KVANTUM II.

1. előadás (02. 26.)

$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle$

$|\psi\rangle \sim |\psi'\rangle = c\,|\psi\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \hat{G}(t)\,|\psi_0\rangle$ (ahhoz: $\hat{G}^{-1} = \hat{G}^{+}$ unitér)

$\cancel{G(t_1)G}\; G(t_1)G(t_2) = G(t_1+t_2) \Rightarrow G(t) = e^{+B} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ ahol $\hat{H} = \hat{H}^{+}$

Tehát:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,|\psi_0\rangle$$

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle = -\frac{i}{\hbar}|\psi(t)\rangle \Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi\rangle}$$

Ha $\hat{H}(t)$ akkor a levezetés nem igaz, de az egyenlet igen (tipikusan bekapcsolási szerkezetek)

Ortonormált bázis: $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \delta_{kl}$

$$\sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \hat{I}$$

$\forall|\psi\rangle \;\exists\; c_k :\; |\psi\rangle = \sum_k c_k|\varphi_k\rangle$

$$c_k = \langle\varphi_k|\psi\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k c_k$$

$$\dot{c}_l(t) = \sum_k c_k \underbrace{\langle\varphi_l|\hat{H}|\varphi_k\rangle}_{H_{lk}} \Rightarrow \boxed{\dot{c}_k = -\frac{i}{\hbar}\sum_l H_{kl}\,c_l}$$

Ez a Sch-egyenlet repr-je de végtelen mátrixok.

Többek közt: - perturbációszámítás
- alapbázisválasztás

Spec eset: $\hat{H}|\varphi_k\rangle = E_k|\varphi_k\rangle$ Mivel $\hat{H} = \hat{H}^{+}$ $H_{kl} = \begin{pmatrix} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

így: $\dot{c}_k = -\frac{i}{\hbar}\sum_l E_k\delta_{kl}\,c_l = -\frac{i}{\hbar}E_k c_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_k(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}\,c_k(0)$$

ebből: $|\psi(t)\rangle = \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} c_k(0)\,|\varphi_k\rangle = \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k}\underbrace{|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\psi\rangle}_{\hat{H} \text{ spektrálfelbontás}} =$

$$= \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,|\psi_0\rangle$$ ahol innen indultunk

A gyakorlatban valószínűleg inkább úgy számolunk, hogy először feladjuk a $\hat{H}$ sajátértékét, sajátvektorait

Mi van, hogyha diszkrét, ennyire folytonos:

$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta(\alpha-\beta)$

$|\psi\rangle = \int c(\alpha)\,|\alpha\rangle\,d\alpha \qquad$ ahol $c(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \int c(t,\alpha)\,|\alpha\rangle\,d\alpha \qquad / \cdot i\hbar\frac{d}{dt}$

$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \int \frac{\partial c(t,\alpha)}{\partial t}\,|\alpha\rangle\,d\alpha$

$\boxed{\text{videóról !!!!!}}$

$H(\beta,\alpha) = c$

$$\boxed{i\hbar\,\frac{\partial c(t,\beta)}{\partial t} = \int H(\beta,\alpha)\,c(\alpha)\,d\alpha}$$

TFH $\hat{H}$ spektruma folytonos:

$\hat{H}|\alpha\rangle = \varepsilon(\alpha)|\alpha\rangle$

$H(\beta,\alpha) = \langle\beta|\hat{H}|\alpha\rangle$

$= \langle\beta|\varepsilon(\alpha)|\alpha\rangle = \varepsilon(\alpha)\langle\beta|\alpha\rangle = \varepsilon(\alpha)\delta(\alpha-\beta)$

ezért: $\int H(\beta,\alpha)\,c(\alpha)\,d\alpha = \int \varepsilon(\alpha)\delta(\alpha-\beta)\,c(\alpha)\,d\alpha = \varepsilon(\beta)\,c(\beta)$

$i\hbar\frac{\partial c(t,\beta)}{\partial t} = \varepsilon(\beta)\,c(\beta) \qquad$ itt is különválnak az egyenletek

megoldás: $c(t,\beta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\beta)t}\,c(0,\beta)$

ebből: $|\psi(t)\rangle = \int c(t,\alpha)\,|\alpha\rangle\,d\alpha = \int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\alpha)t}\,c(0,\alpha)|\alpha\rangle\,d\alpha \qquad$ ahol $c(0,\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\alpha)t}\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi_0\rangle = \hat{G}(t)\,|\psi\rangle$

1D-s szabad részecske: $L = K - V = K = \frac{m}{2}\dot{x}^2$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad q = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$H = p\dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} \implies \hat{H}(p,q) = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

$[\hat{p}_k, \hat{q}_l] = \frac{\hbar}{i}\delta_{kl}\,\hat{I}$

Térjünk át $|\alpha\rangle - |x\rangle$-re

A helyoperátor sajátértékei: $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$

$$\langle x'|X|x\rangle = X_{x'x} = x\langle x'|x\rangle = x\,\delta(x'-x)$$

Ekkor $|\psi\rangle = \int c(x)\,|x\rangle\,dx$

$$|\phi\rangle = \hat{X}|\psi\rangle = \int c(x)\,X|x\rangle\,dx = \int c(x)\,x\,|x\rangle\,dx$$

de ez is felbontás

$$|\phi\rangle = \int g(x)|x\rangle\,dx \qquad \text{ahol } g(x) = \langle x|\phi\rangle = \langle x|\int c(x')\,x'|x'\rangle\,dx' = \int c(x')\,x'\underbrace{\langle x|x'\rangle}_{\delta(x-x')}\,dx' =$$

$$= \int c(x')\,x'\,\delta(x-x')\,dx' = c(x)\,x$$ ← ezt kaptuk AQ-n is

$\hat{p}_k = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ ha $\hat{x}_k = x_k$ (diagonálalakjú)

$$[\hat{p}_k, \hat{x}_e] = \hat{p}_k\hat{x}_e c() - \hat{x}_e\hat{p}_k c() = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_e c(x)) - x_e \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} c(x) =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\Big[\frac{\partial x_e}{\partial x_k} c + \underbrace{x_e\frac{\partial c}{\partial x_k} - x_e\frac{\partial c}{\partial x_k}}_{0}\Big] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ke}\cdot c = \left(\frac{\hbar}{i}\delta_{ke}\hat{1}\right)c \quad ✓$$

formailag jó, de kimutatni a vizsgált függvénytérben

Keressük $\hat{p}$ saját fgv-eit;

$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ keressük $\hat{p}\,\varphi_p(x) = p\,\varphi_p(x)$

Először lássuk be, hogy $\hat{p}$ hermitikus (ezt videóról)

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d\varphi_p(x)}{dx} = p\,\varphi_p(x) \Rightarrow \varphi_p(x) = K e^{\frac{ipx}{\hbar}} = K e^{ikx}$$ ha $k = \frac{p}{\hbar}$ (de-Broglie)

síkhullám

Folytonos spektrum esetén Dirac-δ-ra normálunk:

$$\int \varphi_{p'}^*(x)\,\varphi_p(x)\,dx = \delta(p'-p)$$

$$\int K e^{-\frac{ipx}{\hbar}} K e^{\frac{ip'x}{\hbar}}\,dx = \delta(p-p')$$

$$K^2\int e^{\frac{i(p'-p)x}{\hbar}} = \delta(p-p')$$ legyen $k = \frac{p'-p}{\hbar}$

$$K^2\int e^{ikx}\,dx = \delta(-k\hbar)$$

$$K^2\,2\pi\,\delta(k) = \delta(-k\hbar) \Rightarrow K^2\,2\pi\,\delta\!\left(\frac{p'-p}{\hbar}\right) = \delta(p-p')$$

[Mi a kapcsolat $\delta(x)$ és $\delta(ax)$ között ?

