# GYENGE KH.

## 1. tétel: Történelmi áttekintés és alapfogalmak

1896: radioaktivitás felfedezése (Becquerel)

1899: 3-féle sugárzás elkülönítése (Rutherford)
$\hookrightarrow \alpha, \beta, \gamma$

1900: $\beta = e^-$ megmutatása (Becquerel)

1914: $\beta$-spektrum folytonossága (Chadwick)

1927: $^{210}_{83}Bi \to ^{210}_{84}Po$ reakció tanulmányozása

$\Rightarrow$ A teljes energia nem marad meg (Ellis, Wooster)

1930: Pauli javasolja a neutrínó létezését *

1932: neutron felfedezése (Chadwick) $\Rightarrow$ A $\beta$-bomlás folyamata
$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$

1933–34: Fermi-féle $\beta$-bomlás elmélete

QED-ben a proton és a tér KH-ja az alábbi: $H_{EM} = e\int d^3\underline{x}\; \bar{p}(x)\gamma^\mu p(x) A_\mu(x)$

Fermi ötlete:
- $A_\mu$ vektorpotenciál helyett képezünk a $e$ és $\bar{\nu}$-ből egy KHató teret
- Mivel a $n$ átalakul $p$-vé, a $\gamma^\mu$ egyik oldalán az szerepel.

$$\Rightarrow \quad H_\beta^{Fermi} = G\int d^3\underline{x}\; \left(\bar{p}(x)\gamma^\mu n(x)\right)\left(\bar{e}(x)\gamma_\mu \nu(x)\right) + h.c.$$

$G$: Fermi-konstans, akkori eredmények alapján:
$G \simeq 0{,}3\cdot 10^{-5}\ GeV^{-2}$ (ma $G \simeq 1{,}1\cdot 10^{-5}\ GeV^{-2}$)

1936: Gamow általánosítja Fermi elméletét:
Az $e$ és a $\nu$ együtt lehet skalár, vektor, tenzor, stb...
$\bar{e}(x) M \nu(x)$ alak $M = \mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$

A $p$ és $n$ szintén.
A végső $\mathcal{L}$ a Lorentz-trafóra lehet igazi, vagy pszeudo. Ez alapján:

$$H_\beta^{ált} = -\int d^3\underline{x}\; \mathcal{L}_\beta^{int}(x)$$

$$\mathcal{L}_\beta^{i}(x) = -\sum_{j=1}^{5}\Big[g_j\left(\bar{p}(x)M_j n(x)\right)\left(\bar{e}(x)M^j \nu(x)\right) + g_j'\left(\bar{p}(x)M_j n(x)\right)\left(\bar{e}(x)M^j\gamma^5 \nu(x)\right) + h.c.\Big]$$

$T$ inv esetén $g_j, g_j' \in \mathbb{R}$; $P$ inv esetén $g_j' = 0$.

*: A $\nu$ létezését $\underbrace{\phantom{xx}}_{\text{Reines, Cowan}}$ igazolta 1956-ban $\bar{\nu} + p \to n + e^+$ reakcióval.

1956: paritássértés felfedezése (Lee és Yang)

Volt 2 részecske: $\tau^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$ és $\theta^+ \to \pi^+\pi^0$

az alapján a paritásuk $-1$ és $+1$, de tömegük és élettartamuk megegyezett.

Lee és Yang megmutatták, hogy a két részecske u.a. (ma $K^+$ mezon)

$\Rightarrow g_0' \neq 0$, sikerült a $\beta$-bomlás $H$-ját V és A-árammal felírni:

$$\mathcal{L}_\beta(x) = -\frac{G_\beta}{\sqrt{2}}\left[\bar{p}(x)\gamma^\mu\left(1-\frac{g_A}{g_V}\gamma_5\right)n(x)\right]\left[\bar{e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu(x)\right] + h.c.$$

$G_\beta = 1{,}1\cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$, $g_A/g_V = 1{,}255$.

itt a $(1-\gamma_5)\nu(x)$ rész azt jelenti, hogy a neutrínóknak csak a balkezes része illetve a jobbkezes antirész érvényesül.

1937: $\mu^-$ felfedezése (azt hitték, hogy a Yukawa-mezon)
1947: $\mu^-$ bomlásának felfedezése: $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ (A kétfajta $\nu$ kimutatása 1962, Danby)

A folyamat Lagrange-ja:

$$\mathcal{L}_\mu(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\left[\bar{\mu}(x)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_\mu(x)\right]\left[\bar{e}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(x)\right] + h.c.$$

A bomlások ideje elég hasonló: $G_\beta/G_\mu \approx 0{,}98$

Ami érdekes, mert a $\mu^-$-ban és a hadronokban semmi közös.
Ezen kívül egy csomó más hadront is felfedeztek az 50-60-as években, amik hasonlóan bomlottak.

1958: megmaradó vektoráram hipotézis (CVC), Feynman.

„Nem kell minden hadronhoz új tér, hanem a reakcióban szereplő kvantumszám számít"

A kvarkmodell ismeretében ez nem meglepő $\Rightarrow$ a kvarkok vesznek részt a reakcióban nem a hadron.

pl.: $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ helyett $\begin{matrix} d \\ d \\ u \end{matrix} \to \begin{matrix} u \\ d \\ u \end{matrix} + e^- + \bar{\nu}_e$

A $\mathcal{L}_\beta$-ban is $\bar{u}(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)d(x)$ szerepel, és ugyanúgy csatolódik $\mu$-hoz és $e$-hez is $\Rightarrow$ $\mu$-$e$ univerzalitás.

1963: Cabibbo. A gyenge kH-ban megváltozhat a furcsaság. Hogy?

pl.: $K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

módosítsuk $d$-t: $d \to d' = \cos\vartheta_c\, d + \sin\vartheta_c\, s$

$\vartheta_c$: Cabibbo-szög

Az új Lagrange:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\,\bar{u}(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\left[\cos\vartheta_c\, d(x) + \sin\vartheta_c\, s(x)\right]\cdot\left[\bar{e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e(x) + \bar{\mu}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu(x)\right] + h.c.$$

Ez magyarázza a $\beta$ és $\mu^-$-bomlás különbségét is:

$$\frac{G_\beta}{G_\mu} = \cos\vartheta_c \approx 0{,}98$$

A $K^+$ mezon bomlásából $\sin\vartheta_c \approx 0{,}21$ $\Big\}$ $\cos^2\vartheta_c + \sin^2\vartheta_c \simeq 1$ ✓

1973: elasztikus neutrínószórás: $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$

$\nu q \to \nu q$

nincs töltéscsere, de van csatolás

$\Rightarrow$ van semleges áramú gyenge KH is.

Mezonok: Fermi-nál alapból azt feltételezte, hogy a gyenge KH-t is Yukawa-féle mezonokkal terjed.

$$V_Y(\underline{r}) = \frac{g^2}{4\pi r} e^{-mr}$$

ha $m \to 0$ $\quad V_Y(r) \to \dfrac{g^2}{4\pi r}$ $\quad$ pl.: Coulomb-pot.

ha $m \to \infty$ $\quad V_Y(\underline{r}) \to \dfrac{g^2}{m^2}\delta^{(3)}(\underline{r})$

A gyenge KH-ban pont ilyen pontszerű csatolást látunk.

$$\Rightarrow \quad G = \frac{g^2}{m_W^2} \qquad \text{feltéve, hogy } g \approx e$$

$$m_W^2 = \frac{e^2}{G} \approx (90\,\mathrm{GeV})^2$$

A valóságban $m_W = 80\,\mathrm{GeV}$ ami nem olyan rossz.

# 2. tétel: Megmaradó kvantumszámok és kiválasztási szabályok

Az egyesített elektrogyenge elmélet kisenergiás közelítésében a $W$ és $Z$ bozonok cseréjével járó folyamatok kezelhetők úgy, mint pontszerű 4-fermion kölcsönhatás. Ekkor a Lagrange felbontható töltött és semleges áramú folyamatok összegére, amit külön tárgyalunk.

$$\mathcal{L}_W^{int} = \mathcal{L}_{W,ch}^{int} + \mathcal{L}_{W,0}^{int} \qquad \mathcal{L}_{W,ch}^{int} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^{\alpha\dagger} J_\alpha$$

$$\mathcal{L}_{W,0}^{int} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J_0^\alpha J_{0\alpha}$$

• töltött áram: felbontható leptonikus és hadronikus áramra:

$$J^\alpha = J_l^\alpha + J_h^\alpha \qquad J_l^\alpha = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}\, O_L^\alpha \nu_l$$

$$J_h^\alpha = \bar{d}' O_L^\alpha u + \bar{s}' O_L^\alpha c + \bar{b}' O_L^\alpha t$$

mindenhol balkezes csatolódás: $O_L^\alpha = \gamma^\alpha(1-\gamma^5)$

és a kvarkok nem tisztán csatolódnak egymáshoz, ezért a negatív töltésű kvarkokat keverjük:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

$V_{CKM}$: Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-mátrix

[2 kvark esetén Cabibbo-mátrix: $V_C = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_c & \sin\vartheta_c \\ -\sin\vartheta_c & \cos\vartheta_c \end{pmatrix}$]

• semleges áram: itt nincs flavor-változás ⇒ minden fermion magával csatolódik

DE van jobbkezes csatolódás:

$$J_0^\alpha = \sum_f \left( g_f^L \bar{f} O_L^\alpha f + g_f^R \bar{f} O_R^\alpha f \right) \qquad f = e,\mu,\tau,\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau,u,d,c,s,b,t$$

$$O_L^\alpha = \gamma^\alpha(1-\gamma^5)$$

$$O_R^\alpha = \gamma^\alpha(1+\gamma^5)$$

A csatolódások:

| $f$ | $g_f^L$ | $g_f^R$ |
|---|---|---|
| $\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $e,\mu,\tau$ | $-\frac{1}{2}+\xi$ | $\xi$ |
| $u,c,t$ | $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\xi$ | $-\frac{2}{3}\xi$ |
| $d,s,b$ | $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\xi$ | $\frac{1}{3}\xi$ |

ahol $\xi = \sin^2\vartheta_W$

$\vartheta_W$: Weinberg-szög.

Emlékeztető: Szabad fermion tér

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( b_s(p) u_s(p) e^{-ipx} + d_s(p)^\dagger v_s(p) e^{ipx} \right)$$

ahol: • $b_s(p)$ és $d_s(p)$ az $s$ spinű $p$ impulzusú fermion és antifermion eltüntető operátorai

• $u_s(p)$ és $v_s(p)$ a Dirac-egyenlet + és − energiájú megoldásai a bispinor térben:

$$(\not{p} - m) u_s(p) = 0 \quad ; \quad (\not{p} + m) v_s(p) = 0$$

normálás: $\bar{u}_{s'}(p) u_s(p) = 2m\delta_{s's}$

$\bar{v}_{s'}(p) v_s(p) = -2m\delta_{s's}$

kiralitás: $\psi$ felbontható az alábbi m.:

$\psi = \psi_+ + \psi_-$ ahol $\gamma^5 \psi_\pm = \pm \psi_\pm$

$P_\pm := \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \Rightarrow \psi_\pm = P_\pm \psi$

Mivel $O_L^\alpha$ $P_-$-t tartalmazza, a − kiralitású fermionok fognak töltötten csatolódni.

neutrínók: tömegtelenekre a kiralitás és a helicitás u.a.

A Dirac-egyenlet: $i\not{\partial}\psi = 0$ de mivel $[\gamma^5, \not{\partial}] = 0 \Rightarrow i\not{\partial}\psi_\pm = 0$

$\Rightarrow$ jobb- és balkezes 2 külön-külön megoldás.

• pozitív energiás m.o.: $u(p) = \sqrt{|p|} \begin{pmatrix} \xi \\ \hat{p}\cdot\vec{\sigma}\, \xi \end{pmatrix}$

ahol $\xi^\dagger \xi = 1$ és $\bar{u}\gamma^0 u = 2|p|$

$\Rightarrow \hat{p}\vec{\sigma}\, \xi_{R,L} = \pm \xi_{R,L}$

$\Rightarrow u_{R,L}(p) = \sqrt{|p|} \begin{pmatrix} \xi_{R,L} \\ \pm \xi_{R,L} \end{pmatrix}$, $\gamma^5 u_{R,L} = \pm u_{R,L}(p)$

• negatív energiás m.o.: $v(p) = \sqrt{|p|} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \hat{p}\vec{\sigma}\, \tilde{\xi} \end{pmatrix}$

ahol $\bar{v}\gamma^0 v = -2|p|$

$\Rightarrow \hat{p}\hat{\sigma}\, \tilde{\xi}_{R,L} = \mp \tilde{\xi}_{R,L}$

$\Rightarrow v_{R,L}(p) = \sqrt{|p|} \begin{pmatrix} \xi_{R,L} \\ \mp \xi_{R,L} \end{pmatrix}$, $\gamma^5 v_{R,L} = \mp v_{R,L}(p)$

A királis projektorok kiválasztják a megfelelő neutrínó helicitás-állapotát:

$$P_- \nu(x) = \frac{1-\gamma^5}{2} \int d\Omega_p \sum_{h=R,L} \left( b_h(p) u_h(p) e^{-ipx} + d_h(p)^\dagger v_h(p) e^{ipx} \right) =$$

$$= \int d\Omega_p \left( b_L(p) u(p) e^{-ipx} + d_R(p)^\dagger v_R(p) e^{ipx} \right)$$

A $P_- \nu(x)$ és $\bar{\nu}(x) P_+$ operátor balkezes részecskét és jobbkezes antirészecskét kelteni.

A $P_+ \nu(x)$ és $\bar{\nu} P_-$ fordítva. Mivel ez utóbbi a $\mathcal{L}$-ben sehol nem szerepel, ezért ilyen neutrínók nem vesznek részt a KH-ban.

P, C és CP szimmetria.

Vektoráram: $V^\alpha = \bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$. Axiálvektoráram: $A^\alpha = \bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^5\psi$

Ezek trafója: $V^\alpha \xrightarrow{P} P^\alpha_{\ \beta} V^\beta$ $\qquad V^\alpha \xrightarrow{C} -V^{\alpha +}$

$A^\alpha \xrightarrow{P} -P^\alpha_{\ \beta} A^\beta$ $\qquad A^\alpha \xrightarrow{C} A^{\alpha +}$

ahol $P^\alpha_{\ \beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Mivel a Lagrange V−A struktúrája az alábbi:

$$\mathcal{L} = (V^{\alpha +} - A^{\alpha +})(V_\alpha - A_\alpha)$$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{P} (V^\alpha + A^{\alpha +})(V_\alpha + A_\alpha)$$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{C} (V^\alpha + A^\alpha)(V_\alpha + A_\alpha)$$ egyik sem szimmetria.

A CP még lehet...

Kvarkok esetén: $J_h^\alpha = \sum_{q_1=u,c,t} \sum_{q_2=d,s,b} (V_{CKM})_{q_1 q_2} (V^\alpha_{q_1 q_2} - A^\alpha_{q_1 q_2}) =: J_h^\alpha (V_{CKM})$

$$J_h^\alpha \xrightarrow{CP} -P^\alpha_{\ \beta} \sum_{q_1}\sum_{q_2} (V_{CKM})_{q_1 q_2} (V^\beta_{q_1 q_2} - A^\beta_{q_1 q_2})^+ = -P^\alpha_{\ \beta} J_h^\beta (V^*_{CKM})^+$$

ha $V_{CKM}$ valós, akkor ez szimmetria. 3 kvark esetén a $V_C$ valós, ezért ebben a közelítésben ez valóban szimmetria. Egyébként nem.

A leptonoknál ez a tömegtelen $\nu$-k miatt nem jó. ☹

Mivel a gyenge KH Poincaré-invariáns, ezért a CPT jó szimmetria (antiunitér)

$\Rightarrow m_{\bar{a}} = m_a$

Kvantumszámok.

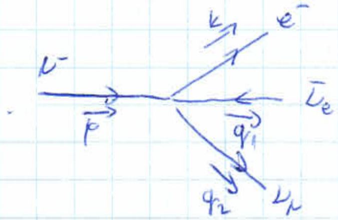
Mivel a töltött áramú folyamatok keverik a flavort, ezért a kvarkcsalád nem megmaradó kvantumszám. Leptoncsaládok nem keverednek, így az megmarad.

DE a barion szám és lepton szám megmarad.

A kvarkcsaládok explicit keverednek a $V_{CKM}$ mátrixszal, de a leptonoknál ilyet nem láttunk, ezért az jó közelítő szimmetria. Mára viszont tudjuk, hogy a leptoncsaládok keverednek bizonyos szinten. (neutrínó oszcilláció)

## 3. tétel: Müon bomlás

$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$




A gráf járuléka: $M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\left(\bar{u}^{(\nu_\mu)}(q_2)\, O_L^\alpha\, u^{(\mu)}(p,s_\mu)\right)\left(\bar{u}^{(e)}(k,s_e)\, O_{L\alpha}\, v^{(\nu_e)}(q_1)\right)$

Ennek a négyzete kell:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2}\left(\bar{u}^{(\nu_\mu)}(q_2)\, O_L^\alpha\, u^{(\mu)}(p,s_\mu)\right)_{ij}\left(\bar{u}^{(e)}(k,s_e)\, O_{L\alpha}\, v^{(\nu_e)}(q_1)\right)_{ke} \times$$
$$\times \left(\bar{u}^{(\mu)}(p,s_\mu)\, O_L^\beta\, u^{(\nu_\mu)}(q_2)\right)_{ji}\left(\bar{v}^{(\nu_e)}\, O_{L\beta}\, u^{(e)}(k,s_e)\right)_{ek} =$$
$$= \frac{G^2}{2}\, Tr\left(u^{(\nu_\mu)}(q_2)\,\bar{u}^{(\nu_\mu)}(q_2)\, O_L^\alpha\, u^{(\mu)}(p,s_\mu)\,\bar{u}^{(\mu)}(p,s_\mu)\, O_L^\beta\right) \times$$
$$\times\, Tr\left(u^{(e)}(k,s_e)\,\bar{u}^{(e)}(k,s_e)\, O_{L\alpha}\, v^{(\nu_e)}(q_1)\,\bar{v}^{(\nu_e)}\, O_{L\beta}\, u^{(e)}(k,s_e)\right)$$

a) polarizálatlan müon, elektron spint nem mérünk.

Kihasználva, hogy $\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m$, $\sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m$

$$\langle\langle |M_{fi}|^2\rangle\rangle = \sum_{s_e, s_\mu} |M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2}\, Tr\left(\not{q}_2\, O_L^\alpha\, (\not{p} + m_\mu)\, O_L^\beta\right) Tr\left((\not{k} + m_e)\, O_{L\alpha}\, \not{q}_1\, O_{L\beta}\right)$$

Az m-t tartalmazó tagok páratlan db $\gamma^\mu$ mátrix trace-ét mutatnák ki, ami 0, így azokat elhagyjuk

Kihasználva, hogy $O_L^\alpha = \gamma^\alpha(1-\gamma^5)$ és $(1-\gamma^5)^2 = 2(1-\gamma^5)$

$$\langle\langle |M_{fi}|^2\rangle\rangle = \frac{G^2}{2}\, Tr\left(\not{q}_2\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\not{p}\gamma^\beta(1-\gamma^5)\right) Tr\left(\not{k}\gamma_\alpha(1-\gamma^5)\not{q}_1\gamma_\beta(1-\gamma^5)\right) =$$
$$= 2G^2\, Tr\left(\not{q}_2\gamma^\alpha\not{p}\gamma^\beta(1-\gamma^5)\right) Tr\left(\not{k}\gamma_\alpha\not{q}_1\gamma_\beta(1-\gamma^5)\right) =$$ kihasználva mindenféle Klifford-algebrai azonosságot

$$= 128\, G^2\, (p q_1)(k q_2)$$

Mivel $s_\mu$-ra csak átlagolunk, ezért osztani kell $\frac{1}{2S+1} = \frac{1}{2}$-vel:

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\mu}\,\frac{\langle\langle |M_{fi}|^2\rangle\rangle}{2}\,(2\pi)^4\,\delta(p-k-q_1-q_2)\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\,\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3 2\omega_1}\,\frac{d^3q_2}{(2\pi)^3 2\omega_2}$$

ahol $E = \sqrt{|\underline{k}|^2 + m_e^2}$ és $\omega_i = |\underline{q}_i|$

Mivel $\nu$-ket nem mérjük, ezért $q_1$ és $q_2$-re integrálunk:

$$d\Gamma = \frac{G^2}{8 m_\mu \pi^5}\,\frac{d^3k}{E}\, p^\alpha k^\beta \underbrace{\int \frac{d^3q_1}{\omega_1}\int\frac{d^3q_2}{\omega_2}\,\delta^{(4)}(p-k-q_1-q_2)\, q_{1\alpha}\, q_{2\beta}}_{I_{\alpha\beta}(p-k)}$$

Tudjuk, hogy $I_{\alpha\beta}(q)$ egy szimmetrikus tenzor 2-dimenziós, tehát felírható

$$I_{\alpha\beta}(q) = A q^2 \eta_{\alpha\beta} + B q_\alpha q_\beta \quad \text{alakban.}$$

Ugyanakkor a $\delta(q-q_1-q_2)$ miatt $q^2 = 2(q_1 q_2)$. Ez alapján:

$$\eta^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}(q) = q^2(4A+B) = \int\frac{d^3q_1}{\omega_1}\int\frac{d^3q_2}{\omega_2}\delta^{(4)}(q-q_1-q_2)\,(q_1q_2) = \frac{q^2}{2}C$$

$$q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta}(q) = (q^2)^2(A+B) = \int\frac{d^3q_1}{\omega_1}\int\frac{d^3q_2}{\omega_2}\delta^{(4)}(q-q_1-q_2)\,(q_1q_2)^2 = \frac{(q^2)^2}{4}C$$

A és B kifejezhető C-vel: $A = \frac{C}{12}$, $B = \frac{C}{6}$, C pedig

$$C = \int\frac{d^3q_1}{\omega_1}\int\frac{d^3q_2}{\omega_2}\delta^{(4)}(q-q_1-q_2) = \quad q \text{ időszerű, ezért legyen } q=(q^0, \underline{0})$$

$$= \int\frac{d^3q_1}{\omega_1^2}\delta(q^0-2\omega_1) = \frac{1}{2}\int d\Omega\int\frac{d\omega_1\,\omega_1^2}{\omega_1^2}\delta\left(\tfrac{1}{2}q^0-\omega_1\right) = 2\pi.$$

$$\Rightarrow I_{\alpha\beta}(q) = \frac{\pi}{6}\left(q^2\eta_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta\right)$$

$$d\Gamma = \frac{G^2}{8m_\mu\pi^5}\frac{d^3k}{E}p^\alpha k^\beta\frac{\pi}{6}\left((p-k)^2\eta_{\alpha\beta} + 2(p-k)_\alpha(p-k)_\beta\right) =$$

$$= \frac{G^2}{48m_\mu\pi^4}\frac{d^3k}{E}\left(3(m_\mu^2+m_e^2)m_\mu E - 4(m_\mu E)^2 - 2m_\mu^2m_e^2\right)$$

Kiintegrálom $k$ irányára: $d^3k = 4\pi k^2dk = 4\pi k E\,dE = 4\pi\sqrt{E^2-m_e^2}\,E\,dE$

$$d\Gamma = \frac{G^2}{12m_\mu\pi^3}\sqrt{E^2-m_e^2}\,dE\left(3(m_\mu^2+m_e^2)m_\mu E - 4(m_\mu E)^2 - 2m_\mu^2m_e^2\right) \simeq \qquad m_e \ll m_\mu,\ m_e \ll E$$

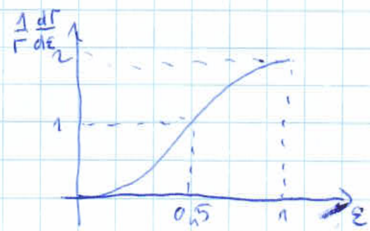
$$\approx \frac{G^2m_\mu}{12\pi^3}E^2(3m_\mu - 4E)\,dE$$

Energiamegmaradás miatt $E_{max} = \frac{m_\mu}{2} \Rightarrow \varepsilon := \frac{E}{E_{max}}$

$$d\Gamma = \frac{G^2m_\mu^5}{96\pi^3}\varepsilon^2(3-2\varepsilon)\,d\varepsilon$$

a teljes bomlási állandó: $\Gamma = \int_{\varepsilon=0}^{1} d\Gamma(\varepsilon) = \frac{G^2m_\mu^5}{192\pi^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\varepsilon} = (6-4\varepsilon)\varepsilon^2$ ← ebben már nem szerepel G, így egyszerűen az energiaeloszlást mérve, ellenőrizhető.




Az esetek 18%-a abban van, ha $\varepsilon > 0{,}2$, vagyis ultrarelativisztikus e esetén.

b) polarizált müon, elektron irányát mérjük.

