ÁLT REL 1.

1. előadás (02. 26.)

Hraskó Péter: ott a nevet felett írni
Bevezetés az áltrelba

1905-ben Einstein leírta a speciált és hamar elfogadták
1908-ban Minkowski rájött, hogy a Lorentz-trafó is csak geometria
sok tudományterületet átírtak relativisztikusra (eldin, hidro stb...)

megpróbálták a gravitációt is, hiszen az hasonlít az eldinre
DE van benne egy − előjel ami sok galibát okoz.

Mit mond Newton:

(1) $m_t \underline{\ddot{r}} = \underline{F}$ $\qquad m_t$: tehetetlen tömeg

$\underline{F}$ vmint alakú, egy testre és egy térre jellemző tényező

$\underline{F} = m_s \underline{g}(\underline{r}, t)$

m_s: súlyos tömeg. Már Newton megmutatta, hogy $m_s = m_t$, ezt sokat igazolták (pl.: Eötvös)

mit tudunk $\underline{g}$-ről

$\boxed{\operatorname{rot} \underline{g} = \underline{0}}$ $\qquad \left(\oint \underline{g}\, d\underline{r} = 0\right)$

$\oint \underline{g}\, d\underline{F} = -4\pi G \int \rho\, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \underline{g} = -4\pi G \rho}$

a négyzetes távolságfüggés

$\exists \phi: \underset{(3)}{\underline{g} = -\underline{\nabla} \phi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \phi = 4\pi G \rho}$ Newton téregyenlete (2)

Spec. eset: $\rho(\underline{r}) = \delta(\underline{r} - \underline{R})$

akkor $\phi(\underline{r}) = -G \dfrac{1}{|\underline{r} - \underline{R}|}$ ez a gravitációs potenciál

(1−3)-at kéne általánosítani

vagyis: ~~$g_\mu = \partial_\mu \phi$~~

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad m \frac{dx^\mu}{d\tau} = m g^\mu \\ &(2) \quad -\Box \phi = 4\pi G \rho \\ &(3) \quad g_\mu = \partial_\mu \phi \end{aligned}\right\}$$

Ez lenne a Nordström-féle gravitációs elmélet

Ezt a vízszintes hajítás paradoxona miatt dobták el

Mit mond Einstein:

Önkényes indulás az, hogy $m_s = m_t$

A nagyon vonatkozásban felírt mozgásegyenletek leírás plusz kísérletek [illegible] n-ek egy [illegible] lehet, hogy az is kiderül, új nem teljesül egyszer a térnek ~~[illegible]~~ [illegible], mint mi a gravitációnak

A tehetetlenségi erőket el lehet tüntetni trafókkal. Vajon a gravitációt is el lehet?

Ki lehet, de ekkor a térbeli nem egészen azonos (szabad pályák)

$\Rightarrow$ nincs globális inerciarendszer, csak lokálisak, amik nem illeszthetők össze

(analógia: síktérkép a föld felszínéről)

ÁLTREL

2. előadás (03.05.)

Amikor áttérünk gyorsuló rendszerekre, megjelennek új tagok, amelyek mindegyike m-től függ.
ezeket ki tudjuk 0-zni, úgy, hogy egyenletesen 0 legyen

Megfigyelés: a gravitációnál is m-függés van ⇒ ez is kiiktatható, de nem globálisan
⇒ nincs globális inerciarendszer, csak lokális

Cél: a gravitációt ne erőként, hanem geometriailag interpretáljuk

A lokális inerciarendszerekre egyenértékű az eddigi fizika (a speciel), a globálisan ennek általánosítása legyen, kicsiben pedig a Newtoni formulák legyenek

Kérdés: hogy lehet áttérni egyik lokálisról a másikra ⇒ transzformáció ⇒
⇒ csoportelmélet ⇒ olyan fizikát keresünk ami invariáns egy jó nagy csoportra

Euklidész, Bolyai és Lobacsevszkij feltette, hogy a tér homogén ~~...~~ nem tudták megfordítani hogy éppen hol vagy)

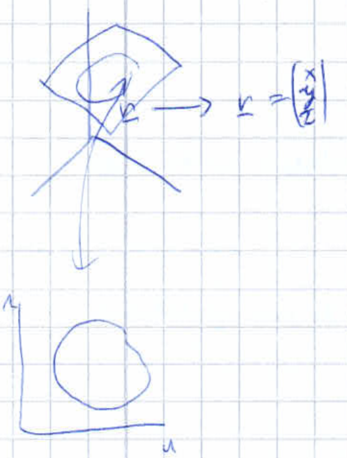
de már Gauss is tudta, hogy ez a felületeken nem így.
pl.: a Δ szögösszeg 180°-tól való eltérése ennek felületi integráltól függ
Gauss-nagy-tétele: $\alpha+\beta+\gamma-\pi=\int_\Delta K(\underline{x})\,dA$ (ez az Gauss [illegible])

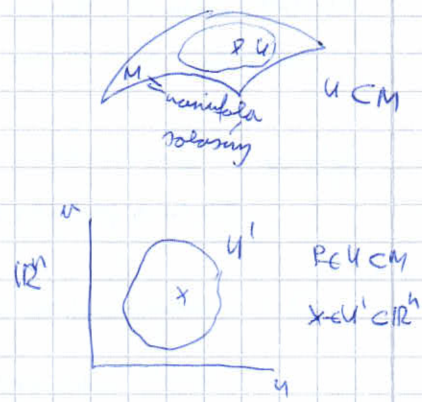
A felületi tételek két részre osztható: - amit kimutatunk a beágyazásban
- amit nem.

Gauss féle görbület:
van két legkisebb és legnagyobb görbület (min és max)
$\frac{1}{R_1R_2}$ és $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ a főgörbület és átlaga
(már régebben is egy határig ismertek voltak)

Gauss belátta, hogy az $\frac{1}{R_1R_2}$ kiszámolható a 3D-s térbe való beágyazás nélkül
a $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ nem

Riemann ezt általánosította n dimenzióra és belátta, hogy nem kell beágyazni





Beágyazás

Ha eltároljuk a bármi dimenzión beágyazott

A paramétertér eleme x^k n számmal jellemezhető

Vigyázat !!! ez nem vektor !!! Alsóindexes baloldalon is $\cancel{x_k}$

$$x^k = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Hogy adjuk meg $\underline{r}(x^k)$ függvényt ? Hármas számokat r-komponensek

Tétel : Minden Riemann-tér beágyazható egy Euklideszi térbe

$n \to 2n+1$
$R \quad E$

Ez praktikus lehet, mert szemléletes a beágyazással, de 9 dimenzióban kényelmetlen dolgozni

helyette vizsgáljuk az $\mathbb{R}^n \to M$ leképezés tulajdonságait

Általánosítsuk a nyílt halmaz fogalmát :

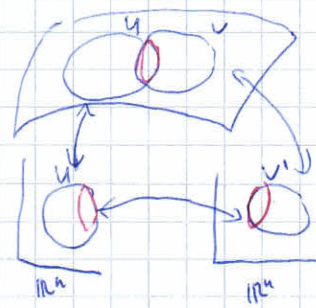
Egy A halmaz $P(A)$ részhalmazainak halmazában $N \subset P(A)$ halmazrendszert, amit azt mondjuk, hogy ezek nyíltak, ha teljesülnek rájuk bizonyos tul.-ok

Ekkor megadtunk rajta egy topológiát

ezzel általánosítható a határérték és a folytonosság

A sokaságon, ha bevezetünk topológiát, akkor vizsgálhatjuk a leképezés tulajdonságait

Így, a sokaság definíciója lehetne, hogy $\mathbb{R}^n$-nel folytonosan térképezhető



Gyakorlati def (különben definiálják) :

Van egy térkép, aminek különböző részeit leképezhetők $\mathbb{R}^n$-be (n u.a.)

A térképezés - paraméterezés lánccal átalakítható egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés a két euklideszi párhuzamos között

Ez folytonos (az egyszerűen módszerrel vizsgálható)

Mi van sok térkép esetén ? össze-vissza átlapolás

Mi van, ha eltűnik a kezdeti térkép, és csak sok térképünk van, amik egymással kompatibilisek

Na EZ definiálja nekünk helyesen a sokaságot. [Formálisan: a sokaság a komp. térképek ekvivalenciaosztálya. ⇓ átlasznak]

ALTREL 1.

3. előadás (03.12.)

A téridőt a 4D-s differenciálható sokaságként modellezzük

(Egy halmaz megadott topológiával és folytonosan leképezhető $\mathbb{R}^n$ ~~...~~ -be.)