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int\delta(y)\,dy = \underline{\underline{\frac{1}{a}}}$$
]

$$\underbrace{2\pi\hbar k^2}_{1}\delta(p'-p) = \delta(p-p')$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \qquad \text{tehát } \underline{\varphi_p(x) = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}$$

Hogy néz ezen a Hamilton : $\hat{H}\,\hat{\varphi}_p(x) = \frac{p^2}{2m}\hat{\varphi}_p(x)$

$$\hat{G}(t) = \int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}|p\rangle\langle p|\,dp = \int e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}|p\rangle\langle p|\,dp$$

$|\psi(t)\rangle = \int \psi(x,t)|x\rangle\,dx$ ahol

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|\hat{G}(t)|\psi_0\rangle = \langle x|\hat{G}(t)\left(\int|x'\rangle\langle x'|dx'\right)|\psi_0\rangle =$$

$$= \int \underbrace{\langle x|\hat{G}|x'\rangle}_{G(x,x')}\underbrace{\langle x'|\psi_0\rangle}_{\psi(0,x')}dx' = \int G(x,x')\,\psi(0,x')\,dx'$$

propagátor

Mi a propagátor:

$$G(x,x') = \langle x|\hat{G}(t)|x'\rangle = \langle x|\left(\int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}|p\rangle\langle p|\,dp\right)|x'\rangle =$$

$$= \int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}\langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle\,dp$$

Tudjuk hogy $\langle x|p\rangle = \frac{e^{+\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$\langle p|x'\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$$= \int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}\,dp = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\left[-\frac{it}{2m\hbar}p^2 + \frac{i}{\hbar}p(x-x')\right]}\,dp =$$

= teljes négyzetté alakítás + Gauss integrál =

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\;e^{i\frac{m(x-x')^2}{2\hbar t}} = G(x,x',t)$$

KVANTUM II.

2. előadás (03.05.)

$$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle \longrightarrow \psi(x) = \langle x|\psi\rangle \in \mathcal{L}^2$$

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \longrightarrow \hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$$

$$\hat{p}|x\rangle\ ? \qquad [\hat{p},\hat{x}] = \frac{\hbar}{i}\hat{1} \qquad \hat{p}\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \qquad \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\varphi_p(x) = p\,\varphi_p(x)$$

$$\varphi_p(x) = \langle x|p\rangle \qquad \varphi_p(x) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\langle p|p'\rangle = \int \varphi_p^*(x)\,\varphi_{p'}(x)\,dx = \delta(p-p')$$

$x'\,\xi_{x'}(x) = x\,\xi_{x'}(x)$ ← ez az x' operátor sajátérték egyenlete

akkor $\xi_{x'}(x) = \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$

Tehát valóban $(x'-x)\,\delta(x'-x) = 0$ biztos?

Igen, mert δ a 0 mindenhol kívül $x'-x$ helyen de ott $x'-x$ a 0.

$\Rightarrow$ x operátor sajátértékei δ-k
p operátoré a differenciálás.

Ezek nem elemei $\mathcal{L}^2$-nek, de a lin kombjuk igen.

Kvantumban mindent a Gaussal próbálunk ki.

$$g(x) = N e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \qquad \text{úgy, hogy} \int |g(x)|^2 dx = 1$$

$$\int |N|^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = |N|^2 \int e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = |N|^2 a\sqrt{\pi} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{e^{-x^2/2a^2}}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}$$

Fourier:

$$\varphi(t) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$f(\omega) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Ennek a Fourier-képe:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int G(k)\, e^{ikx}\, dk$$

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \int e^{-\frac{x^2}{2a^2} - ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \int \exp\left(-\frac{1}{2a^2}\left(x^2 + 2a^2ikx + (a^2ik)^2 - (a^2ik)^2\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \int \exp\left(-\frac{(x+ia^2k)^2}{2a^2} - \frac{a^2k^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{a^2k^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \underbrace{\int e^{-\frac{x'^2}{2a^2}} dx}_{\sqrt{\pi}\sqrt{2a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{a^2k^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{k^2}{2b^2}} \qquad \text{ahol } b = \frac{1}{a}$$

Tehát $G(k) \longleftrightarrow g(x)$ Gauss Fourier-ja Gauss

$k \longleftrightarrow x$

$a \longleftrightarrow b$

Legyen $p = \hbar k$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\hbar} G(k) \left(\frac{e^{\frac{i}{\hbar} px}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right) \sqrt{2\pi\hbar} = \int \underbrace{\frac{G(k)}{\sqrt{\hbar}}}_{\gamma(p) = \frac{G(k)}{\sqrt{\hbar}}} \varphi_p \, dp$$

Tehát $g(x) = \int \gamma(p) \varphi_p(x) \, dp$

ahol $\gamma(p) = \frac{G(k)}{\sqrt{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{b\hbar\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar^2 b^2}} = \frac{1}{\sqrt{q\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{p^2}{2q^2}}$ ahol $q = \hbar b$

tehát $g(x)$ és $\gamma(p)$ is gauss $x \to p$, $a \to q$

Ugyanez ugyan ott absztrakt térben:

$$g(x) = \langle x | g \rangle = \int \gamma(p) \varphi_p(x) \, dp = \int \langle x | p \rangle \gamma(p) \, dp = \int \langle x | p \rangle \langle p | g \rangle dp = \langle x | \underbrace{\left(\int |p\rangle\langle p| \, dp \right)}_{I} | g \rangle =$$

$= \langle x | g \rangle$ $\Rightarrow$ A Fourier-traf. nem más, mint áttérés x repr.-ról p-re.

$|\psi\rangle \to \chi(p) = \langle p | \chi \rangle$

$\hat{p} \chi(p) = p \cdot \chi(p)$

$\hat{x} \chi(p) = i\hbar \frac{d}{dp} \chi(p)$

A x repr. és a p repr. közötti különbség csak annyi, hogy kiszámoljuk a két esetet.

Analógia:

$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^k = \sum_k v'_k \vec{f}^k$

$v_k = \vec{e}^k \vec{v}$ $\quad v'_k = \vec{f}^k \vec{v}$

ált.: $|g\rangle \to g(x) = \langle x | g \rangle$, $\gamma(p) = \langle p | g \rangle$

Analógia

$v'_k = R_{ke} v_e$ $\quad v_e = R^{-1}_{em} v_m$

ált.: $\varphi_p(x) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} px}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = R(x,p)$

$g(x) = \int R(x,p) \gamma(p) \, dp$

$\varphi^*_p(x) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} px}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = S(p,x)$

$\gamma(p) = \int S(p,x) g(x) \, dx$

Továbbá:

$\gamma(p) = \langle p | g \rangle = \langle p | I | g \rangle =$

$= \langle p | \left(\int |x\rangle\langle x| \, dx \right) | g \rangle =$

$= \int \langle p | x \rangle \langle x | g \rangle \, dx =$

$= \int \varphi^*_p(x) g(x) \, dx$

A Fourier-transzf. a függvénytérben egy unitér függvénytransz.

