KVANTUM IV.

1. előadás (02. 18.)

A klasszikus QM szemléletünkben, most ki van tüntetve az idő.

Téridő szimmetria csoport → 10 paraméter : két féle csoport ↗ Galilei ↘ Poincaré

A Poincaré-csoport ábrázolására kéne...

Wigner vájött, hogy a QM szerint nem stimmel, most nem veszi észre a szimmetriát

Kommutációs szimmetria : úgy kell érteni az elemi állapotokat

⇒ előbb kell venni a szimmetriák teljesét : csoportelmélet

Wigner és Neumann alapozta meg.

Wignernek eredeti kiszorították, de ő most tanulta volt irányában.

A gond a Poincaré-csoporttal, hogy nem kompakt ⇒ nem lehet szummázni a csoportelemeken (szumma ~ integrál)

Ha a csoporton bevezetünk egy mértéket és az 1 fv-t integráljuk az a csoport "térfogata". Ha ez véges ⇒ kompakt.

Ha egy csoport nem kompakt, nem kaphatók fel az ábrázolás ismeretére

1. feladat : Lorentz ábrázolás
2. feladat : csoportok vonzó a általánosat.

A Lorentz ábrázolásokat el lehet jutni valamely kiszámítással.

Tanulj el kiindulva venni az SO(4)-t, ami felírható direkt szorzatra : $SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$.

Kiderül, hogy a Lorentz csoport is ilyen lesz... (bizonyos kikötésekkel)

Mit tudunk SO(3)-ról:

$$SO(3) \ni \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(\underline{n}, \varphi) = e^{-i\varphi(\underline{n}\,\underline{\underline{J}})} = F_x(\alpha)F_y(\beta)F_z(\gamma) = e^{-i\alpha \underline{\underline{J}}^{(1)}} e^{-i\beta \underline{\underline{J}}^{(2)}} e^{-i\gamma \underline{\underline{J}}^{(3)}}$$

igaz, de $\varphi\,\underline{n}\,\underline{\underline{J}} \neq \alpha \underline{\underline{J}}^1 + \beta\underline{\underline{J}}^2 + \gamma\underline{\underline{J}}^3$ mert nem kommutálnak

de ha α, β, γ kicsik, akkor majdnem jók lesznek!

Nézzük ezt Lorentzre! $(SO(3,1))$

$$SO(3,1) \ni \Lambda = \begin{pmatrix}1 & \\ & \underline{\underline{F}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\omega & -\underline{n}\,\mathrm{sh}\,\omega \\ -\underline{n}\,\mathrm{sh}\,\omega & 1 + \underline{n}\circ\underline{n}(\mathrm{ch}\,\omega -1)\end{pmatrix} \qquad \text{6 paraméter}$$

Ha $\omega = 0$, akkor ez pont az SO(3), tehát a felírásban benne van az előbbi:

$$\Lambda = e^{-i\alpha J^{(1)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}} (\dots)$$

írjuk ki konkrétan:

Így ki írhatjuk a csoportot:

$$J^1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix} \qquad J^3 = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

mi van 4D-ben:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\beta & & \sin\beta \\ & & 1 & \\ & -\sin\beta & & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\gamma & -\sin\gamma & \\ & \sin\gamma & \cos\gamma & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}}_{\text{boost-ok}} =$$

$$= e^{\alpha \begin{pmatrix} \dots & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}} e^{\beta \begin{pmatrix} \dots & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}} e^{\gamma \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}}_{\text{boost-ok}}$$

A boostok felírása: $B_x(\mu) B_y(\nu) B_z(\lambda)$

tehát:
$$\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\mu & \operatorname{sh}\mu & & \\ \operatorname{sh}\mu & \operatorname{ch}\mu & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\nu & & \operatorname{sh}\nu & \\ & 1 & & \\ \operatorname{sh}\nu & & \operatorname{ch}\nu & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\lambda & & & \operatorname{sh}\lambda \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \operatorname{sh}\lambda & & & \operatorname{ch}\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} e^{\mu \begin{pmatrix} & 1 & \dots \\ 1 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}} e^{\nu \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}} e^{\lambda \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}}$$

ábrázolás:

$$SO(3,1) \ni \Lambda \longrightarrow \hat{D}(\Lambda) = e^{\alpha D(1 \dots}$$

SO(3)-nál eredetileg kiemeltük i-t, hogy a generátorok hermitikusak legyenek, de itt a boostoknál nem azok lesznek, azt nem kéne, de csak azért is.

$$\Lambda = e^{-i\alpha \begin{pmatrix} \dots & & \\ & & -i \\ & i & \end{pmatrix}} e^{-i\beta \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & \dots \end{pmatrix}} \dots e^{-i\lambda \begin{pmatrix} & & & i \\ i & & & \end{pmatrix}}$$

mivel itt nemhermitikus generátorok vannak, ezért az ábrázolás nem unitér
(hiszen, nemkompakt csoport!)

A forgás generátora J, a boostok K-k:

$$\Lambda = e^{-i\alpha J^1} e^{-i\beta J^2} e^{-i\gamma J^3} e^{i\mu K^1} e^{i\nu K^2} e^{-i\lambda K^3} = \text{új paraméterezéssel} =$$

$$= e^{-i(\varphi_1 J^1 + \varphi_2 J^2 + \varphi_3 J^3 + \omega_1 K^1 + \omega_2 K^2 + \omega_3 K^3)} = e^{i(\underline{\varphi}\underline{J} + \underline{\omega}\underline{K})}$$

A kommutációs relációk: $\underline{[J^k, J^l] = i\varepsilon_{klm} J^m}$ (a szokásos)

$$[J^1, K^2] = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & & & \\ i & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & & & \\ i & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & & \\ & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} = i K^3$$

kimutatható, hogy általában is: $\underline{[J^k, K^l] = i\varepsilon_{klm} K^m}$

Speciálisan: $[J^1, K^1] = 0$ tehát, hogy a két külön fajta generátor is kommutál $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ a Lie-algebra rangja ≥ 2

K-K kommutátora:

$$[K^1, K^2] = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & & & \\ i & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & & & \\ i & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = -i J^3$$

általánosan is: $\underline{[K^k, K^e] = -i\,\varepsilon_{kem} J^m}$

összegezve:

$$\boxed{\begin{aligned} [J^k, J^e] &= i\,\varepsilon_{kem} J^m \\ [J^k, K^e] &= i\,\varepsilon_{kem} K^m \\ [K^k, K^e] &= -i\,\varepsilon_{kem} J^m \end{aligned}}$$

(az SO(4)-nél nem volt − de amúgy u.a. volt)

A J-k részalgebrát alkotnak (tehát a forgatások részcsoportot).