Egy $\underline{n}$ irányú, ½ spinű fermion esetében $u(p,s)\bar{u}(p,s) = (\not p + m)\frac{1+\gamma^5 \not s}{2}$

ahol $s = (0, \underline{n})$ nyugalmi rendszerben, általánosan pedig:

$$s = \left(\frac{\underline{n}\underline{p}}{m}, \underline{n} + \frac{\underline{p}(\underline{n}\underline{p})}{m(p^0+m)}\right)$$

Tulajdonságok: $s^2=-1$, $s\cdot p = 0$

Ez alapján a gráf járuléka:

$$|M_{\not s i}|^2 = \frac{G^2}{2}\frac{1}{2^2} \mathrm{Tr}\left(\not q_2 O_i^\alpha (\not p + m_\mu)(1+\gamma^5 \not s_\mu) O_i^\beta\right) \mathrm{Tr}\left(\not q_1 O_{i\beta} (\not k + m_e)(1+\gamma^5\not s_e) O_{i\alpha}\right)$$

A trace-ben csak adnak járulékot, ahol páros $\gamma^\alpha$ mátrix van, ezért

$(\not p + m)(1+\gamma^5\not s) \to (\not p + \gamma^5 m \not s)$

továbbá $\mathrm{Tr}\left(\not q \gamma^\alpha \gamma^5 \not s \gamma^\beta (1-\gamma^5)\right) = \mathrm{Tr}\left(\not q \gamma^\alpha \not s \gamma^\beta\gamma^5(1-\gamma^5)\right) = -\mathrm{Tr}\left(\not q \gamma^\alpha \not s \gamma^\beta (1-\gamma^5)\right)$

Ez alapján, a végeredmény u.a. mint az előbb, csak $\frac{1}{4}$-e, és $p \to (p - m_\mu s_\mu)/2$
$k \to (k - m_e s_e)/2$

Tehát

$$|M_{\not s}|^2 = 32 G^2[(p-m_\mu s_\mu) q_1][(k-m_e s_e) q_2]$$

$$d\Gamma = \frac{G^2}{16 m_\mu \pi^5}\frac{d^3k}{E}(p-m_\mu s_\mu)^\alpha (k-m_e s_e)^\beta I_{\alpha\beta}(p-k) =$$

$$= \frac{G^2}{96 m_\mu\pi^5}\frac{d^3k}{E}\left[(p-k)^2[(p-m_\mu s_\mu)(k-m_e s_e)] + 2[(p-k)(p-m_\mu s_\mu)][(p-k)(k-m_e s_e)]\right]$$

Elhanyagolva $m_e$-t és összegezve $s_e$-re:

$$d\Gamma \approx \frac{G^2}{48 m_\mu \pi^4} d^3k \left[3m_\mu^2 - 4m_\mu E) + m_\mu \frac{\underline{n}\underline{k}}{E}(m_\mu^2 - 4m_\mu E)\right] \approx$$

$$\approx \Gamma\cdot(3-2\varepsilon+(1-2\varepsilon)\cos\vartheta)\varepsilon^2 \, d\varepsilon \, d\cos\vartheta$$ ahol $\Gamma$ a polarizálatlan eset.

integrálva: $\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\cos\vartheta} = \int d\varepsilon \left(3-2\varepsilon + (1-\varepsilon)\cos\vartheta\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\cos\vartheta\right)$

A $\mu^+$-ra kiszámolva $(1+\frac{1}{3}\cos\vartheta)$-t kapnánk $\Rightarrow$ C és P sértés

## 4. tétel: Ízességmegtartó félleptonikus folyamatok

Általános elvek.

Ha a nehéz kvarkokat figyelmen kívül hagyjuk, és az $s$ változást nem engedjük meg, akkor csak a tiszta $u$ és $d$ átalakulások maradnak.

A Lagrange-fv releváns része:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\vartheta_c\,(\bar{u}\,O_L^\alpha\, d)\,J_{e\alpha} + h.c.$$

ahol $\vartheta_c$: Cabibbo-szög

$J_e$: lepton-áram

A perturbációszámítás legalacsonyabb rendjében az átmeneti mátrix

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\vartheta_c\left(H^\alpha L_\alpha + \tilde{H}^\alpha \tilde{L}_\alpha\right)$$

ahol
$$H^\alpha = \langle h_f|(\bar{u}\,O_L^\alpha d)(0)|h_i\rangle$$
$$\tilde{H}^\alpha = \langle h_f|(\bar{u}\,O_L^\alpha d)(0)^\dagger|h_i\rangle$$
$$L^\alpha = \langle e_f|J_e^\alpha(0)|e_i\rangle$$
$$\tilde{L}^\alpha = \langle e_f|J_e^\alpha(0)^\dagger|e_i\rangle$$

Tekintve az alábbi izospin dublettet: $q = \begin{pmatrix} u \\ d\end{pmatrix}$, a kvarkáram releváns része kifejezhető:
$$J_a^\mu = \bar{q}\,O_L^\mu\frac{\tau_a}{2}q = \bar{q}\gamma^\mu\frac{\tau_a}{2}q - \bar{q}\gamma^\mu\gamma^5\frac{\tau_a}{2}q = V_a^\mu - A_a^\mu$$

ahol $\tau_a$ a megfelelő Pauli-mátrix kombináció.

$V_a^\mu$: vektor-izovektor, $A_a^\mu$: axiálvektor-izovektor

Az érdekes esetben, ha $\bar{u}\,O_L^\mu d$ vagy $\bar{d}\,O_L^\mu u$ van, az áram:
$$J_\pm^\mu = \bar{q}\,O_L^\mu\frac{\tau_\pm}{2}q \qquad \text{ahol } \tau_\pm = \tau_1 \pm i\tau_2.$$

[további általános megállapítások a 6. tételben]

---

Leptonikus pion bomlás

A töltött pionok az alábbi módon bomolhatnak:

$$\pi^+ \to e^+\nu_e \quad \text{és} \quad \pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$$

Mivel a pion pszeudoskalár, ezért $\langle 0|V_\mp^\mu|\pi^\pm\rangle = 0$

$\Rightarrow$ csak az axiálvektor-áram játszik szerepet.

~~PCAC miatt~~ $\langle 0|A_\mp^\mu|\pi^\pm\rangle = i\sqrt{2}\,f_\pi\,p^\mu$ ahol $f_\pi$ 1-dimenziójú valós konstans

$A^\mu$ szimmetriasértése miatt

(lásd. 7. tétel)

Nézzük a $\pi^+ \to e^+ \nu_e$ esetet! (CP invariancia miatt $\pi^-$ u.a. lesz)

Az átmeneti mátrix:

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \cos\vartheta_c \, i\sqrt{2} f_\pi \, p^\mu_{(\pi)} \langle e^+ \bar{\nu}_e | (\bar{\nu}_e O_{L\mu} e)(0) | 0 \rangle =$$

$$= -iG\cos\vartheta_c f_\pi \, p^\mu_{(\pi)} \cdot \bar{u}_{(\nu)}(q_{(\nu)}) \gamma_\mu (1-\gamma^5) v_{(e)}(q_{(e)}) = \qquad p\text{-megmaradás miatt}$$

$$= -iG\cos\vartheta_c f_\pi \, \bar{u}_{(\nu)}(q_{(\nu)}) (\not{p}_{(\nu)} + \not{p}_{(e)})(1-\gamma^5) v_{(e)}(q_{(e)}) = \qquad \text{Dirac-egyenlet alapján}$$

$$= -iG\cos\vartheta_c f_\pi \, m_e \, \bar{u}_{(\nu)}(q_{(\nu)}) (1+\gamma^5) v_{(e)}(q_{(e)})$$

Az abszolútérték négyzete:

$$|M_{fi}|^2 = G^2 \cos^2\vartheta_c f_\pi^2 m_e^2 \, \bar{u}_{(\nu)}(q_{(\nu)})(1+\gamma^5) v_{(e)}(q_{(e)}) \bar{v}_{(e)}(q_{(e)}) (1-\gamma^5) u_{(\nu)}(p_{(\nu)})$$

Spinekre összegezve:

$$\langle\langle |M_{fi}|^2 \rangle\rangle = G^2 \cos^2\vartheta_c f_\pi^2 m_e^2 \, \mathrm{tr}\left[(\not{p}_{(e)} - m_e)(1+\gamma^5) \not{p}_{(\nu)} (1-\gamma^5)\right] = \qquad \text{Clifford-algebrából}$$

$$= 8G^2 \cos^2\vartheta_c f_\pi^2 m_e^2 \, p_{(e)} p_{(\nu)} =$$

felhasználva hogy $p_{(\pi)} = p_{(e)} + p_{(\nu)} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_\pi^2 = m_e^2 + 2 p_{(e)} p_{(\nu)}$

$$= 4G^2 \cos^2\vartheta_c f_\pi^2 m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)$$

Itt minden konstans, tehát a bomlási állandó:

$$\Gamma = \frac{\langle\langle |M_{fi}|^2 \rangle\rangle}{2m_\pi} \int d\Phi_2 = \frac{\langle\langle |M_{fi}|^2 \rangle\rangle}{2m_\pi} \Phi_2$$

$$\Phi_2 = \int \frac{d^3 p_{(e)}}{(2\pi)^3 2E_e} \int \frac{d^3 p_{(\nu)}}{(2\pi)^3 \cdot 2E_\nu} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{(\pi)} - p_{(e)} - p_{(\nu)}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3 p_{(e)}}{E_e E_\nu} \delta(m_e - E_e - E_\nu) = \qquad \text{kiintegrálható}$$

$$= \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{8\pi \cdot m_\pi^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{G^2 \cos^2\vartheta_c f_\pi^2}{4\pi} m_\pi m_e^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \text{kis tömegű leptonra nehezebben bomlik}$$

intuíció: A kis tömegű lepton spinjére jó közelítés a helicitás, de mivel a $\pi$ spinje 0, a két végállapotnak ellentétesnek kell lennie. Mivel ugyanakkor az impulzusuk is ellentétes, ezért ez nem lehet.

$m_{\pi^+} = 140\,\mathrm{MeV}$, $m_\mu = 106\,\mathrm{MeV}$, $m_e = 0{,}5\,\mathrm{MeV}$ $\Rightarrow$ $\mu$-ra bomlik ($\tau$-ra nem tud)

$$\frac{\Gamma_{\pi\to e\nu}}{\Gamma_{\pi\to\mu\nu}} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 \simeq 1{,}2 \cdot 10^{-4}$$

Pion β-bomlása

A pionok a alábbi módon is bomolhatnak: $\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$

Az előzőekben leírtak $\langle\pi^0|A^\mu_-|\pi^+\rangle = 0$ a pion pszeudoskalár-ság miatt

$\Rightarrow$ A bomlási amplitúdó:

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\vartheta_c \langle\pi^0|(\bar{d}\,O_L^\mu u)(0)|\pi^+\rangle \langle e^+\nu_e|(\bar{\nu}_e O_{L\mu} e)(0)|0\rangle =$$

$$= -\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\vartheta_c \langle\pi^0|V_-^\mu|\pi^+\rangle\, \bar{u}_{(\nu)}(p_{(\nu)})\gamma_\mu(1-\gamma^5)v_{(e)}(p_{(e)})$$

A $\langle\pi|V|\pi\rangle$ mátrixelem csak a π-k impulzusától függ, így felírható ilyen kombinációval:

$$\langle\pi^0|V_-^\mu|\pi^+\rangle = f_+(q^2)\,p^\mu + f_-(q^2)\,q^\mu \qquad \text{ahol} \qquad p = p_1+p_2$$

$$q = p_1 - p_2$$

$p_1$: $\pi^+$ és $p_2$: $\pi^0$ impulzusa.

Izospin-határesetben, a V- megmaradása miatt

$$q_\mu \langle\pi^0|V_-|\pi^+\rangle|_{iso} = 0$$

$$\Rightarrow\ q^2 f_-(q^2)|_{iso} = 0 \Rightarrow f_-(q^2)|_{iso} = 0$$

Legyen $\Delta := m_{\pi^+} - m_{\pi^0}$ a szimmetriasértés paramétere, ekkor

$$f_-(q^2) = f_-(q^2)|_{iso} + \Delta f_-^{(1)}(q^2)|_{iso} + O(\Delta^2) = \Delta\cdot f_-^{(1)}(q^2)|_{iso} + O(\Delta^2)$$

$$\text{ahol}\quad f_-^{(1)} = \frac{\partial f_-}{\partial\Delta}$$

Belátható, hogy $q^2$ kicsi, hiszen

$$q^2 = m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - 2p_1p_2 \le m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - \left[(m_{\pi^+}+m_{\pi^0})^2 - m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2\right] =$$

$$= m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - 2m_{\pi^+}m_{\pi^0} = \Delta^2$$

szerint az f-ekben csak $\Delta^2$ rendű tagok vannak, így $\quad f_-(q^2) = O(\Delta^2)$

$$f_+(q^2) = f_+(0) + O(\Delta^2)$$

A gyenge töltés megmaradás miatt

$$\langle\pi^0|V_-^0|\pi^+\rangle = f_+(0)|_{iso}\,p^0 + O(\Delta^2) = f_+(0)|_{iso}\cdot 2p_1^0 + O(\Delta^2)$$

$$= \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3-1)}\;\delta_{II'}\,\delta_{I_3-1,I_3'}\cdot 2p_1^0 \qquad \text{ahol} \quad I = I' = 1$$

$$I_3 = 1,\ I_3' = 0$$

$$\Rightarrow\ f_+(0)|_{iso} = \sqrt{2}$$

Behelyettesítve az amplitúdóba:

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\vartheta_c\sqrt{2}\,p^\mu\,\bar{u}_{(\nu)}(p_{(\nu)})\gamma_\mu(1-\gamma^5)v_{(e)}(p_{(e)})$$

$$|M_{fi}|^2 = G^2\cos^2\vartheta_c\, p^\mu p^\nu\, \bar{u}_{(\nu)}\gamma_\mu(1-\gamma^5)v_{(e)}\,\bar{v}_{(e)}\gamma_\nu(1-\gamma^5)u_{(\nu)}$$

spinre summázva:

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = G^2 \cos^2\vartheta_c \, p^\mu p^\nu \, \mathrm{tr}\left[\gamma_\mu (1-\gamma^5)(\not{k}_{(e)} - m_e)\gamma_\nu (1-\gamma^5)\not{k}_{(\nu)}\right] = \quad \text{kiszámolva}$$

$$= 8 G^2 \cos^2\vartheta_c \left[2 (p\, q_{(e)})(p\, q_{(\nu)}) - p^2 (k_{(e)} q_{(\nu)})\right]$$

A teljes bomlási állandó:

$$\Gamma = \frac{4 G^2 \cos^2\vartheta_c}{m_{\pi^+}} \int d\phi^{(3)} \left[2(p\, q_{(e)})(p\, q_{(\nu)}) - p^2 (p_{(e)} q_{(\nu)})\right] =$$

hosszú matek

$$= \frac{G^2 \cos^2\vartheta_c \, \Delta^5}{30\pi^3} \left[1 - \frac{3\Delta}{2m} - 5\frac{m_e^2}{\Delta^2} + O\left(\frac{\Delta^2}{m^2}\right) + O\left(\frac{m_e^3}{\Delta^3}\right)\right]$$

ahol $2m = m_{\pi^+} + m_{\pi^0}$.

# 5. tétel: β-bomlás

A neutron β-bomlása: $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$,

kvark szintjén: $d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$

A bomlási amplitúdó:

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \cos\vartheta_C \langle p | (\bar{u} O_L^\alpha d)(0) | n \rangle \langle e \bar{\nu}_e | (\bar{e} O_\alpha \nu_e)(0) | 0 \rangle =$$

$$= -\frac{G}{\sqrt{2}} \cos\vartheta_C H^\alpha \bar{u}_e(p_e) \gamma_\alpha (1-\gamma^5) v_{\bar{\nu}}(q_\nu)$$

ahol $H^\alpha = \langle p | (\bar{u} O_L^\alpha d)(0) | n \rangle = \langle p | V_+^\alpha | n \rangle - \langle p | A_+^\alpha | n \rangle$

$V_+^\alpha = (\bar{u} \gamma^\alpha d)(0)$

$A_+^\alpha = (\bar{u} \gamma^\alpha \gamma^5 d)(0)$

Az áramok mátrixelemei a $p$ és $n$ impulzusának kiválasztásától függ, és mivel $p$ és $n$ $\frac{1}{2}$-spinű fermionok, ezért a legáltalánosabb alak:

$$\langle p | V_+^\mu | n \rangle = \bar{u}_p(p_p, s_p) \left( f_1(q^2) \gamma^\mu + f_2(q^2) i \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} + f_3(q^2) \frac{q^\mu}{2m} \right) u_n(p_n, s_n)$$

$$\langle p | A_+^\mu | n \rangle = \bar{u}_p(p_p, s_p) \left( g_1(q^2) \gamma^\mu + g_2(q^2) i \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} + g_3(q^2) \frac{q^\mu}{2m} \right) \gamma^5 u_n(p_n, s_n)$$

ahol $q = p_n - p_p$ és $m = \frac{1}{2}(m_p + m_n)$

Az $f_i, g_i$ valós formafaktorok. a $\nu n, \bar{\nu} p$ szórással meghatározhatók.

Nézzük a vektor mátrix elemet!

Az elektromágneses átmenet mátrixelme két azonos állapot között hasonló struktúrával írható:

$$\langle p | V_{em}^\mu | p \rangle = \bar{u}_p(p_p', s_p') \left( f_{p1}(q^2) \gamma^\mu + f_{p2}(q^2) i \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m_p} + f_{p3}(q^2) \frac{q^\mu}{2m_p} \right) u_p(p_p, s_p)$$

$$\langle n | V_{em}^\mu | n \rangle = \bar{u}_n(p_n', s_n') \left( f_{n1}(q^2) \gamma^\mu + f_{n2}(q^2) i \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m_n} + f_{n3}(q^2) \frac{q^\mu}{2m_n} \right) u_n(p_n, s_n)$$

Mivel az EM-áram megmarad, ezért az izospin-vektor áram is:

$$q_\mu V_{em}^\mu = 0 \implies q_\mu V_+^\mu = 0 \qquad \text{(lásd. 6. tétel)}$$

Emiatt $\bar{u}_p(p', s') \not{q}\, u(p, s) = \bar{u}(p', s')(\not{p}' - \not{p}) u(p, s) = \bar{u}(p', s')(m - m) u(p, s) =$
$= 0.$

Továbbá $\sigma^{\mu\nu}$ antiszimmetrikussága miatt $q_\mu \sigma^{\mu\nu} q_\nu = 0.$

Tehát
$$\left. \begin{array}{l} q_\mu \langle p | V_{em}^\mu | p \rangle = 0 \\ q_\mu \langle n | V_{em}^\mu | n \rangle = 0 \end{array} \right\} \implies f_{n3}(q^2) = f_{p3}(q^2) = 0$$

$$q_\mu \langle p | V_+^\mu | n \rangle = 0 \implies f_3(q^2) = 0.$$

Ezen kívül a Wigner-Eckart-tétel miatt (lásd 6. tétel)

$$\langle p|V_+^\mu|n\rangle = \langle p|V_{em}^\mu|p\rangle - \langle n|V_{em}^\mu|n\rangle \quad \Rightarrow \quad f_i(q^2) = f_{pi}(q^2) - f_{ni}(q^2)$$

Ezt $q^2=0$-ban alkalmazva:

$$\langle p|V_{em}^\mu(0)|p\rangle = f_{p1}(0)\,\bar u_p(p,s_p')\gamma^0 u_p(p,s_p) = f_{p1}(0)\cdot 2p^0\delta_{s_p' s_p}$$

$$= 2p^0 Q_p \delta_{s_p' s_p}$$

$$\langle n|V_{em}^\mu(0)|n\rangle = f_{n1}(0)\,\bar u_n(p,s_n')\gamma^0 u_n(p,s_n) = f_{n1}(0)\cdot 2p^0\delta_{s_n' s_n}$$

$$= 2p^0 Q_n \delta_{s_n' s_n}$$

$$\Rightarrow f_1(0) = f_{p1}(0) - f_{n1}(0) = Q_p - Q_n = 1$$

Az $f_2$ formafaktorhoz felhasználjuk, hogy az $f_{p,n2}$ formafaktorok értékét ismerjük kísérletből, hiszen ezek a proton és neutron anomális mágneses momentumai:

$$f_{p2}(0) = 1{,}79 \;;\quad f_{n2}(0) = -1{,}91$$

$$\Rightarrow f_2(0) = 3{,}7.$$

Tehát a vektoráram:

$$\langle p|V_+^\mu|n\rangle = \bar u_p(p_p,s_p)\left(\gamma^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\frac{f_2(0)}{2m}\right)u_n(p_n,s_n)$$

Nézzük az axiálvektor mátrixelemet!

Mivel a második elem G-páros, az axiálvektor pedig G-páratlan, ezért kapásból $g_2=0$.

[A G-trafó az SU(2) izospintérben való tükrözés, vagy vmi ilyesmi]

PCAC miatt $\quad -iq_\mu\langle p|A_+^\mu(0)|n\rangle = f_\pi m_\pi^2\langle p|\phi_+(0)|n\rangle \quad$ (lásd 7. tétel)

A piontér pólus-struktúrája miatt

$$-iq_\mu\langle p|A_+^\mu(q)|n\rangle = f_\pi m_\pi^2\cdot 2i\,\frac{g_{\pi NN}(q^2)}{m_\pi^2-q^2}\,\bar u_p(p_p,s_p)\gamma^5 u_n(p_n,s_n)$$

ahol $g_{\pi NN}$ a pion-nukleon-vertexfv, mert $\langle p|\phi_+|n\rangle =$ 

Felhasználva $A_+$ alakját:

$$-\bar u_p(p_p,s_p)\left(\not q\, g_1(q^2) + q^2\frac{g_3(q^2)}{2m}\right)\gamma^5 u_n(p_n,s_n) = 2f_\pi m_\pi^2\frac{g_{\pi NN}}{m_\pi^2-q^2}\,\bar u_p(p_p,s_p)\gamma^5 u_n(p_n,s_n)$$

$$(m_p+m_n)\,g_1(q^2) - q^2\frac{g_3(q^2)}{2m} = 2f_\pi m_\pi^2\frac{g_{\pi NN}}{m_\pi^2-q^2}$$

Véve a $q^2=0$ esetet: $\quad g_1(0) = \dfrac{f_\pi\, g_{\pi NN}(0)}{m}$

$g_1(0)$ értéke a $\beta$-bomlásból mérhető, a $\pi$-NN KH-tömeghéjon (azaz KH) pedig meghatározható $g_{\pi NN}(m_\pi^2)$-t: $g_1(0) = 1,267$; $g_{\pi NN}(m_\pi^2) = 13,169$.

Ha feltesszük, hogy $g_{\pi NN}$ nem változik sokat $q^2=0$ és $m_\pi^2$ között, akkor

$$\underline{m\, g_1(0) = f_\pi\, g_{\pi NN}} \qquad \text{Goldberger - Treiman - reláció.}$$

Ha tömegtelen pionokat teszünk fel, az axiálisáram megmarad.

$$\partial_\mu A^\mu_+ = 0 \Rightarrow 2m g_1(q^2) - q^2 \frac{g_3(q^2)}{2m} = 0 \Rightarrow \frac{g_3(q^2)}{2m} = \frac{2m\, g_1(q^2)}{q^2}$$

$m_\pi = 0 \Rightarrow$ 0-ban van a pólus.

Valójában, mivel a hadronok összetett részecskék, a leptonokkal való KH nem képzelhető el pontkölcsönhatásként, hanem el kell kenni. Ezt az elkenést az effektív $\mathcal{L}$-be úgy építhetjük be, ha figyelembe vesszük pion-cseréket is:

$$\mathcal{L}^{eff} = -\frac{G\cos\vartheta_c}{\sqrt{2}}\left(\bar N \tau_+ \gamma^\mu (1-g_A\gamma^5) N\, \bar e \gamma_\mu (1-\gamma^5)\nu + h.c.\right) + i g \bar N \tau_a \gamma^5 N \phi_a$$

Két járulék van $M_{fi}$-be:

$g_1$: $i\frac{G}{\sqrt{2}}(-g_A) u_p \gamma^\mu \gamma^5 u_n$ ← NNeν csatolás

$g_3$: $\underbrace{i(i g\sqrt{2}) u_p \gamma^5 u_n}_{NN\pi\text{ vertex}}\ \underbrace{\frac{i}{q^2-m_\pi^2}}_{\pi\text{-propagátor}}\ \underbrace{\frac{-iG}{\sqrt{2}}(i\sqrt{2} f_\pi q_\mu)}_{\pi e\nu\text{ vertex}}$ ← NN→π→eν csatolás

így már látható $g_3$-ban a $\pi$-pólus.