"térképezhető"

differenciálható: a térképek közötti áttérés egyszerű, differenciálható a leképezés

Meg lehet adni trajektóriát: $P(\tau): \mathbb{R} \to M$

mezőket: $M \to \mathbb{R}$ $\quad$ M-t térképezve: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

De mi van a vektorokkal?

egyáltalán mi a vektor? vektortér eleme

pl. $\underline{E}$ a P pontban lehetséges elektromos térerősségek eleme

itt ez a vektortér

de ezt hogy ragadjuk meg absztrakt sokaságon?

van

megoldás:

van egy olyan művelet, hogy $\underline{v}\nabla$. ez egy operátor ahol $\underline{v}(\underline{x})$ vektormező

$$(\underline{v}\nabla)\phi(\underline{x}) = \frac{\phi(\underline{x}+\underline{v}(\underline{x})\Delta t)-\phi(\underline{x})}{\Delta t} = \psi(\underline{x})$$

ez egy $\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x})$ művelet

Legyen S a skalármezők halmaza. Ezesetben $\underline{v}\nabla : S \to S$

Másik, $\underline{u}$ vektormezőre $\underline{u}\nabla$ is egy művelet $\quad (\underline{u}\nabla)\phi(\underline{x}) = \Xi(\underline{x})$

Ha $\underline{w} = \underline{v} + \underline{u}$, akkor $(\underline{w}\nabla) = (\underline{v}\nabla) + (\underline{u}\nabla)$, mert

$$(\underline{w}\nabla)\phi = ((\underline{v}+\underline{u})\nabla)\phi = \cancel{\psi}\,\phi(\underline{x}) = \Xi(\underline{x})$$

Hány dimenziós az ilyen típusú operátorok tere? Amilyen a vektortere

vegyünk fel egy bázist ekkor, ha $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ akkor $(\underline{e}\nabla) = \frac{\partial}{\partial x}$

a vektormező felírható skalármezők lineárkombinációjaként a bázisokkal.

Legyen $\phi_3(\underline{x}) = \phi_1(\underline{x})\phi_2(\underline{x})$, $\hat{A} = \underline{u}\nabla$

$$\hat{A}\phi_3 = \hat{A}(\phi_1\phi_2) = (\hat{A}\phi_1)\phi_2 + \phi_1(\hat{A}\phi_2)$$

Leibniz szabály miatt.

V vektortér $\hat{A}: V \to V$ operátor

ha $\hat{A}$ lineáris: $\hat{A}(\alpha\underline{v}+\beta\underline{u}) = \alpha\hat{A}\underline{v} + \beta\hat{A}\underline{u}$

Ha $\hat{A}$ olyan, hogy $\hat{A}(vu) = (\hat{A}v)u + v(\hat{A}u)$ akkor $\hat{A}$ deriváció.

(ez a gyűrűn értett operátorokra él.)

Állítás: a derivációk egy teret alkotnak (amit dimenzió, alapján adhatunk)

Állítás: $(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})$ egy deriváció

Mik lehetnek a deriválások bázisai?

$$\underline{v} = v_x(\underline{r})\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Mi van gömbkoordináták esetén:

$$\underline{v} = \alpha(\underline{r})\frac{\partial}{\partial r} + \beta(\underline{r})\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \sigma(\underline{r})\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

akkor a bázisoperátorok

$$\frac{\partial}{\partial r} = \underline{e}\,\underline{\nabla}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \underline{f}\,\underline{\nabla}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \underline{g}\,\underline{\nabla}$$

Ugyanez sokaságokon.

Skalármezőket már értelmeztük.

S a skalármezők halmaza, ez egy gyűrű.

A rajtuk ható operátorok közül kiválasztjuk a deriválásokat.

adott pontban kiválasztható és ott értelmezett deriválások bázisai

$\Rightarrow$ a deriválások vektorteret alkotnak

$\Rightarrow$ Bevezettünk egy vektorteret [annyi dimenziós, ahány dimenziós a sokaság)

[A diffgeom. szerint a koordinátarendszerben a $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ operátorok]

Kicsit absztraktabban:

sok görbe átmegy ugyanott. $x(t)$ görbe.

$\phi(x(t))$ deriváltja: $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt} = \dot{x}^\mu\partial_\mu\phi = (v^\mu\partial_\mu)\phi$

Lehet, hogy több görbén u.a. a $v^\mu\partial_\mu$ jön ki.

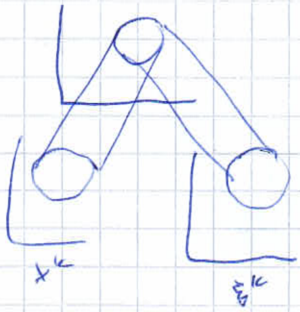
Ez azt jelenti, hogy a két görbe érintő, de most itt ez az érintés definíciója

A görbék ezen ekvivalenciaosztály, amelyeknél a derivált u.a. definiálnak egy irányt

Két irány lineáris kombinációja újabb irány $\Rightarrow$ vektortér

~~ezek~~ ez az végül is u.a., mint az előbb

Ha térképezem létre u.a. a helyet



Van ezután egy kölcsönös egyértelmű leképezés

$$x^k(\xi^q) \longleftrightarrow \xi^k(x^k)$$

Vegyünk egy teljes általános koordinátatrafót! Hogy változnak a lineáris tömegek?

az általános koordináta trafó minden pontban indukál egy bázistrafót

[itt elmondta megint a duális teret]

A duális tér elemei a kovektor, és a indexet alulra írjuk, a sima vektort felül

Ha van $V \ni \underline{u} = u^k \underline{e}_{(k)}$

$$\downarrow$$

$V^* \ni u^* = \sum_k u^k \varepsilon^{(k)}$ ezt hatva $\underline{v}$-re:

$u^* \underline{v} = \bar{u}^k v^k$

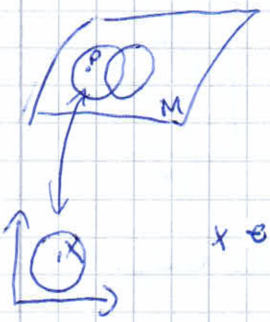
Ja, nem, csak a skalárszorzást vonta el

Ami van, hogy most van egy g_{ke} metrikus tenzor

g_{ke} önkényes, de invertálható

ALTREL 1.

1. előadás (04.09.)



$x \in \mathbb{R}^n$

Skalármező: $\phi: M \to \mathbb{R}$, $P \to \phi(P)$ gyakorlatban $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \to \phi(x)$

deriválás $D\phi \to \psi$

$$D(\phi_1\phi_2) = (D\phi_1)\phi_2 + \phi_1(D\phi_2)$$

ezek is n dimenziós teret alkotnak, aminek bázisát alkotják a $\frac{\partial}{\partial x^k}$-k

azaz $\exists\, v^k \in \mathbb{R} : D = v^k \partial_k$

ez pontonként van értelmezve, és ha minden pontban van, az vektormező

$D = \underline{v}\,\underline{\nabla}$ olyan görbe menti derivált, aminek az adott pontban az érintője $\underline{v}$

Jelölés:

P pont körüli érintő tér T_P

elemei $\underline{v}$ vektorok: $\underline{v} \in T_P$ (gyakorlatban: v^k)

$\cup T_P = T_M$: a sokaság érintő nyalábja

megfogjuk az csak jelölést, a T_P-knek nincs metrikájuk

„A Lagrange-mechanika az érintő nyalábon értelmezett függvények elmélete"

van valami cotangens tér is (de ez passz)

a Legendre-trafó pont ezekbe térít át, így a Hamilton-fv. a T_M^*-ban lakik

jobb ez úgy elképzelni, hogy ezzel tudjuk össze skalárszorozni

$v_k \partial_k \phi = \text{szám} \Rightarrow$ a $\partial_k \in T_M^*$

valahogy azzal kell számolni, hogy a funkcionálok milyen mit várnak

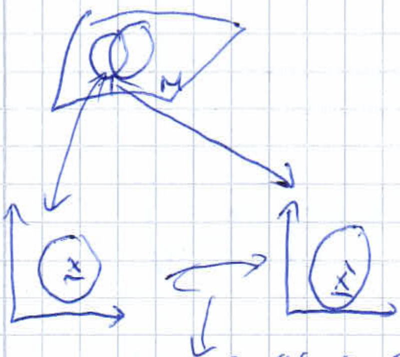
[ezt nézd vissza videón mindenképpen]

A bázisok: T_P: $\partial_k|_P$ elemek: $v^k \partial_k|_P \in T_P$ komp.: v^k

T_P^*: $dx^k|_P$ $v_k\, dx^k|_P \in T_P^*$ v_k

Hogy lehet fel-le hozogatni az indexet? Sehogy, a diffgeóban ezeknek semmi közük egymáshoz