Számoljuk ki az operátorok stat. jellemzőit:

várhatóérték: $\bar{A}_\psi = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \int \psi^*(x)\hat{A}\,\psi(x)\,dx$

$$\bar{x}_\psi = \int \psi^*(x)\,x\,\psi(x)\,dx = \int x|\psi(x)|^2 dx = \int x\,\frac{e^{-\frac{x^2}{a^2}}}{a\sqrt{\pi}}\,dx = 0$$

$$\bar{p}_\psi = \int \varphi^*(x)\,\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\varphi(x)\,dx = \int \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}\,\frac{\hbar}{i}\,\frac{-\frac{x}{a^2}\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}\,dx = 0$$

szórásnégyzet: $(\Delta x)^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \langle\psi|\hat{x}^2\psi\rangle - \langle\psi|x|\psi\rangle^2$

$$(\Delta x_\psi)^2 = \langle\varphi|\hat{x}^2\varphi\rangle - 0 = \int \varphi^*(x)\,x^2\,\varphi(x)\,dx = \int x^2\frac{e^{-\frac{x^2}{a^2}}}{a\sqrt{\pi}}\,dx = \frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{\pi}} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \Delta x_\psi = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$(\Delta p_\psi)^2 = \langle g|\hat{p}^2|g\rangle - 0 = \int g(p)^*\,p^2\,g(p)\,dp = \int p^2\,\frac{e^{-\frac{p^2}{2\alpha^2}}}{\alpha\sqrt{\pi}}\,dp = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow \Delta p = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta x\Delta p = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{a\,\frac{\hbar}{a}}{2} = \frac{\hbar}{2}$$

Ez pont a határozatlansági relációnál

ha $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$ akkor $\Delta A\Delta B \geq \frac{1}{2}|\bar{C}|$

Mivel $[p,x] = \frac{\hbar}{i}\hat{1} \Rightarrow \Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

A Gauss hullámcsomag intelligens állapot, mert megtalálta azt az állapotot, ami a legkevésbé határozatlan (itt az $\geq$ helyett $=$ van)

Kérdés: hogy változik a az időben.
Attól függ mi a Hamilton

szabad részecske: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$

Mivel $\hat{H}(\hat{p})$ ezért $\hat{H}$ sajátfgv-i a $\hat{p}$ sajátfgv-i.

$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$

$\hat{H}|p\rangle = H(p)|p\rangle = \varepsilon(p)|p\rangle$ ahol $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$

multiplikálva: $|\psi(t)\rangle = \int c(p,t)|p\rangle dp$

$$|\psi(t)\rangle = G(t)|\psi_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle = \int c(p,0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|p\rangle dp = \int \underbrace{c(p,0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}}_{c(p,t)}|p\rangle dp$$

$|\psi_0\rangle = \int c(p,0)|p\rangle dp$ tehát $\langle p|\psi_0\rangle = c(p,0)$

így: $c(p,t) = \langle p|\psi_0\rangle\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}$

be alkalmazva: $|\psi(t)\rangle = \int \langle p|\psi_0\rangle\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}|p\rangle dp = \int \langle p|\psi_0\rangle\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}\int |x\rangle\langle x|\,dx\;|p\rangle\,dp =$

$$= \iiint |x'\rangle\underbrace{\langle x'|p\rangle}_{\varphi_p(x')}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}\,\underbrace{\langle p|x\rangle}_{\varphi_p^*(x)}\underbrace{\langle x|\psi_0\rangle}_{\psi_0(x)}\,dp\,dx\,dx' = \iint |x'\rangle\underbrace{\left(\int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}\varphi_p(x')\varphi_p^*(x)\,dp\right)}_{G(t,x,x')}\psi_0\,dx\,dx'$$

Ha szorozzuk $\langle x'|$-vel: miel $\langle x'|x'\rangle$

$$\langle x'|\psi(t)\rangle = \int G(t,x,x')\,\psi_0(x)\,dx = \psi(x,t)$$

Tehát $G(t,x,x') = \int e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(p)t}\,\varphi_p(x')\,\varphi_p^*(x)\,dp$

[A múltkor: $G(t,x,x') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\,e^{\frac{im(x-x')^2}{2\hbar t}}$ volt]

Tegyük fel, hogy kullámcsomagból indul

$$\psi_0(x) = \psi(x,t=0) = g_0(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}$$

$$\psi(x,t) = \int G(t,x,x')\,\psi_0(x')\,dx' = \int\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\,e^{\frac{im(x-\xi)^2}{2\hbar t}}\,\frac{e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}\,d\xi$$

az exp kitevőjében ξ polinom van, tehát kiintegrálható. hosszú némi kvadratikus munka után az eredmény

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\left(a+\frac{i\hbar t}{ma}\right)\sqrt{\pi}}}\,e^{-\frac{x^2}{2a\left(a+\frac{i\hbar t}{ma}\right)}}$$

Tehát $\psi(x,0) \rightarrow \psi(x,t)$

az $a \rightarrow a + \frac{i\hbar t}{ma}$

KVANTUM II.

3. előadás (03.12.)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \rightarrow G(t,x,x') = \cdots \qquad \text{ahol} \quad \psi(t,x) = \int G(t,x,x')\psi(0,x')\,dx'$$

A múltkori: $\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\left(a + \frac{i\hbar t}{ma}\right)}} e^{-\frac{x^2}{2a\left(a+\frac{i\hbar t}{ma}\right)}}$

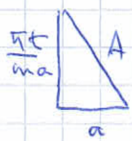
Számítsuk ki az abs. négyzetét

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \text{ elvileg}$$

$$\rho(t,x) = |\psi(t,x)|^2 = \psi^*\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2a}\left(\frac{1}{a+\frac{i\hbar t}{ma}} + \frac{1}{a-\frac{i\hbar t}{ma}}\right)}}{\sqrt{\left(a+\frac{i\hbar t}{ma}\right)\left(a-\frac{i\hbar t}{ma}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^2}}} e^{-\frac{x^2}{2a}\left(\frac{2a}{a^2+\frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{A(t)} e^{-\frac{x^2}{A^2(t)}} \quad \text{ahol } A(t) = \sqrt{a^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^2}}$$

Ha kezdetben $\Delta x \sim a \Rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{a} \Rightarrow \Delta v \sim \frac{\Delta p}{m} \sim \frac{\hbar}{am} \Rightarrow \Delta y \sim \Delta v\, t \sim \frac{\hbar t}{ma}$



Mintha a hullámcsomag szétfolyna, ezért nő a helybeli bizonytalanság

$\Rightarrow$ Hullámcsomag szétfolyás

A kezdetben gaussi összintenzitású hullám később kiszélesedik.
Itt most végig Gauss marad

Ez most a $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ rendszer leírása volt.
Tér, mert itt négyzetes[illegible]

Előfordulhat két ~~egy~~ szétfolyó fgv. ugyanolyan valószínűséggel van.
$\Rightarrow$ A [illegible] - fizika nem eldönti „A fizika nem a dinamika.”

Ez még a múltórához.

