KVANTUM 3.

2. előadás (10.02.)
(Az előzőn nem volt semmi)

Csoportábrázolás: $G \ni g \to \hat{D}(g) : V \to V$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{D}}(g_1 g_2) = \underline{\underline{D}}(g_1)\,\underline{\underline{D}}(g_2)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{D}}$$

A cél megtalálni az összes olyan mátrix-ábrázolást, ami működik.

Ez nem jó, mert ha van megfelelő $\underline{\underline{D}}(g)$ akkor $\underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{C}}^{-1}$ is jó $\forall\, \underline{\underline{C}}$-re

Ekkor $\underline{\underline{D}}'$ és $\underline{\underline{D}}$ ekvivalens.

Operátor nyelven: $\underline{\underline{D}}$ és $\underline{\underline{D}}'$ u. a. operátor csak más bázisban reprezentálva.

Adott $\underline{\underline{D}}$ és $\underline{\underline{D}}'$ esetén hogy döntjük el, hogy ekvivalensek-e? Találni kéne egy ilyen $\underline{\underline{C}}$-t.
Ez nehéz.

DE! véges mátrixok esetén a karakterek eldöntik a kérdést $\Rightarrow$ ha a karakterek azonosak
ez $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{D}}(g)) = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{D}}'(g))$ $\forall g$-re akkor $\underline{\underline{D}}$ és $\underline{\underline{D}}'$ ekvivalensek.

Végtelenre nem ilyen jó.

$$G \ni g \begin{cases} \nearrow D^{(1)}(g) \to \boxplus \\ \searrow D^{(2)}(g) \to \boxplus \end{cases} \Rightarrow D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \to \begin{pmatrix} \square & \\ & \square \end{pmatrix}$$

ez a fajta is csoport

$\Rightarrow$ reducibilis ábrázolások: Az ábrázolási térnek van-e invariáns altere?
pl.: a z tengely körüli forgatásoknál a z tengely és a x-y sík invariáns alterek.

Mikor van nem triviális inv. altér? Ha van reducibilis.

Teljesen reducibilis: a kiegészítő altér is teljesen reducibilis (blokkdiagonális)

Véges csoportokra: teljesen reducibilis $\cong$ reducibilis

Végtelenre nem! (kompaktokra igen.)

Keressük a forgatás ábrázolásait!

A forgatás csoport Lie-csoport (= minden elem véges sz. paramétertől függ.)
sok parametrizáció van, de a $(\underline{n}, \varphi)$-félét mindig ki érdemes választani, mert
$\cos\varphi = 2\,\mathrm{Sp}\,\underline{F}$ és $\underline{n}$ az 1 s.é.-hez tartozó vektor.

Olyan vektorok: $\mathbb{R}^3 \ni \vec{v} \to \vec{v}' = \hat{F}\vec{v}$

$\vec{u} \to \vec{u}' = \hat{F}\vec{u}$ úgy, hogy $\vec{u}\vec{v} = \vec{u}'\vec{v}'$.

Ebből $\hat{F}^{-1} = \tilde{\hat{F}} \Rightarrow \hat{F}\tilde{\hat{F}} = \mathbb{1} \Rightarrow (\det \underline{\underline{F}})^2 = 1 \to \det \underline{\underline{F}} \begin{smallmatrix} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{smallmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \simeq & O(n) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{F}_+ & \simeq & SO(n) \end{array}$$

rögzítsük $n=3$, és ismerjük $SO(3)$ mátrix ábrázolását.

$$SO(3) \ni \underline{\underline{F}}(\alpha,\beta,\gamma) = \underline{\underline{F}}_x(\alpha)\underline{\underline{F}}_y(\beta)\underline{\underline{F}}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & \sin\alpha \\ & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & & \sin\beta \\ & 1 & \\ -\sin\beta & & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ezek külön-külön egyparaméteres kommutatív csoportok.

$F_x(\alpha_1) + F_x(\alpha_2) = F_x(\alpha_1+\alpha_2) \Rightarrow$ írhatjuk úgy egyből: $F_x(\alpha) = e^{\alpha \underline{\underline{B}}_x}$

Ekkor $\underline{\underline{F}}(0) = \mathbb{1}$, $F(\alpha)^{-1} = F(-\alpha)$.

Mivel $\tilde{F} = \widetilde{e^{\alpha B}} = e^{\alpha \tilde{B}} = F^{-1} = e^{-\alpha B} \Rightarrow \tilde{B} = -B \Rightarrow B$ antiszim.

vezessük be az antiszimmet $\Rightarrow \underline{\underline{B}} := -i\underline{\underline{J}}$, $\underline{\underline{J}} := i\underline{\underline{B}}$

Mivel $\frac{dF_x(\alpha)}{d\alpha} = B_x e^{\alpha B_x}$ szerint $\left.\frac{dF_x}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = B_x$

Ebből $B_x = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$ $B_y = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$ $B_z = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}$

és $F(\alpha,\beta,\gamma) = e^{\alpha B_x} e^{\beta B_y} e^{\gamma B_z}$

De de $\underline{\underline{F}}$ tengelyét ha rögzítjük, a kapott egy 1 paraméteres Lie-csoport, aminek szintén van generátora.

Ha $\underline{\underline{F}} = e^{\varphi \underline{\underline{B}}}$ akkor $\underline{\underline{B}} = \underline{n}\,\underline{\underline{B}} = n_1\underline{\underline{B}}_x + n_2\underline{\underline{B}}_y + n_3\underline{\underline{B}}_z$

Tehát a generátorok lin. kombja szintén generátor.

Állítás: A 3 egyparaméteres részcsoportok generátorai vektorteret alkotnak.

Állítás: A fenti tér bázisának generátorai és elemei is elemei a térnek.

$$[B_k, B_l] = \varepsilon_{klm} B_m$$

A kommutátorra, mint műveletre a tér zárt $\Rightarrow$ Lie-algebra.

Mivel most ismerjük B-ket, könnyen felírhatjuk $B^{(k)}_{lm} = -\varepsilon_{klm}$ (ez egy spec tulajdonság, a fenti írás egyre).

Rendeljünk $\underline{F}$-hez $\underline{\underline{D}}(\underline{F})$-t!

Ezek mintán $\underline{\underline{D}}(\underline{F}) = e^{\alpha \underline{\underline{G}}_x} e^{\beta \underline{\underline{G}}_y} e^{\gamma \underline{\underline{G}}_z}$. Ekkor $[G_k, G_l] = \varepsilon_{klm} G_m$

$\underline{G}$-kel a Lie-algebrát ábrázoltuk, ezt exponenciálva kapjuk a csoport ábrázolását.

$$\begin{tikzcd}
LG \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\text{inf gen.}"'] & DLG \\
LA \arrow[r, "\text{ábr.}"'] & DLA \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Valójában azonban 1 Lie-algebra több csoporthoz is tartozhat

$$\begin{tikzcd}
 & LG_0 \arrow[d] \arrow[rr, dashed] & & DLG_0 \\
LG_1 \arrow[dr] & & LG_2, LG_3 \arrow[dl] & \\
 & LA \arrow[rr, "\text{ábr.}"'] & & DLA \arrow[uu, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

A fölötti ábrázolásai.

Ha van a fölöttit alapján ábrázolni, válogatunk az ábrázolások között.

Miért jó ez? Mert egy Lie-csoportnak ∞ eleme van, de a Lie-Algebra véges bázissal reprezentálható.

Legyen $\underline{\underline{J}} = i \underline{\underline{B}}$ akkor $J^{(k)}_{lm} = -i\, \varepsilon_{klm}$

a kommutációs relációk: $[J^k, J^l] = i\, \varepsilon_{klm} J^{(m)}$

és $\underline{\underline{J}}^{(k)+} = \underline{\underline{J}}^{(k)}$

Az ábrázolt G-knél is $\underline{G} := -i \underline{S}$

Olyan S-eket keresünk, amik úgy viselkednek, mint J-k, tehát

$$\boxed{\begin{aligned} [S^{(k)}, S^{(l)}] &= i\, \varepsilon_{klm} S^{(m)} \\ S^{(k)+} &= S^{(k)} \end{aligned}}$$

← ennek keressük az összes $\underline{S}$ megoldását.

Casimir-operátor: A Lie-algebra ábrázolásaiból képzett olyan mátrix, ami az összes elem ábrázolójával kommutál.

Schur-Lemma miatt az irreducibilis ábrázolásoknál a Casimir $\lambda \cdot \mathbb{1}$. Innen lehet felismerni az irreducibilitást!

Vegyük a $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{S}}^{(1)} \underline{\underline{S}}^{(1)} + \underline{\underline{S}}^{(2)} \underline{\underline{S}}^{(2)} + \underline{\underline{S}}^{(3)} \underline{\underline{S}}^{(3)}$ mátrixot! ~~Állítás~~

Állítás: $\underline{C}$ kommutál $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}$-mal.

Így megvizsgálták részletesen, de én elhiszem

Jó lenne, ha S-ek diagonálisan lennének, de ezek nem egyszerre csak egy.

A z-tengelyt szeretjük => Legyen az ábrázolás olyan, hogy $S^{(3)}$

általánosan: A csoport rangja az, hogy ahány generátorral kommutál

pl: a kvarkokat leíró SU(3)-nak 2 a rangja.

=> itt 2db Casimir van.

A három hátrányt helyett keressünk új báziselemeket!

$S_+ := S^{(1)} + i S^{(2)}$

$S_- := S^{(1)} - i S^{(2)}$

$S_0 := S^{(3)}$.

(másrészt: $S^{(1)} = \frac{S_+ + S_-}{2}$

$S^{(2)} = \frac{S_+ - S_-}{2i}$

$S^{(3)} = S_0$)

Ezek már nem hermitikusak: $S_0^+ = S_0$

$S_+^+ = S_-$, $S_-^+ = S_+$

mi az új bázis kommutátor relációja:

$$\boxed{\begin{array}{ll} [S_0, S_\pm] = \pm S_\pm & S_\pm^+ = S_\mp \\ [S_+, S_-] = 2 S_0 & S_0^+ = S_0 \end{array}}$$

ezzel ekvivalens az előbbi kommutátor relációk.

A Casimir: $C = S^{(1)}S^{(1)} + S^{(2)}S^{(2)} + S^{(3)}S^{(3)} =$

$= S_- S_+ + S_0 + S_0^2$

Keressük az összes ilyen S_+, S_-, S_0-t!