Az általános sokaságokkal a trafókat vezettük be, de először csak is értelmezni kell, hogy



a két térképezés át lehet térni egymásra

$$\underline{x}'(\underline{x}) \longleftrightarrow \underline{x}(\underline{x}') \qquad dx^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^e} dx^e = A^k{}_e(x) dx^e$$

Egy általános ~~ko~~ ~~[illegible]~~ koordinátatrafó minden pontban indukál egy lineáris trafót

$$\Rightarrow v^{k'}(x) = A^k{}_e(x) v^e(x)$$

alsóindexes: (jelölés $\partial x^{k'} \equiv \partial (x')^k$)

$$u_k = \partial_k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

$$u_{k'} = \frac{\partial \phi}{\partial (x')^k} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \phi(x(x')) = \frac{\partial \phi}{\partial x^e} \frac{\partial x^e}{\partial x^{k'}} = B_k{}^e(x) u_e$$

$x(x'(x)) = x$ nyilván.

ezért: $$\frac{\partial x^k}{\partial x^e} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^e} = B^k{}_m A^m{}_e = \delta^k_e$$

Most már lehet általános vektort definiálni és általános tenzort is

ON esetén: $\alpha' = \alpha$

$$v_k' = R_{ke} v_e$$

$$T_{ke} = R_{kp} R_{eq} T_{pq}$$

$$Q_{kem} = R_{kp} R_{eq} R_{ms} Q_{pqs}$$

$$\vdots$$

itt: $T^{ke}(x)' = A^k{}_p(x) A^e{}_q(x) T^{pq}(x)$

$$T_{ke}'(x) = B_k{}^p(x) B_e{}^q(x) T_{pq}(x)$$

$$\Theta^{ke}{}_m{}'(x) = A^k{}_p(x) A^e{}_q(x) B_m{}^s(x) \Theta_{pq}{}^s(x)$$

Kovariáns differenciálás

vegyük: $\partial_k v_e = \lim_{\sigma \to 0} \frac{v_e(x + \sigma \underline{e}_k) - v_e(x)}{\sigma}$

de itt az r^k és az $r^k + \sigma^k$ pontban lakó vektorok nem lehet kivonni egymásból

lenne mit nézni a vektorokban, de az általában más a pontokban szánt kell a vektorok fogalma.

metrika: két ponthoz hozzárendel egy távolságfogalmat

$A, B \in M \qquad \rho(A,B) \in \mathbb{R}$

úgy hogy: $\rho(A,B) \geq 0$

$\rho(A,B) = \rho(B,A)$

$\rho(A,A) = 0$

$\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$

Valahol konstans a $ds^2 = \eta_{kl}\, dx^k dx^l$ tenzort $\quad \eta_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

általánosan: $g_{kl}(x)$ tenzormező.

$$ds^2 = g_{kl}(x)\, dx^k dx^l$$

Kiegészítés az előzőekhez:

alsó és felső indexes vektorok szorzata skalár:

$a = u_k v^k$

$a' = u'_k v'^k = (u_l B^l{}_k)(A^k{}_m v^m) = u_l (B^l{}_k A^k{}_m) v^m = u_l \delta^l_m v^m = u_l v^l = a$ ✓

$g_{kl}(x)$ olyan alakú, hogy a fenti is teljesüljön

– $g_{kl}(x) = g_{lk}(x)$

– lokálisan adja vissza a speciált, tehát lokálisan konstans és adott alakúan η_{kl}.

Azaz: legyen 1 pozitív és 3 negatív sajátértéke.

Az általánosítás két kérdése:
- adott $g_{kl}(x)$ esetén mi a fizika
- mi határozza meg $g_{kl}(x)$-et

Ha van $x(\xi) \leftrightarrow \xi(x)$ trafó $\eta_{kl}\, d\xi^k d\xi^l = g_{kl}\, dx^k dx^l$ akkor is teljesül

$$ds^2 = \eta_{pq}\, d\xi^p d\xi^q = \eta_{pq}\left(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k} dx^k\right)\left(\frac{\partial \xi^q}{\partial x^l} dx^l\right) = \Big(\underbrace{\eta_{pq}\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^q}{\partial x^l}}_{g_{kl}}\Big) dx^k dx^l$$

$g_{kl}(x) = \tilde{A}_k{}^p(x)\, \eta_{pq}\, A^q{}_l(x)$

$\Rightarrow$ Ha $g_{kl}(x)$-et fel lehet úgy bontani, akkor a nem általános, hanem a speciál. helyes koordinátákkal

De honnan tudjuk, hogy $g_{kl}(x)$ felbontható-e? (ha deriváltjai bizonyos feltételeket teljesítenek kell)

Két téridő pont távolsága:

$x^\mu(t)$ görbe mentén $\quad dx^\mu = \dot{x}^\mu(t)\, dt$

$$L = \int dl = \int \sqrt{g_{\mu\varrho}(x)\, dx^\mu dx^\varrho} = \int \underbrace{\sqrt{g_{\mu\varrho}(x(t))\, \dot{x}^\mu(t)\, \dot{x}^\varrho(t)}}_{F(t)}\, dt$$

$$= \int F(x, \dot{x})\, dt$$

A távolság a legrövidebb L (variációszámítás) (geodetikus görbe)

Ez az egész csak pozitív definit térben ok.

időszerű görbe: bármely pontján az érintő időszerű

pl.: egy részecske világvonala

sajátidő: $\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{ds^2}$ (időszerű görbére)

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{\mu\varrho}(x)\, dx^\mu dx^\varrho} = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{\mu\varrho}(x(w))\, \dot{x}^\mu(w)\, \dot{x}^\varrho(w)}\, dw$$

értelmezés: nyugvó álló rendszerben is másképp telik az idő, mert ez $\sqrt{g_{00}}\, dt$

$\Rightarrow$ gravitációs vöröseltolódás

(a nap felületén álló atom rezgései lassabbak – vörösebbek, mint az űrben)

ÁLTREL I.

5. előadás (04. 16.)

Adott $g^{\mu\nu}_{\mu\varrho}$-val le-fel tudjuk húzogatni az indexeket, amit jelölve

adott $v^{\mu}(x)$ és $A_{\mu\varrho}(x)$ mezők. $u_\mu(x) = A_{\mu\varrho}(x) v^{\varrho}(x)$

ez egy leképezés: $v \to u$

$V \to V^*$

$T \to T_p^*$

viszont amikor a $g_{\mu\varrho}$-val szorzunk, akkor a leképezés bijektív, így a $v^\mu \Leftrightarrow u_\mu$ mezőket megfeleltethetjük egymásnak, és u.a. betűvel jelöljük.

A $g_{\mu\varrho}$-nak is van duálisa: $g_{\mu\varrho} g^{\varrho m} = \delta_\mu^m$

$$v^{\varrho} = g^{\varrho m} v_m$$

Általános $g_{\mu\varrho}$ akármilyen lehet adott körülmények között, de később kapunk majd fizikai egyenletet, ami megadja $g_{\mu\varrho}$ értékét.

Addig úgy vesszük, hogy $g_{\mu\varrho}$ adva van.

Lehet skalárszorozni:

$\phi = a_\mu b^\mu = g_{\mu\varrho} a^\varrho b^\mu$ (mivel $g_{\mu\varrho}$ szimmetrikus, ezért a skalárszorzat is kommutatív)

FONTOS: A koordináta nem vektor, hanem koordináta, így annak indexét nem lehet lehúzni:

x^μ: ✓ $\quad x_\mu$: X

nincs olyan, hogy $dx_\mu = g_{\mu\varrho} dx^\varrho$, de ez nem a x_μ differenciálja

Továbbá, a tér-idő adatokat is a $g_{\mu\varrho}$-ból olvassuk le:

$ds^2 = g_{\mu\varrho}(x) dx^\mu dx^\varrho$ ez skalár a koord-trafóra

ha $ds^2 > 0$ egy görbe elemre, akkor $d\tau = \frac{1}{c} ds$

Minden pontban felbontható az idő-kúp $\Rightarrow$ a metrikus tér egyben kauzális struktúra

A pályagörbe egyes részein lehet akár állandó, de a világvonal mindenhol az időszerű részen kell legyen.

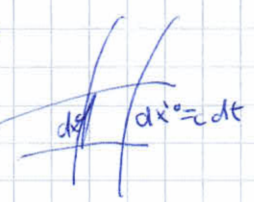
Kérdés: Mi van, ha zárt időszerű világvonal létezik? (időgép?)