A K-k nem (tehát a boostok nem alkotnak csoportot!)

Csináljunk kommutáló cuccokat, csak így!

$$A^k = \frac{J^k + iK^k}{2}, \qquad B^k = \frac{J^k - iK^k}{2} \qquad (A^{k+} = A^k, \quad B^{k+} = B)$$

invertálva: $J^k = A^k + B^k$, $K^k = i(B^k - A^k)$

Mi A és B kommutátora:

$$[A^k, A^e] = \left[\frac{J^k + iK^k}{2}, \frac{J^e + iK^e}{2}\right] = \frac{1}{4}\left([J^k, J^e] + i[J^k, K^e] + i[K^k, J^e] - [K^k, K^e]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(i\,\varepsilon_{kem} J^m + i\,i\,\varepsilon_{kem} K^m - i\,i\,\varepsilon_{ekm} J^m - (-i\,\varepsilon_{kem} J^m)\right) = \frac{1}{2} i\,\varepsilon_{kem}\,(J^m + iK^m) =$$

$$= i\,\varepsilon_{kem} A^m$$

$$[B^k, B^e] = \text{hasonlóan} = i\,\varepsilon_{kem} B^m$$

$$[A^k, B^e] = \left[\frac{J^k + iK^k}{2}, \frac{J^e - iK^e}{2}\right] = \frac{1}{4}\left(\underbrace{[J^k, J^e]}_{i\varepsilon_{kem} J^m} + i[J^k, K^e] - i[J^k, K^e] + \underbrace{[K^k, K^e]}_{-i\varepsilon_{kem} J^m}\right) = 0$$

Két független Lie-algebra direkt összege.

Írjuk fel Λ-t ezekkel:

$$\boxed{\Lambda(\underline{\varphi}, \underline{\omega})} = e^{-i(\underline{\varphi}\underline{J} + \underline{\omega}\underline{K})} = e^{-i(\underline{\varphi}(\underline{A}+\underline{B}) + \underline{\omega} i (\underline{B}-\underline{A}))} = e^{-i((\underline{\varphi} - i\underline{\omega})\underline{A} + (\underline{\varphi} + i\underline{\omega})\underline{B})} =$$

$$= \text{mivel } \underline{A} \text{ és } \underline{B} \text{ kommutálnak} = \boxed{e^{-i(\underline{\varphi} - i\underline{\omega})\underline{A}} \cdot e^{-i(\underline{\varphi} + i\underline{\omega})\underline{B}}}$$

Olyan $\hat{D}(A)$ és $\hat{D}(B)$-ket keresünk, amelyek megfelelően kommutálnak, és azokat így kell exponenciálnunk

Mivel A és B egymással úgy kommutálnak, mint az SO(3), ezért ezeket már tudjuk.

$\Rightarrow$ SO(3,1)-et lehet úgy jellemezni, amelyek egyenként az SO(3)-nak felelnek meg:

$$D^{(j_1,j_2)}(\Lambda(\underline{\varphi},\underline{\omega})) = e^{-i(\underline{\varphi}-i\underline{\omega})D^{(j_1)}(\underline{A})} \otimes e^{-i(\underline{\varphi}+i\underline{\omega})D^{(j_2)}(\underline{B})}$$

$$d_1 = 2j_1+1 \qquad d_2 = 2j_2+1$$

$$d = d_1 \cdot d_2$$

Ezzel megkaptuk SO(3,1) összes véges dimenziójú ábrázolását.

Vannak bonyodalmak:
- végtelen dimenziós ábrázolások
- nem unitér ábrázolások (mindjárt az is az)

Mi van, ha j félegész?

A Lorentz-nek is vannak fedő csoportjai: $SL(2)_{\mathbb{C}}$

<u>Spec esetek</u>

- $j_1 = j_2 = 0$ $\quad d = 1$

  $D^{(00)}(\Lambda) = 1$ $\quad$ 4-es skalárok.

- $j_1 = \frac{1}{2}$ $\quad j_2 = 0$ $\quad d = 2$
- $j_1 = 0$ $\quad j_2 = \frac{1}{2}$ $\quad d = 2$

  $\Rightarrow$ 2 féle spinor van! Ezt részletesen kéne majd diszkutálni

- $j_1 = \frac{1}{2}$ $\quad j_2 = \frac{1}{2}$ $\quad d = 4$ $\quad$ 4-es vektorok.

- $j_1 = 1$ $\quad j_2 = 0$ $\quad d = 3$
- $j_1 = 0$ $\quad j_2 = 1$ $\quad d = 3$

  Lehet ezzel is játszadozni: komplex vágású [illegible]; $\underline{E} + i\underline{B}$ ilyen volt.

$\vdots$

Honnan lehet az ilyen dolgokat megtanulni?
- Constantinescuban a klasszikus megalapozás van benne
- a Marx könyvében is vannak ilyenek (a függelékben)
- Landau III.–IV. kötetében van benne

KVANTUM IV.

2. előadás (02.25)

Spinorok a relativisztikus QM-ben:

$$\mathbb{C}^2 \ni \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \qquad \xi^A \quad A \in \{1,2\}$$

$$\ni \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}$$

Hattassunk rá egy 1 detjű mátrixot:

$\underline{\underline{M}}$, $\det \underline{\underline{M}} = 1$ (tehát $M \in SL(2,\mathbb{C})$ ki fog derülni, hogy ez a Lorentz-csoport fedőcsoportja, de ezt még nem tudjuk)

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

$$\xi'^A = M^A{}_B\,\xi^B \qquad \begin{pmatrix} \xi'^1 \\ \xi'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\xi^1 + \beta\xi^2 \\ \gamma\xi^1 + \delta\xi^2 \end{pmatrix}$$

$$\eta'^A = M^A{}_B\,\eta^B$$

Vegyük a $\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$ kombináció trafóját

$$(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)' = \xi'^1\eta'^2 - \xi'^2\eta'^1 = (\alpha\xi^1 + \beta\xi^2)(\gamma\eta^1 + \delta\eta^2) - (\gamma\xi^1 + \delta\xi^2)(\alpha\eta^1 + \beta\eta^2) =$$

$$= \xi^1\eta^2\underbrace{(\alpha\delta - \gamma\beta)}_{1} + \xi^2\eta^1\underbrace{(\beta\gamma - \delta\alpha)}_{-1} = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$$

Tehát ez a mennyiség invariáns

Érdemes ezért erre egy formalizmust bevezetni:

$$\eta_1 := \eta^2, \quad \eta_2 := -\eta^1$$

Ekkor $\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2 = \xi^A\eta_A$ ez még csak egy skalár.