C hermitikus => s.é-i $\in \mathbb{R}$, s.v.-i közösek S_0-val. $|km\rangle$ az a vektor, ami C-vel k, S_0-val m a s.é.:

$\hat{C}|km\rangle = k|km\rangle$

$\hat{S}_0|km\rangle = m|km\rangle$

$k, m \in \mathbb{R}$ és $\langle km|k'm'\rangle = \delta_{kk'}\delta_{mm'}$

$k = k \cdot 1 = k\langle km|km\rangle = \langle km|k|km\rangle = \langle km|\sum_{e=1}^{3} S^{(e)}S^{(e)}|km\rangle =$

$= \sum_e \underbrace{\langle km|S^{(e)+}}_{\langle w_e|} \underbrace{S^{(e)}|km\rangle}_{|w_e\rangle} = \sum_e \langle w_e|w_e\rangle \sum_e |w_e|^2 \geq 0 \quad => k \geq 0$

$|u\rangle := \hat{S}_+|km\rangle \quad , \quad |v\rangle := \hat{S}_-|km\rangle$

$\hat{C}|u\rangle = \hat{C}\hat{S}_+|km\rangle = \hat{S}_+\hat{C}|km\rangle = \hat{S}_+ k|km\rangle = k\hat{S}_+|km\rangle = k|u\rangle$

$\hat{C}|v\rangle = \dots = k|v\rangle$

$\hat{S}_0|u\rangle = \hat{S}_0\hat{S}_+|km\rangle = \hat{S}_+\hat{S}_0|km\rangle + \hat{S}_+|km\rangle = \hat{S}_+ m|km\rangle + S_+|km\rangle =$

$= (m+1)\hat{S}_+|km\rangle = (m+1)|u\rangle$

$S_0|v\rangle = \hat{S}_0\hat{S}_-|km\rangle = S_-S_0|km\rangle - S_-|km\rangle = S_- m|km\rangle - S_-|km\rangle =$

$= (m-1)S_-|km\rangle = (m-1)|v\rangle$

$\Rightarrow$ Ha találunk m s.é.-t, akkor $m+1, m+2 \dots$
$m-1, m-2 \dots$ is az.

Tehát $|u\rangle$ az S_0 $m+1$-es sajátvektora, u.i. $|km\rangle \Rightarrow \exists\, \alpha_{km}, \beta_{km} \in \mathbb{C}$-k

$|u\rangle = \alpha_{km}|k, m+1\rangle$
$|v\rangle = \beta_{km}|k, m-1\rangle$

$\alpha_{km} = \alpha_{km}\langle k,m+1|k,m+1\rangle = \langle k,m+1|\alpha_{km}|k,m+1\rangle = \langle k,m+1|S_+|km\rangle$;

$\alpha_{km}^* = \langle km|\hat{S}_+^\dagger|k, m+1\rangle = \langle km|\hat{S}_-|k,m+1\rangle = \langle km|\beta_{k,m+1}|km\rangle = \beta_{k,m+1}\langle km|km\rangle =$

$= \beta_{k,m+1}$

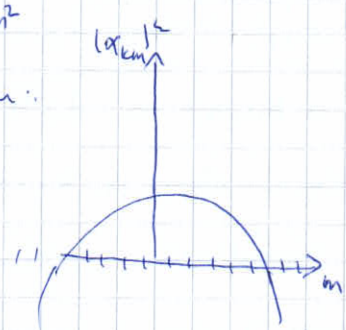
$k = \dots$ előbbiről $= \langle km|\hat{C}|km\rangle = \langle km|(S_-S_+ + S_0 + S_0^2)|km\rangle =$

$= \langle km|S_-S_+|km\rangle + \langle km|\underbrace{S_0|km\rangle}_{m|km\rangle} + \langle km|\underbrace{S_0^2|km\rangle}_{m^2|km\rangle} =$

$= \langle km|S_-S_+|km\rangle + m + m^2 = \langle u|u\rangle + m + m^2 = |\alpha_{km}|^2 + m + m^2$

$\Rightarrow |\alpha_{km}|^2 = |\beta_{k,m+1}|^2 = k - m - m^2$

Ábrázoljuk le α-t m fv-ében:



vannak olyan m-k, amikor $|\alpha|^2 < 0$. Ez hülyeség.

Ott rontottuk el, ahol azt mondtuk, hogy $\hat{S}_+|km\rangle = \alpha_{km}|k, m+1\rangle$
ez lehet, nem is létezik

kell legyen max m és min m

$j := \max(m)$
$k := \min(m)$

A fontos feltétel, hogy

$$S_+|kj\rangle = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\alpha_{kj}}|\dots\rangle \qquad |\alpha_{kj}|^2 = k - j - j^2 \overset{!}{=} 0$$

$$S_-|kk\rangle = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\beta_{kk}}|\dots\rangle \qquad |\beta_{kk}|^2 = k - (k-1)^2 - (k-1) \overset{!}{=} 0 \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad k = \underbrace{j + j^2 = k^2 - k}_{k\text{-ra megoldva}} \qquad k = \frac{1 \pm \sqrt{1+4j+4j^2}}{2} = \frac{1 \pm (2j+1)}{2} = \begin{cases} j+1 \\ -j \end{cases}$$

Mivel $k \leq j \Rightarrow k = -j$

Tehát $K = j(j+1)$ és $m \in [-j, j]$, de csak egészekre léphet.

$$\Rightarrow 2j \in \mathbb{N}$$

$$j \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \dots\}$$

$$K = j(j+1) = \{0, \tfrac{3}{4}, 2, \tfrac{15}{4}, \dots\}$$ ← ezt bonyolult, ezért egyszerűbben j-vel indexelni a C s.é.-it.

Tehát $j \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots\}$

adott j-nél: $m \in \{-j, -j+1, \dots j-1, j\}$: $2j+1$ db $= d$

$$|K m\rangle \to |j m\rangle$$

amin

$$\hat{C}|j m\rangle = j(j+1)|j m\rangle$$

$$\hat{S}_z|j m\rangle = m|j m\rangle$$

$$\hat{S}_+|j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j, m+1\rangle$$

$$\hat{S}_-|j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j, m-1\rangle$$

Ez a ábrázolás. adott j-nél a Hilbert tér $2j+1$ dimenziós altereit kell kiválasztani, és az ezekben ható operátorok az S-ek.

Konkrétan a mátrixokat kiszámolható $\langle j m|\hat{S}_+|j, m\rangle = \dots$ módon.

Lesz 1 dim, 3 dim, 5 dim ... ábrázolásban.

Bonyolultabb csoportok esetén lehetnek $j_1, j_2 \dots$ és a dimenzió $f(\underline{j})$.

KVANTUMB.

3. előadás (10.09.)

Forgáscsoport $\cong SO(3) \ni F(\alpha,\beta,\gamma) = F_1(\alpha)F_2(\beta)F_3(\gamma) = e^{-i\alpha \underline{\underline{J}}^{(1)}} e^{-i\beta \underline{\underline{J}}^{(2)}} e^{-i\gamma \underline{\underline{J}}^{(3)}}$

$\underline{\underline{S}}$-ekkel alapján ábrázolni $\underline{\underline{J}}$-ket: $[\underline{\underline{S}}^{(k)}, \underline{\underline{S}}^{(l)}] = i\,\varepsilon_{klm}\underline{\underline{S}}^{(m)}$

Bevezetjük $\underline{\underline{C}} = \sum_k \underline{\underline{S}}^{(k)}\underline{\underline{S}}^{(k)}$ így $[\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{S}}^{(k)}] = 0$

aztán: $\underline{\underline{S}}_\pm = \underline{\underline{S}}^{(1)} \pm i\underline{\underline{S}}^{(2)} \Rightarrow \underline{\underline{S}}_+^\dagger = \underline{\underline{S}}_-$

$\underline{\underline{S}}_0 = \underline{\underline{S}}^{(3)}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{S}}^{(1)} = \frac{S_+ + S_-}{2}$

$\underline{\underline{S}}^{(2)} = \frac{S_+ - S_-}{2i}$

$\underline{\underline{S}}^{(3)} = S_0$

$C = S_-S_+ + S_0 + S_0^2 = C^\dagger$

$j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3, \dots\}$ $\quad |j\,m\rangle$

$d = 2j+1$

$m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$

$\hat{C}|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle$

$\hat{S}_0|jm\rangle = m|jm\rangle$

$\hat{S}_+|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j, m+1\rangle$

$\hat{S}_-|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j, m-1\rangle$

$\langle j'm'|jm\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

Hogy reprezentálódnak:

$|jj\rangle \sim \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

$|j, j-1\rangle \sim \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

$\vdots$

$|j, -j\rangle \sim \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

Konkrétan:

- $j = 0$

$d = 1, m = 0$, $|00\rangle \Rightarrow$ $\hat{C}|00\rangle = 0|00\rangle$

$S_0|00\rangle = 0|00\rangle$

$S_+|00\rangle = 0|00\rangle$

$S_-|00\rangle = 0|00\rangle$

$S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = \boxed{0}$ $\quad D^{(j=0)}(F) = \boxed{1}$

triviális ábrázolás

skalár: a forgáscsoport triviális ábrázolása ~~sz.~~ transzformálódó mennyiség.

• $j=1$

$d=3$, $m \in \{1, 0, -1\}$, $|1\,1\rangle$, $|1\,0\rangle$, $|1\,{-1}\rangle$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$j(j+1)=2 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{C}}} = \begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$S_+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad S_+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\sqrt{2}, \quad S_+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_+}} = \begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S_-}} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}&&\\1&&\\&1&\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}&1&\\1&&1\\&1&\end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}&-1&\\1&&-1\\&1&\end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{S_3}} = \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$$

ehhez ezek transzformációival áttérhetek a szokásosra, mint $J^{(1)} = \begin{pmatrix}&&\\&&-i\\&i&\end{pmatrix}$, $\underline{J}^{(2)} = \begin{pmatrix}&&i\\&&\\-i&&\end{pmatrix}$, $J^{(3)} = \begin{pmatrix}&-i&\\i&&\\&&\end{pmatrix}$

ez u.a., mint amiből kiindultunk $\Rightarrow$ önábrázolás

(Mátrixcsoportok ábrázolásaiban mindig van önábrázolás)

vektor: az önábrázolás szerint transzformálódó vektor,

• $j=2$

$d=5$, $m \in \{2, 1, 0, -1, -2\}$; $|2\,2\rangle$, $|2\,1\rangle$, $|2\,0\rangle$, $|2\,{-1}\rangle$, $|2\,{-2}\rangle$

$$j(j+1)=6 \Rightarrow \hat{C} = \begin{pmatrix}6&&&&\\&6&&&\\&&6&&\\&&&6&\\&&&&6\end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix}2&&&&\\&1&&&\\&&0&&\\&&&-1&\\&&&&-2\end{pmatrix}$$

a többi az előzőhöz hasonlóan: $S_+ = \begin{pmatrix}&2&&&\\&&\sqrt{6}&&\\&&&\sqrt{6}&\\&&&&2\\&&&&\end{pmatrix}$, $S_- = \begin{pmatrix}&&&&\\2&&&&\\&\sqrt{6}&&&\\&&\sqrt{6}&&\\&&&2&\end{pmatrix}$