A végső mátrixelemet $g_V := f_1(0)$ és $g_A := g_1(0)$ nevekkel kifejtve az eredmény

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\vartheta_c\, \bar u_p \gamma^\mu (1-\alpha\gamma^5) u_n\, \bar u_e \gamma_\mu (1-\gamma^5) v_e \qquad \text{ahol } \alpha = \frac{g_A}{g_V}$$

és $g_V = 1$

Ha a neutron és az elektron polarizációja:

$$s_n = (0, \eta_n);\quad s_e = \left(\frac{\eta_e\cdot k_e}{m_e}, \eta_e + \frac{k_e(k_e\cdot\eta_e)}{m_e(E_e+m_e)}\right)$$

akkor az amplitúdó négyzete:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G^2\cos^2\vartheta_c}{2} \mathrm{tr}\left[\gamma^\mu(1-\alpha\gamma^5)(\not p + m_n)\frac{1+\gamma^5\not s_n}{2}\gamma^\nu(1-\alpha\gamma^5)(\not p' + m)\right] \times$$
$$\times \mathrm{tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not k_{(\nu)}\gamma_\nu(1-\gamma^5)(\not k_e + m_e)\frac{1+\gamma^5\not s_e}{2}\right] = \text{mateh}$$

$$= 8G^2\cos^2\vartheta_c\Big[2(1+\alpha^2)(p\cdot k_{(\nu)})(p\cdot\tilde k_{(e)}) - (1-\alpha^2)m^2\, k_{(\nu)}\cdot k_{(e)} +$$
$$+ 2m\left((\alpha^2-\alpha)(s_n\cdot\tilde k_{(e)})(p\cdot k_{(\nu)}) - (\alpha^2+\alpha)(s_n\cdot k_{(\nu)})(p\cdot\tilde k_{(e)})\right)\Big]$$

ahol $\tilde k_{(e)} = k_{(e)} - m_e s_e$

Különböző mérési konfigurációk:

- polarizálatlan neutronok, nincs spin mérés

  $S_n \to 0$, $\tilde{k}_{\nu(e)} \to k_{\nu(e)}$, 2-es szorzófaktor

$$d\Gamma = \frac{8G^2\cos^2\theta_c}{m}\left[2(1+\alpha^2)m^2E_eE_\nu - (1-\alpha^2)m^2\left(E_eE_\nu - \underline{k}_{(\nu)}\underline{k}_{(e)}\right)\right]d\phi^{(3)}$$

bonyolult integrál

$$\Gamma = 0{,}47\,\frac{G^2\cos\theta_c}{60\pi^3}(1+3\alpha^2)\Delta^5 \qquad \text{ahol } \Delta = m_n - m_p$$

- polarizálatlan neutron, elektron spin mérés

  itt meg kell tartani $S_e$-t, így $\tilde{k}_{(e)}$-t:

$$d\Gamma = 2G^2\cos^2\theta_c\, m E_\nu E_e\left[(1+3\alpha^2)\frac{\tilde{k}^{(0)}_e}{E_e} + (1-\alpha^2)\frac{\underline{k}_\nu}{E_\nu}\cdot\frac{\tilde{\underline{k}}_e}{E_e}\right]d\phi^{(3)}$$

$\underline{k}_\nu$-re kiintegrálva, megkapjuk a $d\Gamma$-t az $e^-$-polarizáció fv-ben:

$$\underline{P}_e = \frac{\underline{k}_e}{E_e}.$$

- polarizált neutron

  Attól függően, hogy az $e^-$ vagy a $\nu_e$ irányára felett korrelációt mérünk

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = \begin{cases} 1 - \dfrac{2(\alpha^2-\alpha)}{1+3\alpha^2}\dfrac{\underline{\eta}_n\cdot\underline{k}_e}{E_e} & \text{elektron korrelációban}\\[2ex] 1+\dfrac{2(\alpha^2+\alpha)}{1+3\alpha^2}\dfrac{\underline{\eta}_n\cdot\underline{k}_\nu}{E_\nu} & \text{neutrínó korrelációban}\end{cases}$$

- szögkorreláció

  ha nem mérünk spint, csak a kimenő részecskék irányát, akkor az energiaspektrum

$$d\Gamma = \frac{G^2\cos\theta_c}{2\pi^3}(1+3\alpha^2)\left[1+\frac{1-\alpha^2}{1+3\alpha^2}(\underline{\beta}_e\cdot\underline{n}_\nu) - 2\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{1+3\alpha^2}(\underline{\beta}_e\cdot\underline{\eta}_n) - \frac{\alpha^2+\alpha}{1+3\alpha^2}(\underline{n}_\nu\underline{\eta}_n)\right)\right]\times$$

$$\times\frac{d\Omega_e}{4\pi}\frac{d\Omega_\nu}{4\pi}\,dE_e\, E_e\sqrt{E_e^2-m_e^2}\,(\Delta-E_e)^2$$

- energiaspektrum

$$F(x,W_0) = x\sqrt{x^2-1}\,(W_0-x)^2, \quad x = \frac{E_e}{m_e}, \quad W_0 = \frac{\Delta}{m_e}$$

$f_2(0)$ függvényben való részvételével $F(x,W_0)\to F(x,W_0)(1\pm\varepsilon x)$

Ez ugyan zavaró $n$-re nehezen kimérhető, de a $^{12}B$, $^{12}C^*$, $^{12}N$ izotópokat bomlását mérve összehasonlítható.

- Fermi és Gamow-Teller átmenetek

  Ilyen is van.

## 6. tétel: Megmaradó izovektoráram

Izospinfaktor, kvarktöltéssel járó folyamatban elektromos áramok:

$$J^{\mu}_{(q)\,a} = \bar{q}\, O^{\mu}_{L} \frac{\tau_a}{2} q = \bar{q}\gamma^{\mu}\frac{\tau_a}{2}q - \bar{q}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\frac{\tau_a}{2}q = V_a^{\mu} - A_a^{\mu}$$

$\bar{u}\, O^{\mu}_{L} d$ és $\bar{d}\, O^{\mu}_{L} u$ kombinációk ebben az alakban: $J^{\mu}_{\pm} = \bar{q}\, O^{\mu}_{L} \frac{\tau_{\pm}}{2} q$

ahol $\tau_{\pm} = \tau_1 \pm i\tau_2$

Az elektromágneses áram:

$$V^{\mu}_{em} = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^{\mu}u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^{\mu}d = \frac{1}{2}\left(\bar{u}\gamma^{\mu}u - \bar{d}\gamma^{\mu}d\right) + \frac{1}{6}\left(\bar{u}\gamma^{\mu}u + \bar{d}\gamma^{\mu}d\right) = V_3^{\mu} + S^{\mu}$$

ahol $S^{\mu} = \bar{q}\gamma^{\mu}\mathbb{1} q$ izoskalár áram

$V_{em}$-ről tudjuk, hogy megmarad, de izospin invariancia esetén $V_3$ és $S$ nem keverednek, tehát $\partial_{\mu} V^{\mu}_{em} = 0 \implies \left.\begin{matrix}\partial_{\mu} V_3^{\mu} = 0 \\ \partial_{\mu} S^{\mu} = 0\end{matrix}\right\}$

Plusz, mivel $V_3^{\mu}$ a többi izokomponenssel szabadon keverhető, ezért

$$\partial_{\mu} V_3^{\mu} = 0 \implies \underline{\partial_{\mu} V_a^{\mu} = 0} \quad \forall a\text{-ra.}$$

Az árammegmaradás következménye:

$$0 = \langle p' | \partial_{\mu} V^{\mu}(x) | p\rangle = \partial_{\mu}\langle p' | V^{\mu}(x) | p\rangle = \partial_{\mu}\langle p' | e^{iPx} V^{\mu}(0)\, e^{-iPx} | p\rangle =$$

$$= \partial_{\mu} e^{i\underbrace{(p'-p)}_{q}x}\langle p' | V^{\mu}(0) | p\rangle = -i\, e^{-iqx} q_{\mu}\langle p' | V^{\mu}(0) | p\rangle$$

$$\underset{x=0}{\implies} \quad \langle p' | \partial_{\mu} V^{\mu}(0) | p\rangle = -i q_{\mu}\langle p' | V^{\mu}(0) | p\rangle = 0$$

Megmaradó áram várható értéke transzverzális az impulzustranszferre

Kiválasztási szabályok.

Ahhoz, hogy az áram ne tűnjön el, egy $\langle A | J^{\mu}_{(q)a} | B\rangle$ folyamat mátrixelemeként, az kell, hogy $A$ és $B$ közötti $\Delta I$ izospin különbséget a $J$ operátor eltüntesse. Mivel az áram izospin része a $\tau_a$ Pauli, ezért az $SU(2)$ generátorok szabályai alapján $\langle A | J^{\mu}_{(q)a} | B\rangle \neq 0$ ha $\Delta I = I_A - I_B = 0, \pm 1$.

Azonos multipletthe tartozó állapotok esetén a képletek:

$$\langle I I_3' | V^{\mu}_{\pm} | I I_3\rangle = C^{\mu}_{(I)}\sqrt{I(I+1) - I_3(I_3 \pm 1)}\ \delta_{I_3', I_3 \pm 1}$$

$$\langle I I_3' | V_3^{\mu} | I I_3\rangle = C^{\mu}_{(I)} I_3\, \delta_{I_3' I_3} \qquad (*)$$

$$\langle I I_3' | S^{\mu} | I I_3\rangle = \tilde{C}^{\mu}_{(I)}\, \delta_{I_3' I_3}$$

Gyenge töltés.

A megmaradó izospintranszformációkhoz tartozó Noether-töltés:

$$T_a = \int d^3\underline{x}\; V_a^0(x) \qquad (x^0 \text{ önkényes})$$

$$\langle A|T_a|B\rangle = \int d^3\underline{x}\, \langle A|V_a^0(x)|B\rangle = \int d^3\underline{x}\, e^{i(p'-p)x}\langle A|V_a^0(0)|B\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(q)\langle A|V_a^0(0)|B\rangle$$

konkrét esetben:

$$\langle I' I_3'|V_\pm^0(0)|I I_3\rangle = 2p^0\delta_{I'I}\delta_{I_3' I_3\pm1}\sqrt{I(I+1)-I_3(I_3\pm1)}$$

Ráintegrálva azt kapjuk $\langle I' I_3'|T_+|I I_3\rangle = Q_W(I, I_3)$

$\langle I' I_3'|T_-|I I_3\rangle = Q_W(I, I_3')$

ahol $Q(I, I_3) = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3+1)}$

(*): együtthatók kiszámolhatók az elektromágneses árammal:

$$C_I^\mu = \langle I I_3+1|V_3^\mu|I I_3+1\rangle - \langle I I_3|V_3^\mu|I I_3\rangle =$$

$$= \langle I I_3+1|V_{em}^\mu + S^\mu|I I_3+1\rangle - \langle I I_3|V_{em}^\mu + S^\mu|I I_3\rangle =$$

$$= \langle I I_3+1|V_{em}^\mu|I I_3+1\rangle - \langle I I_3|V_{em}^\mu|I I_3\rangle$$

Beírva a megfelelő összefüggésbe:

$$\langle I I_3+1|V_+^\mu|I I_3\rangle = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3+1)}\left(\langle I I_3+1|V_3^\mu|I I_3+1\rangle - \langle I I_3|V_3^\mu|I I_3\rangle\right) =$$

$$= \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3+1)}\left(\langle I I_3+1|V_{em}^\mu|I I_3+1\rangle - \langle I I_3|V_{em}^\mu|I I_3\rangle\right)$$

Alkalmazások.

1) pion $\beta$-bomlása.

Az $M_{fi}$-ben a vektoráram fénylel $\langle \pi^0|V_-^\mu|\pi^+\rangle = f_+(q^2)p^\mu + f_-(q^2)q^\mu$

Mivel $q^2 < \Delta = m_{\pi^+} - m_{\pi^0}$, és $q_\mu\langle\pi^0|V_-^\mu|\pi^+\rangle_{izo} = 0$ szerint

$$f_-(q^2) = O(\Delta^2) \quad \text{és} \quad f_+(q^2) = f_+(0) + O(\Delta^2)$$

(*) miatt $\langle\pi^0|V_-^0|\pi^+\rangle = \sqrt{2}\cdot 2p_1^0 \implies f_+(0) = \sqrt{2} + O(\Delta^2)$

Ezzel $M_{fi}$ kiszámolható.

(részletek a 4. tételben)

2) neutron β-bomlásra.

Az amplitudó vektorrésze általános alakban:

$$\langle p|V_f^\mu|n\rangle = \bar{u}_p\left(f_1(q^2)\gamma^\mu + f_2(q^2)\, i\sigma^{\mu\nu}\frac{q_\nu}{2m} + f_3(q^2)\frac{q^\mu}{2m}\right)u_n$$

Kifejezve az elektromágneses árammal: $\langle p|V_f^\mu|n\rangle = \langle p|V_{em}^\mu|p\rangle - \langle n|V_{em}^\mu|n\rangle$

Az EM áramok alakja miatt:

$$\langle N|V_{em}^\mu|N\rangle = \bar{u}_N\left(f_{N1}(q^2)\gamma^\mu + f_{N2}(q^2)\, i\sigma^{\mu\nu}\frac{q_\nu}{2m} + f_{N3}(q^2)\frac{q^\mu}{2m}\right)u_N$$

Ebből $\quad f_i(q^2) = f_{pi}(q^2) - f_{ni}(q^2)$

$f_1$ kiszámolható, mert $\quad \langle N|V_{em}^\mu(0)|N\rangle = f_{N1}(0)\,\bar{u}_N\gamma^\mu u_N = f_{N1}(0)\cdot 2p_N^0$

$$= 2q_N^0\, Q_N \quad \Rightarrow f_{N1}(0) = Q_N$$

$$\Rightarrow f_1(0) = f_{p1}(0) - f_{n1}(0) = Q_p - Q_N = 1.$$

3) $\Sigma^+ \to \Lambda e^+ \nu_e$ folyamat.

Az amplitudó izovektor része:

$$\langle\Lambda|\bar{d}V^\mu u|\Sigma^+\rangle = \bar{u}_\Lambda\left(f_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{f_2(q^2)}{2M}\, i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + f_3(q^2)\frac{q^\mu}{2M}\right)u_{\Sigma^+}$$

- Mivel $\Sigma^+$ és $\Lambda$ különböző multiplettekben vannak, ezért $f_1(0) = 0$.
- $V^\mu$ megmaradása miatt

$$0 = q_\mu\langle\Lambda|\bar{d}V^\mu u|\Sigma^+\rangle = \bar{u}_\Lambda\left(f_1(q^2)\not{q} + f_3(q^2)\frac{q^2}{2M}\right)u_{\Sigma^+} =$$

$$= \bar{u}_\Lambda\left(f_1(q^2)\Delta_+ + f_3(q^2)\frac{q^2}{2M}\right)u_{\Sigma^+} \qquad \text{ahol } \Delta_+ = m_{\Sigma^+} - m_\Lambda.$$

Ez alapján $f_1(q^2)/q^2 = O(1)$; $\quad f_3(0)/2M = O(\Delta_+)$.

- Mivel $f_2$ a $\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$ EM folyamat miatt $O(1)$ nagyságrendű, ezért az amplitudóban a $V^\mu$ járuléka elhanyagolható $A^\mu$ járulékához képest.
- Mivel $A^\mu$ vezető járuléka a $g_1(q^2)\gamma^\mu$, ezért nagyságrendileg

$$\frac{\Gamma(\Sigma^+ \to \Lambda e^+\nu)}{\Gamma(\Sigma^- \to \Lambda e^-\bar{\nu})} = \left(\frac{\Delta_+}{\Delta_-}\right)^5 \cong 0{,}6.$$

# 7. tétel: Axiális formafaktorok

Tömegtelen kvarkok esetében, azaz királis határesetben a vektor és axiálvektor áramok megmaradók lennének. Viszont, a vákuumállapot nem invariáns az axiáltranszformációra $\Rightarrow$ spontán szimmetriasértés:

$$A^\mu_a(0)|0\rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \text{ bevezethető új állapot: } \quad \langle 0|A^\mu_a(0)|\pi_b\rangle = i p^\mu f_{ab}.$$

Ahány generátor sérül, annyi új részecske: Goldstone-bozonok.

Ha a Vektorszimmetria nem sérül (azaz, amíg $m_p = m_n$), addig $f_{ab} = f_\pi \delta_{ab}$ írható:

$$\langle 0|A^\mu_a(0)|\pi_b\rangle = i p^\mu f_\pi \delta_{ab}$$

4. tételben láttuk, hogy $f_\pi$ a $\pi \to e\nu_e$ bomlás idejével van összefüggésben.

Az áram divergenciája:

$$\langle 0|\partial_\mu A^\mu_a(0)|\pi_b\rangle = i\,\partial_\mu p^\mu f_\pi \delta_{ab} = i(-i p_\mu)p^\mu f_\pi \delta_{ab} = m_\pi^2 f_\pi \delta_{ab}$$

Királis esetben $\partial_\mu A^\mu_a = 0 \Rightarrow m_\pi = 0$, de a valóságban $m_\pi \neq 0$.

Ha a $\pi_a$-t keltő operátor $\phi_a^+$, akkor $\delta_{ab} = \langle 0|\phi_a|\pi_b\rangle$.

$$\langle 0|\partial_\mu A^\mu_a(0)|\pi_b\rangle = m_\pi^2 f_\pi \langle 0|\phi_a(0)|\pi_b\rangle$$

APCAC-hipotézis állítása, hogy az operátor szinten is igaz:

$$\underline{\partial_\mu A^\mu_a(x) = f_\pi m_\pi^2 \phi_a(x)}$$

A neutron $\beta$-bomlásánál a bomlási amplitúdó axiálvektor részét kifejtjük:

$$\langle p|A^\mu_+|n\rangle = \bar u_p \left(g_1(q^2)\gamma^\mu + g_3(q^2)\frac{q^\mu}{2m}\right)\gamma^5 u_n$$

A divergenciája:

$$\langle p|\partial_\mu A^\mu_+|n\rangle \underset{\text{eltolás inv. miatt}}{=} -i q_\mu \langle p|A^\mu_+|n\rangle = i\,\bar u_p\left(g_1(q^2)\not q + g_3(q^2)\frac{q^2}{2m}\right)\gamma^5 u_n$$

$$\langle p|\partial_\mu A^\mu_+|n\rangle \underset{\text{PCAC miatt}}{=} f_\pi m_\pi^2 \langle p|\phi_+|n\rangle \underset{\pi NN\text{ csatolás miatt}}{=} f_\pi m_\pi^2\, 2\frac{i}{m_\pi^2 - q^2} g_{\pi NN}(m_\pi)\,\bar u_p \gamma^5 u_n$$

Tehát:

$$2m g_1(q^2) + g_3(q^2)\frac{q^2}{2m} = \frac{2 f_\pi m_\pi^2}{m_\pi^2 - q^2} g_{\pi NN}$$

$q = 0$ esetén: $\underline{m g_1(0) = f_\pi g_{\pi NN}}$ Goldberger – Treiman - reláció

A GT-reláció kapcsolatot teremt az alábbiak között:

- $m$ nukleontömeg $(\sim 0{,}94\,\text{GeV})$
- $g_1(0)$ formafaktor. Ez a $\beta$-bomlásból mérhető. $(\approx 1{,}26)$
- $f_\pi$ szimmetriasértő paraméter. A $\pi \to l\nu_e$ folyamattal mérhető $(\sim 93\,\text{MeV})$
- $g_{\pi NN}$ nukleon-vertexfüggvény. Mezonikus szórásból meghatározható $(\sim 13)$

A reláció pontossága:

$$D = 1 - \frac{f_\pi\, g_{\pi NN}}{m\, g_1(0)} \approx -0{,}021 \quad \Rightarrow \quad 2{,}1\,\% \qquad \text{egész jó}$$

## 8. tétel: K-mezonok és hiperonok szemileptonikus bomlása

Könnyű kvarkokból álló hadronok átalakulásakor megváltozhat a furcsaság

A legfontosabbak: mezonokban

$K^+_{\mu 2}$: $K^+ \to \mu^+ \nu_\mu$

$K^+_{\mu 3}$: $K^+ \to \mu^+ \nu_\mu \pi^0$

$K^0_{\mu 3}$: $K^0 \to \mu^+ \nu_\mu \pi^-$

$K^+_{\mu 4}$: $K^+ \to \mu^+ \nu_\mu \pi^+ \pi^-$

⋮

barionokban:

$\Lambda \to p e^- \bar\nu_e$

$\Xi^- \to \Lambda e^- \bar\nu_e$

$\Xi^0 \to \Sigma^+ e^- \bar\nu_e$

⋮

Mivel ilyenkor a $\bar d'$ helyett kvarkállapotból az s-ész kell, ezért az amplitúdó

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \sin\vartheta_c H_\alpha L^\alpha \quad \text{ahol} \quad H^\alpha = \langle f|\bar u O^\alpha_L s|i\rangle \ \text{vagy} \ \langle f|\bar s O^\alpha_L u|i\rangle$$

$$L^\alpha = \bar u_e O^\alpha_L v_\nu \ \text{vagy} \ \bar u_{\nu_e} O^\alpha_L v_e$$

u és s kvark furcsaságkülönbsége 1, ezért ezekre a folyamatokra $\Delta S = \pm 1$ teljesül*, továbbá a töltésre $\Delta Q = \Delta S$.

Az izospinre nézve $\Delta I = \frac{1}{2}$.

*: $\Delta S$ ennél nagyobb is a perturbációszámítás magasabb rendjeiben, de kis eséllyel.

Itt is felírható a kvark-kép:

$\bar u O^\alpha_L d$, $\bar d O^\alpha_L u$, $\bar u O^\alpha_L s$, $\bar s O^\alpha_L u$ az alábbi oktett-áramba tartozna

$$(J^\alpha)^i{}_j = \bar q^i O^\alpha_L q_j - \frac{1}{3}\sum_m \bar q^m O^\alpha_L q_m \quad \leftarrow \text{ez SU(3) szimmetrikus}$$

Lehetséges semleges áramok: $\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar u O^\alpha_L u + \bar d O^\alpha_L d + 2\bar s O^\alpha_L s)$ ← izoskalár

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar u O^\alpha_L u - \bar d O^\alpha_L d)$ ← ez a $\bar u O d$-vel és a $\bar d O u$-val izotriplettet alkot.

$\bar d O s$ és $\bar s O d$ elemek kiegészítik az oktettet két izodublettel, így teljes.

Mivel a gyenge KH nem inv SU(3)-ra, ezért a különböző áramok járuléka nem ezzel arányos, de a királis limitben emiatt különböző relációk felírhatók.

Konkrét esetek.

1) $K_{e2}$-bomlás  pl.: $K^+ \to e^+ \nu_e$

A kezelés hasonló a $\pi^+ \to e^+\nu_e$ esethez. SU(3) szimmetriát feltételezve, az axiálvektor szimmetriasértése miatt

$$H^\alpha = \langle 0|\bar s\, O_L^\alpha u|K^+\rangle = i\sqrt{2} f_K p^\alpha .$$

Egzakt SU(3) sima esetén $f_K = f_\pi$, ez nem egészen pontos.

Felhasználva, hogy $p = p_e + p_\nu$

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\sin\vartheta_c\, i\sqrt{2} f_K p^\alpha \bar u_\nu O_L^\alpha v_e = -iG\sin\vartheta_c f_K \bar u_\nu \not p(1-\gamma^5)v_e =$$

$$= -iG\sin\vartheta_c f_K \bar u_\nu(\not p_\nu+\not p_e)(1-\gamma^5)v_e = -iG\sin\vartheta_c f_K\bar u_\nu(1+\gamma^5)\not p_e v_e =$$

$$= iG\sin\vartheta_c f_K m_e \bar u_\nu(1+\gamma^5)v_e$$

Elvégezve a 4. tételben látott számolást

$$\Gamma = \frac{G^2\sin^2\vartheta_c f_K^2}{8\pi} m_K m_e^2 \left(1-\frac{m_e^2}{m_K^2}\right)^2$$

Mérésekből: $\Gamma(\pi\to\mu\nu) \approx \Gamma(\pi^+) = (2{,}6\cdot10^{-8}\,s)^{-1}$

$\Gamma(K\to\mu\nu)\approx 0{,}63\,\Gamma(K^+) = 0{,}63\cdot(1{,}2\cdot10^{-8}\,s)^{-1}$

A $K^+$ az esetek 63%-ában bomlik $\mu^+$-vé

$$\Rightarrow \frac{f_\pi}{f_K} = 1{,}3$$

2) $K_{e3}$-bomlás  pl.: $K^+\to e^+\nu_e\pi^0$ vagy $K^0\to e^+\nu_e\pi^-$

Ez is hasonló a pion $\beta$-bomlásához. Bevezetve $p = p_K + p_\pi$, $q = p_K - p_\pi$ -kat.

$$H_\alpha^{(+)} = \langle\pi^0|\bar s\, O_{L\alpha} u|K^+\rangle = f_+^{(+)}(q^2)p_\alpha + f_-^{(+)}(q^2)q_\alpha$$

$$H_\alpha^{(0)} = \langle \pi^-|\bar s\, O_{L\alpha}u|K^0\rangle = f_+^{(0)}(q^2)p_\alpha + f_-^{(0)}(q^2)q_\alpha$$

$$M_{fi}^{(+,0)} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\sin\vartheta_c\left(f_+^{(+,0)}(q^2)p_\alpha + f_-^{(+,0)}(q^2)q_\alpha\right)\bar u_\nu\gamma^\alpha(1-\gamma^5)v_e$$

$f_-$ tag a kis tömegkülönbség miatt elhanyagolható, $f_+$ pedig a szimmetriából kijön

ha $V_- = \int d^3x\,(\bar s\, O_L^0 u)(0,x)$ egytöltés, akkor

$[I_3,V_-] = -\frac{1}{2} V_-$ és $[Y,V_-] = -V_-$ továbbá $[I_-,V_-]=0$ található.

A mezon oktettben $\pi^-$-ra $V_3=-\frac{1}{2}$, $K^0$-ra $V_3=\frac{1}{2}$ a $V=\frac{1}{2}$ dublettben, ezért

$$f_+^{(0)} = \langle\pi^-|V_-|K^0\rangle = \sqrt{V(V+1)-V_3(V_3-1)} = 1$$

A másik formafaktor:

$$f_+^{(+)} = \langle \pi^0 | V_- | K^+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\langle \pi^- | I_- V_- | K^+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\langle\pi^-|V_- I_-|K^+\rangle = \frac12 \langle \pi^- | V_- | K^0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt2} f_+^{(0)} = \frac{1}{\sqrt2}$$

És mivel $f(0)$-ra van, az $f(q^2)$-t az alábbi képlettel illesztik a mért adatokra:

$$f_+^{(+)}(q^2) = f_+^{(+)}(0)\left(1+\lambda_+^{(+)} \frac{q^2}{m_{\pi^+}^2}\right) \quad\Rightarrow\quad \lambda_+^{(+)} \approx 0{,}03$$

A GF-relációhoz hasonlóan a PCAC-ból levezethető a Callan–Treiman-reláció:

$$f_+(m_K^2)+f_-(m_K^2) = f_K/f_\pi$$

A bomlásállandóra a végeredmény: $\Gamma = \dfrac{G^2\sin^2\theta_C\,|f_+^{(+)}(0)|^2}{12\pi^3}\, m_K^5 \left(\dfrac{m_{\pi^0}}{m_K}\right)^4 \left(1{,}52+\lambda_+^{(+)}\cdot 5{,}988\right)$

3) $K_{e4}$-bomlás pl.: $K^+\to\pi^+\pi^- e^+\nu_e$

Ha az impulzusok $p\to p_1+p_2+k_1+k_2$

és mivel $\langle\pi\pi|V|K\rangle$ pszeudovektor és $\langle\pi\pi|A|K\rangle$ vektor miatt

$$\langle\pi^+\pi^-|A_+^\mu|K^+\rangle = f_1(p_1+p_2)^\mu + f_2(p_1-p_2)^\mu + f_3(p-p_1-p_2)^\mu$$

$$\langle\pi^+\pi^-|V_+^\mu|K^+\rangle = \frac{f_4}{m_K}\,\varepsilon^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\, p^\nu p_1^\rho p_2^\sigma$$

$f_3$ és $f_4$ járulékát elhagyjuk, mert a tömegkülönbséggel lesz arányos.