Harmonikus oszcillátor

Tanultuk négyzetmátrixos ezt vektorokkal. Most lefordítjuk fgv-re

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}x^2 \qquad \text{de } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad \hat{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad \text{legyen } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad p_0 = \sqrt{\hbar m \omega}$$

$$p = p_0 P \qquad x = x_0 X$$

$$H = \frac{1}{2m}p_0^2 P^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_0 X^2 = \frac{\hbar\omega}{2}P^2 + \frac{m\omega^2\hbar}{2m\omega}X^2 = \frac{\hbar\omega}{2}(P^2 + X^2)$$

Helyettesítés: $x \to \hat{x} = x\cdot$

$p \to \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

sajátérték egyenlet: $\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x)$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2\varphi(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2\varphi(x) = E\varphi(x)$$ ezt kell megoldani $\mathcal{L}^2$-ben.

Kvalitatív analízis

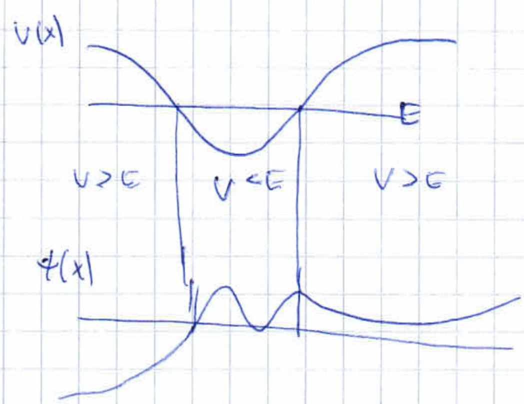
$$\varphi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x)$$ ha $V(x) = \text{const}$, akkor az anyagi k konstans új hatást nyerjük

lehet vizsgálni külön $E-V$ előjelétől függően

jelentősen nem konstans, de az előjelet vehetjük.

ha $E>V$:  ha $E<V$ 

ilyen szakaszokból áll össze valami.



ez nem jó, mert nem simul be

indítunk $-\infty$-ben a tengelytől, és nézzük, mit csinál a hfv.

az E-t változtatva, találhatunk olyan E-t, amely a $+\infty$-nél is lecseng

$\Rightarrow$ bizonyos E értékeknél lecsengene, de általában elszáll.

Azok lesznek a sajátértékek, amikor nem száll el

$y = x_0 X$

$\frac{d}{dx} = \frac{1}{x_0}\frac{d}{dX}$ ezekkel az egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{x_0^2}\varphi''(X) + \frac{m\omega^2}{2}x_0^2\varphi(X) = E\varphi(X)$$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}}_{-\frac{\hbar\omega}{2}}\varphi''(X) + \underbrace{\frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}_{\frac{\hbar\omega}{2}}X^2\varphi(X) = E\varphi(X)$$

$$-\varphi''(X) + X^2\varphi(X) = \frac{2E}{\hbar\omega}\varphi(X)$$

valamint X-t z-vel szokás jelölni

$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$

$$\underline{-\varphi''(z) + z^2\varphi(z) = \lambda\varphi(z)}$$

ez egy sajátérték probléma

$-\frac{d^2}{dz^2} + z^2$ operátor sajátértéke λ

ez az Hermite-egyenlet

Megoldási módszer:

1) Mit csinál a hfv. aszimptotikusan $z \to \infty$

$\varphi''(z) = z^2\varphi(z)$ próbafv.: $\varphi(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$

$\varphi'(z) = z\, e^{\frac{z^2}{2}}$

$\varphi''(z) = e^{\frac{z^2}{2}} + z^2 e^{\frac{z^2}{2}} \overset{z\to\infty}{\approx} z^2 e^{\frac{z^2}{2}}$

ez jó lenne, de elszáll, de a $\varphi(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$ már jó

$\varphi_{asz}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$ $|z| \gg 1$

2) Az igazi olyan, hogy ezt megszorozzuk valamivel

$\varphi_{igazi}(z) = f(z)\, e^{-\frac{z^2}{2}}$

$\varphi'(z) = f'(z)\, e^{-\frac{z^2}{2}} - z f(z)\, e^{-\frac{z^2}{2}}$

$\varphi''(z) = f''(z) e^{-\frac{z^2}{2}} - z f'(z) e^{-\frac{z^2}{2}} - f(z) e^{-\frac{z^2}{2}} - z f'(z) e^{-\frac{z^2}{2}} + z^2 f(z) e^{-\frac{z^2}{2}} =$

$= e^{-\frac{z^2}{2}}\left(f''(z) - 2z f'(z) - f(z) + z^2 f(z)\right)$

beírva:

$$-e^{-z^2/2}\left(f'' - 2zf' + z^2 f - f\right) + z^2 f e^{-z^2/2} = \lambda f e^{-z^2/2}$$

$$-f'' + 2zf' - \cancel{z^2 f} + f + \cancel{z^2 f} = \lambda f$$

$$\underline{f'' - 2zf' + (\lambda-1) f = 0} \qquad \text{H. II. egyenlet}$$

Sommerfeld-féle hatványsoros módszer:

TFH f felírható hatványsorként: $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots c_k z^k + \dots$

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + \dots k c_k z^{k-1} + \dots$$

$$f''(z) = 2c_2 + \dots k(k-1) z^{k-2} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} z^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k$$

$$z f'(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1}\right) z = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^k$$

beírva: $\sum_k (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^k + (\lambda-1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left((k+2)(k+1) c_{k+2} - 2k c_k + (\lambda-1) c_k\right) = 0$$

A zárójelnek kell 0-nak lennie

$$\boxed{c_{k+2} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)} c_k}$$ ez az egész $\mathbb{C}$ síkon konvergens.

Ha $k \to \infty$ $\quad c_{k+2} \approx \frac{2}{k} c_k$

az e^{z^2} hatványsora: $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$ ez pont olyan, amilyet kaptunk

az $f(z)$ hasonlítani fog az e^{z^2}-hez

de ha $\varphi(z) = e^{z^2} e^{-\frac{z^2}{2}} = e^{\frac{z^2}{2}}$ ez megint divergáló fv.

ezt úgy tudjuk megakadályozni, hogy a hatványsor ne menjen el végtelenig, csak véges

$\exists$ kell egy olyan c_n, ami $c_n \neq 0$ de $c_{n+2} = 0$

$$\frac{2n+1-\lambda}{(n+2)(n+1)} = 0 \Rightarrow \lambda = 2n+1$$ „Sommerfeld-féle polinom módszer"

Ez a megfejtés! ☺

$$\underline{E_n = \frac{\hbar\omega}{2}(2n+1) = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

A konkrét megoldások azok a polinomok, amiknek $2n+1$ tagjuk van.

$H_n(z)$ – Hermite-féle n-edrendű polinom

$$\boxed{H_n''(z) - 2z H_n'(z) + 2n H_n(z) = 0}$$ Hermite-féle polinom egyenlete.

olyan polinomok, amik együtthatói: $c_{k+2} = \frac{2k-2n}{(k+2)(k+1)} c_k$

Ezek homogén diffegyenletek, ezért normálni kell őket.

A XIX. sz.-ban mindenki önkényesen normálta. A kvantumban viszont úgy kell normálni, hogy az integrálja 1 legyen.

Hermite azt mondta, hogy a legmagasabbrendű tag eh-ja legyen 2^n.

$H_0 = 1$

$H_1 = 2z$

$H_2 = 4z^2 - C$

$H_3 = 8z^3 + \Lambda z$

$\vdots \quad \vdots$

Az oszcillátor megoldása:

$$\varphi_n(z) = N_n H_n(z) e^{-z^2/2} \qquad z = \frac{x}{x_0}$$

úgy kell normálni, hogy $\int |\varphi_n(x)|^2 dx = 1$.