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix}&1&&&\\1&&\sqrt{3}/2&&\\&\sqrt{3}/2&&\sqrt{3}/2&\\&&\sqrt{3}/2&&1\\&&&1&\end{pmatrix} \qquad S^{(2)} = \begin{pmatrix}&1&&&\\-1&&\sqrt{3}/2&&\\&\sqrt{3}/2&&\sqrt{3}/2&\\&&\sqrt{3}/2&&-1\\&&&-1&\end{pmatrix}$$

Ezzel eddig nem találkoztunk a klassz fizikában, mert eldugták a tanárok.

direkt összeg: a vektorokat egymás alá ragasztjuk. $D = D_1 + D_2$ $\begin{pmatrix}\boxed{e_1}\\ \boxed{f_1}\end{pmatrix}$

direkt szorzat: $V_1 \ni \{e^{(k)}\}$ $\quad V_2 \ni \{f^{(l)}\}$

$$V_1 \otimes V_2 \ni \sum_{kl} a_{kl}\left(e^{(k)} \otimes f^{(l)}\right)$$ „diadikus szorzat"

Vigyázat: $V_1 \otimes V_2$ nem minden eleme diád, de minden diád eleme.

$$G \ni g \begin{cases} \nearrow D^{(1)}(g): V_1 \to V_1 \\ \searrow D^{(2)}(g): V_2 \to V_2 \end{cases}$$

egyszer $D = D^{(1)} \otimes D^{(2)} : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$

$$D(g)w = D(g) \sum_k \sum_e \alpha_{ke} e^{(k)} \otimes f^{(e)} = \sum_k \sum_e \alpha_{ke} \left(D^{(1)}(g) e^{(k)}\right) \otimes \left(D^{(2)}(g) f^{(e)}\right) =$$

$$= \sum_k \sum_e \alpha_{ke} \left[\sum_p D^{(1)}(g)_{pk}\, e^{(p)}\right] \otimes \left[\sum_q D^{(2)}(g)_{qe}\, f^{(q)}\right] =$$

$$= \sum_p \sum_q \underbrace{\left(\sum_k \sum_e D^{(1)}(g)_{pk}\, \alpha_{ke}\, D^{(2)}(g)_{qe}\right)} e^{(p)} \otimes f^{(q)} =$$

$$= \sum_p \sum_q \alpha'_{pq}\, e^{(p)} \otimes f^{(q)}$$

$$\alpha'_{pq} = D^{(1)}(g)_{pk}\, \alpha_{ke}\, D^{(2)}(g)_{qe} \Rightarrow \underline{\alpha}' = \underline{\underline{D}}^{(1)} \underline{\alpha}\, \underline{\underline{\tilde{D}}}^{(2)}$$

Állítás: ha $D^{(1)}$ és $D^{(2)}$ ábrázolás volt, akkor D is az.

Táblánál bizonyítja, tuti nem másolom le.

ábrázolások direkt szorzata.

Spec eset: $D^{(1)} = D^{(2)}$ = önálló.

$a'_{pq} = F_{pk} F_{qe} \alpha_{ke}$ → tenzor! ⇒ az önábrázolásnál újfajtát kapunk.

de, irreducibilis-e?

nem, mert mindig felbontható szimmetrikus és antiszimm. összegre:

$$T_{ke} = \frac{T_{ke}+T_{ek}}{2} + \frac{T_{ke}-T_{ek}}{2} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{T_{ke}+T_{ek}}{2} - \frac{T_{nn}}{3}\delta_{ke}\right)}_{S_{ke}} + \underbrace{\frac{T_{ke}-T_{ek}}{2}}_{A_{ke}} + \underbrace{\frac{T_{nn}}{3}\delta_{ke}}_{D_{ke}}$$

(5 dim) (3 dim) (1 dim) = 9 dim

⇒ nem kell a többi ábrázolás, a forgatáscsoport minden lényeges

az N indexes tenzor 3^N komponensében előfordul a (2N+1) dimes ábrázolás

+ a kisebbek.

Ezt úgy tudjuk leszerelni, ha az összes indexpárban szimmetrikus lesz.

⇒ ilyen fizikai mennyiségen nincs a j-hez, mert a tenzorok elegek velük.

De a feltűnt tényez már nagyobb indexszámúak a $j>2$ ábrázolásra, mert nem elég a tenzor.

A j = egészekre megnyugvás

$j=\frac{1}{2}$ $d=2$ $j(j+1)=\frac{3}{4}$, $|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

$\sim |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\hat{C}}}=\begin{pmatrix}3/4 & \\ & 3/4\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S_0}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S_+}}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S_-}}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$S^{(1)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad S^{(2)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \qquad S^{(3)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$S^{(k)}=\frac{1}{2}\sigma^{(k)}$$

Már tudjuk, hogy $\sigma^{(k)}\sigma^{(l)}=\delta_{kl}\mathbb{1}+i\,\varepsilon_{klm}\sigma^{(m)}$

ebből: $[\sigma^{(k)},\sigma^{(l)}]=2i\,\varepsilon_{klm}\sigma^{(m)}$ tehát $\frac{\sigma^{k}}{2}$ is ábrázolás

$$D^{(j=\frac{1}{2})}(F_x(\alpha))=e^{i\alpha S^{(1)}}=e^{-i\frac{\alpha}{2}\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{i\alpha}{2}\sigma^{(1)}\right)^n}{n!}=\left(\sum_{n\,\text{páros}}\frac{\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^n}{n!}\right)\underline{\underline{I}}+\left(\sum_{n\,\text{ptlan}}\frac{\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)^n}{n!}\right)\sigma^{(1)}=$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}I-i\sin\frac{\alpha}{2}\sigma^{(1)}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2}\\ -i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

$$D^{(j=\frac{1}{2})}(F_y(\beta))=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix} \qquad D^{(j=\frac{1}{2})}(F_z(\gamma))=\begin{pmatrix}e^{-i\gamma/2} & \\ & e^{i\gamma/2}\end{pmatrix}$$

ez szép-szép, de!

$$D^{(\frac{1}{2})}(F_x(2\pi))=\begin{pmatrix}-1 & \\ & -1\end{pmatrix}$$ Hoppá! $2\pi\neq 0$???

ez nem ábrázolás

ugyanez van minden feles ábrázolásnál

Topológiai az leírás:

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, dashed] \arrow[d] & DLG \\ LA \arrow[r, "\text{repr}"] & DLA \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

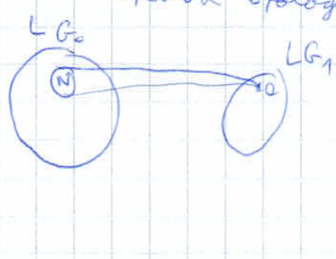
ezt várjuk, de több csoportnak u.a. a Lie-algebrája, így lesz egy törzs amiből az ábrázolást kapjuk

~~Azaz hiszen~~

A Lie csoport az egységelem környéke mikroszkóppal $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A csoport egy sokaság, a Lie-algebra az egység elem ~~?~~ érintő síkja.

A csoportok topológiailag különbözőek



akkor van ábrázolás, ha a normálosztót az 1 reprezentálja

„többértékű ábrázolás"

KVANTUM 3.

4. előadás (10.16.)

SO(3) ábrázolásait keressük

j-vel és m-mel indexeltük az ábrázolást

$j = 0$ triviális ábrázolás

$j = 1$ vektorábrázolás

$j > 2$ tenzorok

$j = \frac{1}{2}$ $\quad S^{(i)} = \frac{1}{2}\sigma^{(i)} \Rightarrow D(F(\alpha,\beta,\gamma)) = e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma^{(1)}} e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma^{(2)}} e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma^{(1)}}$

de itt $\alpha = 2\pi$-re $D = -I$

Ez nem a SO(3) ábrázolása, de lokálisan megegyeznek (kommutációs relációk)
globálisan különbözik (más a topológia)

LG_0-ban van egy N normálosztó, ami egy általános $LG_0 \to LG_1$ homomorfizmus magja.

N általában véges. [spinális számok] ledés

Miből lehet a globalitást vizsgálni: topológiai invariánsok
pl.: • Euler-karakterisztika (csúcsok - élek + lapok)
• homotópia csoport

akkor a különböző az nem homeomorf

lássuk az erdőben, fa kerülgetős sétái.
két út szorzata (egyik utána) is út és ezek ~~csoportot~~ alkotnak
félcsoport

bevezetve az ekvivalencia relációt, már csoport: homotópia csoport

a homotópia csoport a sokaságot jellemzi

Egyszeresen összefüggő sokaság: a homotópia csoportja a C_1

[Lakatos könyve: Bizonyítás és cáfolatok]

Állítás: A fizikai homotópia csoportja egyszeresen összefüggő

$$\boxed{\text{Az egyszeresen összefüggő csoport } (LG_0) \text{ homomorfizmus révén keletkező csoport. A homomorfizmus magja ekvivalens az új csoport homotópia csoportjával.}}$$

Fedés tétele

Milyen az SO(3) topológiája?

Képzeljük el egy tengelyt, mint az $\underline{n}$ irányú, φ szögű vektort!

Ez egy $\frac{\pi}{2}$ sugarú gömb, aminek a szemközti pontjai u.a.

$\Rightarrow$ homeotóp $\mathbb{R}P^3$-mal (projektív tér)

Költöztessük ide nagygömböt, és derítsük ki, mi a homotópia csoport!

ha elmozgatjuk a végpontokat, akkor teljesen visszahúzni, de ha kétszer megyünk, már egyszer sem megyünk $\Rightarrow$ a homotópia csoport a C_2.

Ezért nem ő lesz a főnök.

Itt elmondta alkalmazásként az UHU formalizmust

$$\mathbb{R}^3 \ni a = a_k \underline{e}^{(k)} \leftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = a_k \underline{\underline{\sigma}}^k = \underline{a}\,\underline{\underline{\sigma}} \longrightarrow \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{H}}'(\underline{a}) = \underline{\underline{H}}(\underline{a}') \leftrightarrow a' \in \mathbb{R}^3$$

$$U \in SU(2)$$

$$\underline{a}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{a}$$

$\underline{\underline{U}}$-hoz megfelel egy $\underline{\underline{F}}$

Dt, $-\underline{\underline{U}}$-hoz u.a. $\underline{\underline{F}}$ felel meg.

$\Rightarrow$ homomorfizmus $SU(2)$ és $SO(3)$ között, és a mag a C_2

Képlettel levezetve:

$$F_{kl} = \frac{1}{2} Sp\left(\sigma^{(k)}\, \underline{\underline{U}}\, \sigma^{(l)}\, \underline{\underline{U}}^{+}\right) \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{U}} = \cos\frac{\varphi}{2}\,\underline{\underline{I}} - i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})$$

(levezetés alk. vektorra)

általában $\underline{\underline{U}}$ megadásánál $\varphi \in [0, 4\pi)$, de a $[2\pi, 4\pi)$ int belehajtható a vágási csoportba

KVANTUM

5. előadás (11.06.)