PCAC-ból $f_{1,2}\approx \dfrac{1}{f_\pi}$.

4) Hiperonok bomlása.

Írjuk az áramot az alábbi alakban:

$$(j^\alpha)^i{}_j = \bar q^i O_L^\alpha q_j - \delta^i_j \frac13\sum_m \bar q^m O_L^\alpha q_m \quad .$$

Ezt explicit alakba írva:

$$j_a^\alpha = (j^\alpha)^i{}_j (t_a)^j{}_i = \bar q\, O_L^\alpha t_a q = \bar q\gamma^\alpha(1-\gamma^5)t_a q$$

$t_a$: SU(3) generátorai a fund. repr.-ban

$$[t_a,t_b]=i f_{abc}t_c \quad \text{és} \quad 2\,\mathrm{tr}\, t_a t_b = \delta_{ab}$$

A hadronikus mátrixelem általános formája:

$$\mathcal{M}_a^\mu(B\to B') = \langle B'|j_a^\mu(0)|B\rangle$$

ahol $|B\rangle$ és $|B'\rangle$ az oktett-barionok valamely lin. kombinációja;

$|B\rangle = B^a|a\rangle$ ahol $|a\rangle$ a bázis barionok.

B-k terének konkrét reprezentációjában használjuk a 3×3-as mátrixokat:

$$B = B^a t_a \equiv (B).$$

Legyen Hilbert-tér egyben, a skaláris szorzás: $\langle B'|B\rangle \equiv (B', B) := 2\,\mathrm{tr}\,\bar{B}' B =$

$$= \bar{B}'^a B^b \delta_{ab}$$

Mivel így minden vektor és axiálvektor az adjungált repr. szerint transzformálódik, ezért az $\mathcal{M}$-ban leíró bilineáris járulékok lehetséges alakjai:

$$2\,\mathrm{tr}\,\bar{B}' t_a B \quad \text{és} \quad 2\,\mathrm{tr}\,B t_a \bar{B}'$$

Az általános formula:

$$\mathcal{M}^\mu_a(B \to B') = (D^\mu + F^\mu)\cdot 2\,\mathrm{tr}\,\bar{B}' t_a B + (D^\mu - F^\mu)\cdot 2\,\mathrm{tr}\,B t_a \bar{B}' =$$

$$= D^\mu \cdot 2\,\mathrm{tr}\,\bar{B}'\{t_a, B\} + F^\mu \cdot 2\,\mathrm{tr}\,\bar{B}'[t_a, B]$$

a második tagról kiszámolható, hogy

$$2\,\mathrm{tr}\,\bar{B}'[t_a, B] = i f_{abc} B^b B'^c = -i f_{abc} B'^b B^c = \bar{B}'^b (T_a)_{bc} B^c$$

ahol $T_a$ az adjungált reprezentáció generátora.

Ezzel analóg módon, legyen az első tag

$$2\,\mathrm{tr}\,\bar{B}'\{t_a, B\} = d_{abc} B^b B'^c = d_{abc} B'^b B^c = B'^b (\tilde{T}_a)_{bc} B^c$$

ahol $\tilde{T}_a$-k 8 db szimmetrikus mátrixok (ez belátható)

$D^\mu$ és $F^\mu$ felbonthatók vektor és axiálvektor részre, amik a neutron esetéhez hasonló formafaktorokkal kifejezhetők. Mivel az impulzustranszfer itt is kicsi, ezért egyedül a $f_1$-es tagok maradnak, ezért

$$D^\mu = \bar{u}\gamma^\mu(D_V + D_A\gamma^5)u \quad \text{és} \quad F^\mu = \bar{u}\gamma^\mu(F_V + F_A\gamma^5)u$$

Mivel az áram vektorrésze megmarad, ezért $t$-független, így is a $T_a$-generátorral kifejezhető:

$$\int d^3\underline{x}\, \langle B'|j^\mu_{Va}(0,\underline{x})|B\rangle = \langle B'|T_a|B\rangle = \bar{B}'^b B^c \langle b|T_a|c\rangle$$

Előzőek alapján: $D_V(\tilde{T}_a)_{bc} + F_V(T_a)_{bc} = T_{ab} \implies D_V = 0,\ F_V = 1.$

Az amplitúdó pontos kiszámolásához szükség lesz még, hogy a B mátrix:

$$B = B^a t^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \hline \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{array}\right)$$

A releváns mátrixelemek:

$$\bar{u}\, O^\mu_L\, d = j^\mu_1 + i j^\mu_2 = j^\mu_{1+i2} \quad , \quad \bar{u}\, O^\mu_L\, s = j^\mu_4 + i j^\mu_5 = j^\mu_{4+i5}$$

$$t_{1+i2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad t_{4+i5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezek alapján

$$2\,\mathrm{tr}\, \bar{B}' t_{1+i2} B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}\right) \Sigma^- + \bar{\Sigma}^+ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda\right) + \bar{p}\, n$$

$$2\,\mathrm{tr}\, B t_{1+2i} \bar{B}' = \Sigma^+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}\right) \Sigma^- + \bar{\Xi}^0\, \Xi^-$$

amiből:

$n \to p$ : $\cos\vartheta_c\, (D+F)$

$\Xi^- \to \Xi^0$ : $\cos\vartheta_c\, (D-F)$

$\Lambda \to \Sigma^+$ : $\cos\vartheta_c \sqrt{\frac{2}{3}}\, D$

$\vdots$

$$2\,\mathrm{tr}\, \bar{B}' t_{4+i5} B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}\right) \Xi^- + \bar{\Sigma}^+ \Xi^0 + \bar{p} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda\right)$$

$$2\, B t_{4+i5} \bar{B}' = \bar{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda\right) + \bar{n}\, \Sigma^- + \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\Lambda}\right) \Xi^-$$

amiből

$\Lambda \to p$ : $-\sin\vartheta_c \frac{1}{\sqrt{6}} (D+3F)$

$\Xi^- \to \Lambda$ : $-\sin\vartheta_c \frac{1}{\sqrt{6}} (D-3F)$

$\Sigma^0 \to p$ : $\sin\vartheta_c \frac{1}{\sqrt{2}} (D-F)$

$\vdots$

Ez jó sok folyamat, amik megmérhetők, $D_A$, $F_A$, és $\vartheta_c$ illeszthető.

A kapott értékek: $D_A = 0{,}80$

$F_A = 0{,}45$

$\sin\vartheta_c = 0{,}23$ (eddig 0,21-nek tekintettük.)

# 9. tétel: Furcsaságot változtató nem-leptonikus folyamatok

Elképzelhetőek olyan folyamatok, ahol nincs lepton-komponens.

A könnyű kvarkokra szorítkozva, a Lagrange-i releváns tagjai:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\, \bar{d}' O_L^\alpha u\, \bar{u} O_{L\alpha} d' = -\frac{G}{\sqrt{2}}\Big[\cos^2\vartheta_C\, \bar{d} O_L^\alpha u \bar{u} O_{L\alpha} d + \sin^2\vartheta_C\, \bar{s} O_L^\alpha u \bar{u} O_{L\alpha} s +$$
$$+ \sin\vartheta_C \cos\vartheta_C \left(\bar{s} O_L^\alpha u \bar{u} O_{L\alpha} d + \bar{d} O_L^\alpha u \bar{u} O_{L\alpha} s\right)\Big]$$

Az utolsó tag a érdekes, mert abban van változás. Kihasználva, hogy $O_L^\alpha = 2\gamma^\alpha P_L$, és $P_L^2 = P_L$, az utolsó tag írható:

$$-2\sqrt{2}\, G \sin\vartheta_C \cos\vartheta_C \left(\bar{s}_L \gamma^\alpha u_L \bar{u}_L \gamma_\alpha d_L + \bar{d}_L \gamma^\alpha u_L \bar{u}_L \gamma_\alpha s_L\right)$$

Mivel a $d \leftrightarrow s$ átmenet egy végbe, ezért a kiválasztási szabály: $|\Delta S| = 1$

(Lehet nagyobb is, de csak a perturbációszámítás magasabb rendjében, és ez 14 nagyságrenddel kisebb amplitúdó!)

Az izospint nézve:
- $\bar{s}_L \gamma^\alpha u_L$ izodublett: $\frac{1}{2}$
- $\bar{u}_L \gamma^\alpha d_L$ $\quad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$

$\Rightarrow$ a konjugáltjuk is

$\Longrightarrow$ az izospin megváltozása vagy $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{2}$.

A következőkben belátjuk, hogy a $|\Delta I| = \frac{3}{2}$ rész elnyomott.

Bontsuk fel az alábbit:

$$2\bar{d}_L \gamma^\alpha u_L \bar{u}_L \gamma_\alpha s_L = \underbrace{\left(\bar{d}_L \gamma^\alpha u_L \bar{u}_L \gamma_\alpha s_L - \bar{u}_L \gamma^\alpha u_L \bar{d}_L \gamma_\alpha s_L\right)}_{M_-} + \underbrace{\left(\bar{d}_L \gamma^\alpha u_L \bar{u}_L \gamma_\alpha s_L + \bar{u}_L \gamma^\alpha u_L \bar{d}_L \gamma_\alpha s_L\right)}_{M_+}$$

Az $M$-ek felírhatók tenzor alakban:

$$M_\pm = \left(\bar{d}_L \otimes \bar{u}_L \pm \bar{u}_L \otimes \bar{d}_L\right)_{ai,bj} \left(\gamma^\alpha u_L \otimes \gamma_\alpha s_L\right)_{ai,bj}$$

ahol $a, b$: spinor indexek $1, \dots, 4$

$i, j$: szín indexek $r, g, b$

Az első tag lehet szimmetrikus vagy antiszimmetrikus kombinációja. Ennek következménye:

- izospinben: $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \underset{\text{antiszim}}{0} \oplus \underset{\text{szim}}{1}$

- színtérben: $3 \otimes 3 = \underset{\text{antiszim}}{\bar{3}} \oplus \underset{\text{szim}}{6}$

A második tag egy izodublett ($\frac{1}{2}$), tehát az antiszim esetben $|\Delta I| = \frac{1}{2}$, a szim esetben pedig $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{2}$.

Definiálunk a alábbi tagokat: $I_3 = M_- + h.c.$

$I_6 = M_+ + h.c.$ a Lagrange:

$$\delta\mathcal{L} = -\sqrt{2}\, G \sin\vartheta_c \cos\vartheta_c \,(I_3 + I_6)$$

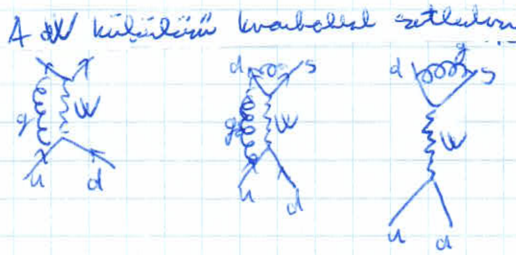
Először alakjuk $I_3$ csak $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ változást tud hozni, mint a $|\Delta I| = \frac{3}{2}$ átmenet csak a $I_6$-os konstanstól jelenik meg. A kísérletekkel viszont ez sokkal nagyobb, mint ez a képlet indokolná, mert kell játszani még KH is.

$\Longrightarrow$ figyelembe kell venni a gluonokat.

Mivel a soft gluonok nem kezelhetők perturbatívan, ezért ezekkel nem tudunk mit kezdeni, de a hard gluonok figyelembe vehetők egy effektív Lagrange-val.

Két fajta gluon-diagramot vizsgálatunk fel:

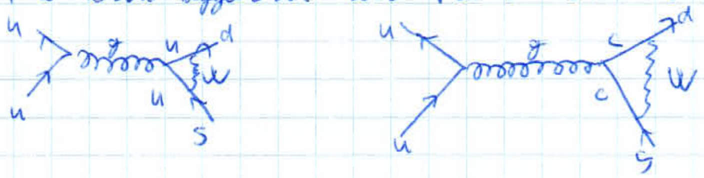
1) A W különböző kvarkokkal csatolódik:




Amikor a W-t összevonjuk egy ponttá, ugyanúgy 4-pont KH-kat kapunk. A $\mathcal{L}$ alakja nem változik, de a különböző izospin-multiplettek járuléka átskálázódik:

$$(I_3 + I_6) \to a_3 I_3 + a_6 I_6$$

2) A W-bozon ugyanazon kvark-párhoz csatolódik:




...

ilyenkor teljesen új járulékot kell bevezetni, ami jobbkezes kvarkokat kezel:

$$I_R = -(\bar{d}_L \gamma^\mu \lambda^a s_L)(\bar{u}_R \gamma_\mu \lambda^a u_R + \bar{d}_R \gamma_\mu \lambda^a d_R) \qquad \lambda^a\text{: Gell-Mann-mátrix}$$

Az első tényező $I = \frac{1}{2}$, a második $I = 0$ $\Rightarrow$ $|\Delta I| = \frac{1}{2}$

A teljes effektív Lagrange: $\delta\mathcal{L}_{eff} = -\sqrt{2}\, G \sin\vartheta_c \cos\vartheta_c \,(a_3 I_3 + a_6 I_6 + a_R I_R)$

perturbációs számításokkal: $a_3 = 3$, $a_6 = 0{,}6$, $a_R = 0{,}12$

$\Rightarrow$ Látszik, hogy a $|\Delta I| = \frac{3}{2}$ átmenet járuléka kisebb, mint a $|\Delta I| = \frac{1}{2}$-é.

A valóságban még ennél is kisebb, tehát még ennél is részletesebben vizsgálni kell.

# 10. tétel: A K-mezonok és a semleges K-mezonok nem-leptonikus bomlása

A K-mezonok bomolhatnak 2 vagy 3 pionra:

$$K^0, \bar{K}^0 \to \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0 \qquad K^0, \bar{K}^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\pi^0\pi^0$$

$$K^\pm \to \pi^\pm\pi^0 \qquad K^\pm \to \pi^\pm\pi^+\pi^-, \pi^\pm\pi^0\pi^0$$

$K^0$ transzformációja C-re és P-re:

$$C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad P|K^0\rangle = -|K^0\rangle, \quad CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$$

$$C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle, \quad P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

Ez alapján a alábbi szuperpozíciók sajátállapotai CP-nek:

$$|K_1^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |K_2^0\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$CP|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle, \quad CP|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$$

Mivel könnyű bomlásokra koncentrálunk a gyenge KH CP-invariáns, és minket ez érdekel, ezért érdemes $|K_1^0\rangle$ és $|K_2^0\rangle$-t keresni.

A $\pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^-\pi^0$ és $\pi^0\pi^0\pi^0$ állapotok sajátállapotai CP-nek, így csak maradhatnak

Két pion esetén:

$$CP|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^+\pi^-\rangle$$

$$CP|\pi^0\pi^0\rangle = (-1)^\ell|\pi^0\pi^0\rangle$$

és mivel $K^0$ $\ell$-je 0, ezért a második esetben is $CP = 1$.

Három pion esetén: Ha $\ell$ a két pion pályaimpulzus-momentuma, és $L$ a harmadiké (az előző kettőhöz képest), akkor a $\ell(K^0) = 0$ miatt $\ell = L$, továbbá:

$$CP|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = -(-1)^L|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = (-1)^{\ell+1}$$

$$CP|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -(-1)^{\ell+L}|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle$$

$\Rightarrow$ A $K_2^0$ csak 3 pionná bomolhat, a $K_1^0$ pedig bomolhat 2 pionná és $\pi^+\pi^-\pi^0$-vá is, de a fázistér nagysága miatt a 2-pionos bomlás sokkal dominánsabb $\Rightarrow$ $K_1^0 \to 2\pi$, $K_2^0 \to 3\pi$

Szintén a fázistér nagysága miatt $\Gamma(K_1^0) > \Gamma(K_2^0) \Rightarrow \tau_1 < \tau_2$.

$m_1 < m_2$.

Nézzük a $2\pi$ bomlást!

A végállapot: $|\pi\pi\rangle = A^a B^b |\pi_a \pi_b\rangle$

Mivel az két triplet állapot szorzata, ezért felbontható:

$$A^a B^b = \underbrace{\tfrac{1}{3}\underline{A}\,\underline{B}\,\delta^{ab}}_{I=0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}(\underline{A}\times\underline{B} - \underline{B}\times\underline{A})_c}_{I=1} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(A^a B^b + A^b B^a - \tfrac{2}{3}\underline{A}\,\underline{B}\,\delta^{ab}\right)}_{I=2}$$

Az $I=1$ komponens antiszimmetrikus, és mivel $\pi$-k bozonok, ezért ez nem lehet.

Mivel a $K^\pm \to \pi^+\pi^0$ végállapotában $I_3 = 1$, ezért ez csak $I=2$ járulékként jöhet.

Az $K^0 \to \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$-nál $I_3 = 0$, emiatt itt $I = 0, 2$ is lehet.

Mivel a $K$-knak $I=\frac{1}{2}$ és a kiválasztási szabály miatt $|\Delta I| = \frac{1}{2}$, ezért a végállapot csak $I=0$ lehet. $\Rightarrow$ A $K^+ \to \pi^+\pi^0$ bomlás tiltott.

(egyelőre a vezető rendben.)

Mivel a $I=0$ járulék a egyetlen nemadó a izospin-kellékek-ben, a többi faktor, valamint a fázistér pedig fix a $2\pi$ esetre, ezért a bomlási állandó

$$\Gamma(K_1^0 \to 2\pi) \propto \frac{|\underline{A}\cdot\underline{B}|^2}{|\underline{A}|^2|\underline{B}|^2 + |\underline{A}^*\cdot\underline{B}|^2}$$

$K_1^0 \to \pi^+\pi^-$ esetén: $\underline{A} = (1, i, 0)$ ; $\underline{B} = (1, -i, 0)$

$K_1^0 \to \pi^0\pi^0$ esetén: $\underline{A} = (0, 0, 1)$ ; $\underline{B} = (0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(K_1^0 \to \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_1^0 \to \pi^0\pi^0)} = 2.$$

A kísérletekben az eredmény 2,2 $\Rightarrow$ nem szabad eltekinteni az $I=2$ járuléktól.

Ha $I=2$ is játszik, akkor a $|\Delta I| = \frac{3}{2}$ nem elhanyagolható, vagyis $K^+ \to \pi^+\pi^0$ nem tiltott. Az effektív Lagrange alapján osztható izospin alapján:

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_{I=\frac{1}{2},\frac{3}{2}} \; \sum_{I_3=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} O_{I I_3}$$

ahol $O_{I I_3}$ operátor az $|i, i_3\rangle$ állapotot egy $\vec{I} + \vec{i}$ izospinű állapotba viszi, amely 3-ik komponense $I_3 + i_3$

A Clebsch–Gordan együtthatókkal ez felbontható:

$$O_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}|K^0\rangle = O_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,0\rangle_1 - |1\,0\rangle_1\right)$$

$$O_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|K^0\rangle = O_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left|\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle_1 - |0\,0\rangle_1\right)$$

$$O_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}|K^+\rangle = O_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\left|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(|2\,1\rangle_1 + |1\,1\rangle_1\right)$$

Mivel a pionállapotok szintén kifejezhetőek:

$$|\pi^+\pi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|2\,0\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0\,0\rangle_2$$

$$|\pi^0\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\,0\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0\,0\rangle_2$$

$$|\pi^+\pi^0\rangle = |2\,1\rangle_2$$

Elvégezve a szorzást:

$$\langle\pi^+\pi^-|\mathcal{L}_{eff}|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}_2\langle 20|20\rangle_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,{}_2\langle 00|00\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}A_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}A_0$$

$$\langle\pi^0\pi^0|\mathcal{L}_{eff}|K_1^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,{}_2\langle 20|20\rangle_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}_2\langle 00|00\rangle_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}A_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_0$$

$$\langle\pi^+\pi^0|\mathcal{L}_{eff}|K^+\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,{}_2\langle 21|21\rangle_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,{}_2\langle 20|20\rangle_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_2$$

Mivel a $|\Delta I| = \frac{3}{2}$ felcserélődés kicsi, ezért $A_2 \ll 1$

$$\frac{\Gamma(K_1^0\to\pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_1^0\to\pi^0\pi^0)} = \frac{p_\pm}{p_0}\,\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{3}}A_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}A_0\right|^2}{\left|\sqrt{\frac{2}{3}}A_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_0\right|^2} \cong \left(2 - 3\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{Re}\,A_2^* A_0}{|A_0|^2}\right)\frac{p_\pm}{p_0}$$

$$\frac{\Gamma(K^+\to\pi^+\pi^0)}{\Gamma(K_1^0\to\pi^+\pi^-) + \Gamma(K_1^0\to\pi^0\pi^0)} \cong \frac{3}{4}\,\frac{|A_2|^2}{|A_0|^2}$$

ahol $p_\pm/p_0 \approx 0{,}98$.

Mérések alapján $\frac{|A_2|}{|A_0|} \approx 0{,}045$.

# 11. tétel : GIM - mechanizmus

Kaonok az erős KH-ban keletkeznek az alábbi módon:

$$\pi^- p \to K^0 \Lambda ,$$

de bomlásuk gyenge KH-val történik. Bár a $K^0$ és $\bar{K}^0$ állapotok furcsaság-sajátállapotok, nem CP sajátállapotok, és mivel a bomlásuk (nagyjából) CP-tartó, ezért keverednek, és az idővel egymásba oszcillálnak.

Legyen egy kaon állapota az alábbi időben:

$$|K^0(t)\rangle = c_1(t)\,|K^0\rangle + c_2(t)\,|\bar{K}^0\rangle .$$

A Schrödinger-egyenletet egy effektív Hamiltonnal írhatjuk fel:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |K^0(t)\rangle = H_{eff}\, |K^0(t)\rangle .$$

A Hamilton sajátállapotai: $\quad H_{eff}\, |K^0_{S,L}\rangle = \left(m_{S,L} - \frac{i}{2}\Gamma_{S,L}\right) |K^0_{S,L}\rangle .$

Mivel a kaon bomlik, ezért a Hamilton-operátor nem hermitikus, hanem két bomlási amplitudóval jellemezhető: $\Gamma_S > \Gamma_L$

A 10. tételben látott $K_1$ és $K_2$ CP-sajátállapotok voltak, így az effektív Sch. megoldásai is. Mivel $\tau_1 < \tau_2$ ezért $K_1 = K_S$, $K_2 = K_L$
$\Gamma_1 = \Gamma_S$, $\Gamma_2 = \Gamma_L$

Legyen $t=0$-ban a $K^0$ állapot: $|K^0(0)\rangle := |K^0\rangle = \dfrac{|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle}{\sqrt{2}}$ !

Az időfüggés: $\quad |K^0(t)\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\left(m_1 - i\frac{\Gamma_1}{2}\right)} |K_1^0\rangle + e^{-i\left(m_2 - i\frac{\Gamma_2}{2}\right)} |K_2^0\rangle \right) .$

Ebből: $\quad \langle K^0 | K^0(t)\rangle = \dfrac{1}{2}\left( e^{-i\left(m_1 - i\frac{\Gamma_1}{2}\right)} + e^{-i\left(m_2 - i\frac{\Gamma_2}{2}\right)} \right)$

$$\langle \bar{K}^0 | K^0(t)\rangle = \frac{1}{2}\left( e^{-i\left(m_1 - i\frac{\Gamma_1}{2}\right)} + e^{-i\left(m_2 - i\frac{\Gamma_2}{2}\right)} \right)$$

Az áramban a megfigyelhető kaonok száma ennek négyzetével arányos:

$$N_{K^0}(t) \propto \frac{1}{4}\left( e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2\cos\big((m_2 - m_1)t\big)\, e^{-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}t} \right)$$

$$N_{\bar{K}^0}(t) \propto \frac{1}{4}\left( e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2\cos\big((m_2 - m_1)t\big)\, e^{-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}t} \right)$$

Az oszcilláció tehát a $\Delta m$ tömegkülönbséggel történik. Az $N_K(t)$ szám mérhető a $K^0 \to e \nu \pi$ bomlásból származó elektronok számával, vagy alapelvben, a keletkező $K p \to \Lambda \pi$ hiperonokkal.

