right)\delta g^{ke} \implies \delta n = \frac{n}{2}\left(g_{ke} - \frac{u_k u_e}{c^2}\right)\delta g^{ke}$$

Így már kiszámolhatjuk az E-p tenzort:

$$\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g}) = -\delta(\varepsilon\sqrt{-g}) = -\delta\varepsilon\sqrt{-g} - \varepsilon\delta\sqrt{-g} = -\sqrt{-g}\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\delta n - \varepsilon\delta\sqrt{-g} = -\sqrt{-g}\,w\frac{n}{2}\left(g_{ke} - \frac{u_k u_e}{c^2}\right)\delta g^{ke}$$
$$- \varepsilon\left(-\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{ke}\delta g^{ke}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[\varepsilon g_{ke} - wn\left(g_{ke} - \frac{u_k u_e}{c^2}\right)\right]\delta g^{ke}$$

Hilbert szerint $\delta\int\sqrt{-g}\mathcal{L}\frac{d^4x}{c} = \int\sqrt{-g}\frac{1}{2}T_{ke}\frac{d^4x}{c}\delta g^{ke}$, tehát

$$T_{ke} = \varepsilon g_{ke} - wn\left(g_{ke} - \frac{u_k u_e}{c^2}\right)$$

$\mathcal{L} = -\varepsilon(n,s) \qquad T_{kl} = (\varepsilon - wn) g_{kl} + \frac{wn}{c} u_k u_l$ n m

mivel $w = \frac{\varepsilon + p}{n}$ ezért $\varepsilon - wn = -p$

Továbbá legyen $m(n,s) = \frac{w}{c^2} \qquad [m] = kg$

így $\boxed{T_{kl} = mn\, u_k u_l - p\, g_{kl}}$

$\partial_l T^{kl} = 0$ mert $\mathcal{L}$ nem függ a helytől és időtől

$$0 = \partial_l(mn u^k u^l) - \partial_l(p g^{kl}) = \partial_l(m u^k)\, n u^l + \partial_l(n u^l)\, m u^k - \partial^k p = *$$

$$\partial^k p = n\,\partial^k w - \underbrace{T n\,\partial^k s}_{0} = n\,\partial^k(mc^2)$$

$$* = (m\,\partial_l u^k + u^k \partial_l m)\, n u^l - n\,\partial^k(mc^2) + (m u^k)\,\partial_l(n u^l) =$$

$$= n\left[m\, u^l \partial_l u^k + u^k u^l \partial_l m - c^2 \partial^k(m)\right] + m u^k \partial_l(n u^l) = 0 \qquad / \cdot u_k \qquad (2)$$

$$n\Big[m\underbrace{(u^l \partial_l u^k) u_k}_{0} + \underbrace{\underbrace{u_k u^k}_{c^2} u^l \partial_l m - c^2 u_k \partial^k m}_{0}\Big] + m\underbrace{u_k u^k}_{c^2}\partial_l(n u^l) = 0$$

$$m c^2 \partial_l(n u^l) = 0$$

$\underline{\partial_l(n u^l) = 0} \qquad \partial_0(n u^0) + \partial_\alpha(n u^\alpha) = 0 \qquad$ legyen $n u^0 = \rho c$

$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + \partial_\alpha\left(\rho c \frac{u^\alpha}{u^0}\right) = 0 \qquad \frac{u^\alpha}{u^0} = \frac{v_\alpha}{c}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0 \qquad (3)$$

Mi a ρ? $\rho = \frac{n u^0}{c} = \frac{N}{V}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{N}{V}$ a megfigyelő által észlelt részecske sűrűség

Tehát (3) a ténylegesen kontinuitás

Ezt beírva a (2)-be: az utolsó tag 0, tehát az első is:

$$m u^l \partial_l u^k + u^k u^l \partial_l m - c^2 \partial^k m = 0$$

$\underline{u^l \partial_l(m u^k) = c^2 \partial^k m}$ olyan, mint a skalármezőben mozgó tömeg

Tehát a relativisztikus Euler egyenlet u^k-val pH része a kontinuitás, a rá merőleges pedig az

Természetesen kell még az állapotegyenlet, az $\varepsilon(n,s)$. Ezzel, így zárt egyenletrendszert kapunk

Ismert fém vari:

$$\frac{d}{d\tau} m u^k = c^2 \partial^k m$$

$$u^l \partial_l (m u^k) = c^2 \partial^k m$$

$$(m u^l) \partial_l (m u^k) = (mc) \partial^k (mc) \qquad \text{ahol } p^l = m u^l$$

$$p^l \partial_l p^k = \partial^k \frac{(mc)^2}{2} = \partial^k \left(\frac{p_l p^l}{2}\right) = p^l \partial^k p_l$$

$$p^l (\partial_l p_k - \partial_k p_l) = 0$$

Spec eset: $\partial_l p_k - \partial_k p_l = 0$ Ez akkor van, ha $p_k = \partial \psi$

akkor $u_k = \frac{1}{m} \partial_k \psi$