Ezt nem tudjuk kizárni, csak azt, hogy ha találunk ilyet akkor az nem jó téridő

Nézzünk olyan dolgokat, amik "állnak"

$dx^i = 0$

$dx^0 \neq 0$

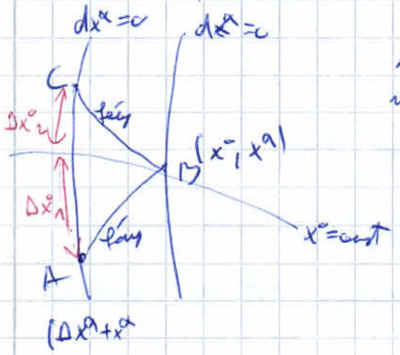


$ds^2 = g_{\mu\varrho} dx^\mu dx^\varrho = g_{00} dx^0 dx^0 > 0$

$ds = \sqrt{g_{00}}\, dx^0 \Rightarrow d\tau = \sqrt{g_{00}(x)}\, dt$

A vezetőmenidő függ a helytől, de aki áll, annak sajátideje megegyezik vele

Általában a flattán a különböző időpontokban, és 12:00-kor akarnak indulni



A-ban az egyik fényt küld a másiknak, ami B-ben visszafelé és C-be ér vissza

$$BA: \quad ds^2=0 \Rightarrow g_{\kappa\varrho}(B)\,\Delta x^\kappa \Delta x^\varrho =$$

$$= g_{00}\Delta x^0 \Delta x^0 + 2 g_{0\alpha}\Delta x^0 \Delta x^\alpha + g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x^0 = \frac{-g_{0\alpha}\Delta x^\alpha \pm \sqrt{(g_{0\alpha}\Delta x^\alpha)(g_{0\beta}\Delta x^\beta) - g_{00} g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta}}{g_{00}}$$

A két megoldás A és C pont idején (rész)

$$\Delta x^0_{1,2} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\Delta x^\alpha \pm \frac{\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta})\Delta x^\alpha \Delta x^\beta}}{g_{00}} = c\Delta t$$

ez a koordinátaidő vett. A sajátidő:

$$c(\tau_C - \tau_A) = (\Delta x^0_2 - \Delta x^0_1)\sqrt{g_{00}} = \frac{2\sqrt{\cdots}}{g_{00}}\sqrt{g_{00}}$$

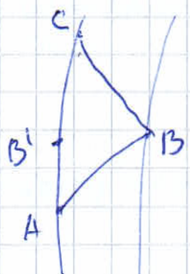
Tehát az ingázó távolság: $\Delta l = \frac{c\Delta t}{2} = \frac{\sqrt{\cdots}}{\sqrt{g_{00}}}$ (egyidejűleg a radarjellel együtt)

$$\Delta l^2 = \underbrace{\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}}{g_{00}}}_{\gamma_{\alpha\beta}}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ ← ez a 3D-s metrikus tenzor

$\gamma_{\alpha\beta}$ is függ a helytől és időtől is! (Tágulhat a tér)

(MEGJEGYZÉS: Az állítás ~~...~~ nem feltétlen jelent összehasonlíthatóságot, hanem a koordináták állandóságát. Általában a szakasz részecskén át is gyorsulhat is, ha olyan a téridő görbülése)



B' legyen az, ami A és C ideje között félúton van.

$$\Delta t_{BD} = \frac{\Delta t_{BC} + \Delta t_{BA}}{2} = \frac{1}{c}\frac{(\Delta x^0_1 + \Delta x^0_2)}{2} = \frac{1}{c}\frac{-g_{0\alpha}}{g_{00}}\Delta x^0$$

Ha a fény a B-nek az idejét is átadja, akkor C után átállíthatjuk az óránkat úgy, hogy B' ideje azonos legyen B-vel.

DE ez nem ekvivalencia reláció az egész téren, mert $\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}$ nem állandó mindenhol

Kör mentén a szinkronizálás: $\oint -\frac{g_{0\alpha}(x)}{g_{00}(x)}\,dx^\alpha$

akkor lehet vegyesen tetszőleges szinkronizálni, ha $g_{0\alpha}$ mindenhol 0.

ha $\begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{-\gamma_{\alpha\beta}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ ← ez már szinkronizálható.

ha a sajátidő = koordinátaidő, akkor $g_{00}=1$

ezt hívják szinkronizált rendszernek.

Megjegyzés: Nincs értelme a távoli (nem infinitezimális) objektum távolságának.

Riemann térben ami, hogy $ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k > 0$

egy görbe ívére: $L = \int_G dl = \int_G \sqrt{g_{ik}(x(w))\, \dot{x}^i(w)\, \dot{x}^k(w)}\, dw$

Ha G A és B pont között, akkor ez egy $L[x^i(w)]$ funkcionál, aminek megkereshetjük a legrövidebb görbét. Ez általában két pont között jó.

Pseudo Riemann-tér

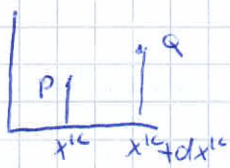
két világvonal nem síkban, hogy átmenni egymásba.

Na de ki szerint nem?

A sima, hogy a legrövidebb világvonal kilépett a nem-síkból

Spec térszerűen a nem síkban vagyunk a legrövidebb ... az univerzum ilyen.

Konnexió (összehasonlítás)



Hogy differenciáljuk v-t, ha $v(x)$ és $v(x+dx)$ különböző térben van.

$$\underbrace{\underline{v}(\underline{x}+\underline{dx})}_{T_Q} - \underbrace{v(x)}_{T_P}$$

megoldás: össze kell hasonlítani a két érintő teret

Legyen $C: T_P \to T_Q$

$v^k(p) \to \overline{v^k}(p) = u^k(Q)$ első közelítésben: $u^k(Q) = v^k(p) + \delta v^k$

ha lineárisnak akarunk $\delta v \sim v$, $\delta v \sim dx$ akkor $\delta v^k = -\Gamma^k_{em}(x)\, v^e dx^m$

Christoffel-féle szimbólum

a konnexiós struktúra önkényes, de össze lehet hasonlítani a metrikus tenzorral.

Ha van az egyik pontban egy vektorunk, áttranszformáljuk

$Dv = v(Q) - \overline{v}(P)$: $Dv^k = v^k(Q) - \overline{v^k}(P) = v^k(x+dx) - (v^k(x) - \Gamma^k_{em} v^e dx^m) =$

$$= v^k(x) + \frac{\partial v^k}{\partial x^m} dx^m - v^k + \Gamma^k_{em} v^e dx^m = dv^k - \delta v^k \Rightarrow \boxed{Dv^k = \big(\overbrace{\partial_m v^k + \Gamma^k_{em} v^e}^{\nabla_m v^k}\big)\, dx^m}$$

kovariáns differenciál

ÁLTREL I.

6. előadás (04.23.)

Különböző pontbeli vektorterek leképezése, hogy teljes differenciál

$v \in T_p \qquad \bar{v}^k = v^k + \delta v^k$

$\downarrow$

$\bar{v} \in T_q$

Akkor azt akarjuk, hogy $\delta v^k = -\Gamma^k_{lm}(x)\, v^l\, dx^m$

$\Gamma^k_{lm}(x)$ n^3 darab önkényesen választott fv.

kovariánsokra: $\bar{u}_k = u_k + \delta u_k$ ahol $\delta u_k = F^l_{km}(x)\, u_l\, dx^m$

$\alpha = u_k v^k$ ennek invariánsnak kell lennie

$$\alpha = \bar{\alpha} = \bar{u}_k \bar{v}^k = (u_k + F^l_{km} u_l\, dx^m)(v^k - \Gamma^k_{pq} v^p dx^q) =$$

$$= u_k v^k + F^l_{km} u_l v^k dx^m - \Gamma^k_{pq} u_k v^p dx^q - \text{kicsi}$$

$$= \alpha + F^l_{km} u_l v^k dx^m - \Gamma^l_{km} u_l v^k dx^m$$

$$= \alpha + \underbrace{(F^l_{km} - \Gamma^l_{km})}_{0} u_l v^k dx^m \quad \Rightarrow \quad F^l_{km} = \Gamma^l_{km} \quad ☺$$

Nézzük tenzorokra! (ez úgy viselkedik, mint vektorok szorzata)

$$\bar{T}^{kl} = \overline{u^k v^l} = \bar{u}^k \bar{v}^l = (u^k - \Gamma^k_{pm} u^p dx^m)(v^l - \Gamma^l_{ts} v^t dx^s) =$$

$$= u^k v^l - \Gamma^k_{pm} u^p v^l dx^m - \Gamma^l_{ts} v^t dx^s + (\cdot\cdot)\, dx^m dx^s$$

$$\sim T^{kl} \underbrace{- \Gamma^k_{pm} T^{pl} dx^m - \Gamma^l_{ts} T^{kt} dx^s}_{\delta T^{kl}}$$

$$\delta T^{kl} = (-\Gamma^k_{pm} T^{pl} - \Gamma^l_{pm} T^{kp})\, dx^m$$

$$\delta T_{kl} = (\Gamma^p_{km} T_{pl} + \Gamma^p_{lm} T_{kp})\, dx^m$$

$$\delta T^k{}_l = (-\Gamma^k_{pm} T^p{}_l + \Gamma^p_{lm} T^k{}_p)\, dx^m$$

$$\delta T^{kl}{}_m = (-\Gamma^k_{ps} T^{pl}{}_m - \Gamma^l_{ps} T^{kp}{}_m + \Gamma^p_{ms} T^{kl}{}_p)\, dx^s$$

így tovább...