Mivel a $K^0$ és $\bar{K}^0$ állapotok furcsasága 1 és −1, ezért az oszcilláció során $|\Delta S| = 2$. Bár az $s \leftrightarrow d$ folyamatot eddig nem láttuk, TFH lehet ilyen:

Ha elsőrendű folyamat lenne, akkor a Lagrange-ban egy ilyen tag lenne:

$$G_2(\bar{d}\, O_L^\alpha s\, \bar{d}\, O_\alpha s + \bar{s}\, O_L^\alpha d\, \bar{s}\, O d) \qquad \text{valamilyen } G_2 \text{ csatolással.}$$

Mivel $m_1 = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left( (\langle K^0| - \langle \bar{K}^0|) H_{eff} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \right)$ és

$$m_2 = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left( (\langle K^0| + \langle \bar{K}^0|) H_{eff} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \right)$$

ezért

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \mathrm{Re}\left( \langle \bar{K}^0 | H_{eff} | K^0 \rangle + \langle K^0 | H_{eff} | \bar{K}^0 \rangle \right)$$

A fenti csatolás esetén

$$\Delta m = 2 G_2 \mathrm{Re}\left( \langle \bar{K}^0 | \bar{s}\, O_L^\alpha d\, \bar{s}\, O_{L\alpha} d | K^0 \rangle \right) = 2 G_2 \mathrm{Re} \sum_n \langle \bar{K}^0 | \bar{s}\, O_L^\alpha d | n \rangle \langle n | \bar{s}\, O_{L\alpha} d | K^0 \rangle$$

$$\sim G_2 \langle \bar{K}^0 | \bar{s}\, O_L^\alpha d | 0 \rangle \langle 0 | \bar{s}\, O_{L\alpha} d | K^0 \rangle \propto G_2 f_K^2 m_K^2$$

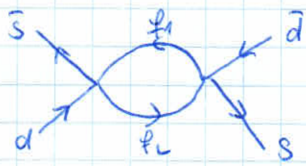
ahol $f_K$ a PCAC alapján a $K^+ \to e^+ \nu$ folyamatból

$$\langle 0 | \bar{s}\, O_\alpha d | K^0 \rangle = \langle 0 | \bar{s}\, O_\alpha u | K^+ \rangle = -i\, p_\alpha \sqrt{2} f_K$$

Mivel $f_K$ mérhető a leptonikus bomlásból, kaphatunk becslést $G_2$-re:

$$G_2 \sim 10^{-7} G_F.$$

Erre a csatolásra tekinthetünk úgy, mint egy effektív 4-fermion kölcsönhatás, amit két csúcs együttes hatásával kaptunk:




Ez egy egyhurok diagramm, ami kvadratikusan divergál. A renormálásban vezessünk be egy $\Lambda$ levágást, aminek a nagyságrendje $m_W$-be kell essen. Ez alapján $G_2 \simeq G_F^2 m_W^2 \simeq 0{,}1\, G_F$ ami nagy $\Delta m$ értéket adna.

Feloldás: figyelembe kell vennünk a $c$-kvarkot is, így az $f_1 - f_2$ hurok lehet $u$-$u$, $u$-$c$, $c$-$u$, $c$-$c$ hurok is.

A hadronikus áram releváns része: $\bar{u}\, O_L^\alpha d' + \bar{c}\, O_L^\alpha s'$

$$\text{ahol} \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_c & \sin\vartheta_c \\ -\sin\vartheta_c & \cos\vartheta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (V_c)_{ud} & (V_c)_{us} \\ (V_c)_{cd} & (V_c)_{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Az uu és cc hurok járuléka ez alapján $\sin^2\vartheta_c \cos^2\vartheta_c$

Az uc és cu hurok járuléka ugyanez $-\sin^2\vartheta_c \cos^2\vartheta_c$

Ha u és c tömege megegyezne, a gráfok kiejtenék egymást (nagy energián ez történik), egyébként a járulék $m_c - m_u$-tól függ.

Belátható, hogy $G_2 = \frac{G^2}{(4\pi)^2} \sin^2\vartheta_c \cos^2\vartheta_c \, (m_c - m_u)^2$

A korábbiak alapján, és a szín-algebrát is figyelembe véve:

$$\Delta m = 2 G_2 \,\mathrm{Re}\, \frac{8}{3} \langle \bar{K}^0 | \bar{s} O_L^\alpha d | 0 \rangle \langle 0 | \bar{s} O_{L\alpha} d | K^0 \rangle =$$

$$= \frac{16}{3} \frac{G^2}{(4\pi)^2} \sin^2\vartheta_c \cos^2\vartheta_c (m_c - m_u)^2 \cdot 2 f_K^2 m_K^2 \frac{1}{2 m_K} \approx$$

$$\approx \frac{1}{3} \frac{G^2}{\pi} \sin^2\vartheta_c \cos^2\vartheta_c \, m_c^2 f_K^2 m_K = \frac{4 \cos^2\vartheta_c \, m_c}{3\pi m_\mu^2} \Gamma(K^+ \to \mu^+ \nu_\mu).$$

Ez már egész jó eredmény.

# 12. tétel: τ-lepton, c-kvark, flavour családok

A τ-leptont 1975-ben fedezték fel, a hozzá tartozó leptont 2000-ben.

tulajdonságok: $S_\tau = \frac{1}{2}$, $m_\tau = 1{,}78\,\mathrm{GeV}$, $\tau_\tau = 3{,}4\cdot 10^{-13}\,\mathrm{s}$

A hozzá tartozó mátrixelem: $\delta\mathcal{L} = \bar{\nu}_\tau O_\tau^\alpha \tau$

Tud leptonikusan bomlani: $\tau \to \ell\, \bar{\nu}_\ell\, \nu_\tau$ ahol $\ell = e$ vagy $\mu$

Ennek elmélete a μ-bomlással azonos, vagyis $\Gamma(\tau \to \ell \bar{\nu}_\ell \nu_\tau) = \frac{G^2 m_\tau^5}{192\pi^3}$

(Kihasználtuk, hogy $m_\tau \gg m_\mu \gg m_e$.)

$$\Gamma(\tau \to \mu \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) = \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \Gamma(\mu \to e \bar{\nu}_e \nu_\mu) = 6{,}2\cdot 10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}$$

Mivel a tömege nagyobb, mint egyes hadronoké, ezért tud hadronikusan is bomlani.

Ötlet QCD-ből:

Nagy energián $e^+e^-$ ütközéseknél keletkezhetnek $\mu^+\mu^-$ párok vagy hadronok. Aszimptotikus szabadság miatt a folyamat kezelhető perturbatív módszerekkel:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadronok})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_f q_f^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + \dots\right)$$

ahol $\alpha_s(s)$ az erős csatolás $s$ TKP-energia esetén, az $f$-ek pedig azok a flavourök, amikre $4m_f^2 \le s$.

Elhanyagolva a magasabb rendű tagokat, és feltéve hogy $4m_s^2 < s < 4m_c^2$

$$R = 3\cdot\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2.$$

A képlet alapja, hogy az $e^+e^-$ ütközésnél ahhoz, hogy hadronok keletkezzenek, $\bar{f}f$ kvarkpároknak kell létrejönniük, amiből:

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadronok}) \to \sum_f \sigma(e^+e^- \to \bar{f}f)$$

Mivel a τ tömege kisebb, mint a legkisebb c-t tartalmazó hadroné ($D^0$) ezért csak a 3 könnyű kvarkot kell figyelembe venni:

$$\frac{\Gamma(\tau \to \nu_\tau + \text{hadronok})}{\Gamma(\tau \to \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu)} = \frac{\Gamma(\tau \to \nu_\tau u \bar{d}) + \Gamma(\tau \to \nu_\tau u \bar{s})}{\Gamma(\tau \to \nu_\tau \mu \nu_\mu)} = (\cos^2\theta_c + \sin^2\theta_c) N_c = 3$$

Ez alapján: $\Gamma(\tau) = \Gamma(\tau \to \nu_\tau + \text{hadronok}) + \Gamma(\tau \to \nu_\tau e \bar{\nu}_e) + \Gamma(\tau \to \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu) =$

$$= 5\,\Gamma(\tau \to \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu) = 3{,}1\cdot 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1} \Rightarrow \tau_\tau = 3{,}2\cdot 10^{-13}\,\mathrm{s}$$

kb. stimmel ✓

Két hadronikus bomlásfajta:

1) $\tau^- \to \pi^- \nu_\tau$

$$M_{fi} = -\frac{G\cos\vartheta_c}{\sqrt{2}}\,\bar u_\nu(p_\nu)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\tau(p_\tau)\,\langle\pi^-|(\bar d\gamma_\alpha(1-\gamma^5)u)(0)|0\rangle =$$

$$= i\frac{G\cos\vartheta_c}{\sqrt{2}} f_\pi \sqrt{2}\,\bar u_\nu(p_\nu)\not p_\pi(1-\gamma^5)u_\tau(p_\tau) =$$ felhasználva hogy $p_\pi = p_\tau - p_\nu$

$$= i G\cos\vartheta_c f_\pi m_\tau \bar u_\nu(p_\nu)(1+\gamma^5)u_\tau(p_\tau).$$

Mivel a $d\Phi^{(2)}$ fázistérelem csak a végállapoti részecskéinek csak az energiájától függ, ami az τ-nyugalmiban fix, ezért erre külön kiintegrálhatunk:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\frac{1}{2m_\tau}\Phi^{(2)} G^2\cos^2\vartheta_c m_\tau^2 f_\pi^2 \sum_{s_\tau}\bar u_\nu(p_\nu)(1+\gamma^5)u_\tau(p_\tau)\bar u_\tau(p_\tau)(1-\gamma^5)u_\nu(p_\nu) =$$

$$= \frac{G^2\cos^2\vartheta_c}{4} m_\tau f_\pi^2 \Phi^{(2)}\,\mathrm{tr}\left[(\not p_\tau+m_\tau)(1-\gamma^5)\not p_\nu(1+\gamma^5)\right] = 2G^2\cos^2\vartheta_c m_\tau f_\pi^2 \Phi^{(2)}(p_\tau p_\nu)$$

mivel $\Phi^{(2)} = \frac{E_\nu}{4\pi m_\tau} = \frac{1}{8\pi}\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)$

$$\Gamma = \frac{G^2\cos^2\vartheta_c f_\pi^2}{8\pi} m_\tau^3\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2 = \Gamma(\tau\to\mu\bar\nu_\mu\nu_\tau)\frac{24\pi^2}{m_\tau^2}\cos^2\vartheta_c f_\pi^2\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right) \simeq$$

$$\approx 0{,}6\,\Gamma(\tau\to\mu\bar\nu_\mu\nu_\tau)$$

2) $\tau \to \rho^- \nu_\tau$

A ρ-mezon összetétele a π-hoz hasonló: $\rho^+ = -u\bar d$ ; $\rho^0 = \frac{u\bar u - d\bar d}{\sqrt{2}}$ , $\rho^- = d\bar u$

$I=1$; $J=1$; $P=-1$, DE a spinje $S=0$ helyett $S=1$.

$\Longrightarrow$ A $\langle\rho^-|J_H^\alpha|0\rangle$ mátrixelemben az axiálvektor rész tűnik el és a vektor marad.

Ez az alábbi tagokkal írható:

$$H_\alpha = \langle\rho^-|\bar d\gamma_\alpha(1-\gamma^5)u|0\rangle = \langle\rho^-|\bar d\gamma_\alpha u|0\rangle = g_\rho\varepsilon_\alpha + f_\rho p_\alpha$$

ahol $p_\alpha$ az impulzusvektor, $\varepsilon_\alpha$ a polarizációs vektor.

Mivel $\rho^-$ tömeges vektorrészecske, 3 független polarizációja van, amik $p\cdot\varepsilon = 0$. Továbbá $\sum_s \varepsilon_\alpha^{(s)}\varepsilon_\beta^{(s)*} = -\eta_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m_\rho^2}$

Ez alapján $p_\alpha V^\alpha = f_\rho p^2 = f_\rho m_\rho^2 = 0 \Longrightarrow f_\rho = 0$.

Mivel $\varepsilon_\alpha$ dimenziótlan, $g_\rho$ dimenziója $m^2$. Az amplitúdó:

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\vartheta_c\, g_\rho\,\varepsilon_\alpha\,\bar u_\nu(p_\nu)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\tau(p_\tau)$$

$$\langle\langle |M_{fi}|^2 \rangle\rangle = \frac{G^2}{2} \cos^2\theta_c \, g_\rho^2 \left(-\eta_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m_\rho^2}\right) \mathrm{tr}\left[\gamma^\alpha (1-\gamma^5)(\not p_\tau + m_\tau)\gamma^\beta (1-\gamma^5)\not p_\nu\right] =$$

$$= \frac{G^2}{2} \cos^2\theta_c \, g_\rho^2 \left(-\eta_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m_\rho^2}\right) \mathrm{tr}\left[\gamma^\alpha \not p_\tau \gamma^\beta \not p_\nu\right] =$$

$$= 4 G^2 \cos^2\theta_c \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \left[2 (p p_\tau)(p p_\nu) + (p_\tau p_\nu) m_\rho^2\right] = \qquad \text{mivel } p = p_\tau - p_\nu$$

$$= 4 G^2 \cos^2\theta_c \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} (p_\tau p_\nu)(2 m_\rho^2 + m_\tau^2)$$

Az előzőekhez hasonlóan: $\phi^{(2)} = \frac{E_\nu}{4\pi m_\tau}$. A bomlásállandó:

$$\Gamma = \frac{G^2 \cos^2\theta_c}{16\pi} \left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 m_\tau^3 \left(1 - \frac{m_\rho^2}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2 m_\rho^2}{m_\tau^2}\right)$$

$g_\rho$ ismeretlen, de kifejezhetjük az alábbi EM-folyamattal:

$\rho^0 \to e^+ e^-$ $\qquad M_{fi} = \frac{4\pi\alpha_{EM}}{q^2} \bar{u}_e \gamma^\mu v_e \langle 0 | J_{EM\mu} | \rho^0 \rangle$ $\qquad$ ahol $q = p_{e^+} + p_{e^-}$

Az EM-áram megmaradás miatt $\langle 0 | J_{EM\mu} | \rho^0 \rangle = \frac{m_\rho^2}{\gamma} \varepsilon_\mu$

ahol $\gamma$ egy dimenziótlan konstans.

Ugyanakkor $J_{EM\mu}$ explicit alakját használva:

$$\langle 0 | J_{EM\mu} | \rho^0 \rangle = \langle 0 | \tfrac{2}{3} \bar{u}\gamma_\mu u - \tfrac{1}{3} \bar{d}\gamma_\mu d | \rho^0 \rangle = \langle 0 | \tfrac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d) + \tfrac{1}{6}(\bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d) | \rho^0 \rangle$$

mivel $\rho$ izotriplett, csak a triplet-áram hat rá

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \tfrac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}\gamma_\alpha u - \bar{d}\gamma_\alpha d) | \rho^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \bar{u}\gamma_\alpha d | \rho^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} g_\rho \varepsilon_\mu$$

$$\Rightarrow \quad g_\rho = \sqrt{2} \frac{m_\rho^2}{\gamma}$$

Az EM-folyamat bomlásállandója: $\Gamma(\rho^0 \to e^+ e^-) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{EM}^2}{m_\rho} \left(\frac{m_\rho}{\gamma}\right)^2$

kísérletből: $\frac{\gamma^2}{4\pi} = \frac{\alpha_{EM}^2}{3} \frac{m_\rho}{\Gamma(\rho^0 \to e^+ e^-)} = 2{,}1 - 2{,}36$.

---

c-kvark.

A kvarkszám mellett van egy újabb mennyiség, a varázsszám: C

$\Rightarrow$ van egy 4. kvark, az s-sel egy családban.

charmed-részecskék, amiknek a C nem 0. A legkönnyebbek a pszeudoskalár mezonok:

$D^+ = c\bar{d}$, $D^0 = c\bar{u}$ $\qquad m_{D^\pm} = 1{,}870$ GeV

$\bar{D}^0 = u\bar{c}$, $D^- = d\bar{c}$ $\qquad m_{D^0\bar{D}^0} = 1{,}865$ GeV

$D_s^+ = c\bar{s}$, $D_s^- = s\bar{c}$ $\qquad m_{D_s^\pm} = 1{,}968$ GeV

A charmed részecskék bomlásánál releváns tagok:

$$\delta\mathcal{L} = \left(\cos\vartheta_c\, \bar s\, O^\alpha_L\, c - \sin\vartheta_c\, \bar d\, O^\alpha_L\, c\right)\left(\sum_\ell \bar\nu_\ell\, O_\alpha \ell + \cos\vartheta_c\, \bar u\, O_\alpha d + \sin\vartheta_c\, \bar u\, O_\alpha s\right) + h.c.$$

• leptonikus bomlás:

kétféle folyamat: $\cos\vartheta_c\, \bar s\, O^\alpha_L\, c\, \bar\nu_e\, O_\alpha e$ $\quad c\to s\nu_e e^+ \quad \Delta C = \Delta S$

$-\sin\vartheta_c\, \bar d\, O^\alpha_L\, c\, \bar\nu_e\, O_\alpha e$ $\quad c\to d\nu_e e^+ \quad \Delta S = 0$

Mivel a két folyamatban a bomlásállandó a $\vartheta_c$ szögfüggvény négyzetével arányos, ezért az első folyamat a domináns: $\frac{\Gamma(c\to s)}{\Gamma(c\to d)} \propto \frac{\cos^2\vartheta_c}{\sin^2\vartheta_c} \approx 0{,}05$

például: első fajta: $D^+\to e^+\nu_e \bar K^0$, $D_s^+\to e^+\nu_e$

második fajta: $D^+\to e^+\nu_e$ $\quad D_s^+\to e^+\nu_e K^0$

• hadronikus bomlás

lehetséges mátrixelemek:

$\cos^2\vartheta_c\, \bar s\, O^\alpha_L\, c\, \bar u\, O_\alpha d$ $\quad c\to su\bar d \quad \Delta C = \Delta S$

$\cos\vartheta_c \sin\vartheta_c\, \bar s\, O^\alpha_L\, c\, \bar u\, O_\alpha s$ $\quad c\to sus$

$-\sin\vartheta_c \cos\vartheta_c\, \bar d\, O^\alpha_L\, c\, \bar u\, O_\alpha d$ $\quad c\to dud \quad \Delta C = -1,\ \Delta S = 0$

$-\sin^2\vartheta_c\, \bar d\, O^\alpha_L\, c\, u\, O_\alpha s$ $\quad c\to du\bar s \quad \Delta C = -\Delta S$

Az első a domináns, és mivel itt u.a. a kombináció 3-féle színben is előfordulhat, ezért a leptonikus esethez képest kb. egy 3-as szorzó:

$$\Gamma(c\to su\bar d) \approx 3\Gamma(c\to s e^+\nu_e)$$

charmed részecskék gyártása többnyire tenger részecskékből, neutrínó nyalábbal:

$$\nu_\mu s \to c\mu^-$$
$$\hookrightarrow s e^+\nu_e$$

megfigyelés a dileptonikus eseményeken keresztül.

Mivel nehezebb a $\tau$-nál, tud és szeret is abba bomlani:

$$\frac{\Gamma(D^+\to\tau^+\nu_\tau)}{\Gamma(D^+\to\mu^+\nu_\mu)} = \frac{m_\tau^2\left(1-\frac{m_\tau^2}{m_{D^+}^2}\right)}{m_\mu^2\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_{D^+}^2}\right)} \approx 2{,}5$$

$$\frac{\Gamma(D_s^+\to\tau^+\nu_\tau)}{\Gamma(D_s^+\to\mu^+\nu_\mu)} = \frac{m_\tau^2\left(1-\frac{m_\tau^2}{m_{D_s^+}^2}\right)^2}{m_\mu^2\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_{D_s^+}^2}\right)} \approx 17$$

# 13. tétel: Kobayashi-Maskawa-modell

A 3. kvarkcsalád létezését 1973-ban javasolta K és M, mint a CP-sértés egyik magyarázatát.

1977-ben fedezték fel úgy, hogy proton nyalábot lőttek platinumra:

$$pp \to e^+e^-X$$

X sokminden összessége, de az $e^\pm$-okat detektálva mérhették a keletkezési HKM-jét.

Eredmény: $\sqrt{s} = 9{,}46$ GeV-nél éles csúcs van a $\mu^+\mu^-$-re mért HKM-ben. Ebben keletkezik $\Upsilon = b\bar{b}$ részecske.

Tulajdonságai: $S_\Upsilon = 1$, $m_\Upsilon = 9{,}46\,\mathrm{GeV}$ $\Gamma_\Upsilon = 44{,}5\,\mathrm{keV}$ $\tau_\Upsilon = 1{,}2\cdot 10^{-20}\,\mathrm{s}$

A b-kvark: $m_b = 4{,}2\,\mathrm{GeV}$, $q_b = -\frac{1}{3}$.

A legkönnyebb b-t tartalmazó részecskék: $B^0 = b\bar{u}$ és $B^+ = u\bar{b}$

$m_B = 5{,}3\,\mathrm{GeV}$

fun fact: a $B^0 - \bar{B}^0$ rendszer a $K^0 - \bar{K}^0$-hoz hasonló oszcillációt mutat.

A b párját, a t-kvarkot 1995-ben fedezték fel.

$m_t = 173\,\mathrm{GeV}$, $q_t = \frac{2}{3}$. A részecskék tipikus bomlásideje $\tau \approx 10^{-25}\,\mathrm{s}$

Miért van szükség a harmadik kvarkcsaládra? 1964 óta tudjuk, hogy a CP nem szimmetriája a gyenge kH-nak, tehát a $\mathcal{L}$-ban valahol kell lennie egy CP-sértő résznek. A hadronikus rész: $J_h^\alpha = \sum_{f,f'=1}^{n} \bar{\alpha}_f O_L^\alpha \kappa_{f'} V_{ff'}$

ahol $\alpha$ és $\kappa$ az adott kvarkcsalád két tagja: $q_f = \begin{pmatrix}\alpha_f \\ \kappa_f\end{pmatrix}$

Bevezetve a módosított kvarkmezőt: $\kappa'_f = \sum_{f'} V_{ff'}\kappa_{f'}$, akkor egy értelmes dinamikát kapjunk, V mátrix unitér: $V^+V = 1$

Egy $n\times n$-es komplex mátrixnak $2n^2$ paramétere van. Az unitér feltétel

$$\sum_k V_{ik}V_{jk}^* = \delta_{ij} \leftarrow n^2 \text{ feltétel} \Rightarrow n^2 \text{ valós paraméter}$$

DE ebből nem mind fizikai. A QCD-nek van egy $U(1)^{2n}$ szimmetriája, ezen a

$\alpha_f \to e^{i\varphi_f}\alpha_f$ és $\kappa_f \to e^{i\psi_f}\kappa_f$ trafóik megengedettek.

Ez $2n$ fázis szabad megválasztását, de az utolsót megköti az, hogy az összes fázisnak ki kell ejtenie egymást. $\Rightarrow$ A fizikai paraméterek száma:

$$n^2-(2n-1) = (n-1)^2.$$

Az $n \times n$ komplex unitér mátrixok magukba foglalják az $n \times n$ ortogonális mátrixokat, amiket $\frac{n(n-1)}{2}$ szögparaméter határoz meg, a maradék fázisok.

Összegzés: $n^2$ valós paraméter

$\swarrow$ $\frac{n(n-1)}{2}$ szög paraméter

$\searrow$ $n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{n(n+1)}{2}$ fázis paraméter

$\downarrow$ $\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)$

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ fizikai fázis paraméter.

$n = 1$: 0 szög, 0 fázis $\Rightarrow$ nincs keveredés.

$n = 2$: 1 szög 0 fázis $\Rightarrow$ valós kvarkkeveredés ($V_C$ mátrix)

$n = 3$: 3 szög 1 fázis $\Rightarrow$ komplex kvarkkeveredés $\Rightarrow$ CP sértés

$V_{CKM}$: Cabibbo–Kobayashi–Maskawa-mátrix

Egy célszerű parametrizálás: szögek Euler-szögekkel: $\vartheta_{1,2,3}$
+1 fázistolás: $i\delta$.

jelölés: $s_i = \sin\vartheta_i$ ; $c_i = \cos\vartheta_i$

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_2 & s_2 \\ & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & \\ -s_1 & c_1 & \\ & & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_3 & s_3 \\ & -s_3 & c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - e^{i\delta} s_2 s_3 & c_1 c_2 s_3 + e^{i\delta} s_2 c_3 \\ s_1 s_2 c_2 & -c_1 s_2 c_3 - e^{i\delta} c_2 s_3 & -c_1 s_2 s_3 + e^{i\delta} c_2 c_3 \end{pmatrix}$$

Kísérleti értékek: 
$$\left.\begin{aligned} |c_1| &= 0{,}97420(21) \\ |s_1 c_3| &= 0{,}2243(5) \\ |s_1 s_3| &= 3{,}94(36) \cdot 10^{-3} \end{aligned}\right\}$$ négyzetösszeg: $0{,}9994(5)$ $\Rightarrow$ majdnem unitér

$\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\vartheta_3 = 0{,}02$ tehát tényleg kicsi.

ugyanez $\vartheta_2$-re.

# 14. tétel: Az áram×áram elmélet korlátai

Az eddigi 4-fermion kölcsönhatási csúcspontos elméletet kis energián használtuk, a perturbációszámítás első rendjében. Ha nagy energián, magasabb rendben nézzük a dolgokat, divergenciák lépnek elő, és renormálni kell. Belátjuk azonban, hogy az elmélet nem renormálható, mert újabb ellentagok hozzáadásával újabb divergenciák keletkeznek.

Csupán effektív elméletként tekinthetünk rá: az n-ik ellentag bevezetésével az eredmények pontosak lesznek az (n+1)-ik divergencia előfordulásáig.

Miért lesz a gyenge KH renormálhatatlan? (Belátható, hogy minden olyan elmélet amiben a csatolás negatív tömegdimenziójú, renormálhatatlan.) Az S-mátrix unitaritásával lesz probléma.

Nézzük a $e\nu_e$ elasztikus szórást!


A szórási amplitúdó polinomiális lesz p-ben (TKP-rendszerbeli impulzus), tehát a $\cos\vartheta_{CM}$ és $\sin\vartheta_{CM}$-ben is ($\vartheta_{CM}$: a bejövő és kimenő nyalábok közötti szög TKP-ben). Ez azt jelenti, hogy a szórási amplitúdót parciális hullám felbontásban felírva, véges tagot kapunk; és a HKM:

$$\sigma_{tot} \propto p^{-1} \sum_{J=0}^{J_{max}} (2J+1)\,|f_J|^2$$

Az S-mátrix unitaritásából (optikai tétel SILE-ből):

$$|f_J|^2 \le \mathrm{Im}\, f_J \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Re}\, f_J|^2 \le \mathrm{Im}\, f_J - |\mathrm{Im}\, f_J|^2 \le \frac{1}{4}$$

parabola maximuma akkor $\mathrm{Im}\, f_J = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |\mathrm{Re}\, f_J| \le \frac{1}{2}$$

Ugyanakkor, nagy energián dimenzióanalízis miatt $\sigma_{tot} \sim G^2 s$

$J=0$ esetet nézve, a HKM-ben levő integrált elvégezve

$$f_0 = \frac{Gs}{2\sqrt{2}\pi}.$$

Az egyenlőtlenség alapján $\frac{Gs}{\sqrt{2}\pi} \le 1$ tehát az unitaritás felső energiahatára:

$$\sqrt{s} \le \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{G}} \approx 600\,\mathrm{GeV}.$$

Megoldhatnánk a helyzetet egy közvetítő, nem nulla tömegű vektorbozonnal.