KVANTUM I.

4. előadás (04.09.)

Az oszcillátor Schrödinger-egyenlete:

$$\psi''(z) - z^2\psi(z) = -\lambda\psi(z)$$

legyen $\psi(z) = u(z)\, e^{-\frac{z^2}{2}}$ alakú, ekkor

$$u''(z) - 2zu' + (\lambda - 1)u = 0$$

TFH: $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

feltétel: $c_{k+2} = c_k f(k)$

ha $k \to \infty$ akkor e^{z^2} -ra a végtelenben tartana, tehát c valahol végét ér

$\exists\, c_n$ ami $c_n = 0$ de $c_{n-2} \neq 0$ $\Rightarrow \lambda = 2n+1$

$$c_{k+2} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)} \qquad E = \frac{\hbar\omega}{2}(2n+1)$$

az egyenlet

$H_n(z)$ + keressük

$$H_n'' - 2zH_n' + 2nH_n = 0 \Rightarrow H_n = (2z)^n + (\ )(2z)^{n-2}$$

általánosan: $\underline{H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\left(\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z^2}}$

rekurziós összefüggések:

$$H_{n+1} - 2zH_n + 2nH_{n-1} = 0$$

$$H_n' = 2nH_{n-1}$$

$$\varphi_n(z) = N_n e^{-z^2/2} H_n(z)$$

és tudjuk, hogy $\int |\varphi_n(x)|^2 dx = 1$

$$1 \stackrel{!}{=} \langle\varphi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 N_n^2 e^{-z^2} H_n(z) H_n(z)\, dz = x_0 N_n^2 \int e^{-z^2} H_n(z) H_n(z)\, dz =$$

$$= x_0 N_n^2 \int e^{-z^2} (-1)^n e^{z^2}\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z^2}\right] H_n(z)\, dz = x_0 N_n^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z^2} dz =$$

$$= x_0 N_n^2 (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} H_n'(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} e^{-z^2} dz = \dots = x_0 N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^n H_n(z)\right) e^{-z^2} dz =$$

$$= x_0 N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n (2z)^n}{dz^n} e^{-z^2} dz = x_0 N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} 2^n n!\, e^{-z^2} dz = 2^n n!\, x_0 N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dz =$$

$$= x_0 \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, N_n$$

Tehát az n. hullámfgv:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_0\, 2^n n!}}\, H_n\!\left(\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}} = \langle x|n\rangle$$

állítás: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(z) = e^{-s^2+2sz} =: F(z,s)$

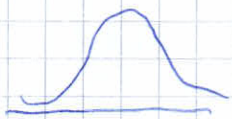
ui: $\frac{d}{dz}F'(z,s) = \sum \frac{s^n}{n!} H_n'(z) = 2s\, e^{-s^2+2sz}$

$\frac{d}{dz}F(z,s) = \sum \frac{s^n}{n!} H''(z) = 4s^2 e^{-s^2+2sz}$

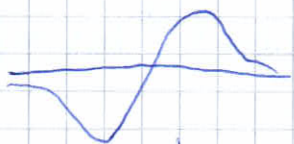
és most ?? ?

Nézzük a φ_n-eket:

$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_0}}\, e^{-z^2/2}$

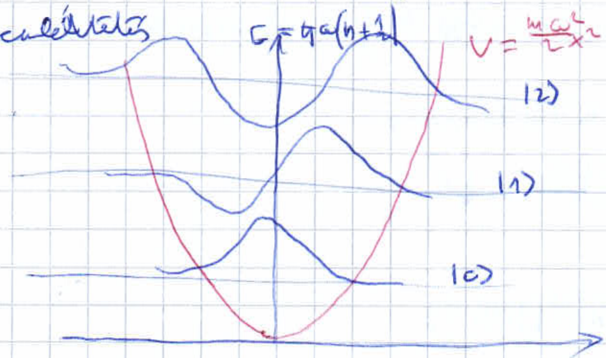


$\varphi_1(z) = (\quad)\, z\, e^{-z^2/2}$



$\varphi_2(z) = \dots (z^2-1) e^{-z^2/4}$

szemléltetés



Olyan feladatot, amit csak fv.-el tudjuk megoldani

Eltoljuk a $|0\rangle$ rezgésállapotot, és magára hagyjuk. Mi történik?

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$\hat{H}|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \quad \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum c_n(t)|\varphi_n\rangle$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \sum_n \dot{c}_n(t)|\varphi_n\rangle = \hat{H}|\psi\rangle = \sum_n c_n(t)\hat{H}|\varphi_n\rangle = \sum_n c_n(t) E_n |\varphi_n\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_n \dot{c}_n(t)|\varphi_n\rangle = \sum_n c_n(t) E_n|\varphi_n\rangle \qquad /\cdot\langle\varphi_k|$$

$$i\hbar\, \dot{c}_k(t) = E_k c_k(t)$$

$$c_k(t) = c_k(0)\, e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}}$$

Tehát: $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0)|\varphi_n\rangle \qquad /\cdot\langle\varphi_k|$$

$$\langle\varphi_k|\psi(0)\rangle = c_k(0)$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\varphi_n|\psi(0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n\rangle = \Big(\underbrace{\sum e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}_{G(t)}\Big)|\psi(0)\rangle$$

jééé ezt tudtam

Fv reprezentáció:

$$\langle x|\varphi_n\rangle = \varphi_n(x)$$

$$\langle x|\psi(t)\rangle = \psi(x,t)$$

$$\langle\varphi_n|\psi(0)\rangle = \langle\varphi_n|\hat{1}|\psi(0)\rangle = \langle\varphi_n|\int|x\rangle\langle x|\,dx\,|\psi(0)\rangle = \int\langle\varphi_n|x\rangle\langle x|\psi(0)\rangle\,dx =$$

$$= \int\varphi_n^*(x)\psi(x,0)\,dx = \int\varphi_n^*(\xi)\psi(\xi,0)\,d\xi$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\varphi_n^*(\xi)\psi(\xi,0)\,d\xi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\varphi_n(x) =$$

$$= \int\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\varphi_n^*(\xi)\varphi_n(x)}_{G(t,x,\xi)}\Big)\psi(\xi,0)\,d\xi$$

A jelen esetben $\psi(x,0) = \varphi_0(x-a) = \sum_n c_n(0)\varphi_n(x) \qquad /\varphi_n^*(x)$

itt ismét a H(B)