Be lehet vezetni a metrikus tenzort, ami le húzogatja az indexeket:

$$\eta_A = \varepsilon_{AB}\,\eta^B \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ (ez a 2 indexes Levi-Civita)

$$\eta^A = \varepsilon^{AB}\,\eta_B \quad \text{ahol} \quad \varepsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát a sk. szorzat defje:

$$(\xi, \eta) = \xi^A\eta_A = \varepsilon_{AB}\,\xi^A\eta^B = -\xi_A\eta^A = -(\eta,\xi) \Rightarrow \text{antiszimm.}$$

így $(\xi,\xi) = 0$

A vonalas QM-ben azt, hogy

$$\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*} = \text{skalár}$$

Tehát $\xi^1 \eta^{1*} + \xi^2 \eta^{2*} = \text{skalár}$

előzőek miatt $\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2 = \text{skalár}$ $\Rightarrow$ η_A úgy, mint η^{A*}

Hogy transzformálódik η^{A*}?

$$(\eta^*)'^A = (M^A{}_B)^* (\eta^*)^B$$

Mivel $\eta'_A = \varepsilon_{AB} M^B{}_C \eta^C = \underbrace{\varepsilon_{AB} M^B{}_C \varepsilon^{CD}}_{N_A{}^D} \eta_D$

akkor $N_A{}^D = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \widetilde{M^{-1}}$

Csoportelmélet:

$$M(g_1) M(g_2) = M(g_2 g_1)$$

ha transzponálom és invertálom: $\tilde{M}(g_2)^{-1} \tilde{M}(g_1)^{-1} = \tilde{M}(g_2 g_1)^{-1}$

Adott ábrázolás esetén $\tilde{M}^{-1}$ is ábrázolás

kivéve, ha $\tilde{M}^{-1} = M^*$, tehát ha $M \in SU(2)$

Igaz ez, DE $\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}$ sűrűség jellegű ami. Relatív ez nem skalár, hanem tenzorkomponens, tehát végre csak a $SU(2)$ ez jó, ezen túl $SL(2C)$.

Minden $SU(2)$-ből megfelel egy 3D-s forgatás

ami nem $SU(2)$-beli, azok lesznek a boostok

$SU(2)$ generátorai a Pauli mátrixok. Mik a $SL(2,\mathbb{C})$ generátorai?

ezek a Pauli, mert $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, i\sigma^1, i\sigma^2, i\sigma^3$ függetlenek

Mik a kommutátorok? a múltkori:

$$\left[\frac{\sigma^k}{2}, \frac{\sigma^l}{2}\right] = i \varepsilon_{klm} \frac{\sigma^m}{2} \qquad [J^k, J^l] = i \varepsilon_{klm} J^m$$

$$\left[\frac{\sigma^k}{2}, \frac{i\sigma^l}{2}\right] = i \varepsilon_{klm} \frac{i\sigma^m}{2} \qquad [J^k, K^l] = i \varepsilon_{klm} K^m$$

$$\left[\frac{i\sigma^k}{2}, \frac{i\sigma^l}{2}\right] = -i \varepsilon_{klm} \frac{\sigma^m}{2} \qquad [K^k, K^l] = -i \varepsilon_{klm} J^m$$

Tehát a teljes $SL(2,\mathbb{C})$ tényleg ábrázolása a Lorentznek, egyúttal lokálisan.

Tényleg, hogy $e^{-i\alpha\frac{\sigma^1}{2}} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2}\\ -i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$ az x tengely körüli α szögű forgatás

Mi van, ha $i\sigma^1$-et írunk:

$$e^{-i\omega\frac{i\sigma^1}{2}} = e^{\frac{\omega}{2}\sigma^1} = \sum_n \frac{(\frac{\omega}{2})^n(\sigma^1)^n}{n!} = \begin{pmatrix}\mathrm{ch}\frac{\omega}{2} & \mathrm{sh}\frac{\omega}{2}\\ \mathrm{sh}\frac{\omega}{2} & \mathrm{ch}\frac{\omega}{2}\end{pmatrix}$$

Ez a boost ábrázolása

Figyelem, ezek nem unitér mátrixok, mert a generátorok nem hermitikusak !!!

(Tényleg vannak olyan ábrázolások, amelyek nem unitér)

Tehát a Lorentz-csoport általános eleme:

$$SO(3,1) \ni \Lambda = F_x(\alpha)F_y(\beta)F_z(\gamma)\,B_x(\mu)B_y(\nu)B_z(\lambda) =$$
$$= e^{-i\alpha J^1} e^{-i\beta J^2} e^{-i\gamma J^3} e^{-i\mu K^1} e^{-i\nu K^2} e^{-i\lambda K^3} = e^{-i\varphi(\underline{n}\,\underline{J})} e^{-i\omega(\underline{e}\,\underline{K})}$$

$$SL(2,\mathbb{C}) \ni M = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)L_x(\mu)L_y(\nu)L_z(\lambda) =$$
$$= e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma^1} e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma^2} e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma^3} e^{\frac{\mu}{2}\sigma^1} e^{\frac{\nu}{2}\sigma^2} e^{\frac{\lambda}{2}\sigma^3} = e^{-i\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\,\underline{\sigma})} e^{\frac{\omega}{2}(\underline{e}\,\underline{\sigma})}$$

itt is van egy olyan gond, hogy a 2π szögű forgatás -1-gyel szoroz.