Ekkor a diff HKM az alábbi módon módosul:

$$\frac{d\sigma}{d|t|} = \frac{G^2}{\pi} \quad \longrightarrow \quad \frac{G^2}{\pi}\frac{m_W^4}{(m_W^2+|t|)^2}$$ (amíg $t \ll m_W^2$, addig a közelítés jó.)

Mivel $0 \le |t| \le s$, ezért a teljes HKM:

$$\sigma = \int_0^s d|t|\,\frac{d\sigma}{d|t|} = \frac{G^2}{\pi}s \quad \longrightarrow \quad \frac{G^2 m_W^2}{\pi}\,\frac{s}{s+m_W^2}$$

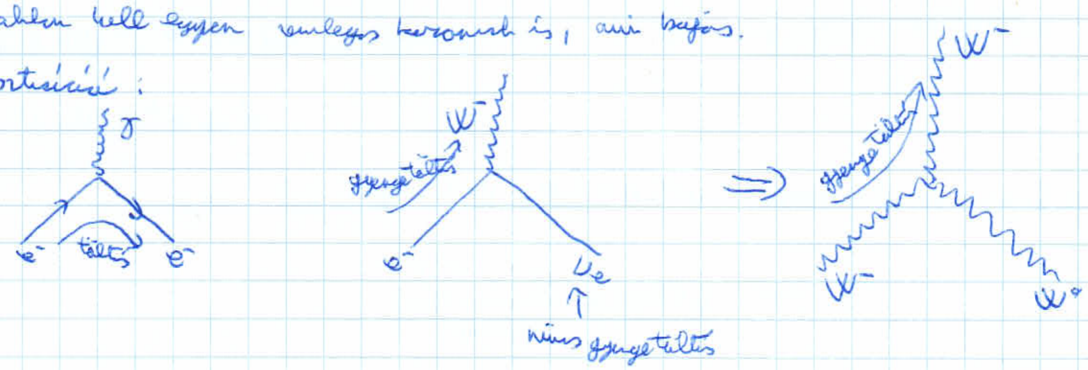
Tehát nagy energián a HKM konstans, így az unitaritás teljesül

Ez alapján az új elméletben a csatolás $g_W = G m_W^2$, ami dimenziótlan, tehát van esély a renormálhatóságra, de még mindig nem lesz az.

Az EM esetben a foton nem szállított se töltést se tömeget, így egy fermionvonalból kényelmesen leágazhatott.

A gyenge KH-ban egy $(e\nu W)$ csúcsnál a gyenge töltés a $e$-ből a $W$-be távozott, így a $\nu$ ezután nem bocsáthat ki több $W$-t. Ha a $W$ vitte el a töltést, akkor ő is ki kell tudjon bocsátani újabb $W$-t, de akkor kell egyen vanlegys bozonok is, ami furcsa.

Szemléltetésül:




Amúgy is probléma, hogy a fermionok tömege nem egyenlő, ezért se a vektor se az axiálvektor áram nem marad meg.

A probléma a tömeges vektorbozon miatt van. Ennek beláttatására nézzük meg, ezt kell precízen kimutatni:

A szabad tömeges bozon Lagrange-sűr.:

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 W_\mu W^\mu \qquad \text{ahol } F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

mozgásegyenlet: $$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial W_\mu} - \partial_\nu\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\nu W_\mu)} = 0 \implies (\Box+m^2)W^\mu - \partial^\mu\partial_\nu W^\nu = 0$$

Az egyenlet divergenciáját véve: $(\Box+m^2)\partial_\mu W^\mu - \Box\partial_\nu W^\nu = m^2\partial_\mu W^\mu = 0$

Az egyenlet tehát vétetik $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 3 \oplus 1$ vektorra:
$$\left.\begin{aligned}(\Box + m^2) W^\mu &= 0\\ \partial_\mu W^\mu &= 0\end{aligned}\right\}$$

Az utolsó egyenlet egy kényszer feltétel, az első pedig a KG-egyenlet tehát $W$ alakja:
$$W^\mu(x) = \int d\Omega_p \sum_{j=1}^{3}\left(\varepsilon_j^\mu(\mathbf{p}) e^{-ipx} a_j(\mathbf{p}) + \varepsilon_j^{\mu *}(\mathbf{p}) e^{ipx} b_j^\dagger(\mathbf{p})\right)$$

ahol a polarizációs vektorokra teljesül a $p\,\varepsilon_j(\mathbf{p}) = 0$.

A három független megoldás egy lehetséges parametrizációja:

$$\varepsilon_{1,2}^\mu := (0, \underline{s}_{1,2}) \qquad \text{ahol} \quad \underline{s}_i \underline{s}_j = \delta_{ij} \;\text{ és }\; \mathbf{p}\cdot\underline{s}_i = 0 \quad i,j=1,2$$

$$\varepsilon_3^\mu := \frac{1}{m}\left(|\mathbf{p}|, p^0 \hat{\mathbf{p}}\right) = \frac{p^\mu}{m} + \frac{m}{p^0 + |\mathbf{p}|}(-1, \hat{\mathbf{p}})$$

Vegyük észre, hogy $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = -\delta_{ij}$ $\quad i,j = 1,2,3$

és $\quad \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j^\mu(\mathbf{p}) \cdot \varepsilon_j^\nu(\mathbf{p}) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m}$ ,

Figyelembe véve egy $\delta\mathcal{L}_j = -W_\mu j^\mu$ forrástagot, az $m^2 W^\mu \to m^2 W^\mu - j^\mu$ helyettesítéssel kaphatjuk, így a mozgásegyenlet:
$$\left.\begin{aligned}(\Box + m^2) W^\mu &= \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2}\right) j_\nu\\ m^2 \partial_\mu W^\mu &= \partial_\mu j^\mu\end{aligned}\right\}$$

A Green-fv-t keresve: $W^\mu(x) = \int d^4y\, D^{\mu\nu}(x-y)\, j_\nu(y) \implies$

$$\implies \tilde{D}^{\mu\nu}(p) = \frac{-\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}}{p^2 - m^2}$$

A probléma onnan jön, hogy a propagátor második tagja csatolódik az áramhoz, ezért kapunk egy $p_\mu \tilde{j}^\mu$ tagot. Ha az áram megmaradó lenne, akkor ez 0 lenne, de sajnos nem az.
Továbbá, a longitudinális komponens, $\varepsilon_3^\mu$ vektoron csak a második tagja ad járulékot a Feynman-gráfba, tehát ha ez nem lenne, nagy energián is minden szál működne, ahogy a fotonnál.

Feladat: Tegyünk fel tömegtelen, töltött közvetítő bozonokat, és az elméletet renormálhatóvá téve, a tömegüket pedig magyarázzuk spontán szimmetriasértéssel! $\implies$ Higgs-mechanizmus

# 15. tétel: Spontán szimmetriasértés

Nézzük az alábbi, N db valós skalárteret tartalmazó Lagrange-t:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - U(\phi) \qquad \text{valamilyen } U(\phi) \text{ potenciálra!}$$

TFH a terek egy adott $G$ csoport ábrázolásának a bázisa, azaz ha $g \in G$ akkor

$$\phi_i(x) \to (g\phi)_i(x) = D_{ij}(g)\,\phi_j(x)$$

ahol $D_{ij}(g) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ és $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in G$-re.

Exponenciális alakba írva: $D(g) = e^{\varepsilon_a(g) T^a}$ ahol $\varepsilon_a(g) \in \mathbb{R}$

$T^a \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$T^{aT} = -T^a$

$a = 1 \dots n = \dim G.$

A csoportalgebra: $[T^a, T^b] = -f^{abc}T^c$

[ Ha komplex skalártereket veszünk az is visszavezethető lenne, mivel

$\varphi_i = \varphi_i^R + i\varphi_i^I$ felbontással, így 2N darab valós teret kapunk:

$$\phi_i = \varphi_i^R \qquad i = 1 \dots N$$

$$\phi_i = \varphi_{i-N}^I \qquad i = N+1 \dots 2N$$

Ha a komplex generátorok $t^a$-k, azaz $\delta\varphi_i = i\varepsilon_a t^a \varphi$

akkor a valós generátor: $\delta\phi = \varepsilon_a T^a \phi$ ahol

$$T^a = \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\, t^a & -\mathrm{Re}\, t^a \\ \mathrm{Re}\, t^a & -\mathrm{Im}\, t^a \end{pmatrix}$$
]

TFH a Lagrange invariáns $G$-re, azaz $U(g\phi) = U(\phi)$!

A rendszer energiája $E[\phi] = \int d^3\underline{x} \left(\frac{1}{2}\partial_0\phi_i\partial_0\phi_i + \frac{1}{2}\underline{\nabla}\phi_i \cdot \underline{\nabla}\phi_i + U(\phi)\right)$,

tehát statikus megoldás esetén a minimum energiához tartozó állapot (ezt nevezik a vákuum) az $U(\phi)$ minimuma.

Legyen $\min U = 0$, és $\phi_0$ a vákuum: $U(\phi_0) = 0$. Mivel $G$ szimmetria, ezért $U(g\phi_0) = 0$ $\forall g$-re, még akkor is, ha $g\phi_0 \neq \phi_0$.

Legyen az alapállapotok halmaza: $\mathcal{M} = \{\phi_0 \mid U(\phi_0) = 0\}$

a $\phi_0$-t fixen hagyó trafók: $H = \{h \in G \mid h\phi_0 = \phi_0\}$.

[ Elvileg $H$ függ $\phi_0$-tól, de a releváns esetekben minden $\phi_0$-ra azonos. ]

Ha $|M| > 1$, akkor a szimmetria sérül (hiszen a alapállapot nem invariáns a rendszer szimmetriájára.)

$H$ nyilván részcsoport, így definiálhatjuk a mellékcsoportját:

$$gH = \{gh \mid h \in G\}$$

Ez invariáns a $h$-val való szorzásra, így a $gH$ mellékosztályok között értelmezett konjugációs művelet egy újabb csoportot alkot, amit faktorcsoportnak hívunk: $G/H$. A korábbiak alapján $|M| = |G/H|$.

3 lehetőség:
- $H = G \Rightarrow G/H = \{e\} \Rightarrow |M| = 1$, nincs szimmetriasértés
- $H = \{e\} \Rightarrow G/H = G \Rightarrow |M| = G$, a szimmetria teljesen sérül.
- $H \subset G \Rightarrow 1 < |M| < |G|$, a szimmetria $H$-ra redukálódik.

Generátorok szintjén: Ha $G$ $n$-dimenziós, és generátorai $\{T^1, \dots, T^n\}$, és $H$ $n'$-dimenziós, akkor $G$ első $n'$ generátora $H$ generátora is. A maradék $\{T^{n'+1} \dots T^n\}$ generátorok $G/H$-hoz tartoznak.

Példák: 1) $G = SO(2)$ Az $SO(N)$ $\frac{N(N-1)}{2}$ dimes, tehát $n = 1$.

$$T = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

A mexikói-kalap potenciál: $U(\phi) = \frac{\lambda}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 - a^2)^2$. $\lambda, a > 0$.

Az alapállapot: $M = \{\phi \mid \phi_1^2 + \phi_2^2 = a^2\}$ ← körvonal.

Mivel a forgatás a kört helyben hagyja, ezért $G$ szimmetria, de adott vektort minden tagja elviszi, tehát $H = \{e\} \Rightarrow$ a szimmetria teljesen megtörik

Ezt láthatjuk abból is, hogy a $T\phi = 0$ csak olyan $\phi$-re igaz, ami $\phi_1 = \phi_2 = 0 \notin M$

2) $G = SU(2)$

Legyen a komplex vektorok: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow N = 4,\ n = 3$

A mexikói kalap potenciál: $U(\psi) = \lambda(\psi^\dagger\psi - a^2)^2 = \lambda\left(\sum_{i=1}^{4} \phi_i^2 - a^2\right)$ $\lambda, a > 0$.

Alapállapotok: $M = \{\phi \mid \sum_{i=1}^{4} \phi_i^2 = a^2\}$ ← 4-dimes gömbfelület

Az általános mátrixelem: $g = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix}$ ahol $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$

tehát topológiailag ez is egy 4-dimes gömbfelület, így nem hagyhatja invariánsan $M$ egy elemét sem. $\Rightarrow H = \{e\}$.

3) $G = SO(3)$ $\qquad N=3,\ n=3$

$$U(\phi)=\lambda\left(\sum_{i=1}^{3}\phi_i^2-a^2\right)^2 \Rightarrow \mathcal{M}=\left\{\phi \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3}\phi_i^2=a^2\right\} \leftarrow \text{3-dim-s gömbfelület}$$

A $\phi_0=(0,0,a)$ alapállapotot a $H=\{h(\alpha)\mid \alpha\in[0,2\pi]\}$ helyben hagyja

$$\text{ahol}\quad h(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

Tehát $H=SO(2) \Rightarrow \mathcal{M}=G/H=SO(3)/SO(2)=S^2 \leftarrow$ 3 dim-s gömbfelület.

Goldstone tétel: Ha egy $G$ (dim $G=n$) szimmetriacsoport sérül és redukálódik $H$-ra (dim $H=n'$), akkor megjelenik $n-n'$ db tömegtelen bozonállapot (sérülő generátoronként egy).

Bizonyítás: Tekintsük az alábbi infinitezimális trafót: $g=e^{\varepsilon T}\approx 1+\varepsilon\cdot T$

Mivel $U$ invariáns, ezért

$$U(\phi)=U(g\phi)=U(\phi+\varepsilon T\phi)\approx U(\phi)+\frac{\partial U}{\partial\phi_i}(\phi)\,(\varepsilon T)_{ij}\,\phi_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial\phi_i}(\phi)\,T_{ij}\,\phi_j=0\,.$$

Ezt deriválva $\phi_k$ szerint: $\quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi_k\partial\phi_i}(\phi)\,T^a_{ij}\,\phi_j+\dfrac{\partial U}{\partial\phi_i}(\phi)\,T^a_{ik}=0$

Legyen $\phi=\phi_0$! Mivel $U$-nak minimuma van, $\frac{\partial U}{\partial\phi_i}(\phi_0)=0$. További, definiáljuk az $M^2_{ki}:=\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi_k\partial\phi_i}(\phi_0)$ mátrixot.

$$M^2_{ki}\,T^a_{ij}\,\phi_{0j}=0. \quad\Rightarrow\quad \text{A } T^a\phi_0 \text{ vagy } =0 \text{ vagy a } m^2=0$$
sajátértékhez tartozó sajátállapot.

$a=1\dots n'$ esetén $e^{\varepsilon T^a}\phi_0=\phi_0 \Rightarrow T^a\phi_0=0$ teljesül, de
$a=n'+1\dots n$ esetén $T^a\phi_0\neq 0$ ezek tehát valós fizikai állapotok.

Mivel $U$-nak $\phi_0$-ban minimuma van, ezért
$U(\phi)=U(\phi_0+\tilde\phi)=\frac{1}{2}\tilde\phi_k M^2_{ki}\tilde\phi_i+\dots$

tehát $M^2$ mátrix a tömeg tagként ad járulékot $\Rightarrow$ az el nem tűnő $T^a\phi_0$ állapotok tömegtelen bozonok. (Goldstone-bozonok)

Példa: SO(2) esete

Nézzük az alábbi alapállapotot: $\phi_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

A Lagrange egy tetszőleges $\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$-vel:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi}_1 \partial^\mu \tilde{\phi}_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi}_2 \partial^\mu \tilde{\phi}_2 - \frac{\lambda}{2}\left[(a+\tilde{\phi}_1)^2 + \tilde{\phi}_2^2 - a^2\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi}_1 \partial^\mu \tilde{\phi}_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi}_2 \partial^\mu \tilde{\phi}_2 - \frac{\lambda}{2}\left(4a^2\tilde{\phi}_1^2 + 4a\tilde{\phi}_1(\tilde{\phi}_1^2+\tilde{\phi}_2^2) + (\tilde{\phi}_1^2+\tilde{\phi}_2^2)^2\right)$$

A két térhez tartozó tömeg: $m_1^2 = 4\lambda a^2$, $m_2^2 = 0$

és vegyük észre, hogy $\tilde{\phi}_i T_{ij} \phi_{0j} = -a\tilde{\phi}_2$

Szemléletesebb, ha bevezetjük $\varphi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$ U(1) szimmetriájú komplex skalárteret.

A Lagrange: $\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \frac{\lambda}{2}(2\varphi^*\varphi - a^2)^2$.

Az alapállapot: $\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, tetszőleges állapot: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+\eta(x))e^{i\frac{\vartheta(x)}{a}}$

valós $\eta(x)$ és $\vartheta(x)$ terekre. Ezeket beírva $\mathcal{L}$-be:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - 2a^2\lambda\eta^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\vartheta\partial^\mu\vartheta \underbrace{- \frac{\lambda}{2}(4a\eta^3+\eta^4) + \left(\frac{\eta}{2}+\frac{\eta^2}{2a^2}\right)\partial_\mu\vartheta\partial^\mu\vartheta}$$

A két tömeg tehát $m_\eta^2 = 4\lambda a^2$

$m_\vartheta^2 = 0$ és ezek egymással elég undorító módon hatnak kölcsön.

A $\vartheta$ Goldstone-bozon valódi jelentése tehát: U(1) szimmetria miatt a $\varphi$-tér fázisa eltolható lenne, ezzel $\vartheta \to \vartheta + c$ transzf.-t lehetne. A szimmetriasértés során, úgy hogy a különböző $\vartheta$-k ekvivalensek kell legyenek és a $m^2=0$ tömeg biztosítja, hogy a perturbációszámítás magasabb rendjében se jelenjen meg a különböző alapállapotok közötti különbség.

## Kiegészítés: Gauge-elméletek

Az EM kölcsönhatásának szimmetriája az alábbi lokális trafó:

$$\Psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\Psi(x) \quad , \quad \bar{\Psi}(x) \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x)$$

Mi a lokalitás szerepe? A KH-k nem terjedhetnek gyorsabban, mint a fény, tehát egy esemény csak a fénykúpjában hathat vissza. Ha a kölcsönhatást jellemző szimmetriatrafó megváltoztatja $\Psi$ fázisát mindenhol egyszerre, akkor ez a kauzalitás megsértése. $\Rightarrow$ A KH-kat leíró transzformációk lokálisak. EM esetén ez az $U(1)$ csoport, ezt szeretnénk általánosítani.

Legyen az alábbi Lagrange invariáns a $G$ globális transzformációk csoportra!

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_i^* \partial^\mu \phi_i - \mathcal{U}(\phi)$$

A transzformációs szabály: $(g\phi)_i(x) = U_{ij}(g)\phi_j(x)$ ahol $U_{ij}(g) = e^{i\varepsilon_a(g)T^a}$

A generátorok: $[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c$

Az invariancia feltétele: $\mathcal{U}(g\phi) = \mathcal{U}(\phi) \quad \forall g$-re.

Tegyük $G$ trafókat lokálissá! Ekkor $g(x)$ helyfüggő lesz, és az inv feltétele:

$\mathcal{U}(g(x)\phi(x)) = \mathcal{U}(\phi(x))$. A kinetikus tagok:

$$\partial_\mu \phi_i(x) \to \partial_\mu (U_{ij}(x)\phi_j(x)) = U_{ij}(x)\partial_\mu \phi_j(x) + \partial_\mu (U_{ij}(x))\phi_j(x)$$

$\Rightarrow$ Nem teljesül a csoportátalakulás $\partial_\mu \phi_i(x)$-re.

Ennek kompenzálásához vezessük be a gauge tereket: $A_\mu^a(x) \quad a = 1 \dots \dim G$

és a $\partial_\mu$-t cseréljük ki a kovariáns deriváltra:

$$(D_\mu \phi)_i = \partial_\mu \phi_i - i g T^a_{ij} A^a_\mu \phi_j = \partial_\mu \phi_i - i g (A_\mu \phi)_i$$

Ha a $g$ trafó hatására $\phi(x) \to U(x)\phi$, $A^a_\mu(x) \to A'^a_\mu(x)$, akkor

$$(\partial_\mu - i g A_\mu(x))\phi(x) \to U(x)\partial_\mu \phi(x) + (\partial_\mu U(x))\phi(x) - i g A'_\mu(x) U(x)\phi(x) =$$
$$= U(x)\left[\partial_\mu - i g \left(U^{-1}(x) A'_\mu(x) U(x) + \frac{i}{g} U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)\right)\right]\phi(x)$$

A kovariáns derivált invarianciájának feltétele tehát az alábbi:

$$A_\mu(x) = U^{-1}(x) A'_\mu(x) U(x) + \frac{i}{g} U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)$$

vagy ezzel ekvivalens: $A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x)$

Ezekkel tehát: $D_\mu \phi(x) \to U(x) D_\mu \phi(x)$.

A Riemann-tenzorhoz hasonlóan, a gauge terek dinamikáját kezeljük. A skalártér második deriváltja:

$$D_\mu D_\nu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi - igA_\mu \partial_\nu \phi - ig(\partial_\mu A_\nu)\phi + (-ig)^2 A_\mu A_\nu \phi .$$

A kommutátor:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu])\phi =: ig F_{\mu\nu}\phi$$

térerősség tenzor: $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T^a$ ahol

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

belátható, hogy a transzformáció: $F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}$, tehát az alábbi kombináció gauge-invariáns: $\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}_F F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

(ahol $\mathrm{tr}_F$ a fundamentális reprezentáció trace-e)

A teljes Lagrange tehát:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)_i (D^\mu \phi)_i - \mathcal{U}(\phi) + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

első tag: A-A kölcsönhatás (köbös és kvartikus is!)

második tag: $\phi$-A kölcsönhatás

negyedik tag: $\psi$-A kölcsönhatás

vegyük észre, hogy a $m^2 A_\mu A^\mu$ tag nincs a gauge invariancia miatt

$\Longrightarrow$ tömegtelen közvetítőrészecskék

Mozgásegyenlet: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_\nu} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} - ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu$$

vagy ezzel ekvivalens módon: $(D_\mu)^a_b F^{b\mu\nu} = J^{a\nu}$

Tehát a kölcsönhatást tömegtelen vektorbozonok fogják közvetíteni, amiknek 2db szabadsági fokuk van.

# 16. tétel: Higgs-mechanizmus

Kombináljuk össze a szimmetriasértést a gauge elmélettel!

A releváns Lagrange:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + (D_\mu\phi)^T (D^\mu\phi) - \mathcal{U}(\phi) \qquad (\mathcal{U}(\phi) \geq 0) \qquad \phi: \text{valós skalártér}$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g A^a_\mu T^a$$

TFH $\exists \phi_0 \neq 0$ ami $\mathcal{U}(\phi_0) = 0 \Rightarrow \mathcal{M} = \{G\phi_0\}$

$$H = \{h \mid h\phi_0 = \phi_0\}$$

tetszőleges teret felírhatjuk $\phi = \phi_0 + \tilde\Phi$ alakban

Ha $\dim G = n$ és $\dim H = n' < n$, akkor $a = 1 \cdots n'$ esetén triviálisan teljesül a $\tilde\Phi_i T^a_{ij} \phi_{0j} = 0$ összefüggés, hiszen $H$ helyben hagyja $\phi_0$-t.

Kössük ki ezt az $a = n'+1 \cdots n$ generátorokra is, ezzel eltüntetjük a Goldstone-bozonokat, és a gauge bozonok veszik át a helyüket:

$$\tilde\Phi_i T^a_{ij} \phi_{0j} = 0 \qquad a = 1, \cdots, n \qquad \text{(unitaritási gauge feltétel)}$$

Konkrét fizikai dolgok kiszámolásakor rögzítenünk kell a gauge-et, ezzel sérül a szimmetria.* A Lagrange tagjai:

$$(D_\mu\phi)^T (D^\mu\phi) = \partial_\mu\phi_i \partial^\mu\phi_i - i g A^a_\mu \left(\partial^\mu\phi_i T^a_{ik} \phi_k - \phi_i T^a_{ik} \partial^\mu\phi_k\right) + g^2 \phi_i (T^a T^b)_{ij} \phi_j A^a_\mu A^{b\mu} =$$

$$= \partial_\mu\tilde\Phi_i \partial^\mu\tilde\Phi_i - i g A^a_\mu \left[\partial^\mu\left(\tilde\Phi_i T^a_{ik} \phi_k - \phi_i T^a_{ik} \tilde\Phi_k\right) + \partial^\mu\tilde\Phi_i T^a_{ik} \tilde\Phi_k - \tilde\Phi_i T^a_{ik} \partial^\mu\tilde\Phi_k\right] +$$

$$+ g^2 \phi_i (T^a T^b)_{ij} \phi_j A^a_\mu A^{b\mu} =$$

$$= \partial_\mu\phi_i \partial^\mu\phi_i + g^2 \phi_i (T^a T^b)_{ij} \phi_j A^a_\mu A^{b\mu} + A\phi\phi \text{ tagok.}$$

Tehát a gauge terek tömegmátrixa: $M^2_{ab} = g^2 \phi_{0i} (T^a T^b)_{ij} \phi_{0j} = -g^2 \langle T^a \phi_0, T^b \phi_0 \rangle$

$$\langle a, b\rangle := \sum_i a_i b_i$$

Mivel valós tereket vesszük, $iT^a$ valós mátrix, tehát a $M^2_{ab}$ pozitív definit:

$\forall v_a \in \mathbb{R}$-re:

$$v_a v_b M^2_{ab} = \langle i g v_a T^a \phi_0, i g v_b T^b \phi_0 \rangle \geq 0$$

Mivel $T^a \phi_0 = 0$ $a = 1, \cdots, n'$ szerint a $M^2$ alakja:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0_{n' \times n'} & 0_{n' \times (n-n')} \\ 0_{(n-n') \times n'} & \tilde M^2_{(n-n') \times (n-n')} \end{pmatrix}$$

ahol $\tilde M^2$ diagonalizálható tisztán pozitív sajátértékekkel.