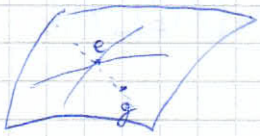
A forgáscsoport ábrázolásai az térerősségek, mint (E_1, E_2, E_3) úgy transzformálódik mint vektor.

$$\boxed{T^{-1}x} \xrightarrow{T} \boxed{x} \qquad S(T)\varphi(T^{-1}x) = \varphi(x)$$

φ: mérték értéke x helyen.

ha φ vektortér, akkor S operátor

Tapasztalat:



g megadható, mint adott 1 paraméteres Lie-csoportok szorzata.
vagy, mint önmagába átmenő 1 paraméteres Lie-csoport.

$$SO(3) \ni F(\alpha,\beta,\gamma) = F_x(\alpha) F_y(\beta) F_z(\gamma) = F(n,\varphi) = e^{-iZ\varphi}$$
$$= e^{-i\alpha J^{(1)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}}$$

és így $Z = n_k J^{(k)}$ ahol $|n| = 1$

Mivel $J^{(1)} = \begin{pmatrix} & & \\ & & -i \\ & i & \end{pmatrix}$ $\quad J^{(2)} = \begin{pmatrix} & & i \\ & & \\ -i & & \end{pmatrix}$ $\quad J^{(3)} = \begin{pmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & \end{pmatrix}$

$$Z = n_k J^k = i \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{ke} = n_m J^{(m)}_{ke} = n_m(-i\varepsilon_{mke}) = -i\varepsilon_{kem} n_m$$

$$e^{-iZ\varphi} = \sum_k \frac{(-i\varphi)^k Z^k}{k!}$$

Z hatványai: $\quad Z^2_{ke} = Z_{kp} Z_{pe} = (-i\varepsilon_{kpm} n_m)(-i\varepsilon_{peq} n_q) =$

$$= -(\delta_{me}\delta_{kq} - \delta_{mq}\delta_{ke}) n_m n_q = -n_k n_e + \delta_{ke} = Q_{ke}$$

ez egy projektor n-re merőleges síkra.

$$Z^3_{ke} = (-i\varepsilon_{kpm} n_m)(\delta_{pe} - n_p n_e) = i\varepsilon_{kpm} \overbrace{n_p n_m}^{0} n_e - i\varepsilon_{kem} n_m$$
$$= Z_{ke}$$

$$\Rightarrow Z^{2k+1} = Z, \quad Z^{2k} = Q$$

tehát $e^{-iZ\varphi} = \mathbb{1} + \sum_{k \text{ ptl}} \frac{(-i\varphi)^k Z^k}{k!} + \sum_{k \text{ ps}} \frac{(-i\varphi)^k}{k!} Z^k = \mathbb{1} + \sin\varphi(-iZ) + (\cos\varphi - 1)Q$

$$(e^{-iZ\varphi})_{ke} = \delta_{ke} - i(-i\varepsilon_{kem} n_m)\sin\varphi + (\cos\varphi - 1)(\delta_{ke} - n_k n_e) = \cos\varphi\,\delta_{ke} + (1-\cos\varphi) n_k n_e + \varepsilon_{kme} n_m \sin\varphi$$

ez tényleg a forgás mátrix

Forgatás: $F: \underline{r} \to \underline{r}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{r}$

Állapotok tere: $\mathcal{H} \ni \psi(\underline{r})$

de! $\mathcal{H} \ni \psi'(\underline{r}) = \psi(\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{r}) = \psi\left(e^{i\varphi(\underline{n}\underline{\underline{Z}})}\underline{r}\right) = *$

Vegyünk infinitezimális forgatásokat! $e^{-i\varphi Z} \approx 1 - i\varphi \underline{\underline{Z}}$

$$* = \psi\left((1+i\varphi Z)\underline{r}\right) = \psi(\underline{r} + i\varphi Z\underline{r}) = \psi(\underline{r}) + \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\left(+i\varphi(\underline{\underline{Z}}\,\underline{r})_k\right) =$$

$$= \psi(\underline{r}) + \frac{\partial\psi}{\partial x_k}(+i\varphi) Z_{kl} x_l = \psi(\underline{r}) + \frac{\partial\psi}{\partial x_k}(+i\varphi)(-i\varepsilon_{klm} n_m) x_l =$$

$$= \psi(\underline{r}) + i\varphi n_m\left(-i\varepsilon_{klm} x_l \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) = \psi(\underline{r}) + \frac{i}{\hbar}\varphi n_m\left(\frac{\hbar}{i}\varepsilon_{mkl} x_l \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \psi(\underline{r}) - \frac{i}{\hbar}\varphi n_m\left(\varepsilon_{mlk} x_l \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(\underline{r}) = \psi(\underline{r}) - \frac{i}{\hbar}\varphi n_m\left(\hat{\underline{r}}\times\hat{\underline{p}}\right)_m \psi(\underline{r})$$

tehát $\psi'(\underline{r}) = \psi(\underline{r}) - \frac{i\varphi}{\hbar} n_m \hat{L}_m \psi(\underline{r}) = \left[\hat{I} - \frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\hat{\underline{L}})\right]\psi$

mi van nem kicsi elforgatás esetén:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\hat{I} - \frac{1}{N}\frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\hat{\underline{L}})\right]^N\psi = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\hat{\underline{L}})}\psi$$

Mi történt?

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \underline{\underline{F}}(\varphi, n) = e^{-i\varphi(\underline{n}\underline{\underline{Z}})}$$

$$\downarrow$$

$$\hat{R}: \mathcal{H} \to \mathcal{H} \quad \hat{R}(\varphi, n) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\hat{\underline{L}})}$$

Mi $\hat{L}$-t úgy definiáltuk, hogy $\hat{L}_k = \varepsilon_{klm}\hat{x}_l\hat{p}_m$

$$\hat{L}_1^+ = (\hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2)^+ = (\hat{x}_2\hat{p}_3)^+ - (\hat{x}_3\hat{p}_2)^+ = \hat{p}_3\hat{x}_2 - \hat{p}_2\hat{x}_3 = \hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2 = \hat{L}_1$$

$$[\hat{L}_k, \hat{L}_l] = [\varepsilon_{kst}\hat{x}_s\hat{p}_t, \varepsilon_{luv}\hat{x}_u\hat{p}_v] = \varepsilon_{kst}\varepsilon_{luv}[\hat{x}_s\hat{p}_t, \hat{x}_u\hat{p}_v] =$$

$$= \varepsilon_{kst}\varepsilon_{luv}\left(x_sp_tx_up_v - x_up_vx_sp_t - x_sx_up_tp_v + x_ux_sp_vp_t\right) =$$

$$= \quad \dots \quad \left[x_s(p_tx_u - x_up_t)p_v + x_u(p_vx_s - x_sp_v)p_t\right] =$$

$$= \varepsilon_{kst}\varepsilon_{luv}\frac{\hbar}{i}\left(x_s\delta_{tu}p_v - x_u\delta_{vs}p_t\right) = \frac{\hbar}{i}\left(\varepsilon_{kst}\varepsilon_{ltv}x_sp_v - \varepsilon_{kst}\varepsilon_{lus}x_up_t\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[(\delta_{kv}\delta_{sl} - \delta_{kl}\delta_{vs})x_sp_v - (\delta_{tl}\delta_{ku} - \delta_{tu}\delta_{lk})x_up_t\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(x_lp_k - \delta_{kl}x_vp_v - x_kp_l + \delta_{kl}p_tx_t\right) = \frac{\hbar}{i}\left(x_lp_k - x_kp_l\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(\delta_{lu}\delta_{kv} - \delta_{ku}\delta_{lv}\right)x_up_v = \frac{\hbar}{i}\varepsilon_{lkm}\varepsilon_{muv}x_up_v =$$

$$= i\hbar\,\varepsilon_{klm}\hat{L}_m$$

Tehát $\left[\frac{\hat{L}_k}{\hbar}, \frac{\hat{L}_l}{\hbar}\right] = i\varepsilon_{klm}\frac{\hat{L}_m}{\hbar} \Rightarrow \frac{\hat{L}}{\hbar}$ úgy kommutál, mint $\underline{\underline{Z}} \Rightarrow \hat{L}$ operátor ábrázolása a forgatásnak.

Bevezetjük a $\hat{C} = \hat{L}_k \hat{L}_k = \hat{L}^2$ operátort.

Keressük $\hat{L}_3$ és $\hat{C}$ közös s.f.-it: $\hat{L}_3 f(\underline{r}) = m f(\underline{r})$ (1)

$\hat{C} f(\underline{r}) = k f(\underline{r})$ (2)

ezek most diff.egyenletek. Ha azt akarjuk, hogy f mégis legyen m és k használódni.

Térjünk át Descartes-ról (r, ϑ, φ)-re.

$$\hat{L}_3 = \varepsilon_{3kl}\hat{x}_k \hat{p}_l = \varepsilon_{312}\hat{x}_1\hat{p}_2 + \varepsilon_{321}\hat{x}_2\hat{p}_1 = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1 =$$

$$= x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} y$$

Ha $f(r, \vartheta, \varphi)$ akkor az $f(r(x,y,z), \vartheta(x,y,z), \varphi(x,y,z))$ ahol $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$$\hat{L}_3 f = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\hbar}{i}\left[x\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - y(\dots)\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial f}{\partial r}\left(x\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\left(x\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - y\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial f}{\partial r}\overbrace{\left(x\frac{y}{r} - y\frac{x}{r}\right)}^{0} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\overbrace{\left(x\frac{\partial(\dots)}{\partial(\,)}2y - y\frac{\partial \dots}{\partial(\,)}2x\right)}^{0} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\overbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}^{1}\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

L_1 és L_2 is csak ϑ és φ-től függ.

$\Rightarrow$ csak az $(\cancel{r}, \vartheta, \varphi)$-től függő f-k érdekelnek.