Vissza az óra eleji vázolásra:

$$\xi'^A = M^A{}_B\,\xi'^B$$
$$\xi'_A = N_A{}^B\,\xi_B \qquad \text{ahol } N = \tilde{M}^{-1}$$

Mivel $M(g_2)M(g_1) = M(g_2g_1)$

ezt is tudjuk, hogy ekkor $M^*(g_2)M^*(g_1) = M^*(g_2g_1)$

$\tilde{M}^{-1}(g_2)\tilde{M}^{-1}(g_1) = M^*(g_2g_1)$

$M^{+-1}(g_2)M^{+-1}(g_1) = M^{+-1}(g_2g_1)$

4 ábrázolást rögtön kapunk ezért ξ-re

Spec eset: $M \in SU(n)$ akkor $M = M^{+-1}$ és $M^* = \tilde{M}^{-1}$

Tehát akkor csak két ábrázolás van: a konjugált

A nem relativisztikus QM-ben $SU(n)$ van, ezért ott csak két ábrázolás van

A relativisztikus QM-ben mind a 4 megvan.

Spinorok fajtái:

M szerint transzformálódik ξ^A

$\tilde{M}^{-1}$ szerint transzformálódik: ξ_A — ezt láttuk óra elején

+ konjugált: M^* sz. transzformálódik $\xi^{\dot{A}}$

$M^{\dagger -1}$ sz. transzformálódik $\xi_{\dot{A}}$

Ha nem relativisztikusak vagyunk, akkor ξ^A és $\xi_{\dot{A}}$ u. a.

Jelölés: $\xi^{\dot{A}} \equiv (\xi^A)^*$ és $\xi_{\dot{A}} \equiv (\xi_A)^*$ csak a holland nyomdászok nem tudták ezt kiszedni

Tehát a Λ mátrixok:

$$\Lambda = e^{-i\varphi(\underline{n}\,\underline{J}) - i\omega(\underline{e}\,\underline{K})} = e^{-i\varphi(\underline{A}+\underline{B}) - i i \omega(\underline{B}-\underline{A})} = e^{-i[(\varphi - i\omega)\underline{A} + (\varphi + i\omega)\underline{B}]} =$$

$$= e^{-i(\varphi - i\omega)A}\, e^{-i(\varphi + i\omega)B}$$

ábrázolásra:

$$SL(2,\mathbb{C}) \ni M = e^{-\frac{i}{2}\varphi\underline{\sigma} + \frac{1}{2}\omega\underline{\sigma}} = e^{-\frac{i}{2}(\varphi - i\omega)\underline{\sigma}}$$

hol a másik? csak az egyik felét felírva használtuk:

M felírható $e^{-\frac{i}{2}\varphi\underline{\sigma} - \frac{1}{2}\omega\underline{\sigma}}$ módon is, és ott előállítható a másik így is

Ekkor: $\Lambda = e^{-i(\varphi - i\omega)A}\, e^{-i(\varphi + i\omega)A}$

$$\hookrightarrow \quad D = e^{-i(\varphi - i\omega)D(\underline{A})} \otimes e^{-i(\varphi + i\omega)D(\underline{B})}$$

Amivel eddig dolgoztunk, az a $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = 0$ volt,

ezt kiegészíti a $j_1 = 0, j_2 = \frac{1}{2}$ ábrázolást is, az is spinor,

és ezekkel az invariáns lenne

Az egyik az alsó indexes spinorok a másik a felső indexes spinorok együttesen

Mi a helyzet a másik tenzorokkal?

$\xi^{ABC\dots\dot K\dot L\dot M}$ van sok pontozott és pontozatlan index

A transzformáció úgy, ahogy eddig

Ha $\xi^{A}{}_{A}$ van, az 0.

Csak az számít, hogy hány db 2-es van az indexek között

n pontozott és m pontozatlan index esetén a lehetőségek száma

$$\underline{d = (n+1)(m+1)}$$

Ezek általános reducibilis ábrázolások, amik felbonthatóak irrep-ekre.

A részt egyszerűbben majd megnézzük

Pl.: ξ^A és η^A

$\xi\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}$ felírhatjuk: $(\xi^{1*}\ \ \xi^{2*})$

$(\eta^{1*}\ \ \eta^{2*})$

ha veszünk egy $(\xi^{1*}\ \ \xi^{2*})\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}$ kifejezést

akkor 4-féle mennyiség érdekes, ha a Pauli-mátrixok között

$v^k = (\xi^{1*}\ \xi^{2*})\,\sigma^k\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}$, $v^0 = (\xi^{1*}\ \xi^{2*})\cdot \mathbb{1}\cdot\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}$

Hogy transzformálódik v?

belátható majd, hogy vektor

Tehát $\xi^{*A}\,\sigma^{k}_{A B}\,\eta^{B}$ spinor komponensű vektor,

és a transzformációs szabályt áttranszformáljuk a σ-kra

Látni fogjuk, hogy ez a $\xi^A, \xi^{\dot B}$ szorzattenzor ábrázolása

(később ezt részletesen is megnézzük)

KVANTUM IV.

3. előadás (03.04.)

A Lorentz-exponens felírás:

$$SO(3,1) \ni \Lambda(\underline{\varphi}, \underline{\omega}) = e^{-i(\underline{\varphi}\,\underline{J} + \underline{\omega}\,\underline{K})}$$

$$\underline{\varphi} = \varphi \underline{n}, \quad \underline{\omega} = \omega \underline{e}$$

$$[J,J] = i\varepsilon J \qquad [J,K] = i\varepsilon K \qquad [K,K] = -i\varepsilon J$$

$$\longrightarrow \quad \left[\tfrac{\sigma}{2}, \tfrac{\sigma}{2}\right] = i\varepsilon\tfrac{\sigma}{2} \qquad \left[\tfrac{\sigma}{2}, \tfrac{i\sigma}{2}\right] = i\varepsilon\tfrac{i\sigma}{2} \qquad \left[\tfrac{i\sigma}{2}, \tfrac{i\sigma}{2}\right] = -i\varepsilon\tfrac{\sigma}{2}$$

Bevezetjük a: $A = \frac{J+iK}{2}$, $\quad \underline{J} = \underline{A} + \underline{B}$