$\Longrightarrow$ lesz $n'$ db tömegtelen és $(n-n')$ db tömeges gauge bozon.

---

*: mivel a gauge rögzítésével megsértjük a lokális szimmetriát, és a fizikai állapotok csak nem Lorentz-inv. gauge-ekben vannak, ezért a Goldstone-formalizmus nem alkalmazható. Lorentz-gauge-ben igen, de ott a bozonok nem fizikaiak.

Példák

1) $G = SO(2)$ avagy $U(1)$ (praktikus ezt használni)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - \frac{\lambda}{2}(2\varphi^*\varphi - a^2)^2 \qquad \lambda > 0$$

ahol $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$

Az alapállapot: $F_{\mu\nu} = 0$, $A_\mu = 0$, $\varphi(x) = \varphi_0$ ahol $\varphi_0^*\varphi_0 = \frac{a^2}{2}$

Válasszuk a $\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ alapállapotot, és a tetszőleges mezőt írjuk ilyen alakban:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + \eta(x))\, e^{i\frac{\vartheta(x)}{a}}$$

Rögzítsük a gauge-t az alábbi módon: $\varphi(x)$ mindig valós legyen az alábbi trafóval:

$$\varphi(x) \to e^{-i\frac{\vartheta(x)}{a}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + \eta(x)) \qquad \text{[unitér gauge]}$$

A gauge mezőre ez a trafó:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{i}{-e}\left(\partial_\mu e^{-i\frac{\vartheta(x)}{a}}\right) e^{i\frac{\vartheta(x)}{a}} = A_\mu(x) + \frac{1}{ea}\partial_\mu\vartheta(x) =: B_\mu(x)$$

ahol $B_\mu$ a rögzített gauge mező. Ezzel kifejezve mindent:

$$F_{\mu\nu}(B) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad D_\mu(B) = \partial_\mu + ie B_\mu$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) + \left(D_\mu(B)\frac{a+\eta}{\sqrt{2}}\right)^*\left(D^\mu(B)\frac{a+\eta}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\lambda}{2}\left((a+\eta)^2 - a^2\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}e^2 B_\mu B^\mu (a+\eta)^2 - \frac{\lambda}{2}(\eta^2 + 2a\eta)^2$$

$B$ gauge mező tömege: $m_B = ea$

$\eta$ Higgs-mező tömege: $m_\eta = 2a\sqrt{\lambda}$

A $\vartheta$ Goldstone bozon eltűnt, pontosabban a $B_\mu$ gauge-mező longitudinális komponensébe olvadt be.

A szabadsági fokok száma a szimmetriasértés

| előtt | | után | |
|---|---|---|---|
| 2 valós skalártér $(\eta, \vartheta)$: | 2 | 1 valós skalártér $(\eta)$: | 1 |
| 1 tömegtelen vektortér $(A_\mu)$: | 2 | 1 tömeges vektortér $(B)$: | 3 |
| | 4 | | 4 |

A gauge feltételt megkaphatjuk, ha a valós terekkel írjuk:

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi = \phi_0 + \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} a + \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}^T T \phi_0 = 0 \;\checkmark.$$

4) $G = SU(2)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + (D_\mu \psi)^\dagger (D^\mu \psi) - \lambda (\psi^\dagger \psi - a^2)^2 \qquad \lambda > 0$$

ahol $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\, \varepsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$ , $D_\mu = \partial_\mu - ig A^a_\mu \frac{\sigma^a}{2}$

$a = 1, 2, 3$ . . .

A vákuumállapot: $A^a_\mu = 0$ , $\psi_0^\dagger \psi_0 = a^2$ , legyen $\psi_0 = (0, a)$

Ekkor $\psi(x) = e^{i \frac{\vartheta^a}{a} \frac{\sigma^a}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ a + \frac{\eta(x)}{2} \end{pmatrix}$

A gauge-t rögzítsük úgy, hogy $\psi_2$ valós legyen!

$\Omega(x) := e^{-i \frac{\vartheta^a(x)}{a} \frac{\sigma^a}{2}}$ $\qquad \psi'(x) = \Omega(x) \psi(x)$

$$A'_\mu(x) = \Omega(x) A_\mu(x) \Omega^\dagger(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu \Omega(x)) \Omega^\dagger(x)$$

Ekkor a tagok a $\mathcal{L}$-ben:

$$(D_\mu \psi')^\dagger (D_\mu \psi') = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \partial_\mu \eta) + ig \left(0, a + \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}}\right) A'_\mu \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial^\mu \eta \end{pmatrix} - ig A'^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ a + \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta\, \partial^\mu \eta + \frac{g^2}{4} A'^a_\mu A'^{a\mu} \left( a + \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta\, \partial^\mu \eta + \frac{g^2}{4} A^a_\mu A^{a\mu} \left( a + \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 - \lambda \frac{\eta^2}{2} \left( 2a + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$A^a$ gauge bozonok tömege: $m_A = \frac{ga}{\sqrt{2}}$

$\eta$ Higgs-bozon tömege: $m_\eta = 2a\sqrt{\lambda}$

Mivel a teljes szimmetria sérült, mindhárom $\vartheta(x)$ tér beépült $A$-ba.

| szabadsági fokok | előtte | utána |
|---|---|---|
| | 4 valós skalártér $(\eta, \vartheta^a)$: 4 | 1 valós skalártér $(\eta)$: 1 |
| | 3 tömegtelen vektortér $(A^a_\mu)$: 6 | 3 tömeges vektortér $(A^a_\mu)$: 9 |
| | 10 | 10 |

A gauge feltételben a 4 skalárt írjuk az alábbi vektorba: $\phi = (\phi_1, \phi_3, \phi_2, \phi_4)$

A generátorok: $i\Sigma^a = \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\, \sigma^a & -\mathrm{Re}\, \sigma^a \\ \mathrm{Re}\, \sigma^a & -\mathrm{Im}\, \sigma^a \end{pmatrix}$ , $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ekkor könnyen látható, hogy $\tilde{\phi}^T i \Sigma^a \phi_0 = 0$.

3) $G = SO(3)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + (D_\mu \phi)^T (D^\mu \phi) - \lambda (\phi^T \phi - \Lambda^2)^2 \qquad \lambda > 0$$

ahol $D_\mu = \partial_\mu - i g A^a_\mu T^a$, $a = 1,2,3$, $(T^a)_{bc} = -i\,\varepsilon_{abc}$,

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$.

Alapállapot: $A^a_\mu = 0$, $\phi_i = (0, 0, \Lambda)$

általános $\phi$: $\phi(x) = e^{i(\vartheta^1(x) T^1 + \vartheta^2(x) T^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Lambda + \eta(x) \end{pmatrix} =: U(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Lambda + \eta \end{pmatrix}$

Ez $T^3$-tól független, így ez a szimmetria sértetlen marad. Ha $\phi' = U^T(x)\phi(x)$

$$(D_\mu \phi')^T (D^\mu \phi') = \partial_\mu \phi'^T \partial^\mu \phi' + i g A^a_\mu (\phi'^T T^a \partial^\mu \phi' - \partial^\mu \phi'^T T^a \phi') + g^2 A^a_\mu A^{b\mu} \phi^T T^a T^b \phi =$$

$\vdots$

$$= \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + g^2 (\Lambda + \eta)^2 (A^1_\mu A^{1\mu} + A^2_\mu A^{2\mu})$$

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \lambda \eta^2 (2\Lambda + \eta)^2 - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{g^2}{2} (\Lambda + \eta)^2 (A^1_\mu A^{1\mu} + A^2_\mu A^{2\mu})$$

most csak $A^1$ és $A^2$-nek van tömege: $m_{1,2} = g\Lambda$, $A^3$ tömegtelen.

szabadsági fokok

előtte

3 valós skalártér $(\eta, \vartheta^{1,2})$: 3

3 tömegtelen vektortér $(A^{1,2,3}_\mu)$: 6

$\overline{\phantom{00}9}$

utána

1 valós skalártér $(\eta)$: 1

1 tömegtelen vektortér $(A^3)$: 2

2 tömeges vektortér $(A^{1,2})$: 6

$\overline{\phantom{00}9}$

# 17. tétel: A Salam-Weinberg-modell bozonikus része

Beláthatjuk, hogy az EM és a gyenge KH egységes gauge elméletként kezelhető.

Szorítkozunk a csak $e$ és $\nu$-ből álló világra! A gyenge és EM áram:

$$j_\mu^W = \bar\nu_e O_{L\mu} e = \bar\nu_e \gamma_\mu (1-\gamma^5) e \qquad j_\mu^{EM} = -\bar e \gamma_\mu e$$

A Lagrange-ban ezek a gauge terekhez csatolódnak:

$$\mathcal{L}_W = g\left(j_\mu^W W^\mu + j_\mu^{W+} W^{\mu +}\right) \qquad \mathcal{L}_{EM} = e\, j_\mu^{EM} A^\mu$$

tehát egyelőre 3-féle gauge bozon van, a hozzájuk tartozó megmaradó töltések:

$$T_+(t) = \frac{1}{2}\int d^3x\; j_0^W(t,\underline{x}) = \frac{1}{2}\int d^3\underline{x}\,\left(\nu_e^+(1-\gamma^5)e\right)(t,\underline{x}) = \int d^3\underline{x}\,\left(\nu_{eL}^+ e_L\right)(t,\underline{x})$$

$$T_-(t) = \frac{1}{2}\int d\underline{x}\; j_0^W(t,\underline{x})^+ = T_+^+(t)$$

$$Q(t) = -\int d^3\underline{x}\; j_0^{EM}(t,\underline{x}) = \int d^3\underline{x}\,(e^+ e)(t,\underline{x})$$

A spinorokra vonatkozó antikommutációs: $\{\psi_{i\alpha}^+(t,\underline{x}), \psi_{j\beta}(t,\underline{y})\} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{y})$

Ezt felhasználva, kiszámolhatjuk $T_{+,-}$ kommutátorát:

$$T_3 = \frac{1}{2}[T_+, T_-] = \frac{1}{2}\int d^3\underline{x}\int d^3\underline{y}\,\left[(\nu_{eL}^+ e_L)(t,\underline{x}), (e_L^+ \nu_{eL})(t,\underline{y})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3\underline{x}\,\left(\nu_{eL}^+\nu_{eL} - e_L^+ e_L\right)(t,\underline{x})$$

Ez független $T_\pm$-tól és $Q$-tól, és beláthatjuk, hogy $[T_3, Q] = 0$, tehát kell lennie egy harmadik gyenge bozonnak, és mivel több töltést nem adnak a kommutátorok, ezért ez elég is lesz.

$T_3$ helyett kényelmesebb lesz az alábbit használni: $Y = 2(Q - T_3)$, valamint bevezethetjük a $T_1 = \frac{T_+ + T_-}{2}$ és $T_2 = \frac{T_+ - T_-}{2i}$ töltéseket is.

Tekintsük az alábbi gauge csoportot: $G = SU(2)_L \times U(1)_Y$

Az adódó gauge töltések: $SU(2)_L \to \{T_a \mid a = 1,2,3\}$ $W_\mu^a$ bozon

$U(1)_Y \to Y = 2(Q - T_3)$ $B_\mu$ bozon

$T$: gyenge izospin

$Y$: gyenge hipertöltés (semmi köze a valódi izospinhez és hipertöltéshez)

A 4 gauge bozonból csak az egyik az, ami nagy hatótávolságú, tehát a többi tömeget kell kapjon és a $SU(2)_L \times U(1)_Y$ lesérül $U(1)_Q$-ra, hiszen a világban a $Q$-t tudjuk megfigyelni.

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

A 16. tételből tudjuk, hogy a duplett komplex skalármező egy mexikói kalap potenciállal teljesen sérti az $SU(2)$-t, tehát ez kell majd kezelnünk. A duplett skalármező két komponensére $T_3 = \pm\frac{1}{2}$, és az e négy a $\nu$ közül az egyiknek egységnyi, a másiknak 0 töltése van, ezért $Y = 1$-el választva $Q$-ra $Q = 0, 1$ jön ki.

Jelölés: $\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$, $[Q, \varphi^+] = \varphi^+$, $[Q, \varphi^0] = 0$

A kovariáns derivált: $D_\mu = \partial_\mu - i g t^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' Y B_\mu$

ahol $g$ és $g'$ dimenziótlan csatolások

$t^a$ a $SU(2)$ csoport generátorai általános ábrázolásban.

A $\phi$ duplettre hattatva: $D_\mu \phi = (\partial_\mu - i g \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu)\phi$ ahol $\tau^a$: Pauli

A potenciál: $V(\phi) = -\mu^2 \phi^+ \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2$ $\lambda, \mu > 0$

Az alapállapot: $\langle\phi\rangle_0 = \langle 0|\phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ahol $v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

és $V_{min} = -\frac{\mu^4}{4\lambda}$

Az általános mező alakja: $\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = U^{-1}(\underline{\xi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $U(\xi) = \exp\left(i \frac{\underline{\xi}(x)}{v} \frac{\underline{\tau}}{2}\right) \in SU(2)$

Fixáljuk a gauge-et az alábbi módon: $\phi(x) \to U(\underline{\xi}(x))\phi(x) = \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \chi$

a potenciál ebben a gauge-ban: $V = \mu^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\mu^4}{4\lambda}$

A kinetikus tag:
$$(D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} (D_\mu (v + \eta)\chi)^+ (D_\mu (v + \eta)\chi) =$$
$$= \frac{1}{2} \chi^+ \chi\, \partial_\mu \eta\, \partial^\mu \eta + \frac{1}{2}(v + \eta)\chi^+ (i g \tfrac{\tau^a}{2} W_\mu^a + \tfrac{i}{2} g' B_\mu)\chi\, \partial^\mu \eta -$$
$$- \frac{1}{2} \partial^\mu \eta\, \chi^+ (i g \tfrac{\tau^a}{2} W_\mu^a + \tfrac{i}{2} g' B_\mu)\chi (v + \eta) +$$
$$+ \frac{1}{2}(v + \eta)\chi^+ (i g \tfrac{\tau^a}{2} W_\mu^a + \tfrac{i}{2} g' B_\mu)(-i g \tfrac{\tau^a}{2} W_\mu^a - \tfrac{i}{2} g' B_\mu)\chi =$$
$$= \frac{1}{2} \chi^+ \chi\, \partial_\mu \eta\, \partial^\mu \eta + \frac{1}{2}(v + \eta)\chi^+ (g \tfrac{\tau^a}{2} W^a + \tfrac{1}{2} g' B_\mu)(g \tfrac{\tau^a}{2} W_\mu + \tfrac{1}{2} g' B_\mu)\chi$$

A második tag fogja adni a tömegmátrix $(2,2)$ komponensének járulékát:
$$\chi^+ (g \tfrac{\tau^a}{2} W_\mu^a + \tfrac{1}{2} g' B_\mu)(g \tfrac{\tau^a}{2} W_\mu^a + \tfrac{1}{2} g' B_\mu)\chi =$$
$$= \frac{g^2}{4}(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + \frac{1}{4}(g W_\mu^3 - g' B_\mu)(g W^{3\mu} - g' B^\mu) =$$
$$= \frac{g^2}{2}\left(\frac{W_\mu^1 - i W_\mu^2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{W^{1\mu} + i W^{2\mu}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{g^2 + g'^2}{4}\left(\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} W_\mu^3 - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B_\mu\right)\left(\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} W^{3\mu} - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B^\mu\right)$$

Legyen $\cos\vartheta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$ , $\sin\vartheta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$

$$W^\pm_\mu = \frac{W^1_\mu \pm i W^2_\mu}{\sqrt{2}} \quad , \quad Z_\mu = \cos\vartheta_W W^3_\mu - \sin\vartheta_W B_\mu$$

tehát a tömegtag:

$$= \frac{g^2}{2} W^-_\mu W^{+\mu} + \frac{g^2+g'^2}{4} Z_\mu Z^\mu = \frac{g^2}{2} W^-_\mu W^{+\mu} + \frac{g^2}{4\cos^2\vartheta_W} Z_\mu Z^\mu$$

ez a kov deriváltból jött, ekkor hozzávéve a potenciál járulékát:

teljes tömegtag: $= \mu^2\eta^2 + \frac{v^2}{2}\left[\frac{g^2}{2} W^-_\mu W^{+\mu} + \frac{g^2}{4\cos^2\vartheta_W} Z_\mu Z^\mu\right] =$

$$= \mu^2\eta^2 + \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W^-_\mu W^{+\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{gv}{2\cos\vartheta_W}\right)^2 Z_\mu Z^\mu$$

így a tömegek: $m_\eta = \sqrt{2}\mu$

$$m_W = \frac{gv}{2}$$

$$m_Z = \frac{gv}{2\cos\vartheta_W} = \frac{m_W}{\cos\vartheta_W} \geq m_W$$

A gauge bozonok hipertöltése: $Y = 0$

EM töltése: $Q = T_3 \Rightarrow Q(W^\pm) = \pm 1$ , $Q(W^3) = Q(B) = 0$

$B_\mu$ kommutatív és nem csatolódik $W$-vel.

A $Z$-re ortogonálisan definiálható az EM-tér gauge bozona:

$$A_\mu = \cos\vartheta_W B_\mu + \sin\vartheta_W W^3_\mu$$

A [illegible] tétellel belátjuk, hogy ez tömegtelen marad.

## 18. tétel: A Salam–Weinberg-modell fermionikus része

Vegyünk egy olyan világot, amiben $e$, $\nu$ és $u$-meg $d$-kvarkok vannak.

Tömegtelennek tekintve őket, érvényes rájuk a királis szimmetria, így a jobb- és balkezes komponensük független. Összesen 15 szabadsági fok van:

$e_L, \nu_{eL}, e_R, u_L, d_L, u_R, d_R$ (utóbbi négy 3-féle színben.)

$SU(2)_L$ csak a balkezesekre hat, $U(1)_Y$ pedig csak a töltöttekre, ezért hiányzik $\nu_{eR}$, mert az semmivel nem csatolódik.

A töltéseket kifejezve:

$$T_+ = \int d^3\underline{x}\,(\nu_{eL}^+ e_L + u_L^+ d_L)$$

$$T_- = \int d^3\underline{x}\,(e_L^+ \nu_{eL} + d_L^+ u_L)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\int d^3\underline{x}\,(\nu_{eL}^+ \nu_{eL} - e_L^+ e_L + u_L^+ u_L - d_L^+ d_L)$$

$$Q = \int d^3\underline{x}\,\left(-e_L^+ e_L - e_R^+ e_R + \frac{2}{3} u_L^+ u_L + \frac{2}{3} u_R^+ u_R - \frac{1}{3} d_L^+ d_L - \frac{1}{3} d_R^+ d_R\right)$$

$$Y = 2(Q - T_3)$$

A fermion multipleteket fenomenologikusan vezethetjük be; A balkezeseket gyenge izodublettbe, a jobbkezeseket izoszingulettbe:

$$\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix},\quad q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix},\quad e_R,\ u_R,\ d_R$$

$Y$-nak nyilván minden multiplettben fixnek kell lennie, hiszen $[T^a, Y] = 0$.

Felírva a balkezes dublettek teljes töltését:

$$Y_L = \frac{1}{2}\left[2\left(Q_+ - \frac{1}{2}\right) + 2\left(Q_- + \frac{1}{2}\right)\right] = Q_+ + Q_-$$

Szingulettekre: $Y_R = 2Q$.

Ez alapján: $Y(\ell_L) = -1$, $Y(e_R) = -2$, $Y(q_L) = \frac{1}{3}$, $Y(u_R) = \frac{4}{3}$, $Y(d_R) = -\frac{2}{3}$

Miért kellenek ezek a multipletek, miért nem elég az $e$ és a $\nu$, mint a 17. tételben?

Az anomális szimmetria miatt: Vannak szimmetriák, amik lehet, hogy klasszikusan teljesülnek egy Lagrange-ra, de a kvantálás során gond van a renormálással, és az új tagok járulékot adnak a Noether-áram megváltozásának. Ilyen a királis szimmetria is, ami viszont kell a gauge elmélet felépítéséhez, így ezt jó lenne megtartani. Az ötlet, hogy így rendezzük el a fermionokat, fundamentálisabb okokból jön, de belátható, hogy ekkor a $\partial_\mu J^\mu$-ből adódó járulékok kiejtik egymást, és a királis szimmetria mégis megmarad.

A Lagrange fermionok része:

$$\mathcal{L}_{fermion} = \bar\Psi i \not{D} \Psi - m\bar\Psi\Psi - \mathcal{L}_{Yukawa}(\phi,\Psi,\bar\Psi)$$

ahol $D_\mu \Psi = (\partial_\mu - i g T^a W^{a}_\mu - \frac{i}{2} g' Y B_\mu)\Psi$

$$T^a = \begin{cases} \frac{\tau^a}{2} & \Psi = \Psi_L \\ 0 & \Psi = \Psi_R \end{cases} \quad , \quad Y = \begin{cases} -1 & \Psi = e_L \\ \frac{1}{3} & \Psi = q_L \\ -2 & \Psi = e_R \\ \frac{4}{3} & \Psi = u_R \\ -\frac{2}{3} & \Psi = d_R \end{cases}$$

A tömegtag kiesik, mert $\bar\Psi\Psi = \bar\Psi_L\Psi_R + \bar\Psi_R\Psi_L$ ami invariáns esetben 0. Ehelyett a Yukawa-tagból fognak majd tömeget kapni, ahol $\phi\bar\Psi\Psi$ - csatolás van. Egész konkrétan a G-szimmetria miatt

$$\mathcal{L}_{Yukawa}(\phi,\Psi,\bar\Psi) = f_e(\bar e_L\phi)e_R + f_d(\bar q_L\phi)q_R + f_u(\bar q_L\tilde\phi)u_R$$

$$\text{ahol } \tilde\phi = i\tau^2\phi^* = \begin{pmatrix}\phi^0\\ -\phi^+\end{pmatrix} \qquad Y(\tilde\phi) = -1$$

(ez az úgyszólván az u-kvark tömegére csak ...... miatt van, egyébként ilyen)

Felhasználva, hogy $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ és $\tilde\phi = \begin{pmatrix}\frac{v+\eta}{\sqrt2} \\ 0\end{pmatrix}$, az unitér gauge-ben, a $\mathcal{L}_Y$:

$$\mathcal{L}_{Yukawa, GF} = \frac{v+\eta}{\sqrt2} f_e \bar e_L e_R + \frac{v+\eta}{\sqrt2} f_d \bar d_L d_R + \frac{v+\eta}{\sqrt2} f_u \bar u_L u_R + h.c.$$

Amiből a fermionok tömege: $m_i = \frac{v f_i}{\sqrt2}$, vagyis minél nagyobb a tömeg, annál erősebb a csatolás a Higgs-térhez, és ha $v$ nagy, akkor ez a csatolás kicsi. (Megjegyezzük, hogy $\nu_R$ hiánya miatt nincs neutrínó-tömegtag)

A gauge bozonok csatolásában tehát a teljes járulék:

$$i\mathcal{L}_{int} = g\, J^a_\mu W^{a\mu} + \frac{1}{2} g' J^Y_\mu B^\mu$$

$$\text{ahol } J^a_\mu = \bar e_L \frac{\tau^a}{2} e_L + \bar q_L \frac{\tau^a}{2} q_L$$

$$J^Y_\mu = -\bar e_L e_L + \frac{1}{3}\bar q_L q_L - 2\bar e_R e_R + \frac{4}{3}\bar u_R u_R - \frac{2}{3}\bar d_R d_R$$

ezeket kiírva:

$$i\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt2}\left[(J^1_\mu + iJ^2_\mu)\frac{W^{1\mu} - W^{2\mu}}{\sqrt2} + (J^1_\mu + iJ^2_\mu)\frac{W^{1\mu} - W^{2\mu}}{\sqrt2}\right] + (g J^3_\mu W^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J^Y_\mu B^\mu)$$

mivel $\begin{pmatrix} Z \\ A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta_W & -\sin\vartheta_W \\ \sin\vartheta_W & \cos\vartheta_W\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^3 \\ B\end{pmatrix}$

ezért

$$g J^3_\mu W^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J^Y_\mu B^\mu = \left(g\cos\vartheta_W J^3_\mu - \frac{g'}{2}\sin\vartheta_W J^Y_\mu\right)Z^\mu + \left(g\sin\vartheta_W J^3_\mu + \frac{g'}{2}\cos\vartheta_W J^Y_\mu\right)A^\mu.$$

felhasználva, hogy $J^Y_\mu = 2(J^{EM}_\mu - J^3_\mu)$ és $\sin\vartheta_W, \cos\vartheta_W$ defjét

$$= \Big[\underbrace{(g\cos\vartheta_W + g'\sin\vartheta_W)}_{\frac{g}{\cos\vartheta_W}} J^3_\mu - g'\sin\vartheta_W J^{EM}_\mu\Big] Z^\mu + \Big[\underbrace{(g\sin\vartheta_W - g'\cos\vartheta_W)}_{0} J^3_\mu + g'\cos\vartheta_W J^{EM}_\mu\Big] A^\mu$$

$$= \frac{g}{\cos\vartheta_W}\left(J^3_\mu - \sin^2\vartheta_W J^{EM}_\mu\right) Z^\mu + g\sin\vartheta_W J^{EM}_\mu A^\mu = \frac{g}{\cos\vartheta_W} J^0 Z^\mu + g\sin\vartheta_W J^{EM}_\mu A^\mu$$

Tehát $A^\mu$ az EM áramhoz csatolódik $\Rightarrow$ fotontér, $e = g\sin\vartheta_W$

A teljes kölcsönhatási tag:

$$i\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt2}\left(J^+_\mu W^{-\mu} + J^-_\mu W^{+\mu}\right) + \frac{g}{\cos\vartheta_W} J^0_\mu Z^\mu + e J^{EM}_\mu A^\mu .$$

Már csak $v$-t és a Yukawa-csatolásokat kell megadni. $v$ ismeretlen, $f_i$ megadhatóak lesznek a kvarktömegekkel, tehát $v$-t keressük.