Adott P pont, rajta átmenő görbe, és $W \in T_P$

Toljuk el W-t a görbének ph-an!

A görbe $x(t)$, Mi a $V^k(t)$-t szeretnénk meghatározni

$$V^k(t+dt) = \overline{V^k(t)} = V^k(t) + \delta V^k = V^k(t) - \Gamma^k_{em}(x(t))\,V^e(t)\,dx^m =$$

$$= V^k(t) - \Gamma^k_{em}(x(t))\,V^e(t)\,\dot{x}^m(t)\,dt$$

$$= V^k(t) + \frac{dV^k}{dt}(t)\,dt \quad // \,!$$

$$\frac{dV^k}{dt}(t)\,dt + \Gamma^k_{em}(x(t))\,V^e(t)\,\dot{x}^m(t)\,dt = 0$$

ezt a diffegyenletet kell megoldani

Ez elsőrendű, lineáris változó eh-s diffegyenlet rendszer V^k fv-ére.

$\Rightarrow$ A tetszőleges vektor akármelyik görbe mentén eltolható akármeddig, de egy adott ponton több görbe van és általában nem u. a. kapjuk. ☺

(pl.: radiusz pusztázás az északi sarkon.)

A görbület egy defje: hogy adott vektort körbetolva egy görbén, mennyire változik meg.

Egyenesnek megfelelő görbe: Az a görbe, ami mentén az érintővektort végigtolva érintővektor marad.

Tehát: $\frac{d\dot{x}^k}{dt} + \Gamma^k_{em}(x(t))\,\dot{x}^e(t)\,\dot{x}^m(t) = 0$ azaz $\ddot{x}(t) + \Gamma(x(t))\,\dot{x}(t)\,\dot{x}(t) = 0$

ez már másodrendű és nem lineáris.

Ezek megoldásai a geodetikusok (fun fact: ugyanezt kapjuk, ha variációszámítással meghatározzuk a legrövidebb görbét. Feltéve, ha egyszerre van konnekció és metrika, és ezek össze vannak kapcsolva: Riemann-sokaság.)

Kovariáns deriválás:

$v(P) \to \overline{v(P)},\ v(Q)$, $\overline{v(P)} = u(Q)$ a $u(Q) - v(Q)$-nak már van értelme.

$$Dv^k := v^k(Q) - u^k(Q) = v^k(x+dx) - \overline{v^k(x)} = \left(v^k(x) + \frac{\partial v^k}{\partial x^m}dx^m\right) - \left(v^k(x) + \delta v^k\right)$$

$$= \frac{\partial v^k}{\partial x^m}dx^m - \left(\Gamma^k_{em} v^e dx^m\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial v^k}{\partial x^m} + \Gamma^k_{em} v^e\right)}_{\nabla_m v^k} dx^m$$

$\nabla_m v^k$ kovariáns derivált

Imerettük: $\boxed{\nabla_m v^k = \partial_m v^k + \Gamma^k_{em} v^e}$

alsóindexesekre:

$$Du_k = du_k - \delta u_k = (\partial_m u_k)\,dx^m - \Gamma^e_{km} u_e dx^m = (\partial_m u_k - \Gamma^e_{km} u_e)\,dx^m$$

$$\boxed{\nabla_m u_k = \partial_m u_k - \Gamma^e_{km} u_e}$$

„A nabla olyan, mint az illebrális konnány törvényhozése: attól függ hogy hol hat."

Tenzor:

$$DT^{ke} = dT^{ke} - \delta T^{ke} = (\partial_m T^{ke})\,dx^m - (-\Gamma^k_{pm} T^{pe} - \Gamma^e_{pm} T^{kp})\,dx^m =$$

$$= \underbrace{(\partial_m T^{ke} + \Gamma^k_{pm} T^{pe} + \Gamma^e_{pm} T^{kp})}_{\nabla_m T^{ke}}\,dx^m$$

$$\nabla_m T_{ke} = \partial_m T_{ke} - \Gamma^p_{km} T_{pe} - \Gamma^p_{em} T_{kp}$$

$$\nabla_m T^k{}_e = \partial_m T^k{}_e + \Gamma^k_{pm} T^p{}_e - \Gamma^p_{em} T^k{}_p$$

A kovariáns derivált invariáns, tehát pl. ha $\nabla_k T^k{}_e - v_e = 0$ minden koordinátarendszerben igaz $\Rightarrow$ így írhatjuk fel a fizikai törvényeket.

Pl. a Maxwellnél a sima deriváltakat átírjuk kovariáns deriváltra.

A gravitációs csatolást nem kell külön beledefiniálni az egyenletekbe, a gravitáció a geometriától függ.

Most kapcsoljuk össze a differenciálást a metrikával!

metrika $g_{ke}(x)$: $ds^2 = g_{ke}(x)\,dx^k dx^e$

$\alpha(P) = g_{ke}(P)\,u^k v^e$ $\quad$ Toljuk át el! $\longrightarrow$ $\bar{\alpha} = g_{ke}(P)\,\bar{u}^k \bar{v}^e$

$\alpha' = g_{ke}(Q)\,\bar{u}^k \bar{v}^e$

Azt akarjuk, hogy $\alpha' = \bar{\alpha}$ amiből: $\underline{g(P) = g(Q)}$

Tehát $\boxed{\nabla_m g_{ke} = 0}$

Levi-Civita-konnekció, amiben a feltétel igaz.

$$\nabla_m g_{kl}(x) = \partial_m g_{kl} - \Gamma^p_{km} g_{pl} - \Gamma^p_{lm} g_{kp} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \left(\text{az } \frac{n^3+n^2}{2} \text{ egyenlet}\right)$$

Ha $\Gamma(x)$ adott, akkor g-re differenciálegyenlet-rendszer (nem lineáris)

Ha $g(x)$ adott, akkor lineáris egyenletrendszer Γ-ra.

$$g_{pl}\Gamma^p_{km} + g_{kp}\Gamma^p_{lm} = \partial_m g_{kl}$$

az $\frac{n^3+n^2}{2}$ egyenlet n^3 komponensre

$\Rightarrow$ a mo. nem egyértelmű

⌈ A Γ^k_{lm} nem tenzorként viselkedik, de a $\Theta^k_{lm} = \Gamma^k_{lm} - \Gamma^k_{ml}$ torzió már igen. ⌋

extra feltétel: legyen a konnexió torziómentes, azaz Γ^k_{lm} szimmetrikus l és m-re.

Ekkor már g és Γ meghatározza egymást.

Ilyen konnexiókkal a Riemann-geometria.

Az egyenlet megoldási módszere 1. (nem valid, de működik):

$$g_{pl}\Gamma^p_{km} = \Gamma_{lkm}$$

$$\underline{\Gamma_{lkm} + \Gamma_{klm} = \partial_m g_{kl}}$$

a megoldás: $\Gamma_{klm} = \frac{1}{2}\left(\partial_l g_{km} + \partial_m g_{kl} - \partial_k g_{lm}\right)$

és $\Gamma^k_{lm} = g^{kp}\Gamma_{plm}$

A távolság. $s = \int ds = \int \sqrt{g_{kl}(x)\,dx^k dx^l}$.