$B = \frac{J-iK}{2}$, $\quad K = \frac{1}{i}(\underline{A} - \underline{B})$

$$[A,A] = i\varepsilon A, \quad [B,B] = i\varepsilon B, \quad [A,B] = 0$$

Tehát:

$$e^{-i(\underline{\varphi}\,\underline{J} + \underline{\omega}\,\underline{K})} = e^{-i[(\underline{\varphi} - i\underline{\omega})\underline{A} + (\underline{\varphi} + i\underline{\omega})\underline{B}]} = e^{-i(\underline{\varphi} - i\underline{\omega})\underline{A}} \cdot e^{-i(\underline{\varphi} + i\underline{\omega})\underline{B}} = \Lambda$$

Ábrázolás:

$$D^{(j_1, j_2)}(\Lambda) = e^{-i(\underline{\varphi} - i\underline{\omega}) D^{j_1}(\underline{A})} \otimes e^{-i(\underline{\varphi} + i\underline{\omega}) D^{j_2}(\underline{B})}$$

$$\dim = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

A spinor ábrázolás: $A = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{2} + i\frac{i\sigma}{2}\right) = 0$

$B = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{2} - i\,i\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{\sigma}{2}$ $\qquad$ Ez a $(j_1 = 0,\ j_2 = \frac{1}{2})$

Konjugált: $A = \frac{\sigma}{2}$

$B = 0$ $\qquad (j_1 = \frac{1}{2}\ \ j_2 = 0)$

A különbség ω-k előjelében van.

φ-k esetén ugyanaz a mx, azaz

$$e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma} = R(\underline{\varphi}) = \cos\frac{\varphi}{2}\, I - i \sin\frac{\varphi}{2}\, \underline{n}\,\underline{\sigma}$$

$$e^{\frac{\omega}{2}\sigma} = \mathrm{ch}\frac{\omega}{2}\, I + \mathrm{sh}\frac{\omega}{2}\,(\underline{e}\,\underline{\sigma}) = L(\underline{\omega})$$

$$e^{-\frac{\omega}{2}\sigma} = \mathrm{ch}\frac{\omega}{2}\, I - \mathrm{sh}\frac{\omega}{2}\,(\underline{e}\,\underline{\sigma}) = L(-\underline{\omega}) = L(\underline{\omega})^{-1}$$

Van der Waerden: $SL(2,\mathbb{C}) \ni M$

$$\xi'^A = M^A{}_B\, \xi^B \qquad \varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} & +1 \\ -1 & \end{pmatrix} \qquad \varepsilon^{AB} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\xi_A = \varepsilon_{AB}\,\xi^B, \quad \xi^B = \varepsilon^{BC}\,\xi_C$$

Ezért kellett, hogy az inv. sk. szorzatot definiáljuk:

$$\xi^A \eta_A = \xi^A \varepsilon_{AB}\, \eta^B = \varepsilon_{AB}\, \xi^A \eta^B$$

Többindexes spinorok:

$$\xi'^{ABC} = M^A{}_P M^B{}_Q M^C{}_R\, \xi^{PQR}$$

parciális spúr: $\varepsilon_{AB}\,\xi^{ABC} = \xi^C$

irreducibilis ábrázolás esetén bármely spúr 0, tehát, ha AB-ben szimmetrikus

Tehát: Bármely 2 indexben szimmetrikus az irrep

n indexű spinorok az n+1 dimenziós ábrázolás terében vannak.

Ha van pontozott, azzal szorzódik

pl.: $\xi^{ABC\dot P\dot Q}$ $\quad \dim = (3+1)(2+1) = 12$.

Összefoglalás:

			adjungálás:	
ξ^A	$\xi'^A = M^A{}_B\,\xi^B$	M		$(\xi^+)^{\dot A} = \xi^{\dot B}\,(M^+)_B{}^A$
ξ_A	$\xi'_A = N_A{}^B\,\xi_B$	$N = \tilde M^{-1}$	$(\xi^+)_{\dot A}$	M^{*-1}
$\xi^{\dot A}$	$\xi'^{\dot A} = M^{*\dot A}{}_{\dot B}\,\xi^{\dot B}$	M^*		$\tilde M$
$\xi_{\dot A}$	$\xi'_{\dot A} = N^*{}_{\dot A}{}^{\dot B}\,\xi_{\dot B}$	M^{+-1}		M^{-1}

Tehát 8-féle mennyiség, mert mindet „le lehet feltételezni"

M → R: $\quad R^{-1} = R^+ = R(-\varphi)$

M → L: $\quad L^+ = L \quad L(a)^{-1} = L(-a)$

Képzeletben ilyen cucc lesz:

ide megy Pauli mátrix

Kiegészítés: Pauli-egyenlet.

Még nemrelativisztikusan: $\quad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\underline{r})\psi$

Mi van, ha EM tér is van? $\quad \hat p \to \hat p - \frac{e}{c}\hat A$

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \to \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\hat A$$

Tehát

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}A(\underline{r},t)\right)^2\psi + eU(\underline{r})\psi$$

rájöttek, hogy ez nem elég, ugyanis be kell venni a saját impulzusmomentumot

$-\underline{\mu}\underline{B}$ az energia, ahol $\underline{\mu} = \frac{g}{2}\frac{e}{mc}\underline{S}$

Ekkor:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}A(\underline{r},t)\right)^2\psi + eU(\underline{r})\psi + (\cdot)\,\underline{S}\underline{B}\psi$$

Ez a Pauli-egyenlet.

Mivel $\underline{S} = \hbar\frac{\underline{\sigma}}{2} \Rightarrow$ $\quad (\cdot)(\underline{\sigma}\underline{B})\psi$

Mi van, ha forgatunk?

$\underline{B}$-re érti a forgásmátrix, de mi van $\underline{\sigma}$-val? Mivel így nem invariáns

$\Longrightarrow$ A Hamilton-operátor nem skalár

$$H_{AB}\Psi_B = E\Psi_A$$

$$\Psi_A^+ H_{AB}\Psi_B = E$$

$-\square\,|$ ← ennek kell skalárnak lennie, a Hamilton nem lehet spinmátrix

Ezért ez számunkra fontos az a felbontás.