(1) egyenlet:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi} f(\vartheta, \varphi) = m\hbar f(\vartheta, \varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = i m f \quad \Rightarrow \quad f(\varphi) = e^{im\varphi}$$

mivel φ körbeér, ezért $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi) \quad \Rightarrow \quad m \in \mathbb{Z}$

DE ez geometriai feltétel. Korábban nem kijött, hogy m lehet félegész is, mint ahogy most valahogy majd az kell, hogy $|f(\varphi)|^2 \in \mathbb{Z}$, vagy olyan

(2) egyenlet

$$\hat{C} = -\hbar\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$SO(3) \ni F(\underline{n}, \varphi) = e^{-i\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{J}})}$$

$$D^{(j)}(F) = e^{-i\varphi(\underline{n}\,\underline{S})}$$

$$R(\underline{\underline{F}})\, \psi(\underline{r}) = \psi(\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{r})$$

$$\sim \psi((\mathbb{1} - i\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{J}}))\underline{r}) = \psi(\underline{r} - i\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{J}})\underline{r}) =$$

$$= \psi(\underline{r}) + \partial_k \psi'(\underline{r})(-i\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{J}})\,\underline{r})_k =$$

$$= \mathbb{1}_x \psi - \frac{i}{\hbar}\,\underline{n}\,\underline{\hat{L}}\,\psi \qquad \text{ahol } \hat{L}_k = \varepsilon_{kem}\hat{r}_e \hat{p}_m$$

$$\text{és } \hat{p}_m = \frac{\hbar}{i}\partial_m$$

tetszőleges forgatás $\hat{R}(F) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\,\underline{\hat{L}})}$

direkt szorzat:

$$W = V_1 \otimes V_2$$

$$\underline{e}^{(k)} \quad \underline{f}^{(l)} \qquad W \ni \sum_k \sum_l c_{kl}\, (\underline{e}^{(k)} \otimes \underline{f}^{(l)}) =: \underline{w}$$

$$\underline{w} = \sum_l \Big(\underbrace{\sum_k c_{kl}\,\underline{e}^{(k)}}_{\underline{v}_{(l)} \in V_1}\Big) \otimes \underline{f}^{(l)} \qquad \Rightarrow \quad \underline{w} = \sum_l \underline{v}_{(l)} \otimes \underline{f}^{(l)}$$

de $V_2 \ni \underline{u} = \sum_k a_k \underline{f}^k$ és $\underline{v}_{(l)} = \underline{f}^{(l)}\,\underline{w}$, $u_k = \underline{f}^{(k)}\underline{u}$

itt valamit elírtam, majd videóban visszanézem.

ugyanez függvényekkel:

$$\psi(x,y) = \sum_k \sum_l c_{kl}\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y) = \sum_l \Big(\sum_k c_{kl}\, \varphi_k(x)\Big) \varphi_l(y) = \sum_l z_l(x)\, \varphi_l(y)$$

$$\Rightarrow z_l(x) = (\psi(x,y), \varphi_l(y)) = \int \psi(x,y)\, \varphi_l^*(y)\, dy$$

$$\mathcal{H} := \mathcal{L}^{(2)}(\mathbb{R}^3) \ni \psi(\underline{r})$$

$$= \mathcal{L}^{(2)}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{L}^{(2)}(S^2) \qquad \text{a gömbi koordinátákkal.}$$

$$\forall \psi(\underline{r}) = \psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_l c_l(\underline{r})\, \varphi_l(\vartheta, \varphi)$$

$$\text{ahol } c_l(r) = \iint \psi(r, \vartheta, \varphi)\, \varphi_l^*(\vartheta, \varphi)\, \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

keressük a gömbfelületen olyan fv-eket, amik bázist alkotnak?

Az algebrai m.o.-nál vettük a Casimirt, és S_3 közös sajátrendszerét,

az előbbi során láttuk, ezek így lesznek r függők.

$$L_k = (\ )\frac{\partial}{\partial\vartheta} + (\ )\frac{\partial}{\partial\varphi} : \mathcal{L}^2(S^2) \to \mathcal{L}^2(S^2)$$

ezt már a XVIII. sz.-ban megoldották:

$$\hat{C} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$\hat{L}^2 = \sum \hat{L}_k \hat{L}_k \quad , \quad L_3 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Keressük G-t, akar

$$\hat{C}G(\vartheta,\varphi) = k\,G(\vartheta,\varphi)$$

$$\hat{L}_3 G(\vartheta,\varphi) = \hbar m\,G(\vartheta,\varphi)$$

mivel a fv. tér ∞ dimenziós, ez az ábrázolás reducibilis, de tudjuk, hogy ez felbontható véges dimenziós alterekre.

A rászedemet a múltban megoldották: $G(\vartheta,\varphi) = e^{im\varphi}F(\vartheta)$

mivel $G(\vartheta, \varphi = 2\pi) = G(\vartheta|\varphi = 0) \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$

Állítás: a teljes tér ábrázolásában minden $m \in \mathbb{Z}$ pontosan 1-szer fordul elő.

$$\hat{C}e^{im\varphi}F(\vartheta) = e^{im\varphi}\left(F''(\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta F'(\vartheta) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}F(\vartheta)\right) \stackrel{!}{=} kF(\vartheta)e^{im\varphi}$$

$$\Rightarrow F''(\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta F_m'(\vartheta) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}F_m(\vartheta) = kF_m(\vartheta)$$

akkor, hogy F ne legyen szinguláris $\vartheta = 0$-ban, olyan alakban keressük, hogy

$$F_m(\vartheta) = \sin^n\vartheta\, f(\vartheta) \qquad n \geq 0$$

kiderül, hogy $|n| = |m|$

legyen $x := \cos\vartheta$

$f(\vartheta) = P(x) \Rightarrow P$-re is kapunk egy egyenletet: Legendre-polinomok

Végül amit kapunk:

$$G(\vartheta,\varphi) = e^{im\varphi}(\sin\vartheta)^{|m|}P_{\ell m}(\cos\vartheta) \text{ Nem } \quad \text{alak } P_{\ell m}(\cos\vartheta)F(\cos\vartheta)^{\ell-m} + \dots$$

$$\hat{R}(F)Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = Y_{\ell m}(E^{-1}\underline{k}) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D^{(\ell)}(F)_{mm'}Y_{\ell m'}(\vartheta,\varphi)$$

Gömbfüggvények rajzolása (?)

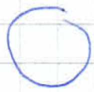
$$Y_{\ell m} = F_\ell(\vartheta)e^{im\varphi} \quad , Y_{\ell -m} - F_\ell e^{-im\varphi} \quad \sim \quad F(\vartheta)\cos m\varphi \text{ és } F(\vartheta)\sin m\varphi.$$

így már valós értékű fv.-k maradt, ezeket le tudjuk rajzolni.

$$Y_{\ell m} = P_{\ell m}(\cos\vartheta)\cos m\varphi \quad (\sin m\varphi)$$

ez választó $\to$ hosszúsági körök

ennek $|\ell - m|$ db gyöke van $\to$ szélességi körök

$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  s

---

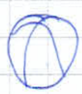
$Y_{11} + Y_{1-1} = P_0 \cos\varphi$  p_x

$Y_{10} = P_1(\cos\vartheta)$  p_z

$Y_{11} - Y_{1-1} = P_0 \sin\varphi$  p_z

az alakra tök egyforma

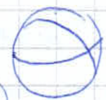
$Y_{22} + Y_{2-2} = P_0(\cos\vartheta)\cos(2\varphi)$

 45° u.a. 

$Y_{22} - Y_{2-2} = P_0(\cos\vartheta)\sin 2\varphi$

Ez a 4 u.a. csak elforgatva

$Y_{21} + Y_{2-1} = P_1(\cos\vartheta)\cos\varphi$

$Y_{21} - Y_{2-1} = P_1(\cos\vartheta)\sin\varphi$

$Y_{20} = P_2(\cos\vartheta)$ 

Ezzel nincs elrontva a gömbszimmetria, DE

$$Y_{20}(F\vec{r}) = \sum_{m'=-2}^{2} c_{2m} Y_{2m}$$

Általában: az elforgatott csúcs megkapható a másik 4 lineárkombinációjaként

A teljes tér struktúrája

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^d$$

$$\left[\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+) \otimes \sum_{\ell=0}^{\infty} V_{2\ell+1}(S^2)\right]$$

és $d = 2j+1$

d adott elemi objektum jellemző

pl.: e^- esetén $d=2 \Rightarrow j=\frac{1}{2}$

ezt jelenti az, hogy az e^- spinje $\frac{1}{2}$.

KVANTUM III

7. előadás (11.20.)

A múlt órán láttuk, hogy a gömbfelületen értelmezett függvények között Y_m^l ezért állnak, és minden $l \in \mathbb{N}$-re létezik ilyen.

DE ez nem elég:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^d \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \qquad \text{alak} \quad d = 2j+1$$

Hogy működik ezen az ábrázolás?

$$V_1 \ni \underline{e}^{(k)} \qquad V_2 \ni \underline{f}^{(l)}$$

$$W = V_1 \otimes V_2 \ni \sum_k \sum_l \alpha_{kl}\, \underline{e}^{(k)} \otimes \underline{f}^{(l)}$$

$\hat{A}: V_1 \to V_1$ hogy hat az W-n:

$$\hat{\hat{A}}: W \to W \qquad \hat{\hat{A}} = \hat{A} \otimes \hat{I}_{V_2}$$

$$\hat{\hat{A}}\,\underline{w} = \sum_{kl} \alpha_{kl} \left(\hat{A}\,\underline{e}^{(k)}\right) \otimes \left(\hat{I}_{V_2}\, \underline{f}^{(l)}\right) = \sum_p \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \left[A_{pk}\, \underline{e}^{(p)}\right] \otimes \underline{f}^{(l)}$$

Ha van $\hat{B}: V_2 \to V_2$ értelmezhető hasonló módon $\hat{\hat{B}}: W \to W$

$$\hat{\hat{A}} + \hat{\hat{B}} = \hat{A} \otimes \hat{I}_{V_2} + \hat{I}_{V_1} \otimes \hat{B}$$

A $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ terünk d db $\psi(\underline{r})$ fv-ből áll.

$$SO(3) \ni F(\underline{n}, \varphi) = e^{-i\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{J}})}$$

$$D^{(j)}\left(F(\underline{n}, \varphi)\right) = e^{-i\varphi(\underline{n}\,\underline{S}^{(j)})} : V_{2j+1} \to V_{2j+1} \qquad \hat{R}\left(F(\underline{n}, \varphi)\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\,\underline{\hat{L}})}$$

$$\mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$$

Ha $|\varphi| \ll 1$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{n}, \varphi) = I_3 - i\varphi(\underline{n}, \underline{\underline{J}})$$

$$D^{(j)}\left(\underline{\underline{F}}(\underline{n}, \varphi)\right) = I_d - i\varphi(\underline{n}\,\underline{S})$$

$$\hat{R}\left(F(\underline{n}, \varphi)\right) = I_{\mathcal{L}^2} - \frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\,\underline{\hat{L}})$$

$$\psi'_A(\underline{r}) = \left(\delta_{AB} - i\varphi\,\underline{n}\,\underline{S}_{AB}\right)\psi_B\left((I_3 - i\varphi\,\underline{n}\,\underline{\underline{J}})\,\underline{r}\right) = \left(\delta_{AB} - i\varphi n_l S^l_{AB}\right)\psi_B\left(\underline{r} - i\varphi n_k \underline{\underline{J}}^k \underline{r}\right) =$$

$$= \left(\delta_{AB} - i\varphi n_l S^l_{AB}\right)\left[\psi_B(\underline{r}) + \frac{\partial \psi_B}{\partial x_m}\left(-i\varphi n_k (\underline{\underline{J}}^k \underline{r})_m\right)\right] =$$

$$= \psi_A(\underline{r}) - i\varphi n_l S^{(l)}_{AB}\psi_B(\underline{r}) + \delta_{AB}\frac{\partial\psi_B}{\partial x_m}\left(-i\varphi n_l (\underline{\underline{J}}^l \underline{r})_m\right)$$