Keressük a legrövidebb távolságot. $x^k(t)$

$$s = \int \underbrace{\sqrt{g_{kl}(x)\,\dot x^k \dot x^l}}_{L(x,\dot x)}\, dt$$

ez invariáns a paraméterezésre

praktikus lesz ezzel játszani

$$L = \sqrt{g_{kl}(x)\,\dot x^k \dot x^l}$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot x^k} = \frac{1}{\sqrt{g_{kl}(x)\,\dot x^k \dot x^l}}\, 2 g_{kl}\dot x^l = \frac{v_k}{L}$$

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g_{kl}(x)\,\dot x^k \dot x^l}}\, \partial_k\left(g_{lm}\dot x^l \dot x^m\right) = \frac{1}{2}\partial_k g_{lm}\,\frac{\dot x^l \dot x^m}{L}$$

$$\dot p_k = \frac{d}{dt}\frac{v_k}{L} = -\frac{v_k}{L^2}\dot L + \frac{1}{L}\dot v_k = *$$

$$(g_{kl}\dot x^l)^{\cdot} = \dot g_{kl}\dot x^l + g_{kl}\ddot x^l = (\partial_m g_{kl})\dot x^m \dot x^l + g_{kl}\ddot x^l$$

$\dot{p}_k = Q_k$

$$-\frac{\dot{L}}{L} v_k + (\partial_m g_{ke})\dot{x}^m \dot{x}^e + g_{ke}\ddot{x}^e = \frac{1}{2}\partial_k g_{em}\dot{x}^e \dot{x}^m \qquad \cdot L$$

Ha $x(t)$ ívhossz szerint van paraméterezve, akkor $L \equiv 1$, tehát $\dot{L} = 0$

$$g_{ke}\ddot{x}^e + (\partial_m g_{ke})\dot{x}^e \dot{x}^m - \frac{1}{2}\partial_k g_{em}\dot{x}^e \dot{x}^m = 0$$

$$g_{ke}\ddot{x}^e + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_m g_{ke} + \partial_e g_{km} - \partial_k g_{em})}_{\Gamma_{kem}}\dot{x}^e \dot{x}^m = 0$$

$$g_{ke}\ddot{x}^e + \Gamma_{kem}\dot{x}^e \dot{x}^m = 0 \qquad / \cdot g^{pk}$$

$$g^{pk} g_{ke}\ddot{x}^e + g^{pk}\Gamma_{kem}\dot{x}^e \dot{x}^m = 0$$

$$\ddot{x}^p + \Gamma^p_{em}\dot{x}^e \dot{x}^m = 0$$ ← Ez lett a geodetikus egyenlet.

(Ha nem ívhossz paraméterezést ~~kaptunk~~ használtunk volna, akkor ennek egy v''-ra [illegible] [illegible], de a lényeg u.a. lenne)

Ugyanezt kaptuk a geodetikus másik defjával (lásd előző fun fact.)

ALTREL I.

7. előadás (09.07.)

Konnekció:

$$\overline{v(P)}^k = u(Q)^k = v^k + \delta v^k$$

$$\delta v^k = -\Gamma^k_{em}(x)\, v^e\, dx^m$$

$$\nabla_k v^e = \partial_k v^e + \Gamma^e_{mk} v^m$$

Ha van metrikus tenzor akkor $\nabla_k g_{em} = 0$ legyen igaz!

Ha $T^k_{em} = \Gamma^k_{em} - \Gamma^k_{me} = 0$ teljesül, akkor a $\nabla g = 0$ feltétel megoldható:

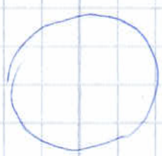
$$\Gamma_{pem} = \frac{1}{2}\left(\partial_e g_{pm} + \partial_m g_{pe} - \partial_p g_{em}\right)$$

Ha adott a $x^k(w)$ görbe, akkor eltolhatjuk a vektort a mentén

$$V^k(w) \to DV^k = \frac{dV^k}{dw}dw + \Gamma^k_{em} V^e \frac{dx^m}{dw} dw = 0$$

$$\frac{DV^k}{dw} = \frac{dV^k(w)}{dw} + \Gamma^k_{em}(x(w))\, V^e(w)\, \dot{x}^m(w) = 0$$ ← ez vár megoldásra.

Nézzünk egy konkrét példát: gömbfelület



$$\underline{r} = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \underline{t}_\vartheta = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \quad \underline{t}_\varphi = \frac{\partial r}{\partial \varphi}$$

$$h_\vartheta = |\underline{t}_\vartheta| = R \qquad h_\varphi = |\underline{t}_\varphi| = R\sin\vartheta$$

$$ds^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

$$g_{ke} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \qquad R := 1$$

$$g_{11} = 1 \qquad g_{22} = \sin^2\vartheta \quad g_{12} = g_{21} = 0 \qquad (x_1 : \vartheta \quad x_2 : \varphi)$$

Az egyetlen nem 0 derivált: $\partial_\vartheta g_{22} = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$

$$g^{11} = 1 \qquad g^{22} = \frac{1}{\sin^2\vartheta}$$

Ez alapján Γ nem 0 elemei: $\Gamma_{122} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$

$\Gamma_{212} = \sin\vartheta\cos\vartheta$

$$\Rightarrow \Gamma^1_{22} = g^{11}\Gamma_{122} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = g^{22}\Gamma_{212} = \mathrm{ctg}\,\vartheta$$

Toljunk el egy vektort a B_p-n átmenő sz. körön

$$x(\varphi,\vartheta) \qquad \varphi = \omega t \qquad \vartheta = \alpha \quad \Rightarrow \quad x^k(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega t \end{pmatrix} \qquad \dot{x}^k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\frac{dV^k}{dt} + \Gamma^k_{em} V^e \dot{x}^m = 0$$ leírva:

$$\frac{dV^1}{dt} + \Gamma^1_{e2} \dot{x}^2 V^e = 0 \Rightarrow \frac{dV^1}{dt} + \Gamma^1_{22} V^2 \dot{x}^2 = 0 \Rightarrow \frac{dV^1}{dt} - \sin\alpha \cos\alpha \, V^2 \omega = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dV^2}{dt} + \Gamma^2_{e2} V^e \dot{x}^2 = 0 \Rightarrow \frac{dV^2}{dt} + \Gamma^2_{12} V^1 \dot{x}^2 = 0 \Rightarrow \frac{dV^2}{dt} + \operatorname{ctg}\alpha \, V^1 \omega = 0 \quad (2)$$

(1-2) a vektor eltolási diffegyenlete
elég szép, ugyanis megoldható.

(1)-t deriválva: $\frac{d^2V^1}{dt^2} - \omega \sin\alpha \cos\alpha \frac{dV^2}{dt} = \frac{d^2V^1}{dt^2} - \omega \sin\alpha\cos\alpha(-\omega \operatorname{ctg}\alpha V^1) =$

$$\ddot{V}^1(t) + \omega^2 \cos^2\alpha \, V^1 = 0 \qquad \Omega := \omega \cos\alpha$$

$$\ddot{V}^1 + \Omega^2 V^1 = 0$$ RKB (régi kedves barátunk)

A KF-et az eredeti vektor alapján írjuk fel.

$$V^1(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

$$V^2(t) = -\Omega A \sin\Omega t + \Omega B \sin\Omega t$$

TFH: $t=0$-kor a vektor felfelé áll: $V^1=0$, $V^2=1$

$$V^1 = \sin\alpha \sin\Omega t$$

$$V^2 = \cos\Omega t$$

A vektor precessziója Ω, az szél. körtől függ (lásd Foucault-inga)

Mi is a geodetikus?
a geodetikus egyenlete: $\ddot{x}^k(w) + \Gamma^k_{em}(x(w)) \dot{x}^e(w) \dot{x}^m(w) = 0$

itt már két KF kell: $x^k(0)$ és $\dot{x}^k(0)$ is kell.

FIZIKAI TÉTEL: Newton I. Magára hagyott test az időtérben geodetikus mozog.

itt maradt valami szabadság, amit másnak hívunk: „affin paraméter"

Meg van valami a gyorsulás. de egy rossz választású koordinátában

Ez eddig még is jó, de a valamire való fizikai törvényeket invariáns módon kell leírni.

Kell egy hatásintegrál, ahhoz egy Lagrange-fv.

Mitől függjön? $L(q, \dot q, t)$ a klasszikusban.

itt vegyük: $L(x^i, \dot x^i, \tau)$, de τ nem függ az invariáns miatt
(függhetne az időfüggés benne van az x^k-ban, de a τ az a vonalon múltjától függ, amit nem akarunk, hogy számítson.)