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x-a)\varphi_k^*(x)\,dx \qquad \text{legyen } z = \frac{x}{x_0} \qquad dx = x_0\,dz \qquad \frac{a}{x_0} = b$$

$$= \int x_0\varphi_0(z-b)\varphi_k^*(z)\,dz = \int H_0(z)e^{-(z-b)^2/2}\left[H_k(z)e^{-z^2/2}\right]^* =$$

$$= \underline{x_0 N_0 N_k\int_{-\infty}^{\infty}H_k(z)e^{-z^2}dz} = x_0\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0 2^k k!}}\int H_k(z)e^{-z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^k k!}}\int H_k(z)e^{-z^2}dz$$

$$\varphi(s) := \sum_k \frac{s^k \sqrt{2^k}}{\sqrt{k!}} c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k \frac{H_k(z) s^k}{k!} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2+2sz} e^{-z^2} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-z^2+2sz-s^2} dz =$$

ezt DGY elrontotta

Szisztematikusan újra:

$$\cancel{I_k = \int H_k(z) e^{-z^2} dz \quad 1. \frac{s^k}{k!} \Sigma}$$

$$\cancel{\sum_k I_k \frac{s^k}{k!} = \sum_k \int \frac{H_k s^k}{k!} e^{-z^2} dz = \int \sum_k \frac{H_k(z) s^k}{}}$$

$$c_k = x_0 N_0 N_k \int H_k(z) e^{-\frac{(z-b)^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = x_0 N_0 N_k \int e^{-z^2+zb-\frac{b^2}{2}} H_k(z) dz =$$

$$= x_0 N_0 N_k e^{-\frac{b^2}{2}} \underbrace{\int e^{-z^2+zb} H_k(z) dz}_{I_k}$$

$$\varphi(s) := \sum_k I_k \frac{s^k}{k!} = \int e^{-z^2+zb} \sum_k \frac{H_k(z) s^k}{k!} dz = \int e^{-z^2+zb} e^{-s^2+2sz} dz =$$

$$= \int e^{-z^2+z(2s+b)-s^2} dz = e^{sb+\frac{b^2}{4}} \int e^{-(z-s-\frac{b}{2})^2} dz =$$

$$= \sqrt{\pi} e^{sb+\frac{b^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{\frac{b^2}{4}} \sum_k \frac{s^k b^k}{k!}$$

$$\Rightarrow I_k = \sqrt{\pi} e^{\frac{b^2}{4}} b^k$$

Tehát $c_k = x_0 N_0 N_k e^{-\frac{b^2}{2}} \sqrt{\pi} e^{\frac{b^2}{4}} b^k = x_0 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} x_0}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} x_0 2^k k!}} e^{-\frac{b^2}{4}} b^k \sqrt{\pi} = \frac{b^k e^{-\frac{b^2}{4}}}{\sqrt{2^k k!}}$

tehát ez a $\varphi_0(x-a) = \sum c_k \varphi_k(x)$ együtthatója

A megtalálási valség $w_k = |c_k|^2 = e^{-\frac{b^2}{2}} \frac{b^{2k}}{2^k k!} = \frac{e^{-\frac{b^2}{2}} \left(\frac{b^2}{2}\right)^k}{k!}$

Az energia Poisson eloszlás szerint van. A várható érték:

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{b^2}{2} = \hbar\omega \frac{a^2}{2x_0^2} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right) a^2 = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$$

Tehát a várható érték a kihúzott rugó energiája

$$\Psi(x,t) = \sum_k c_k(0) e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \varphi_k(x) = \sum_k e^{-\frac{b^2}{4}} \frac{b^k}{\sqrt{2^k k!}} e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega(k+\frac{1}{2})t} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} x_0 2^k k!}} e^{-z^2/2} H_k(z)$$

$$= \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}} x_0} e^{-\frac{b^2}{4}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{2^k k!} e^{-i\omega k t} H_k(z) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_0}}\, e^{-\frac{b^2}{4} - iat - \frac{z^2}{2}}\, e^{-s^2 - 2sz} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_0}}\, e^{-\frac{b^2}{4} - iat - \frac{z^2}{2} + bz e^{-iat} - \frac{b^2}{4} e^{-2iat}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_0}} \exp\left(-\frac{b^2}{4} - iat - \frac{z^2}{4} + \cancel{bz}(\cos at - i \sin at) - \frac{b^2}{4}(\cos 2at - i \sin 2at) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_0}}\, e^{-\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\cos 2at + \cancel{bz}\cos at}\, e^{-iat - ib \sin at + \frac{ib^2}{4} \sin 2at} = \psi$$

$$|\psi|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x_0}\, e^{-\frac{b^2}{2}(1 + \cos 2at) + 2bz \cos at - \frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x_0}\, e^{-\left(\frac{x - a\cos at}{x_0}\right)^2}$$

Ez a térbeli eloszlásfv.

~~ahg~~ a Gauss görbe a középpont körül oszcillál a amplitúdóval.

KVANTUM II.

9. előadás (04.16.)

$$\psi_n(x) = N_n H_n(z)\, e^{-z^2/2} \quad \text{ahol } z := \frac{x}{x_c}$$

$$H_n''(z) - 2z H_n'(z) + 2n H_n(z) = 0$$

Nézzük ezt [illegible]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

$$\hat{X} = \frac{\hat{x}}{x_c} \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{p_0} \qquad x_c = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad p_0 = \sqrt{m\omega\hbar}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2) \qquad [\hat{P}, \hat{X}] = \frac{\hbar}{i}\hat{I}$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{a}^+ = \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \qquad [\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{I}\right)$$

$$\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$$

$\cancel{\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle}$ $\quad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

ic $\quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

A függv. u.a.:

$$\hat{x} : x\cdot \qquad \hat{X} = \frac{1}{x_c}x\cdot$$

$$\hat{p} : \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \qquad \hat{P} = \frac{\hbar}{p_0 i}\frac{d}{dx}$$

$$a = \frac{X + iP}{\sqrt{2}} = \frac{z + \frac{d}{dz}}{\sqrt{2}} \qquad a^+ = \frac{z - \frac{d}{dz}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{N} = \frac{z - \frac{d}{dz}}{\sqrt{2}}\,\frac{z + \frac{d}{dz}}{\sqrt{2}} \qquad |n\rangle \to \varphi_n(x)$$

$$N\varphi = \frac{1}{2}\left(z - \frac{d}{dz}\right)\left(z + \frac{d}{dz}\right)\varphi = \frac{1}{2}\left(z - \frac{d}{dz}\right)(z\varphi + \varphi') = \frac{1}{2}\left(z^2\varphi + z\varphi' - \varphi' - z\varphi' - \varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((z^2 - 1)\varphi - \varphi''\right) \stackrel{!}{=} n\varphi$$

ez pont az az egyenlet, amit megoldottunk.

$$a^+\varphi_n = \frac{z - \frac{d}{dz}}{\sqrt{2}}\left(N_n H_n e^{-z^2/2}\right) = \dots = \sqrt{n+1}\, N_{n+1} H_{n+1}(z)\, e^{-z^2/2}$$

Hamilton–Jacobi-módszer bevezetése

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot q(t), t)\, dt = S[q]$$

ezt keressük, ahol $\delta S = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$

Ha már megoldjuk és igazából q-t adunk, S kiszámolható.