Ebből: $\psi'_A(\underline{r}) - \psi_A(\underline{r}) = -i\varphi n_l\left(S^{(l)}_{AB}\psi_B + \delta_{AB} J^{(l)}_{mk} r_k \frac{\partial\psi_B}{\partial x_m}\right) = -i\varphi n_l\left(S^{(l)}_{AB}\psi_B + \delta_{AB}(-i\varepsilon_{lmk}) r_k \frac{\partial}{\partial x_m}\psi_B\right)$

$$= -i\varphi n_l\left(S^{(l)}_{AB} + \delta_{AB}\frac{1}{\hbar}\varepsilon_{lmk} r_k \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\psi_B = -i\varphi n_l\left(S^{(l)}_{AB}\cdot \mathbb{1} + \delta_{AB}\frac{1}{\hbar}\hat{L}_l\right)\psi_B$$

Azaz ez pont ilyen direkt-szorzat alakú:

$$\underline{J} : W \to W$$

$$\underline{J} := \underline{S} \otimes 1 + \underline{I} \otimes \frac{\underline{L}}{\hbar}$$

Tehát az infinitezimális elforgatás generátora: $\Psi'(\underline{r}) = \Psi(\underline{r}) - i\varphi\,\underline{n}\,\underline{J}$

Általános forgatás: $\left(I_n - i\frac{\varphi}{N}\underline{n}\,\underline{J}\right)^N \to e^{-i\varphi \underline{n}\,\underline{J}}$

A szorzatfelbontás ez úgy írja, hogy $\underline{J} = \underline{S} + \underline{L}$. (pl. kvatz)

Azt nevezzük elemi objektumnak, amiben ez nem változik

a felbontott tere

Egy konkrét példa:

$j = \frac{1}{2},\ d = 2$ $\qquad |j\,m\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \to |\Uparrow\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \to |\Downarrow\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$C|\tfrac{1}{2}\,m\rangle = \tfrac{3}{4}|\tfrac{1}{2}\,m\rangle \Rightarrow C = \begin{pmatrix}3/4 & \\ & 3/4\end{pmatrix}$$

$$S_0|\Uparrow\rangle = \tfrac{1}{2}|\Uparrow\rangle,\ S_0|\Downarrow\rangle = -\tfrac{1}{2}|\Downarrow\rangle \Rightarrow S_0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} S_+|\Uparrow\rangle = 0 & S_+|\Downarrow\rangle = |\Uparrow\rangle \\ S_-|\Uparrow\rangle = |\Downarrow\rangle & S_-|\Downarrow\rangle = 0 \end{matrix} \Rightarrow S_+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ S_- = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$S^{(1)} = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma^1,\quad S^{(2)} = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{1}{2}\sigma^{(2)}$$

Milyen valószínűséggel mérek különböző értékeket

$\underline{n}$-re vetítés operátora: $S_n = \underline{n}\,\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{n}\,\underline{\sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z\end{pmatrix}$

Mik lesznek a s.é.-i: $Sp(S_n) = 0$

$$\det(S_n) = -\frac{n^2}{4} = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$ tetszőleges tengelyre a spin értéke $\pm\frac{1}{2}\hbar$.

Mik a sajátvektorai? Érdemes áttérni gömbi koordinátákra:

$$\underline{n} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \Rightarrow 2S_n = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{i\varphi} & -\cos\vartheta\end{pmatrix} =$$

$$\mathbb{1} + \begin{pmatrix} 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} & 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi} \\ 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi} & -2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi} & -\cos\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow |\Uparrow_n\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

$$|\Downarrow_n\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -\cos\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

Milyen egy általános spin

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{i\mu} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}\, e^{i\nu} \end{pmatrix} = e^{i\mu} \begin{pmatrix} \cos\vartheta/2 \\ \sin\frac{\vartheta}{2}\, e^{i(\nu-\mu)} \end{pmatrix}$$

Tehát minden tengely sajátértéke egy ált. spinnek:

$\Rightarrow$ A feles spinnél mindig tudunk rendelni olyan irányt amelyben 100%-os valószínűséggel mérjük.

1-es spinnél ez nagyobbnál nem megy, mert több szabad paraméter van benne, mint amennyi a három állításához kell.

↳ Amennyiség mindig nem

$j=1$, $d=3$

$|1\,1\rangle$, $|1\,0\rangle$, $|1\,-1\rangle$

$$\underset{|+\rangle}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{|0\rangle}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{|-\rangle}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad C = j(j+1) = 2 \qquad \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_z = S_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \qquad S^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \qquad S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_n = \underline{n}\,\underline{S}^{(n)} = \sin\vartheta\cos\varphi\, S^{(1)} + \sin\vartheta\sin\varphi\, S^{(2)} + \cos\vartheta\, S^{(3)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} & 0 \\ \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & 0 & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ 0 & \sin\vartheta\, e^{i\varphi} & -2\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

A sajátértékek $1, 0, -1$, azt tudjuk, így a sajátvektorok:

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2}\, e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ \sin^2\frac{\vartheta}{2}\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

KVANTUM 3.

8. előadás (11.27.)

$$G \ni g \nearrow D^{(j_1)}(g): V_{d_1} \to V_{d_1} \qquad |j_1 m_1\rangle$$
$$\quad\;\; \searrow D^{(j_2)}(g): V_{d_2} \to V_{d_2} \qquad |j_2 m_2\rangle$$

$$D := \hat{D}^{(j_1)} \otimes \hat{D}^{(j_2)} : W \to W \quad \text{ahol } W = V_{d_1} \otimes V_{d_2}$$

$$W \ni |w\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} a_{m_1 m_2} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

$$D(g)\, w = \sum_{m_1} \sum_{m_2} a_{m_1 m_2} \left(\hat{D}^{(j_1)}(g) |j_1 m_1\rangle\right) \otimes \left(D^{(j_2)}(g) |j_2 m_2\rangle\right)$$ ← ez is lehet reducibilis vagy irreducibilis

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_j n_j \hat{D}^{(j)}$$

Clebsch-sor

Az SO(3) esetén n_j-k 0 vagy 1. Ez egy önálló tétel a reprezentációelméletből:

$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{j=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2} (2j+1)$$

Ez alapján:

$$|j m\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

$$\sim \delta_{m,\, m_1+m_2}$$

$$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = \sum_{j=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} C^{j_1 m_1 j_2 m_2}_{jm} |j m\rangle$$

Ha $F^{(j)}_m$ fizikai mennyiség transzformációi az ~~ábrázol~~ csoport mátrixelemeivel:

$$F^{(j)}_{m'} = \sum_{m=-j}^{j} D^{j}_{m'm}(g) F^{(j)}_m$$

Ha a bázistraf. miatt: $\hat{F}^{(j)}_{m'} = \hat{R}(g) F^{(j)}_m \hat{R}(g)$

A fizikai mennyiségeket műveletté így: „irreducibilis átváltozó tenzor operátorok"

Kipróbálás, egy adott F-re az igaz-e, úgy kell, hogy kipróbáljuk $\forall g$-re.

Próbáljuk ki infinitezimális forgatásra:

$$g = F(\varphi, n) = e^{-i\varphi(n\Xi)}$$

$$D^{(j)}(g) = e^{-i\varphi(n\hat{\Sigma})} \simeq 1\!\!1_{2j+1} - i\varphi(n\hat{\Sigma})$$

$$\hat{R}(g) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi(n\hat{L})} \approx 1\!\!1_{\mathcal{H}} - \frac{i\varphi}{\hbar}(n\hat{L})$$

A feltétel: $\hat{F}^{(j)}_m \pm \sum_{m'=-j}^{j} D^{(j)}(g)_{mm'} F^{(j)}_{m'} \doteq \hat{R}(g) \hat{F}^{(j)}_m \hat{R}^{-1}(g)$

[illegible]:

$$\sum_{m'}\left(\delta_{mm'} - i\varphi(\underline{n}\,\underline{S}^{(j)})_{mm'}\right)F_{m'} \doteq \left(1_{\mathcal{H}} - \frac{i}{\hbar}\varphi(\underline{n}\,\underline{\hat{L}})\right)\hat{F}_m^{(j)}\left(1_{\mathcal{H}} + \frac{i\varphi}{\hbar}(\underline{n}\,\underline{\hat{L}})\right)$$

$$F_m^{(j)} - i\varphi\sum_{m'}(\underline{n}\,\underline{S}^{(j)})_{mm'}\hat{F}_{m'}^{(j)} = \hat{F}_m^{(j)} - \frac{i\varphi}{\hbar}(\underline{n}\,\underline{\hat{L}})\hat{F}_m^{(j)} + \frac{i\varphi}{\hbar}\hat{F}_m^{(j)}(\underline{n}\,\underline{L})$$

$$\sum_{m'}(\underline{n}\,\underline{\hat{S}})_{mm'}\hat{F}_{m'}^{(j)} = \frac{1}{\hbar}\left[F_m^{(j)}, (\underline{n}\,\underline{\hat{L}})\right]$$

$$\frac{1}{\hbar}\left[\hat{F}_m^{(j)}, \hat{L}_k\right] = \sum_{m'=-j}^{j} S_{mm'}^{(j)(k)} F_{m'}^{(j)}$$

Ez már véges képlet

Mivel a kis φ kiesett, ezért kaptunk ezen összefüggést, ez a csontváz

$\hat{F}$ helyébe bevezetünk különböző mennyiségeket megállapítható, egy vektor, skalár, stb...

Adott kötött állapotot n, l, m jellemez

pl.: $\psi = \sum_{nlm} f_{nlm}(r)\,Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

A Wigner–Eckart-tétel lényege, hogy

$$\langle nlm|\hat{F}_m^{(j)}|n'l'm'\rangle = C^{lm}_{jm\,l'm'}\,\langle nl\|\hat{F}^{j}\|n'l'\rangle$$

Hidrogénatom és harmonikus oszcillátor kapcsolata

$V = -\frac{\alpha}{r}$ ahol $\alpha = \begin{cases} GMm & \text{kepleri} \\ Ze^2 & \text{H atomnál.} \end{cases}$

$$L = K - V = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2) - V(r)$$

mivel φ ciklikus, ezért van megmaradó mennyiség:

$$p_r = m\dot r, \quad p_\varphi = m r^2 \dot\varphi = J$$

$$Q_r = m r \dot\varphi^2 - V'(r) \qquad Q_\varphi = 0$$

EL-egyenletek: $\left.\begin{array}{l} m\ddot r = m r\dot\varphi^2 - V'(r) \\ m r^2\dot\varphi = J = \text{konst.} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot\varphi = \frac{J}{mr^2} \Rightarrow m\ddot r = \frac{J^2}{mr^3} - V'(r)$

$$\Rightarrow m\ddot r = -\frac{d}{dr}\underbrace{\left(V(r) + \frac{J^2}{2mr^2}\right)}_{\text{effektív potenciál}}$$

A Boltzmann: $E = K + V = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) = \text{konst} \Rightarrow \dot r^2 = \frac{2}{m}(E - U(r))$

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))}}$$ ← ez nem fejezhető ki zárt alakban ezért inkább a pályát keressük.

$$\int d\varphi = \int \frac{J}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{2(E-U(r))}}\,dr$$ ← ezt már ki tudtuk számolni.