Nézzük a fontosabbakat:

$\xi^A, \eta^B \longrightarrow \eta^{+B}$

$$v^0 = \square\,\sigma^0\,\square$$

$$v^k = \square\,\sigma^k\,\square$$

a két spinor szempontjából skalár mennyiség

$$\left.\begin{array}{l} \xi^A \to M\xi \\ \eta^+ \to \eta^+ M^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v^{0'} = \eta M^+\sigma^0 M\xi \\ v^{k'} = \eta M^+\sigma^k M\xi \end{array}$$

Spec: ha $M=R \Rightarrow M^+ = R^+ = R^{-1} = R(-\varphi)$

ha $M=L \Rightarrow M^+ = L^+ = L$

Az alábbiak kellenek: R^+R $\quad LL$

$R^+\sigma^k R$ $\quad L\sigma^k L$

Kell majd σ-k szorzata:

$$\sigma^k\sigma^e = \delta_{ke}I + i\,\varepsilon_{kep}\sigma^p$$

$$\sigma^k\sigma^e\sigma^m = (\delta_{ke}I + i\,\varepsilon_{kep}\sigma^p)\sigma^m = \delta_{ke}\sigma^m + i\,\varepsilon_{kep}\sigma^p\sigma^m =$$

$$= \delta_{ke}\sigma^m + i\,\varepsilon_{kep}(\delta_{pm}I + i\,\varepsilon_{pms}\sigma^s) = \delta_{ke}\sigma^m + i\,\varepsilon_{kem}I - \varepsilon_{kep}\varepsilon_{pms}\sigma^s =$$

$$= \delta_{ke}\sigma^m + i\,\varepsilon_{kem}I - (\delta_{km}\delta_{es} - \delta_{ks}\delta_{em})\sigma^s =$$

$$= \delta_{ke}\sigma^m + i\,\varepsilon_{kem}I - \delta_{km}\sigma^e + \delta_{em}\sigma^k$$

Mi van $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok esetén:

$$(\underline{a}\underline{\sigma})\sigma^e(\underline{b}\underline{\sigma}) = i\,\varepsilon_{kem}a_k b_m I - a_k b_m\delta_{km}\sigma^e + \delta_{em}a_k b_m\sigma^k + \delta_{ke}a_k b_m\sigma^m =$$

$$= i(\underline{b}\times\underline{a})_e I - (\underline{a}\underline{b})\sigma^e + b_e(\underline{a}\underline{\sigma}) + a_e(\underline{b}\underline{\sigma})$$

vektorosan: $(\underline{a}\underline{\sigma})\underline{\sigma}(\underline{b}\underline{\sigma}) = i(\underline{b}\times\underline{a})\underline{I} - (\underline{a}\underline{b})\underline{\sigma} + (\underline{a}\underline{\sigma})\underline{b} + (\underline{b}\underline{\sigma})\underline{a}$

Speciálisan, ha $\underline{a}=\underline{b}$: $(\underline{a}\underline{\sigma})\underline{\sigma}(\underline{a}\underline{\sigma}) = 2(\underline{a}\underline{\sigma})\underline{a} - a^2\underline{\sigma} = [2(\underline{a}\circ\underline{a}) - I]\underline{\sigma}$

Egy másik kifejezés:

$$a_e\sigma^k\sigma^e = \delta_{ke}a_e I + i\varepsilon_{kep}a_e\sigma^p = a_k I + i(\underline{a}\times\underline{\sigma})_k$$

vektorosan:

$$\underline{\sigma}(\underline{a}\underline{\sigma}) = \underline{a}I + i(\underline{a}\times\underline{\sigma})$$

$$(\underline{a}\underline{\sigma})\underline{\sigma} = \underline{a}I - i(\underline{a}\times\underline{\sigma})$$

$$(\underline{a}\underline{\sigma})(\underline{b}\underline{\sigma}) = (\underline{a}\underline{b})I - i(\underline{a}\times\underline{b})$$

Mivel R^+ unitér, ezért $R^+R = I$ tehát v^0 három-skalár.

$$R^+\underline{\sigma}R = R(-\varphi)\underline{\sigma}R(\varphi) = \left(\cos\frac{\varphi}{2}I + i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right)\underline{\sigma}\left(\cos\frac{\varphi}{2}I - i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) =$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma} + i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left((\underline{n}\underline{\sigma})\underline{\sigma} - \underline{\sigma}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) + \sin^2\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\underline{\sigma}(\underline{n}\underline{\sigma}) =$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma} + i\frac{\sin\varphi}{2}\left(-2i(\underline{n}\times\underline{\sigma})\right) + \sin^2\frac{\varphi}{2}\left(2(\underline{n}\underline{\sigma})\underline{n} - \underline{\sigma}\right) =$$

$$= \cos\varphi\,\underline{\sigma} + (1-\cos\varphi)(\underline{n}\circ\underline{n})\underline{\sigma} + \sin\varphi\,\underline{n}\times\underline{\sigma}$$

Tehát
$$v'^k = \eta^+R^+\sigma^k R\xi = \cos\varphi\underbrace{(\eta^+\sigma^k\xi)}_{v^k} + (1-\cos\varphi)(\underline{n}\circ\underline{n})\underbrace{(\eta^+\sigma^e\xi)}_{v^e} + \sin\varphi\,\underline{n}\times\underbrace{(\eta^+\sigma^e\xi)}_{v^e} =$$

$$= F_{ke}v^e$$

pl.: $\hat{p}$ mennyiség ψ állapot

$$\psi \to U\psi$$

$$\hat{p} \to U\hat{p}U^{-1}$$

$$\hat{p}'_k = \hat{U}\hat{p}_k\hat{U}^{-1} = \sum_e F_{ke}\hat{p}_e$$

Ha az operátor egyben egy több komponensű lineáris vonzás, akkor úgy kell transzformálódni, hogy operátorként és vektorként is u.a. legyen.

F-et a forgatásokból tudjuk felírni, U-t az új ...

=> a kettő között összefüggés van: Wigner-Eckart-tétel.

$$v^k = (\eta^+)^{\dot{A}}\sigma^k_{\dot{A}B}\xi^B$$

A Pauli-k komponensei gyakorlatilag a spinortérre vonatkoznak.