Megváltoztatva a végpontot, mindegyikhez kiszámítható a érték, ekkor a érték a végpont fv-e:

$S(q_v, t_v)$ erre: $\underline{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0}$ ← Hamilton-Jacobi-egyenlet

ahol $H = \sum_k p_k \dot q_k - L$

Pl.: Kepler-probléma:

$r(t)$, $\varphi(t)$-t keressük.

$$L = \frac{m}{2}v^2 V(r) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - V(r)$$

$p_r = m\dot r$ $\qquad$ $q_r = m r\dot\varphi^2 - V'(r)$ $\qquad \Rightarrow \dot r = \frac{p_r}{m}$

$p_\varphi = m r^2 \dot\varphi = J$ $\qquad$ $q_\varphi = 0$ $\qquad \Rightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m r^2}$

EL:

$m\ddot r = m r\dot\varphi^2 - V'(\varphi)$ $\quad$ (1)

$\dot J = 0$ $\quad$ (2)

Megmaradó: $E = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r\dot\varphi^2) + V(r) = \text{áll.}$

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r\frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4}\right) + V(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r)$$

$S(r, \varphi, t)$-t keressük:

$$\underline{\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) = 0} \qquad (\text{H–J})$$

TFH: $S(r, \varphi, t) = A(r, \varphi) + B(t)$

$\frac{\partial S}{\partial t} = \dot B(t)$

$$\underbrace{\dot B(t)}_{= -E} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r)}_{f(r,\varphi) = E} = 0$$

$\underline{B = -Et}$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) = E$$

ez olyan volt mint amikor az időfüggő Schröd.-ből időfüggetlen csináltunk behelyettesítve E-t:

$$S = -Et + A(q)$$

$$-E + H\left(q, p = \frac{\partial A}{\partial q}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$ Csak akkor alkalmazható, ha a H nem függ az időtől.

$$H\left(q, p = \frac{\partial A}{\partial q}\right) = E$$ rövidített Hamilton-függvény (mint az E-sajátérték)

visszaírva:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) = E$$

TFH: $A(r,\varphi) = z(r) + \kappa(\varphi)$

$$\frac{1}{2m}\left(z'(r)\right)^2 + V(r) - E + \frac{1}{2mr^2}\left(\kappa'(\varphi)\right)^2 = 0$$

$$r^2\underbrace{\left(\frac{1}{2m}z'^2 + V - E\right)}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{2m}\kappa'^2}_{g(\varphi)} = 0$$ ← konstans!

$$\kappa'(\varphi) = J \Rightarrow \kappa = J\varphi$$

$$\frac{1}{2m}z'(r)^2 + V(r) - E + \frac{J^2}{2mr^2} = 0$$

$$\frac{z'(r)^2}{2m} + V(r) + \frac{J^2}{2mr^2} = E \quad \Rightarrow \quad z'(r)^2 = 2m(E - V(r)) - \frac{J^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad dz = dr\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{J^2}{r^2}}$$

$$z(r) = \int_{r_0}^{r} dr\sqrt{\dots}$$ Ha beírjuk V-be az $\frac{\alpha}{r}$-et, nem lehet zárt alakban kifejezni

$$S(t,\varphi,r) = -Et + J\varphi + z(r,E,J)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial z}{\partial E} \stackrel{!}{=} -t_0 \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \frac{\partial}{\partial E}\int dr\sqrt{\dots}$$ ← ugyanezt láttuk Gravitációnál

$$\frac{\partial S}{\partial J} = \varphi + \frac{\partial z}{\partial J} \stackrel{!}{=} \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial J}\int dr\sqrt{\dots}$$

Ezekből jön ki az ellipszis pálya.

Az S-t mint fv-k összegeként kerestük. A konstans mindig szorzat van, akkor, mintha S az aminek a ln-je ennek. analógia: Eikonál egyenlet.

$\Psi(t,r)$

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(r)\Psi \qquad \text{TFH } \Psi(r,t) = e^{\frac{i}{\hbar}\phi(r,t)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial \phi}{\partial t}e^{\dots}$$

$$\nabla\Psi = -\frac{i}{\hbar}\nabla\phi\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\phi} \qquad \Delta\Psi = \nabla(\nabla\Psi) = -\frac{i}{\hbar}\left(\Delta\phi e^{-\frac{i}{\hbar}\phi} + \nabla\phi\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\nabla\phi e^{-\frac{i}{\hbar}\phi}\right)$$

$$\Delta\psi = \left(-\frac{i}{\hbar}\Delta\phi - \frac{1}{\hbar^2}(\nabla\phi)^2\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\phi}$$

Behelyettesítve a Schröd-be:

$$i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\partial\phi}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}\phi}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta\phi - \frac{1}{\hbar^2}(\nabla\phi)^2\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\phi} + V(r)e^{-\frac{i}{\hbar}\phi}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 + V(r) + \frac{i\hbar}{2m}\Delta\phi$$ ← ez ekvivalens a Schrödingerrel

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H(q, p = \nabla S) = \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(q)$$ ha $\hbar \ll 1$ akkor visszakapjuk H-J-t

Olyan, mintha lenne egy $\Delta\phi$-vel arányos „kvantumpotenciál”

itt a ϕ még mindig komplex. Bontsuk fel máshogy!

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(r)\psi \qquad \text{TFH: } \psi(r,t) = A(r,t)e^{\pm\frac{i}{\hbar}S(r,t)} \quad \text{ahol } A, S \in \mathbb{R}$$

itt van az előjel végig rossz

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}S} + A\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}S}$$

$$\nabla\psi = \nabla A\, e^{-\frac{i}{\hbar}S} + A\left(-\frac{i}{\hbar}\nabla S\right)e^{-\frac{i}{\hbar}S}$$

$$\Delta\psi = \Delta A\, e^{-\frac{i}{\hbar}S} + \nabla A\left(-\frac{i}{\hbar}\nabla S\right)e^{-\frac{i}{\hbar}S} - \frac{i}{\hbar}\left[\nabla A\,\nabla S e^{-\frac{i}{\hbar}S} + A\Delta S e^{-\frac{i}{\hbar}S} + A\nabla S\left(-\frac{i}{\hbar}\nabla S\right)e^{-\frac{i}{\hbar}S}\right] =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}S}\left[\Delta A - \frac{2i}{\hbar}\nabla A\nabla S - \frac{i}{\hbar}A\Delta S - \frac{1}{\hbar^2}A(\nabla S)^2\right]$$

Visszaírva a Schröd-be:

$$i\hbar\left(\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{\hbar}A\frac{\partial S}{\partial t}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}S} = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-\frac{i}{\hbar}S}\left(\Delta A - \frac{2i}{\hbar}\nabla A\nabla S - \frac{i}{\hbar}A\Delta S - \frac{1}{\hbar^2}A(\nabla S)^2\right) + V(r)Ae^{-\frac{i}{\hbar}S}$$

$$i\hbar\frac{\partial A}{\partial t} + A\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta A + \frac{i\hbar}{m}\nabla A\nabla S + \frac{i\hbar}{2m}A\Delta S + \frac{1}{2m}A(\nabla S)^2 + V(r)A$$

idáig

Ennek valós része: $A\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta A + \frac{1}{2m}A(\nabla S)^2 + V(r)A$

képzetes része: $\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{-1}{m}(\nabla A)(\nabla S) \mp \frac{1}{2m}A\Delta S$

Ez így ekvi a Schrödingerrel

A felsőt leosztva A-val:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A}$$ ← Ez a H-J (várhatóan $\hbar^2$-tel korrigál, pontosan, mint az előbb)

Az alsó: $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2m}(2\nabla A\nabla S + A\Delta S) = 0$

$$2A\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{m}(2A\nabla A\nabla S + A^2\Delta S) = 0$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{1}{m}(\nabla A^2\nabla S + A^2\Delta S) = 0$$

$\rho := A^2$

$\underline{j} := A^2\nabla S$ ezzel ez egy kontinuitási

ezért $\rho = \psi^*\psi \qquad \psi = \sqrt{\rho}\,e^{\frac{i}{\hbar}S}$

ρ: valségsűrűség

j: valség áram

A valség potenciál: $W(r,t) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ (mint a valség feltorlódása: ahol nagy a valség, ott gödör van)

KVANTUM II.

6. előadás (04. 23.)