$r(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ ahol $p = \frac{J^2}{m\alpha}$, $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}$

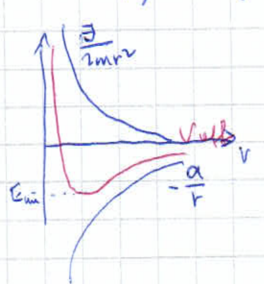
A dinamikai adatokat geometriai tulajdonságokkal alakítottuk.

a kistengely $a = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$ $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

$E < 0 \to 0 \le \varepsilon < 1 \to$ ellipszis

$E > 0 \to \varepsilon > 1 \to$ hiperbola

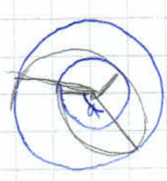
Hol fog keringeni a cucc:



A effektív potenciálban van egy gödör

Ha $E = E_{min}$ ⇒ állandó sebességű körpálya

Ha $E > E_{min}$, akkor az r-függő rész oszcillál, miközben a φ megy körbe



Van egy szög, amikor visszaér, de az általában irrac.

Mi kell ahhoz, hogy záródjon?

Akkor, hogy a pálya záródjon, az kell $U = \frac{k}{2} r^2$

$U = -\frac{\alpha}{r}$ az utóbbi jó.

Plusz, ezen a zárdelmes dolog, hogy az idő kiintegrálható: $T(E, J)$

$T^2 \sim a^3$

Mivel $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\frac{J^2}{m\alpha}}{-\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|}$

Az $a, |E|, T$ egymást meghatározzák, még J nem játszik bele.

Tehát J megváltoztatására T invariáns $\Rightarrow$ SZIMMETRIA

Ugyanez kvantumosan:

$\hat{H}\phi = E\phi$ ahol $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{V}$

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r + \underbrace{\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}\,\hat{V}(r)}_{\hat{V}_{eff}(r)}$$

Keressük $\phi(r,\vartheta,\varphi) = f(r)\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ alakban!

$\hat{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2\ell(\ell+1)Y_{\ell m}$

Beírva: $\hat{H}\phi = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_r f(r))Y_{\ell m} + \frac{\hbar^2}{2mr^2}\ell(\ell+1)Y_{\ell m} f(r) + V(r)f(r)Y_{\ell m} = Ef(r)Y_{\ell m}$

Ezé Y-nal lehet egyszerűsíteni:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r f + \underbrace{\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}f(r) + V(r)f(r)}_{U(r)f(r)} = Ef(r)$$

mivel ez ℓ kvantumszám, f-t is indexelni kell.

Még egy kvantumszám, egy bizonyos sajátfv.: $f_{n\ell}(r)$: megoldás

$E_{n\ell}$: sajátenergia

Azt tanultuk, hogy ha $V = -\frac{\alpha}{r}$, akkor $E_n = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$. Mi van a másik kvantumszámmal?

degeneráció van $\Rightarrow$ SZIMMETRIA

Mindkét esetben adódik a kérdés: mi a szimmetria az adott potenciálnál? (Kalap kérés)

KVANTUM III
9. előadás (12.04.)

A múlt órán láttuk, hogy az $\frac{1}{r}$ potenciál furcsa $\Rightarrow$ szimmetria

$$\underline{L} = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - V(r)$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + V(r) = \text{const}$$

$$\underline{J} = \underline{r} \times \underline{p} = \text{const}$$

A megmaradást ciklikus koordinátákkal ebbe kell, vagy Poisson-zárójelekkel:

$$f(q,p)$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right) = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = \{H, f\}$$

A Kepler-problémában van még egy megmaradó mennyiség:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \alpha = \begin{cases} GMm \\ Ze^2 \end{cases}$$

$$\underline{\varepsilon} := \frac{1}{r}\underline{r} - \frac{1}{m\alpha}\underline{p} \times \underline{J} \qquad \text{Runge – Lenz – vektor}$$

Ha megnézzük, akkor látjuk, hogy $\{H, \varepsilon_k\} = 0$.

[A pálya alakja: $r(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ volt, ahol $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}$]

A Runge – Lenz abszolútja:

$$\varepsilon^2 = \underline{\varepsilon}\,\underline{\varepsilon} = 1 - \frac{2}{m\alpha}\frac{1}{r}\underbrace{\underline{r}(\underline{p}\times\underline{J})}_{\underline{J}(\underline{r}\times\underline{p}) = J^2} + \frac{1}{m^2\alpha^2}\underbrace{(\underline{p}\times\underline{J})^2}_{\text{Mivel } \underline{p}\perp\underline{J}\ = p^2J^2}$$

$$= 1 - \frac{2J^2}{m\alpha r} + \frac{p^2J^2}{m^2\alpha^2} = 1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2} \qquad \text{ez volt az excentricitás}$$

A RL-vektor az origóból a pálya centruma felé mutat.
Az $a\underline{\varepsilon}$ pont az origóból a centrumba mutató vektor.

$\underline{\varepsilon}$ állandósága fejezi ki a pálya állandóságát

Mi a megmaradásért tartozó szimmetria?

A rendszer E-ja: $\quad H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{2a} = \frac{p_0^2}{2m} \qquad$ (a és p_0 választásom egyértelmű.)

$$m\alpha = a p_0^2 \ \text{(ezt még kérdik kell)}$$

$a p_0$ hatás dimenziójú.

$$\underline{K} := a p_0 \underline{\varepsilon}. \qquad \text{Mi lehet ez?}$$

$$K^2 = a^2 p_0^2 \varepsilon_0^2 = a^2 p_0^2\left(1+\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}\right) = a^2 p_0^2\left(1+\left(-\frac{\alpha}{a}\right)\frac{J^2}{a p_0^2 \alpha}\right) = a^2 p_0^2 - J^2$$

$$\Rightarrow K^2 + J^2 = a^2 p_0^2 = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 (-2mE) = -\frac{m\alpha^2}{2E}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2(K^2+J^2)}$$

Elmechanikából vett kanonikus trafó:

$$H(q, p, t) \qquad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$Q_k(q, p, t) \qquad P_k(q, p, t) \qquad H'(Q, P, t) \quad \text{ahol} \quad \dot Q_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k} \qquad \dot P_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}$$

Ez a trafó csatolt állapot $\Rightarrow$ van generátor fv.: $W(q, p, t)$
$W(q, P, t)$
$W(Q, p, t)$
$W(Q, P, t)$

trükk: olyan trafót választunk, ahol $H' = 0$, mert $\dot Q_k = 0$
$\dot P_k = 0$

de ehhez egy nemlin. diff.egyenletet kell megoldani

Állítás: $\exists$ olyan trafó Kepler esetén

$\underline{Q}$ és $\underline{P}$ a $\underline{K}$ és $\underline{J}$

Ugyanez a szimmetria érvényes kvantumban is:

$\hat K, \hat J$ és a Hamilton: $\hat H = -\frac{m\alpha^2}{2}\left(\hat K^2 + \hat J^2 + \hbar^2 \hat I\right)^{-1}$

Mivel a $\underline{K}$ és $\underline{J}$ megmarad de csak K^2 és J^2 megmarad, ezért van egy gömbszimmetria.

Sőt mivel csak $K^2 + J^2$ megmarad, ezért még egy szimmetria van, olyan, mintha egy 6D-s vektor kapcsolt volna.

De van egy extra feltétel: $\underline{K}\,\underline{J} = 0$

Ha általános 6D-s forgatás lenne, az nem működne.

Olyan szimmetria kell, ami $K^2 + J^2 = \text{inv}$ és
$\underline{K}\,\underline{J} = \text{inv}$.

Ez hasonlít az elektrodinamikára, ahol $\left.\begin{array}{l} E^2 - B^2 = \text{inv} \\ \underline{E}\,\underline{B} = \text{inv} \end{array}\right\}$ és egy $F \in \mathbb{R}^{4\times 4}$-be raktuk.

Itt is érdemes összerakni egy 4×4-es tenzort:

$$M_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -J_3 & J_2 & k_1 \\ J_3 & 0 & -J_1 & k_2 \\ -J_2 & J_1 & 0 & k_3 \\ \hline -k_1 & -k_2 & -k_3 & 0 \end{array}\right)$$

A Hodge-duális: $$\hat{M}_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -k_3 & k_2 & J_1 \\ k_3 & 0 & -k_1 & J_2 \\ -k_2 & k_1 & 0 & J_3 \\ \hline -J_1 & -J_2 & -J_3 & 0 \end{array}\right)$$

Nézzük:

$$M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = 2J^2 + 2k^2$$

$$M_{\alpha\beta} \hat{M}_{\alpha\beta} = 4\underline{J}\,\underline{k}$$ Ezek tényleg invariánsok, de mire???

Hát a 4D-s forgatásokra, amelynek repr-ja ez a mátrix.

Tehát ez az $SO(4)$ szimmetria

Feladat: az $SO(4)$ ábrázoláselmélete és a fizikai mennyiségek állapotainak alkalm.

Hogyan tegyük $\underline{r}$-t bele a 4D-s térbe?

[A relatív $\underline{v}$-től is ezt a 4D-s vektort csináltuk, de a egy egyszerűbb volt.]

Legyenek:

$$\rho_\alpha := \begin{pmatrix} \underline{r} - a\underline{\varepsilon} \\ -\frac{1}{p_0}(\underline{r}\,\underline{p}) \end{pmatrix} \qquad \pi_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{r}{a}\underline{p} \\ p_0\left(1 - \frac{r p^2}{\alpha p_0^2}\right) \end{pmatrix}$$

Ezekkel:

$$\rho_\alpha \rho_\alpha = (\underline{r} - a\underline{\varepsilon})^2 + \frac{1}{p_0^2}(\underline{r}\,\underline{p})^2 = \dots = a^2$$

$$\pi_\alpha \pi_\alpha = \left(\frac{r^2}{a^2}p^2 + p_0^2\left(1 - \frac{r p^2}{a p_0^2}\right)\right) = \dots = p_0^2$$

$$\rho_\alpha \pi_\alpha = \frac{r}{a}\underline{p}(\underline{r} - a\underline{\varepsilon}) - (\underline{r}\,\underline{p})\left(1 - \frac{r p^2}{a p_0^2}\right) = \dots = 0$$

Állandó abs. értékű „hely" vektor, és állandó abs. értékű „imp" vektor, amik merőlegesek

analógia: egyenletes körmozgás.