Nézzük $L\underline{\sigma}L$-t:

$$L\underline{\sigma}L = \left(\mathrm{ch}\frac{\omega}{2}I + \mathrm{sh}\frac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma})\right)\underline{\sigma}\left(\mathrm{ch}\frac{\omega}{2}I + \mathrm{sh}\frac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma})\right) =$$

$$= \mathrm{ch}^2\frac{\omega}{2}\underline{\sigma} + \mathrm{ch}\frac{\omega}{2}\mathrm{sh}\frac{\omega}{2}\left[(\underline{e}\underline{\sigma})\underline{\sigma} + \underline{\sigma}(\underline{e}\underline{\sigma})\right] + \mathrm{sh}^2\frac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma})\underline{\sigma}(\underline{e}\underline{\sigma}) =$$

$$= \mathrm{ch}^2\frac{\omega}{2}\underline{\sigma} + 2\,\mathrm{ch}\frac{\omega}{2}\mathrm{sh}\frac{\omega}{2}\underline{e}I + \mathrm{sh}^2\frac{\omega}{2}\left(2(\underline{e}\underline{\sigma})\underline{e}\right) = \underline{\sigma} + \mathrm{sh}\,\omega\,\underline{e}I + (\mathrm{ch}\,\omega - 1)(\underline{e}\underline{\sigma})\underline{\sigma}$$

$$LL = \left[\mathrm{ch}\frac{\omega}{2}I + \mathrm{sh}\frac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma})\right]^2 = \mathrm{ch}^2\frac{\omega}{2}I + 2\,\mathrm{sh}\frac{\omega}{2}\mathrm{ch}\frac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma}) + \mathrm{sh}^2\frac{\omega}{2}I =$$

$$= \mathrm{ch}\,\omega I + \mathrm{sh}\,\omega(\underline{e}\underline{\sigma})$$

v-vel:
$$v'^k = \eta^+(L\sigma^k L)\xi = (\eta^+\sigma^k\xi) + \mathrm{sh}\,\omega\,\underline{e}(\eta^+\xi) + (\mathrm{ch}\,\omega - 1)(\underline{e}\circ\underline{e})_{ke}(\eta^+\sigma^e\xi) =$$

$$= v^k + (\mathrm{ch}\,\omega - 1)e_k e_e v^e + \mathrm{sh}\,\omega\, e_k v^0$$

$$v'^0 = \eta^+(LL)\xi = \mathrm{ch}\,\omega(\eta^+\xi) + \mathrm{sh}\,\omega\, e_k(\eta^+\sigma^k\xi)$$

Egyszerűen v-t választva:

$$\begin{pmatrix} v^{0\prime} \\ v^{k\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{e}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{e}\operatorname{sh}\omega & I + (\underline{e}\circ\underline{e})(\operatorname{ch}\omega - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{0} \\ v^{k} \end{pmatrix}$$

Végigcsinálható alsó indexekre is:

$$\xi_{\dot A} \; \eta_{\dot A} \rightarrow v_k = \eta_A \sigma_k^{A\dot B} \xi_{\dot B}$$

ugyanez jön ki (csak ω helyett $-\omega$)

Nézzük meg fordított kiindulást!

$$\xi^A \; \eta_{\dot B} \rightarrow (\eta^+)_B$$

$$f^k = \boxed{\eta^+} \; \boxed{\sigma^k} \; \boxed{\xi}$$

$$\xi^{A\prime} \rightarrow M\xi$$

$$\eta_{\dot B}^{\prime} \rightarrow M^{+-1}\eta$$

$$\eta^{+\prime}_B \rightarrow \eta M^{-1}$$

$$f^{k\prime} = \eta^{+\prime}\sigma^k\xi^\prime = \eta(M^{-1}\sigma^k M)\xi$$

itt az $M^{-1}\sigma^0 M = 1$
$M^{-1}\sigma^k M = \dots$ -t kell kiszámolni

$$R^{-1}\underline{\sigma}R = R^+\underline{\sigma}R = \underline{\underline{F}}\,\underline{\sigma} \quad \text{(általános)} \qquad \text{(ugyanaz } f^k \text{ esetén)}$$

$$L^{-1}\underline{\sigma}L = \left(\operatorname{ch}\tfrac{\omega}{2}I - \operatorname{sh}\tfrac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma})\right)\underline{\sigma}\left(\operatorname{ch}\tfrac{\omega}{2}I + \operatorname{sh}\tfrac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma})\right) =$$

$$= \operatorname{ch}^2\tfrac{\omega}{2}I^{\underline{\sigma}} + \operatorname{sh}\tfrac{\omega}{2}\operatorname{ch}\tfrac{\omega}{2}\left(\underline{\sigma}(\underline{e}\underline{\sigma}) - (\underline{e}\underline{\sigma})\underline{\sigma}\right) - \operatorname{sh}^2\tfrac{\omega}{2}(\underline{e}\underline{\sigma})\underline{\sigma}(\underline{e}\underline{\sigma}) =$$

$$= \operatorname{ch}^2\tfrac{\omega}{2}I\underline{\sigma} + 2\operatorname{sh}\tfrac{\omega}{2}\operatorname{ch}\tfrac{\omega}{2}\, i(\underline{e}\times\underline{\sigma}) - \operatorname{sh}^2\tfrac{\omega}{2}\left(2(\underline{e}\underline{\sigma})\underline{e} - \underline{\sigma}\right) =$$

$$= \operatorname{ch}\omega\,\underline{\sigma} + i\operatorname{sh}\omega(\underline{e}\times\underline{\sigma}) + (1 - \operatorname{ch}\omega)(\underline{e}\circ\underline{e})\underline{\sigma}$$

$$f^\prime = \eta^+(L^{-1}\sigma L)\xi = \operatorname{ch}\omega(\eta^+\sigma\xi) + i\operatorname{sh}\omega\,\underline{e}\times(\eta^+\sigma\xi) + (1-\operatorname{ch}\omega)(\underline{e}\circ\underline{e})(\eta^+\underline{\sigma}\xi) =$$

$$= \operatorname{ch}\omega\, f_k + (1-\operatorname{ch}\omega)e_k e_l f_l + i\operatorname{sh}\omega\,\varepsilon_{klm}e_l f_m$$

olyan, mint a $\underline{f} = \underline{E} + i\underline{B}$

$$f^k = \eta^+_{\dot B}\sigma^{k\dot B}{}_A\xi^A \sim \sigma^{k\dot B}{}_A(\xi^A\eta_{\dot B})$$

tenzortér, 3 dimenziós tér.