$S = \int L(x^k, u^k)\,d\tau$ ezt kell variálni

a) első lehetőség
vezessük be:

$$S = \underbrace{\int L\left(x^k(w), u^s = \frac{c\dot x^s}{\sqrt{g_{km}\dot x^k \dot x^m}}\right)\frac{1}{c}\sqrt{g_{kl}(x)\,\dot x^k(w)\,\dot x^l(w)}\,dw}_{\Lambda(x,\dot x)}$$

itt kell majd deriválni x-szel, de mivel már a g is függ x-től itt fog eltérni a speciálistól az extra tag miatt

g deriváltjai az inerciaerők.

b) másik lehetőség: mellékfeltétel

$g_{kl}\dot x^k \dot x^l = c^2$ teljesüljön $\qquad L' = L - \frac{M(\tau)}{2}\left(g_{kl}\dot x^k \dot x^l - c^2\right)$

ekkor már $p'_k = \frac{\partial L'}{\partial u^k} \qquad Q'_k = \frac{\partial L'}{\partial x^k}$

$$p'_k = \frac{\partial L}{\partial u^k} - M g_{kl}u^l = p_k - M u_k$$

$$Q'_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{M}{2}\left(g_{lm}u^l u^m - c^2\right) = Q_k - \frac{M}{2}(\partial_k g_{lm})u^l u^m$$

EL-egyenlet: $\frac{d}{d\tau}p_k = Q_k \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(p_k - M u_k) = Q_k - \frac{M}{2}(\partial_k g_{lm})u^l u^m$

$$\underbrace{\frac{dp_k}{d\tau} - Q_k}_{F_k} = \frac{d}{d\tau}(M u_k) - \frac{M}{2}(\partial_k g_{lm})u^l u^m$$

$$= \frac{d}{d\tau}(M g_{kl} u^l) - \frac{M}{2}(\partial_k g_{lm})u^l u^m =$$

$$= g_{kl}\frac{d}{d\tau}(M u^l) + M u^l \frac{d}{d\tau}g_{kl} - \dots = g_{kl}\frac{d}{d\tau}(M u^l) + M u^l u^m(\partial_m g_{kl}) - \dots$$

azaz $F_k = g_{kl}\frac{d}{d\tau}(M u^l) + \frac{M}{2}\left(\partial_m g_{kl} + \partial_l g_{km} - \partial_k g_{lm}\right)u^l u^m =$

$$= g_{kl}\frac{d}{d\tau}(M u^l) + M\,\Gamma_{klm}u^l u^m \qquad / g^{pk}$$

$$F^p = g^{pk}g_{kl}\frac{d}{d\tau}(M u^l) + M\,g^{pk}\Gamma_{klm}u^l u^m$$

mozgásegyenlet:

$$F^k = \frac{d}{d\tau}(Mu^k) + M\Gamma^k_{em} u^e u^m \Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\tau}(Mu^k) = F^k - M\Gamma^k_{em} u^e u^m}$$

Ez a test mozgásegyenlete

Newtoninál ismét ~~$\frac{dM}{d\tau}u^k + M\frac{du^k}{d\tau} = K^k$~~ (kell?)

~~$\frac{dM}{d\tau}u^k u_k + M u_k \frac{du^k}{d\tau} = K u_k$~~ Ez nagyon egy fix (kiszi)

helyesen: $Mu^k = p^k$

$$\frac{d}{d\tau}p^k = F^k - \Gamma^k_{em} p^e u^m$$ ruhadrágáson enni ez 0

$$\frac{d}{d\tau}p^k + \Gamma^k_{em} p^e u^m = F^k \Rightarrow \frac{Dp^k}{d\tau} = F^k$$ ← ez az általános Newton!

Most jön Newtoninál:

$$\frac{D}{d\tau}(Mu^k) = F^k$$

$$\frac{DM}{d\tau}u^k + M\frac{Du^k}{d\tau} = F^k \quad / \cdot u_k$$

$$\frac{DM}{d\tau}u^k u_k + M\underbrace{\frac{Du^k}{d\tau}u_k}_{0} = F^k u_k \Rightarrow \frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2}F^k u_k$$

visszaírva: $\left(\frac{1}{c^2}F_e u^e\right)u^k + M\frac{Du^k}{d\tau} = F^k$

$$M\frac{Du^k}{d\tau} = \left(\delta^k_e - \frac{1}{c^2}u^k u_e\right)F^e$$

Ezek u. a. mint korább. DE mi a tömeg?

u. a. Boltzmann-től ei lehet mutatni

$$S' = \int\left[L - \frac{M}{2}(g_{ke}u^k u^e - c^2)\right]d\tau$$

$$B' = \frac{\partial L'}{\partial u^k}u^k - L' = (p_k - Mu_k)u^k - L + \frac{M}{2}(g_{ke}u^k u^e - c^2)$$

$$p_k u^k - L - Mu_k u^k = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{c^2}(p^k u_k - L) = \frac{B}{c^2}$$

Általános Lagrange-formalizmus általában:

$L(x,u)$ adott. Ebből: $p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k}$ $Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k}$ $F_k = \frac{d}{d\tau}p_k - Q_k$

$$B := p_k u^k - L \qquad M = \frac{B}{c^2}$$

A mozgásegyenlet $\frac{D}{d\tau}(Mu^k) = F^k$

ennek ekvivalens felírása
$$\begin{cases} M\frac{Du^k}{d\tau} = \left(\delta^k_e - \frac{u^k u_e}{c^2}\right)F^e \\ \frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2}F_k u^k \end{cases}$$

A különbség speciálisan képest, hogy a $\frac{D}{d\tau}$-ban benne vannak az inercia-erők.

Speciális esetek

⓪ Szabad részecske

általánosítás: a Lagrange u.a. mint speciálisan

$S=-mc^2\int d\tau \qquad L=-mc^2 \quad \Rightarrow \quad p_k=0 \quad Q_k=0 \quad F_k=0$

$B=0-L=mc^2 \quad \Rightarrow \quad M=m$

mozgásegyenlet: $\frac{D}{d\tau}(m u^k)=0$

$\frac{Du^k}{d\tau}=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}^k+\Gamma^k_{em}\dot{x}^e\dot{x}^m=0$ ez a geodetikus egyenlet

Tényleg, hiszen variációs számításból, hogy a szabad részecske geodetikus mozog.

① Skalár mező $\phi(x)$

$L=-mc^2-g\,\phi(x)$

$p_k=\frac{\partial L}{\partial u^k}=0 \qquad Q_k=\frac{\partial L}{\partial x^k}=-g\,\partial_k\phi \qquad F_k=g\,\partial_k\phi$

$B=mc^2+g\,\phi(x) \qquad M=m+\frac{g}{c^2}\phi(x)$

A mozgásegyenlet: $\left(m+\frac{g}{c^2}\phi\right)\left(\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\Gamma^k_{em}\frac{dx^e}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}\right)=\left(\delta^k_e-\frac{u^k u_e}{c^2}\right)g\,\partial^e\phi$

(1a) $\phi(x)$, $\mu(\phi)$ de a Lagrange $L=-c^2\mu(\phi)$ (ez is ekvivalens leírás)

$p_k=0 \quad Q_k=-c^2\partial_k\mu \qquad F_k=c^2\partial_k\mu$

$B=c^2\mu \qquad M=\mu(\phi)$

mozgásegyenlet: $\mu(\phi)\,\frac{Du^k}{d\tau}=\left(\delta^k_e-\frac{u^k u_e}{c^2}\right)\partial^e\mu$

② vektormező $A_k(x)$

levezetés után $F_k=\frac{e}{c}\left(\partial_k A_e-\partial_e A_k\right)u^e=\frac{e}{c}F_{ke}u^e$

$B=mc^2 \qquad M=m$

mozgásegyenlet $m\frac{Du^k}{d\tau}=\frac{e}{c}F_{ke}u^e$

ALTREL I.
8. előadás (05.14.)

konnekszió:

$v(P) = u(Q)$

$u^k = v^k - \Gamma^k_{em} v^e dx^m$ — ez olyan alakú, mint egy tenzoregyenlet, de eddig nem bizonyítottuk, hogy Γ tenzor

~~Most~~ Nézzünk a helyvektor transzformációt

$x'(x) \longleftrightarrow x(x')$

$dx^{k'} = \frac{dx^{k'}}{dx^e} dx^e$

$A^k{}_e(x)$ ~~$dx^e = B^e ...$~~ inverz: $B_k{}^e(x)$

Tenzor esetén: $T'^k{}_{em} = A^k{}_p B_e{}^q B_m{}^r T^p{}_{qr}$

nézzük egyenletet: $du'^k = A^k{}_e u^e + A^k{}_e(x+dx) u^e = \left(A^k{}_e(x) + \frac{\partial}{\partial x^s} A^k{}_e(x) dx^s\right) u^e =$

$= A^k{}_e(x) u^e + (\ldots) dx^m$

ez alapján: $\Gamma'^k_{em} = A^k{}_p B_e{}^q B_m{}^r \Gamma^p_{qs} - B^k{}_s \partial_m A^s{}_e$

tehát Γ nem tenzorként transzformálódik

a parc deriváltak is furcsán viselkednek:

$v^k(x)$ deriváltja $\partial_e v^k$

ha transzformáljuk: $\partial'_e v'^k = \frac{\partial}{\partial x'^e}(A^e{}_m v^k) = B_e{}^s \frac{\partial}{\partial x^s}(A^e{}_m v^k)$

Tehát: $\nabla_m v^k = \partial_m v^k + \Gamma^k_{em} v^e$

$\Rightarrow$ ∇-ra továbbra is érvényes a Leibnitz-szabály, de a Young tétel nem!