Az eredeti mozgásegyenletek: $\dot{\underline{r}} = \frac{\underline{p}}{m}$, $\dot{\underline{p}} = -\frac{\alpha}{r^3}\underline{r}$. Ezeket beírva ρ és π-re:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\rho}_\alpha(t) &= \frac{a}{r}\frac{1}{m}\pi_\alpha \\ \dot{\pi}_\alpha(t) &= -\frac{\alpha}{a^2 r}\rho_\alpha \end{aligned}}$$

Az impulzusmomentum 4D-s megfelelője:

$$\rho_\alpha \pi_\beta - \rho_\beta \pi_\alpha = \dots = M_{\alpha\beta}$$ Juhééé

Most a r-ek nem esnek ki jól a „kovariáns" jelöléssel:

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} = \frac{a}{r(t)}\frac{1}{m}\Pi_\alpha \qquad \frac{d\rho_\alpha}{\frac{a}{r(t)}dt} = \frac{1}{m}\Pi_\alpha \qquad \frac{d\Pi_\alpha}{\frac{a}{r(t)}dt} = -\frac{\alpha}{a^3}\rho_\alpha$$

Legyen új paraméter: $\tau = \int \frac{a}{r(t)}dt$.

Ezzel a új mozgásegyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\rho_\alpha}{d\tau} &= \frac{1}{m}\Pi_\alpha \\ \frac{d\Pi_\alpha}{d\tau} &= -\frac{\alpha}{a^3}\rho_\alpha \end{aligned}}$$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{d\tau} = -\frac{\alpha}{ma^3}\rho \quad \Leftarrow \text{oszcillátor.}$$

$$\overset{(*)}{\frac{\alpha}{ma^3} =: \omega^2} \Rightarrow \underline{\frac{d^2\rho_\alpha(\tau)}{d\tau^2} = -\omega^2\rho_\alpha(\tau)}$$

A H atom visszavezethető a harmonikus oszcillátorra.

(*: K III. tv)

Mivel ρ alsó értéken fix de mind komponense oszcillál, azt mondjuk, mint ha egy 4D-s gömbből kivágunk egy kört, ennek a 4 vetülete a ρ 4 komponense.

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\tau) &= A\cos\omega\tau + B\sin\omega\tau \\ \Pi(\tau) &= m\omega(-A\sin\omega\tau + B\cos\omega\tau) \\ \text{és } \omega t &= \omega(\tau - \varepsilon\sin\omega\tau) \end{aligned}}$$ ez a probléma megoldása 4D-ben.

ebből visszaállítható r és p.

- A pálya a 4D-s főkör 3D-s vetülete. ε ellipszis ⇒ tudni, hogy síkbeli, tudni, hogy a nagytengely a, tudni, hogy ε állandó.

A szimmetria pedig a 4D-s gömb elforgatása.
Azaz a 4D-s gömb minden főköre ekvivalens, de én csak a vetületeket látom.

⇒ a, E, T azért függ össze, mert mind a 4D-s gömb megfelelő tulajdonságai.

Ugyanaz kvantumosan.

$\hat{H}$-t kifejeztem $\hat{K}$ és $\hat{J}$-vel, tehát a m.-ik tagok alakja marad

$\Rightarrow$ az $SO(4)$ ábrázolása kell.

$$SO(4) \ni F(\dots) = F_{xy}(\alpha) F_{xz}(\beta) F_{yz}(\gamma) F_{xu}(\mu) F_{yu}(\nu) F_{zu}(\lambda) =$$

$$= e^{\alpha\begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}} e^{\beta\begin{pmatrix} & & +1 & \\ & & & \\ -1 & & & \\ & & & \end{pmatrix}} e^{\gamma\begin{pmatrix} & & & \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & & \end{pmatrix}} e^{\mu\begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}} e^{\nu\begin{pmatrix} & & & \\ & & & -1 \\ & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}} e^{\lambda\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}}$$

$$= e^{-i\alpha J^{(3)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(1)}} e^{-i\mu K^{(1)}} e^{-i\nu K^{(2)}} e^{-i\lambda K^{(3)}}$$

J-k és K-k kommutációs relációi kellenek.

J-ket már láttuk $SO(3)$-nál. K-k ugyanígy: $[J^{(k)}, J^{(l)}] = i\varepsilon_{klm} J^{(m)}$

az algebra rangja 2 lesz.

$$[J^{(k)}, K^{(l)}] = \dots = i\varepsilon_{klm} K^{(m)}$$

$$[K^{k}, K^{(l)}] = \dots = i\varepsilon_{klm} J^{(m)}$$

Ez a $SO(4)$ Lie-algebrája.

Az $SO(3)$ részalgebra $SO(4)$-nek, de a K-k nem alkotnak részalgebrát

analógia: a forgatás részcsoportja a Lorentznek, de a boostok nem!

KVANTUM 3

10. előadás (12.11.)

Az előző órai anyagot kell megismételni kvantumon.

$SO(4)$ csoport ábrázolásait keressük. Ez 6 paraméteres csoport, rangja 2.

Az $SO(3)$ részcsoportja az $SO(4)$-nek, ezért 2×3 generátort keresünk.

Két megközelítés: – valahol elakadunk egy 1 paraméteres részcsoportot
– nézzük "generátor részcsoportokat".

$$SO(4) \ni F = F_{xy}(\,)\,F_{xt}(\,) \cdots F_{zu}$$

$$e^{-i\alpha J_1}\; e^{-i\beta J_2}\; e^{-i\gamma J_3}\; e^{-i\mu K_1}\; e^{-i\nu K_2}\; e^{-i\lambda K_3}$$

A kommutációs relációk:
$$[J^{(k)}, J^{(l)}] = i\,\varepsilon_{klm}\,J^{(m)}$$
$$[J^{(k)}, K^{(l)}] = i\,\varepsilon_{klm}\,K^{(m)}$$
$$[K^{(k)}, K^{(l)}] = i\,\varepsilon_{klm}\,J^{(m)}$$

Kezdhetnénk előlről az egészet, de van egy trükk!

$$F = e^{-it\left(\alpha J^{(1)} + \beta J^{(2)} + \gamma J^{(3)} + \mu K^{(1)} + \nu K^{(2)} + \lambda K^{(3)}\right)}$$

mint egy újabb 1 paraméteres csoport

$$F = e^{-i\left(\underline{\varphi}\,\underline{J} + \underline{\omega}\,\underline{K}\right)}$$

De tudjuk, hogy $e^{(\underline{A}+\underline{B})} \neq e^{\underline{A}}\, e^{\underline{B}}$ csak, ha $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$

Legyenek $A^{(k)} = \dfrac{J^{(k)} + K^{(k)}}{2}$ $\quad B^{(k)} = \dfrac{J^{(k)} - K^{(k)}}{2}$ $\quad \left[J^{(k)} = A^{(k)} + B^{(k)},\; K^{(k)} = A^{(k)} - B^{(k)} \right]$

Ezekkel:
$$F = e^{-i\left(\underline{\varphi}(\underline{A}+\underline{B}) + \underline{\omega}(\underline{A}-\underline{B})\right)} = e^{-i\left[(\underline{\varphi}+\underline{\omega})\underline{A} + (\underline{\varphi}-\underline{\omega})\underline{B}\right]}$$

Nézzük A és B kommutátorait:

$$[A^{(k)}, A^{(l)}] = \left[\frac{J^{(k)}+K^{(k)}}{2}, \frac{J^{(l)}+K^{(l)}}{2}\right] = \frac{1}{4}\left([J^{(k)}, J^{(l)}] + [K^{(k)}, J^{(l)}] + [J^{(k)}, K^{(l)}] + [K^{(k)}, K^{(l)}]\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\, i\,\varepsilon_{klm}\left(J^{(m)} + K^{(m)}\right) = i\,\varepsilon_{klm}\,A^{(m)}$$

$$[B^{(k)}, B^{(l)}] = \text{ugyanígy} = i\,\varepsilon_{klm}\,B^{(m)}$$

$$[A^{(k)}, B^{(l)}] = \text{ugyanígy} = 0.$$

$\Rightarrow$ A-k és B-k két egymással kommutáló $SO(3)$-t alkotnak.

$$SO(4) = SO(3) \oplus SO(3) \Rightarrow SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$$

Az $SO(4)$-t felbonthatjuk két $SO(3)$ direkt szorzatára.

Ez a képlet alapján fontos, ugyanígy DGY is felírta.

Fun fact: Az összes $SO(n)$ közül csak $n=4$ esetén ezz nem egyszerű csoport

Gondolatfelvetés: Ezért 4D-s a tér?

az ábrázolás: $D(F) = e^{-i(\varphi+\omega)D(A) - i(\varphi-\omega)D(B)}$

$$= e^{-i(\varphi+\omega)D(A)} \otimes e^{-i(\varphi-\omega)D(B)}$$

Mivel $[A,B]=0$

$\Rightarrow [D(A), D(B)] = 0$

A és B ábrázolásait ismerjük, ezek $SO(3)$-t. Igen, azt már láttuk.

$$D^{(j_1,j_2)}(F) = e^{-i(\varphi+\omega)D^{(j_1)}(A)} \otimes e^{-i(\varphi-\omega)D^{(j_1)}(B)}$$

Vissza a fizikához: Hogy néz ki az energia?

$$V = -\frac{\alpha}{r} \qquad E = -\frac{m\alpha^2}{2}\frac{1}{K^2+J^2} \Rightarrow \hat{H} = -\frac{m\alpha^2}{2}\left(\hat{K}^2+\hat{J}^2+\hbar\hat{I}\right)^{-1}$$

itt $\hat{J}$ és $\hat{K}$ ábrázolják az $SO(4)$-t a Hilbert-téren ható operátorok terén. (a $\hat{K}$ és $\hat{J}$ definíciójából következik)

Áttérve $\hat{A}, \hat{B}$ bázisra:

$$\hat{K}^2+\hat{J}^2 = (\hat{A}+\hat{B})^2 + (\hat{A}-\hat{B})^2 = 2\hat{A}^2 + 2\hat{B}^2$$

$$\Rightarrow \hat{H} = -\frac{m\alpha^2}{2}\left(2\hat{A}^2+2\hat{B}^2+\hbar^2\hat{I}\right)^{-1}$$

Ugyan az, de a $\hat{A}^2$ és $\hat{B}^2$ a Casimir-operátor, tehát a 1. altérben csak átmenet konstansok.

$$\hat{H} \rightarrow -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(2j_1(j_1+1)+2j_2(j_2+1)+1\right)^{-1}$$

$K \cdot J = 0$ volt. Most:

$$K \cdot J = (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \longrightarrow \hbar^2\left(j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)\right)$$

olyan állapotokon dolgozunk, ahol $K \cdot J = 0 \Rightarrow j_1 = j_2$

$\Rightarrow$ Ugyan az $SO(4)$ ábrázolás megengedi 2 konstansként, de a feltétel miatt a kettő kifejezhető

$$\hat{H} \longrightarrow -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(4j(j+1)+1\right)^{-1} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\frac{1}{(2j+1)^2}$$

ha j feleges, akkor ez a H atom energiaspektruma.