Nézzük az elasztikus $e$-$\nu$ szórást! Feltételezve, hogy $m_W$ nagy, kis energián egy $W$-csere történik, aminek a járuléka:

$$\left(\frac{ig}{\sqrt2}\right)^2 \frac{i}{m_W^2}\langle f|J^+_\mu J^{-\mu}|i\rangle = -i\frac{g^2}{2m_W^2}\langle f|J^+_\mu J^{-\mu}|i\rangle$$

Az ehhez tartozó Lagrange meg kell egyezzen az effektív Lagrange-zsal:

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{g^2}{2m_W^2} J^+_\mu J^{-\mu} = -\frac{g^2}{8m_W^2} j^W_\mu j^{W\mu+} = \frac{G_F}{\sqrt2} j^+_\mu j^{-\mu}$$

tehát a Fermi-konstans: $$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt2\, m_W^2} = \frac{g^2}{4\sqrt2\,\frac{g^2v^2}{4}} = \left(\sqrt2\, v^2\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow v = \left(\sqrt2\, G_F\right)^{-1/2} \approx 250\ \text{GeV}$$

Ez nagyságrendekkel nagyobb, mint $m_{u,d,s}$, tehát a Yukawa-csatolások kicsik.

Ugyanez semleges árammal és $Z$-bozonnal:

$$\left(\frac{ig}{\cos\vartheta_W}\right)^2\frac{i}{m_Z^2}\langle f|\tfrac12 J^0_\mu J^{0\mu}|i\rangle = -i\frac{g^2}{2\cos^2\vartheta_W\, m_Z^2}\langle f|J^0_\mu J^{0\mu}|i\rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^0_{eff} = -\frac{g^2}{2\cos^2\vartheta_W\, m_Z^2}J^0_\mu J^{0\mu} = -\frac{g^2}{2m_W^2}J^0_\mu J^{0\mu}$$

Mivel $J^0_\mu = \sum_i g^{(i)}_L \bar\psi^{(i)}_L\gamma_\mu\psi^{(i)}_L + g^{(i)}_R\bar\psi^{(i)}_R\gamma_\mu\psi^{(i)}_R$, ahol $g^{(i)}_{L,R} = T^3(\psi^{(i)}_{L,R}) - \sin^2\vartheta_W\, Q(\psi^{(i)}_{L,R})$.

Az áramhoz a járulék: $\frac12\bar\nu_{eL}\gamma_\mu\nu_{eL}\,\bar e\gamma^\mu(a+b\gamma^5)e$

ahol $a = g^{(e)}_R + g^{(e)}_L = -\frac12 + 2\sin^2\vartheta_W$ és $b = g^{(e)}_R - g^{(e)}_L = \frac12$

Ebből kimérhető $\sin^2\vartheta_W$ és értéke $\approx 0{,}22$–$0{,}23$.

Most már minden paramétert ismerünk, jóslatokat predikálhatunk:

$$\text{pl.:}\quad m_W = \frac{gv}{2} = \frac{ev}{2\sin\vartheta_W} = \frac{2^{-5/4}\, e\, G_F^{-1/2}}{\sin\vartheta_W} \approx 81{,}8\ \text{GeV}$$

ami kb stimmel is. ($m_Z$ szintén)

1 generációban tehát van 15 Weyl-fermion, 4 vektorrészecske (3 tömeges, 1 tömegtelen) és 1 Higgs-tér.

A modell paraméterei: $g, g', \mu^2, \lambda, f_e, f_u, f_d$,

ezeket a következő fenomenologikus paraméterekkel illeszthetjük: $e, \sin\vartheta_W, m_W, m_H, m_e, m_u, m_d$

Kiterjeszthetjük a modellt több generációra:

$$e_{AL} = \begin{pmatrix}\tilde\nu_A\\ \tilde e_A\end{pmatrix}_L,\quad \tilde q_{AL} = \begin{pmatrix}\tilde p_A\\ n_A\end{pmatrix}_L,\quad \tilde e_{AR},\ \tilde p_{AR},\ \tilde n_{AR}$$

ahol a konkrét dolgok: $\tilde e_A = \tilde e, \tilde\mu, \tilde\tau$,

$\tilde p_A = \tilde u, \tilde c, \tilde t$

$\tilde n_A = \tilde d, \tilde s, \tilde b$

A csatolódások a gauge-terekhez:

$$\bar\Psi \not D \Psi = \bar{\tilde e}_{AL}\left(\not\partial - \frac{i}{2} g\, \underline\tau\, \underline{\not W} + \frac{i}{2} g' \not B\right)\tilde e_{AL} + \bar{\tilde q}_{AL}\left(\not\partial - \frac{i}{2} g\, \underline\tau\, \underline{\not W} - \frac{i}{6} g' \not B\right)\tilde q_{AL} +$$

$$+ \bar{\tilde e}_{AR}\left(\not\partial + i g' \not B\right)\tilde e_{AR} + \bar{\tilde p}_{AR}\left(\not\partial - i\frac{2}{3} g' \not B\right)\tilde p_{AR} + \bar{\tilde n}_{AR}\left(\not\partial + \frac{i}{3} g' \not B\right)\tilde n_{AR}$$

A tilde a Yukawa-csatolásban való keveredési szabadság miatt kell.
A kvarkok a leptonokkal nem keverednek a különböző szín-töltés miatt, illetve a p és n típusúak sem a különböző elektromos töltés miatt. Egyébként lehetni igen.

A Yukawa-tag:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = f^{(e)}_{AB}\left(\bar{\tilde e}_{AL}\phi\right)\tilde e_{AR} + f^{(p)}_{AB}\left(\bar{\tilde q}_{AL}\phi\right)\tilde p_{BR} + f^{(n)}_{AB}\left(\bar{\tilde q}_{AL}\phi\right)\tilde n_{BR} + h.c.$$

A szimmetriasértés után a tömegmátrix: $M^{(i)}_{AB} = \frac{v}{\sqrt{2}} f^{(i)}_{AB}$ $\qquad i = e, p, n$

Ezek 3×3-as mátrixok, és mivel általában minden mátrix diagonalizálható:

$S^+ M T = M_{diag}$ alakban valamilyen S és T unitér mátrixokkal,

$$M^{(i)}_{AB}\,\bar{\tilde\psi}^{(i)}_{AL}\tilde\psi^{(i)}_{BR} = \bar{\tilde\psi}^{(i)}_L S^{(i)+} M^{(i)}_{diag} T^{(i)}\tilde\psi^{(i)}_R = \overline{\left(S^{(i)}\tilde\psi^{(i)}_L\right)} M^{(i)}_{diag}\left(T^{(i)}\tilde\psi^{(i)}_R\right) =$$

$$= \bar\psi^{(i)}_L M^{(i)}_{diag}\,\psi^{(i)}_R$$

Bár ezeknek a $\psi^{(i)}$-knek van valós tömegük, de nem vájuk egyszerűen gauge trafó amivel csatolódnak, így egy valamilyen nem ennyi szemléletes.

Az áram: $J^{h+}_\mu = \bar{\tilde{q}}_{AL}\, \tau^+ \gamma_\mu \tilde{q}_{AL} = \bar{\tilde{p}}_{AL} \gamma_\mu \tilde{n}_{AL} = \bar{p}_{AL} \gamma_\mu (S^{(u)+} S^{(n)})_{AB}\, n_{BL} =$

$$= \bar{p}_{AL} \gamma_\mu U_{AB}\, n_{BL}.$$

ahol $U_{AB}$ az unitér CKM-mátrix. Ha definiáljuk a

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{kvarkbázist,}$$

akkor visszakapjuk a kvarkkeveredés fenomenologikus leírását.

Ugyanez a leptonokkal:

$$J^{e+}_\mu = \bar{\tilde{e}}_{AL}\, \tau^+ \gamma_\mu \tilde{e}_{AL} = \bar{\tilde{\nu}}_{AL} \gamma_\mu \tilde{e}_{AL} = \bar{\tilde{\nu}}_{AL} \gamma_\mu S^{(e)}_{AB}\, e_{BL} = (S^{+(e)} \bar{\tilde{\nu}}_{AL})\, \gamma_\mu e_{AL}$$

Mivel a $\nu$-k tömegtelenek, nincs bozonikus tartozó $S^{(\nu)}$. Ha bevezetjük a

$\nu_A := (S^{+(e)} \tilde{\nu})_A$ jelölést, akkor $\nu_A \gamma_\mu e_A$ a csatolás.

Bár $\nu_A$-k a tömegben degeneráltak, de $\nu_A$ és $e_A$ is egyértelműen csatoltak a gauge térhez, így nem keveredhet

$\Longrightarrow$ a leptonszám megmaradó mennyiség.

Végül a semleges áram:

$$J^0_\mu = \sum_i g_L^{(i)} \bar{\tilde{\varphi}}^{(i)}_{AL} \gamma_\mu \tilde{\varphi}^{(i)}_{AL} + g_R^{(i)} \bar{\tilde{\varphi}}^{(i)}_{AR} \gamma_\mu \tilde{\varphi}^{(i)}_{AR} =$$

$$= \sum_i g_L^{(i)} \bar{\varphi}^{(i)}_{AL} \gamma_\mu (S^{(i)+} S^{(i)})_{AB}\, \varphi^{(i)}_{B} + g_R^{(i)} \bar{\varphi}^{(i)}_{AR} \gamma_\mu (T^{(i)+} T^{(i)})_{AB}\, \varphi^{(i)}_{BR} =$$

$$= \sum_i g_L^{(i)} \bar{\varphi}^{(i)}_{AL} \gamma_\mu \varphi^{(i)}_{AL} + g_R^{(i)} \varphi^{(i)}_{AR} \gamma_R \varphi^{(i)}_{AR}$$

tehát ugyanazon tömeg sajátállapotai vannak.

STANDARD MODELL (elektrogyenge szektor):

- a gauge csoport $G = SU(2)_L \times U(1)_Y$
- $3 \times 15 = 45$ Weyl-fermion
- 3 tömeges és 1 tömegtelen vektor bozon
- 1 Higgs skalár
- 18 szabad paraméter:
  - 2 gauge csatolás ($e$, $\sin\theta_W$)
  - 3 lepton, 6 kvark tömeg
  - 3 Cabibbo-szög és 1 KM-fázis
  - W és H bozon tömegek
  - Higgs öncsatolás.

A $G_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ a teljes SM. Ez 1 paramétert ad hozzá, az erős csatolást: $\alpha_S$.

## 19. tétel: A nagy egyesítés elmélete

A standard modell gauge csoportja: $G_{SM} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

3 db gauge csatolás van, tehát az elmélet nem teljesen egyesített, jó lenne egy darab csatolási állandóval leírni mindent (alapja a GUT egyesítésnek)

keresünk $G$ csoportot egy csatolási állandóval, ami le tud törni a $G_{SM}$-re.

A legegyszerűbb választás: $SU(5)$

Előnyei:
- $G_{SM} \subset G$
- a rangja 4, pont mint $G_{SM}$-nek, tehát $t_3, t_8, T_3, Y$ kommutál, de más nem.
- ez az egyetlen 4 rangú, $G_{SM}$-t tartalmazó csoport.

$\dim SU(5) = 24 \Rightarrow 24$ gauge bozon. Ebből 12 ismert, vagyis lesz 12 új.

Az egyik generátor: $\lambda^{24} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \text{ hipertöltés kvarkok} \\ \} \text{ hipertöltés leptonokra} \end{matrix}$

Mivel a SM elemei a reprezentációban így helyezkednek el: $\begin{pmatrix} SU(3)_c & 0 \\ 0 & SU(2)_L \end{pmatrix}$

ezért $[\lambda^{24}, G_{SM}] = 0$.

Nézzük az anyagi részecskék reprezentációját:

antifundamentális ábrázolás: $\bar{5}_F$

$$\begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} (\bar{3},1): \text{ tükrözött, negatív töltésű kvarkok} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} (1,2): \text{ bal kezes leptonok} \end{matrix}$$

antiszimmetrikus tenzorábrázolás: $10$ (a $5_F \otimes 5_F = 10 \oplus 15_{szim}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ & & 0 & u_3 & d_3 \\ & & & 0 & e^+ \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_L$$

bal felső: $(\bar{3}, 1)$
ez a színtérben antiszim része: $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$
$\Rightarrow$ tükrözött, pozitív kvarkok

jobb felső $(3,2)$
bal kezes kvark dublett

jobb alsó: $(1,1)$
tükrözött elektron.

$\bar{5}_F$ és $10$ együtt tartalmazza az SM 1 generációját.

töltések: $T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{pmatrix}$ $\quad Q = T_3 + \frac{Y}{2} = T_3 + c\frac{\lambda^{24}}{2}$ ahol $c = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$Y(\bar{5}_F) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1, -1\right) \qquad Q(\bar{5}_F) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0\right)$

$Y(10) = \left(Y_{row}(\bar{5}) + Y_{column}(\bar{5})\right), \quad Q(10) = -\left(Q_r(\bar{5}) + Q_c(\bar{5})\right)$

A gauge bozonok reprezentációja:

$$5\otimes\bar{5}=1\oplus 24 \qquad A_\mu=\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & X_\mu^{1c} & Y_\mu^{1c} \\ & G^i{}_j+\frac{2}{\sqrt{30}}B_\mu\delta^i{}_j & & X_\mu^{2c} & Y_\mu^{2c} \\ & & & X_\mu^{3c} & Y_\mu^{3c} \\ \hline X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^3-\sqrt{\frac{3}{10}}B_\mu & W_\mu^+ \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 & W_\mu^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^3-\sqrt{\frac{3}{10}}B_\mu \end{array}\right)$$

ahol $G^i{}_j\sim(8,1)$ gluonok

$W^{\pm,3}\sim(1,3)$ közvetítő vektorbozonok

$B\sim(1,1)$ hipertöltés generátor

$X,Y\sim(\bar{5},2)$ : 12 új gauge bozon (a $X^c, Y^c\sim(3,\bar{2})$-vel együtt)

Mivel az elektromos töltés $Q^+A_\mu Q=(Q(\bar{5})+Q(5))A_\mu$

ezért az új bozonok töltése: $Q_X=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$

$Q_Y=-\frac{1}{3}+0=-\frac{1}{3}$.

A szimmetriasértés két lépésben: 1) $SU(5)\to G_{SM}$. A $\langle H\rangle=v\lambda^{24}$ térrel az megvalósítás, az tömeget ad $X$-nek és $Y$-nak, és mivel $[\lambda^{24},G_{SM}]=0$, ezért $G_{SM}$ szimmetria marad.

2) $G_{SM}\to SU(3)_c\times U(1)_Q$ a korábbi módon.

A kovariáns derivált: $D_\mu=\partial_\mu-ig_5\sum_{a=1}^{24}A_\mu^a\frac{\lambda^a}{2}$

Mivel az SM-ben ez:

$$D_\mu=\partial_\mu+ig_3\sum_{a=1}^{8}G_\mu^a\frac{\lambda^a_{GM}}{2}+ig\sum_{a=1}^{3}W_\mu^a\frac{\tau^a}{2}+ig'B_\mu\frac{Y}{2}$$

Összehasonlítva a két egyenletet: $g_3=g=g_5$

$$g'=-\sqrt{\frac{3}{5}}g_5\Rightarrow \operatorname{tg}\vartheta_W=\frac{g'}{g}=-\sqrt{\frac{3}{5}}\Rightarrow \sin^2\vartheta_W=0{,}375$$

A mérések alapján $\sin^2\vartheta_W=0{,}212025$, ami nem túl jó eredmény, továbbá $g_3=g$ nem tűnik helyesnek nagy energián.

DE ha $M_X$ az új bozonok tömege, akkor az energiaskálán $g_3$ és $g$ egyezhet:

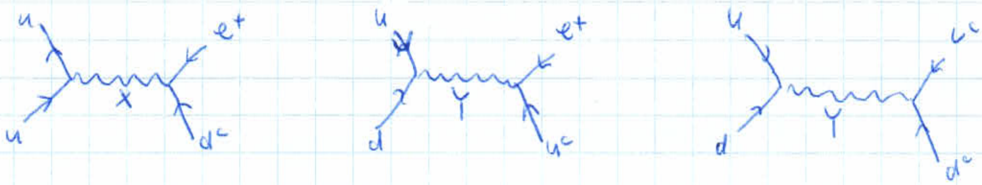
$$\sin^2\vartheta_W(\mu)=\frac{3}{8}-\frac{55}{24\pi}\alpha(\mu)\ln\frac{M_X}{\mu}$$

Mivel tudjuk, hogy $\mu\approx M_Z$-nél $\sin^2\vartheta_W=0{,}22-0{,}23$, ezért a fenti érték eléréséhez:

$\mu=M_X\sim 4\cdot 10^{4}$ GeV.

probléma: Míg az új elméletben B−L továbbra is megmarad, de B és L külön-külön nem maradnak meg, mivel a kvarkok és a leptonok egy családban vannak.

$\Rightarrow$ A proton is bomolhat: $p \to e^+ \pi^0$




kiszámolva a korlát: $\tau_p \sim \frac{M_X^4}{m_p^5} \approx 10^{30} - 10^{31}$ év.

Mérések alapján: $\tau_p > 10^{34}$ év

Ezzel elvileg a GUT-t cáfoltuk, de mivel $\tau_p$ elég érzékeny $M_X$-re, ezért nehéz dönteni.

# 20. tétel: Neutrínóoszcilláció

A SM egyik hiányossága, hogy nem magyarázza a neutrínóoszcillációt.

Pauli és Fermi elméletében a neutrínó kis tömegű részecske volt, de nem kellett mindenáron 0-nak lennie.

1956–57: két komponensű neutrínó hipotézis: A neutrínónak két komponense van, tehát jól definiált kiralitása (kezessége). Ehhez tömegtelennek kell lennie.

Kb. ugyanakkor: Pontecorvo: A neutrínóknak van tömegük, és oszcillálnak.

Ezt akkor meg is figyelték: $\nu_e + {}^{37}Cl \to e^- + {}^{37}Ar$

Ez a folyamat elég ritka, de mérhető. A legtöbb $\nu_e$ a Napból jön, de ezek számát mérve, kisebb értéket kapunk, mint vártunk.

Atmoszférikus neutrínók: $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, $\mu^+ \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ $\qquad$ $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$, $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

$\Rightarrow$ a $\nu_\mu$ és $\nu_e$-k aránya 2:1, de ezt mérve nem ezt kapjuk.

Elmélet:

TFH 2 család van, 2-féle tömeggel: $m_{a,b}$.

Nem ahogy azt hinnénk, hogy a gyenge sajátállapotok tömeg sajátállapotok is, tehát a gyenge kH-ban keletkező $\nu$-k a tömegállapotok lin. kombinációja:

$|e_{1,2}\rangle$: két gyenge sajátállapot; $|a,b\rangle$: két tömeg sajátállapot

$$|e_1\rangle = \cos\vartheta\,|a\rangle + \sin\vartheta\,|b\rangle$$
$$|e_2\rangle = -\sin\vartheta\,|a\rangle + \cos\vartheta\,|b\rangle$$

$H_{szabad}|a,b\rangle = E_{a,b}|a,b\rangle$ ahol $E_{a,b} = \sqrt{p^2 + m_{a,b}^2}$

TFH $|\psi(0)\rangle = |e_1\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \cos\vartheta\, e^{-iE_a t}|a\rangle + \sin\vartheta\, e^{-iE_b t}|b\rangle$$

Annak az esélye, hogy $t$ idő múlva $|e_1\rangle$-t mérünk:

$$|\langle e_1|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\cos\vartheta\, e^{-iE_a t}\langle e_1|a\rangle + \sin\vartheta\, e^{-iE_b t}\langle e_1|b\rangle\right|^2 =$$
$$= \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta + 2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\cos\left((E_a - E_b)t\right)$$

Mivel a tömeg kicsi: $E_a - E_b = \frac{E_a^2 - E_b^2}{E_a + E_b} = \frac{m_a^2 - m_b^2}{E_a + E_b} \approx \frac{\Delta m^2}{2|p|}$, $x \approx t$

$\Rightarrow$ A $|e_1\rangle$ fluxusa: $\Phi_1(x) = A + B\cos\frac{\Delta m^2}{2|p|}x$, ahol $\frac{A}{B} = \frac{\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta}{2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta} =$

$$= \frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{1 - \cos^2 2\vartheta}$$

Tehát a neutrínóoszcillációban legalább az egyik neutrínónak tömege kell legyen, és a leptoncsaládok is keverednek.

A keverési mátrix a $V_{CKM}$-hez hasonló $\Rightarrow$ 3 szög és 1 fázis.

Mérések alapján: $|\Delta m^2_{21}| = 7{,}55 \cdot 10^{-5}\ eV^2$ $\quad |\Delta m^2_{31}| = \begin{cases} 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ eV^2 & (NO) \\ 2{,}42 \cdot 10^{-3}\ eV^2 & (IO) \end{cases}$

Mivel csak a tömeg különbségeket tudjuk, kétféle rendezés lehet:

NO: normal order: $m_1 < m_2 \ll m_3$

IO: inverted order: $m_3 \ll m_1 < m_2$

A szögek: $\sin^2\theta_{12} = 0{,}32$, $\quad \sin^2\theta_{23} = \begin{cases} 0{,}547 & (NO) \\ 0{,}551 & (IO) \end{cases}$, $\quad \sin^2\theta_{13} = \begin{cases} 0{,}0216 & (NO) \\ 0{,}0222 & (IO) \end{cases}$

A fázis $\quad \frac{\delta_{CP}}{\pi} = \begin{cases} 1{,}32 & (NO) \\ 1{,}56 & (IO) \end{cases}$

Hogy melyik rendezés érvényesül, azt az ilyen mérések nem döntik el.

Mit lehet kezdeni a tömeges neutrínókkal az SM-ben?

Legegyszerűbb ext: új Yukawa-tag: $f^{(\nu)}_{AB} (\bar{\ell}_A)_L \tilde{\Phi} (\psi_B)_R$

A $\nu_R$ terek azért kellenek, mert a Dirac-tömeg $\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L$ máskülönben 0.

Tömegmátrix: $M^{(\nu)}_{AB} = \frac{v}{\sqrt{2}} f^{(\nu)}_{AB} = S^{(\nu)} M^{(\nu)}_{diag} T^{(\nu)}$

Az egyértelmű leptontömegsajátállapotok: $\nu_L = S^{(\nu)} \nu_L^{(tom)}$, $\quad \nu_R = T^{(\nu)} \nu_R^{(tom)}$

ahol $S^{(\nu)} =: U_{PMNS}$ Pontecorvo - Maki - Nakagawa - Sakata - mátrix

3×3-as mátrix, hasonló a $V_{CKM}$-hez.

Mivel a $\nu_R$ tér $SU(2)$ szinglett és az $U(1)_Y$-töltés 0, ezért invariáns $G$-re, tehát az anomáliával nincs baj, így a fenti tag minden további nélkül hozzáadható.

Probléma: Mivel $\nu_R$ a tömegtagon kívül sehol nem szerepel, ezért semmivel nem hat kölcsön, így megfigyelni nem lehet.

$\Rightarrow$ kísérletileg ellenőrizhetetlen, így a tudomány szempontjából irreleváns.

Lehetséges feloldás: hintaló mechanizmus, és a Majorana-neutrínó.

TFH $\nu_R$ egy $G$-szinglett, semleges fermion. Definiáljuk az alábbit:

$$(\nu_R)^c := C\,\overline{\nu}_R^T . \qquad \text{Mivel } C = -i\gamma^2\gamma^0 \text{ ezért } (\nu_R)^c = -i\gamma^2 \nu_R^*$$

A Majorana-tömeg: $$\mathcal{L}_{Maj} = \frac{1}{2} m_M \overline{\nu}_R (\nu_R)^c + c.c.$$

ez sérti a leptonszám-invarianciát, de mást nem. Mivel $(\nu_R)^c$ balkezes, ezért egy Majorana-neutrínó mindkét kiralitással előfordulhat.

A Dirac-taggal együtt a teljes tömegtag:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \overline{\nu}^c M \nu \qquad \text{ahol } \nu = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_M \end{pmatrix}$$

Diagonalizálva: $$m_\pm = \frac{1}{2}\left( m_M \pm \sqrt{m_M^2 + 4m_D^2} \right)$$

Ha $m_M \gg m_D$, akkor $$m_+ \approx m_M \qquad m_- \approx -\frac{m_D^2}{m_M}$$

$$N \approx (\nu_R)^c + \frac{m_D}{m_M}\nu_L \qquad \nu \approx \nu_L - \frac{m_D}{m_M}(\nu_R)^c$$

A kapott részecskék: $\nu$: a megfigyelhető, kis tömegű, balkezes neutrínók

$N$: Nagy tömegű részecske, ami csak kicsi $\nu_L$ járulékkal rendelkezik, így a csatolása mindig nagyon kicsi. (sötét anyag?)

Ha ez igaz, akkor megfigyelhető kísérletileg a neutrínó nélküli dupla β-bomlás, igen kis eséllyel.