Feynman nem értette, hogy honnan tudja a részecske, hogy melyik a legkisebb hatású útja

kvantummechanikával megfogalmazható a Hamilton-elv: Feynman-integrál

Matematikailag nem precíz, de jönnek matematikusok akik precízzé teszik.
Ez kvantummechanikában nagyon, de kvantumtérelméletben nincs.

Klasszikus valószínűség $\Leftrightarrow$ kvantum valószínűség.

$A \to B_1 \to C$, $A \to B_2 \to C$, $A \to B_3 \to C$

Pl. (valószínűség: w)

$w_{AC}=\sum w_{AB_k} w_{B_kC}$ Annak valószínűsége, hogy A-ból C-be jutok valamelyik B_k-n keresztül

kvantumosan: $P_{AC}=\sum_k P_{AB_k}P_{kC}$ ahol $P\in\mathbb{C}$

$W_{AC}=|P_{AC}|^2$

Mi van 1D-s $V(x)$ potenciál esetén?
$x(t)$-t keressük, ezt egy tört vonallal közelíthetjük

$x_k, x_{k+1}, t_k, t_{k+1}$ $\quad \varphi(t_k, t_{k+1}, x_k, x_{k+1})$

$\varphi(t_{k+1}, t_{k+2}, x_{k+1}, x_{k+2})$

$\vdots$

Ezekből a φ-ket össze kell szorozni. t_0-tól t_N-ig.
Majd össze kell Σ-zni az összes x_k-ra.
A teljes valószínűségi amplitúdó P:

$P=\int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N\, \varphi() \cdots \varphi()$ aminek kell venni a $N\to\infty$ határértékét

A klasszikus Lagrange: $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-V(x)$.
A φ legyen: $\varphi(t_k, t_{k+1}, x_k, x_{k+1}) = N_k e^{\frac{i}{\hbar}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{t_{k+1}-t_k}-V\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)(t_{k+1}-t_k)\right)}_{L\Delta t}}$

Tehát $P=\int dx_1 \cdots \int dx_N \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\sum \frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}-V\Delta t\right)\right]$

A $\sum L\Delta t$ tulajdonképpen $\int L dt = S$. Ezért $e^{\frac{i}{\hbar}S}$-t kell integrálni

[illegible] teljesen, mert x_k-k szerint integrálni kell.

Olyan, mint amikor optikában az [illegible] lépésről lépésre össze kell adni
itt most az $\frac{S}{\hbar}$ játssza a [illegible]

Legyen t_0 a most!

$$P = \dots \int dx_{-2} \int dx_{-1} \int dx_0 \int dx_1 \dots (\dots \varphi_{-1})\, \varphi_0\, (\varphi_1 \varphi_2 \dots) =$$

$$= \int dx_0 \underbrace{\left(\dots \int dx_{-2}\, dx_{-1}\, e^{\text{múlt}} \right)}_{\substack{\text{ez csak a mosttól függ} \\ \psi(x_0, t_0)}} \left(\int dx_1 \int dx_2 \dots e^{\text{jövő}} \right) e^{\text{most}}.$$

Markov-folyamat: a jelen állapot meghatározza a jövőt, de a múlt nem befolyásolja a jövőt.

$$\psi(x_1, t_1) = \int dx_0\, \psi(x_0, t_0)\, \varphi(t_0, t_1, x_0, x_1)$$

$$t_1 \to t + \tau$$
$$x_1 \to x$$
$$x_0 \to x - \xi$$

$$\psi(x, t+\tau) = \int d\xi\, \psi(x-\xi, t)\, \varphi(\xi, \tau)$$

ahol $\varphi(\xi, \tau) = N e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2}\frac{\xi^2}{\tau} - V(x)\tau\right)}$

Sorfejtés:

$$\psi(x,t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}\tau = \int d\xi \left(\psi(x,t) - \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}\xi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) N e^{\frac{im}{2\hbar}\frac{\xi^2}{\tau}} e^{-\frac{i}{\hbar}V(x)\tau}$$

$$\psi(x,t) + \tau \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}V(x)\tau}}_{1 - \frac{i}{\hbar}V(x)\tau} \Big[\psi(x,t) \int d\xi\, N e^{\frac{im}{\hbar 2}\frac{\xi^2}{\tau}} - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) \underbrace{\int d\xi\, \xi\, N e^{\frac{im}{\hbar 2}\frac{\xi^2}{\tau}}}_{0 \text{ mert páratlan}}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) \int d\xi\, \xi^2 e^{\frac{im}{2\hbar}\frac{\xi^2}{\tau}} N \Big]$$

Akkor, hogy visszakapjuk 0. rendben $\psi(x,t)$-t, az kell, hogy a $\int d\xi\, N e^{\frac{im}{\hbar}\frac{\xi^2}{\tau}} = 1$

$$\int d\xi\, e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\tau}} = \sqrt{\frac{\pi}{m/\hbar\tau\, i 2}} = \sqrt{\frac{i\pi\hbar\tau}{2m}} \Rightarrow N(\tau) = \sqrt{\frac{2m}{i\pi\hbar\tau}}$$

Ha Dgy jól emlékszem $\int x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$

ez alapján az utolsó tag: $\frac{1}{2\alpha}$

$$\psi(x,t) + \tau \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(1 - \frac{i}{\hbar}V(x)\tau\right)\left[\psi(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t)\frac{\hbar i \tau}{m}\right]$$

$$\psi + \tau \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi - \frac{i}{\hbar}V\tau\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\hbar i \tau}{m}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$ és ez pont a Schrödinger-egyenlet.

ψ a múlt és kielégíti a Schrödingert

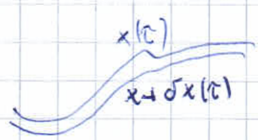
Megjósolta a jövőre a χ^* egyenletet és az is kielégíti.

Tehát a teljes integrál a $\langle \chi | \psi \rangle$ szorzat, ami egy komplex szám, ennek a abszolút négyzete az a valség, ami adott jövőt adott múlt állapotban a valség

Feynman integrál $\iint \mathcal{D}x \; e^{\frac{i}{\hbar} S}$

Mi lesz a klasszikus határban?

$\varphi := \frac{S}{\hbar}$ két közeli pálya



$e^{\frac{i}{\hbar} S + \delta S}$ $\qquad$ $e^{\frac{i}{\hbar} \delta S}$

A hatás különbség: $e^{\frac{i\delta S}{\hbar}}$ az a fáziskülönbség

Ha olyan pályát választok, ahol $\delta S = 0$, akkor a Feynman integrálban a fázisok egyformán járulnak, és ezért nem interferálódik ki.

A klasszikus fizikában a pálya nagy változása nagy δS-t okoz és kiinterferálódik.

Mikor nem alkalmazható? Akkor, ha a pálya nagy változása miatti δS $\hbar$-hoz képest nem túl nagy.

Stat fizika az állapotszám

$Z = \sum_{konf} e^{-\beta E(konf)}$ $\qquad$ a konfigurációt a szomszédos korlátozzák

ezt a valószínűségével kell figyelembe venni

$Z = e^{-\beta F}$ $\qquad$ az pont olyan, mint az $e^{\frac{i}{\hbar} S}$

Ha $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + A j$

$e^{\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L} dt} = e^{\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L} dt + \int A j dt}$

$S[j]$ $\qquad$ $\frac{\delta S}{\delta j} = \int A e^{\cdots}$ $\qquad$ ezt itt most nem nagyon értettem