$\nabla_k \nabla_e v^m = R^m{}_{kes} v^s$

Riemann-féle görbületi tenzor, k és e nem mind les is a görbületet egyik def.-ja

Vegyünk egy vektorteret, és rajta n db vektormezőt, amik minden pontban a bázisvektort rendelik

$e^s_{(e)} := \delta^s_e$ (bázismező)

Ezek deriváltjai: $\nabla_m e^k{}_{(e)} = \partial_m e^k_{(e)} + \Gamma^k_{pm} e^p_{(e)} = \partial_m \delta^k_e + \Gamma^k_{pm} \delta^p_e = \Gamma^k_{em}$

Így Γ szemléletes jelentése: Az e. bázismező k. komponense hogyan változik az m. irányban.

1.

Van egy geodetikus pálya: x^k. paraméterezés: $x^k(w)$ $\qquad \dot x^k = \frac{dx^k}{dw} \qquad u^k = \frac{c\,\dot x^k}{\sqrt{g_{pq}\dot x^p \dot x^q}}$

$L(x,u)$ adott

$$S = \int L\, d\tau = \int \Big[\underbrace{L\Big(x, u = c\frac{\dot x}{\sqrt{g\dot x\dot x}}\Big) \frac{1}{c}\sqrt{g\dot x\dot x}}_{\Lambda(x,\dot x)} \Big] dw$$

Legyen $C^k := \ddot x^k + \Gamma^k_{em}\dot x^e \dot x^m = \frac{D\dot x}{dw}$ (formális gyorsulás)

Ha végigszámoljuk az EL-egyenletet:

$\left(\delta^k_e - \frac{u^k u_e}{c^2}\right) C^e = 0 \Rightarrow$ a formális gyorsulás mindig ph. az u sebességgel

Tehát: $C^0 = \lambda u^0$ és $C^\alpha = \lambda u^\alpha$

mivel u^0 sose 0, ezért $\lambda = \frac{C^0}{u^0} \Rightarrow C^\alpha = \frac{C^0}{u^0}u^\alpha \Rightarrow \underline{C^\alpha u^0 = C^0 u^\alpha}$

↑ Ez a mozgásegyenlet

Írjuk ki részletesen:

$$(\ddot x^\alpha + \Gamma^\alpha_{em}\dot x^e \dot x^m)\dot x^0 = (\ddot x^0 + \Gamma^0_{em}\dot x^e \dot x^m)\dot x^\alpha$$

legyen $w = t = x^0 \Rightarrow \dot x^0 = \frac{dw}{dw} = 1 \Rightarrow \ddot x^0 = 0$

ezzel: $\ddot x^\alpha + \Gamma^\alpha_{em}\dot x^e \dot x^m = \Gamma^0_{em}\dot x^e \dot x^m \dot x^\alpha$

$$\ddot x^\alpha + \Gamma^\alpha_{00} + 2\Gamma^\alpha_{0\beta}\dot x^\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot x^\beta \dot x^\gamma = \dot x^\alpha\left(\Gamma^0_{00} + 2\Gamma^0_{0\beta}\dot x^\beta + \Gamma^0_{\beta\gamma}\dot x^\beta\dot x^\gamma\right)$$

$$\underline{\ddot x^\alpha = -\Gamma^\alpha_{00} + \dot x^\beta\left(\Gamma^0_{00}\delta^\alpha_\beta - 2\Gamma^\alpha_{0\beta}\right) + \dot x^\beta \dot x^\gamma\left(2\Gamma^0_{0\beta}\delta^\alpha_\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right) + \Gamma^0_{\beta\gamma}\dot x^\alpha \dot x^\beta \dot x^\gamma}$$

Ez a szabadrészecske grav. gyorsulása

Ez függ a sebességtől vagy sebességre, tehát kis sebességekre visszakapjuk a Newton-féle tv.-t $\Rightarrow$ a Γ^α_{00} lesz a földön a 9,81, a régi kedves barátunk.

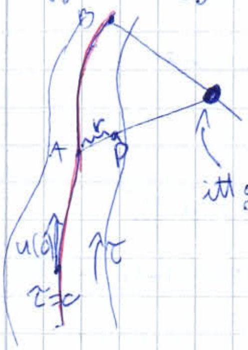
Kérdés: Le lehet-e írni az áltrelt a klasszikus fizikán belül?

Azaz: Létezik-e olyan $L = K - V = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}(x,t)\dot x^\alpha \dot x^\beta - V(x)$ fv, amiben az EL-egyenlet az előző formula?

Nem, mert a legáltalánosabb esetben is max 2. rendű tagot kaphatnánk, ebben viszont van 3. rendű.

Probléma: Vannak lokális inerciarendszerek, amikben a speciel érvényes.
De hogy tudunk egy ilyet megkonstruálni? nem triviális

Vegyünk egy időszerű geodetikust (ezen megy az űrhajó)!



Bázis: $e^k_{(0)} = \frac{1}{c} u^k(0)$

$e^k_{(\alpha)}$: vegyünk fel az előzőre 3 merőleges, térszerű vektort (tetszőleges)

ekkor $g_{pq} = e^p_{(l)} e^q_{(m)} = \eta_{lm}$ ahol $\eta_{lm} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Alkalmazzuk a parallel transzportot: $T(\tau)\, e_{(0)} = \frac{1}{c} u(\tau)$ mert a geodetikus mentén az érintő mindig érintő.

Továbbá $T(\tau)\, e_{(\alpha)} \perp T(\tau)\, e_{(0)}$ hisz így definiáltuk a parallel eltolást

Legyen $\underline{n}$ egységvektor a térben: $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix}$ ez egy térbeli irány

Indítsunk el egy térbeli geodetikust $\underline{n}$ irányban (ez egyértelmű), ezzel definiáltuk a távolságot

Ha pl. A pontból elindítjuk n irányban a geodetikust, és r távolságot megyünk, akkor P pontban vagyunk: $P = \begin{pmatrix} x'^0 = c\tau \\ x'^1 = n_1 r \\ x'^2 = n_2 r \\ x'^3 = n_3 r \end{pmatrix}$

Ez csak véges tartományban tehető meg, mert ~~ahol~~ ahol vmi jelentős görbület van, ott ~~ahol~~ a különböző pontból indított geodetikusok keresztezhetik egymást, csak a világvonal menti szűk cső az inerciarendszer (miniatűr térképes hasonlat)

A geodetikus körüli tér így leparaméterezhető, és mivel a Γ a geodetikus mentén 0,* ezért a kis környezetében érvényes a speciel.

*bizonyítás: geodetikus egyenlet: $\ddot{x}^k(r) + \Gamma^k_{lm}\dot{x}^l \dot{x}^m = 0$

• ha térszerű: $\ddot{x}^k + \Gamma^k_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0$

Mivel $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = n^\alpha$ tehát $0 = \Gamma^k_{\beta\gamma} n^\beta n^\gamma$ $\forall n$-re csak akkor ha $\Gamma^k_{\beta\gamma} = 0$

• ha időszerű, ugyanígy.

Tehát a geodetikus mentén tényleg nincs se grav gyorsulás, se forgás: Szabad esés

Köv. lépés: gyorsulás, forgás nélkül

$F_\tau u(0) = u(\tau)$ (I) ahol F_τ olyan, hogy $F_\tau(v(0)) F_\tau(w(0)) = v(0)\, w(0)$ (II)

és ha $a=0$ akkor $F_\tau = T(\tau)$ (III)

az ilyen tulajdonságú transzf. egyértelmű: Fermi-Walker-transzport

$$\frac{DV^\mu}{d\tau} = \frac{1}{c}\left(a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu\right) V_\nu \qquad \text{ahol } a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau}$$

a (III) teljesül, mert ha $a=0$, akkor a parallel transzport def-je

a (I) teljesül, ~~mert~~ tehát a vektor elforgatódik a geodetikus mentén

a (II) is belátható, ha négyzetre alakítjuk.

Mi van, ha deriváljuk: $\dfrac{dV^\mu(\tau)}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu m} V^\nu u^m =$ a fent $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a Γ képviseli a gravitációt, a F-W transzf. a többi inerciaerőt.