Antiszimmetrikus 4-es tenzor

KVANTUM IV.

4. előadás (04.01.)

Láttuk, hogy $v^k = \xi^{\dot A} \sigma^k_{\dot A B} \eta^B$ és $v'^k = \xi'^{\dot A} \sigma^k_{\dot A B} \eta'^B$ esetén $v'^k = \Lambda^k{}_l v^l$

Tehát az [illegible] 4-vektort alkot

sőt $\sigma^k_{\dot A B} \xi^{\dot A B}$ is 4-vektor

⟹ Az 1 pöttyös, 1 pöttytelen spinorok 4-vektort alkotnak.

A megfeleltetés a σ-val.

gyakorlati példa:

valakinek van 4-impulzusa → 4-vektor

QM-ben az impulzusoperátor differenciáloperátor → spinor.

A Λ-k osztályozása:

Vigyük be a tükrözéseket is! (ugyan nem része a teljes szimmetriának, de az elvárások igen)

$\Lambda \sim e^{-i(\underline{\varphi}\underline{\vartheta} + \underline{\omega}\underline{k})}$ ← [illegible]

P: Mit tesz a tükrözés? a forgatás axiálvektor, az nem változik; a boost igazi vektor, az igen

⟹ $P \cdot \Lambda \sim e^{-i(\underline{\varphi}\underline{\vartheta} - \underline{\omega}\underline{k})}$

A felső transzf.: $M(\Lambda) = e^{-i\varphi\frac{\sigma}{2}} \cdot e^{\omega\frac{\sigma}{2}}$ $\quad \xi^A$

Az alsó transzf.: $\; = e^{-i\varphi\frac{\sigma}{2}} e^{\omega\frac{\sigma}{2}}$ $\quad \xi_{\dot A}$ A tükrözés az egyiket átviszi a másikba

Külön-külön a kétféle indexű spinoron a tükrözés nem ábrázolható ⟹

⟹ Be kell vezetni a kétféle spinortér direkt összegét

$$\Psi = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$ Dirac-féle bispinor

Forgatás repr.-ja:

$$R \to \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\varphi}{2}\sigma} & \\ & e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma} \end{pmatrix}$$

Boost repr.-je

$$B = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\omega}{2}\Omega} & \\ & e^{\frac{\omega}{2}\Omega} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \pm I \\ \pm I & 0 \end{pmatrix}$$

(vagy akár i-vel is be lehetne venni)

(jelenlegi elméletek szerint kell oda az i)

A mikor fajtákat számít 4, de egy feles spinű részecskénél csak 2 lehet. ⇒ A 4 komponens nem független

$\xi^A = J^{A\dot B}\eta_{\dot B}$ és $\eta_{\dot B} = K_{\dot B C}\xi^C$ milyen $J^{A\dot B}$ és $K_{\dot B C}$-re?

Mik lehetnek $J^{A\dot B}$ és $K_{\dot B C}$? Tudjuk, hogy ezek nagyjából 4-vektorok.

Mi a Poincaré-csoport alapjául általános sajátja: ezek az eltolás generátorai felel-e

⇒ Az impulzus operátor spinor repr.-je kell: $\begin{cases} p^{A\dot B}\eta_{\dot B} = a\,\xi^A \\ p_{\dot B C}\xi^C = b\,\eta_{\dot B} \end{cases}$

Ezt alapjában választjuk. Állítás: ez lesz a Dirac-egyenlet.

Ha nincs tükrözés, akkor elég az egyik, és akkor a jobb oldal 0.
p-ről tudjuk, egy diff.operátor ⇒ elsőrendű diff.egyenlet
(tehát, mint a vákuum Maxwell)

Helyettesítsük ξ-t:

$$p^{A\dot B}(b\eta_{\dot B}) = p^{A\dot B}p_{\dot B C}\xi^C = ba\,\xi^A \Rightarrow (p^2)^A{}_C\,\xi^C = (ba)\,\xi^A$$

$$\Rightarrow p^{A\dot B}p_{\dot B C} = (p^\mu p_\mu)\delta^A_C$$

A konkrét alak:
$p_{1\dot 1} \sim p_0 + p_3$
$p_{1\dot 2} \sim p_1 - i p_2$
$p_{2\dot 1} \sim p_1 + i p_2$
$p_{2\dot 2} \sim p_0 - p_3$

beírva: $p^{A\dot B}p_{\dot B C} = (p^\mu p_\mu)\delta^A_C = m^2c^2 = ba$

ab szorzata az állandó, egyébként szabad a választás ⇒ kényelmes olyanra, hogy $a = b = mc$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} p^{A\dot B}\eta_{\dot B} &= mc\,\xi^A \\ p_{\dot B C}\xi^C &= b\,\eta_{\dot B} \end{aligned}} \quad \text{és} \quad (p^2)^A{}_C\,\xi^C = m^2c^2\,\xi^C$$

Ha helyére $p \to \frac{\hbar}{i}\partial$

akkor $(p^2)^A{}_C\, \xi^C = m^2c^2 \xi^C \quad\to\quad -\hbar^2 \Box\, \xi^A = m^2c^2 \xi^A$ Klein–Gordon

A KG-egyenlet következik a Dirac-ból, de fordítva nem.

(vont mint a D'Alembert a Maxwellből)

Azaz a Dirac a Klein-Gordonból „vont gyököt".

$$\begin{pmatrix} & p^{\dot A B} \\ p_{\dot B A} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^A\\ \eta_{\dot B}\end{pmatrix} = mc\begin{pmatrix}\xi^A\\ \eta_{\dot B}\end{pmatrix}$$

kihasználva, hogy $p^{AB} = p^0 I - \dots$

kiírva:

$$\begin{bmatrix} & p^0 I+(p\sigma) \\ p^0 I-(p\sigma) & \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = mc\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\left[p^0\underbrace{\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}}_{\gamma^0} + p\underbrace{\begin{pmatrix} & \sigma \\ -\sigma & \end{pmatrix}}_{-\gamma}\right]\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = mc\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\underline{p_\mu \gamma^\mu \psi = mc\psi}$$ Ez a Dirac-egyenlet ismert alakja.

Határozzuk meg a szorzatokat rendre γ-kból.

$$\gamma_0\gamma_0 = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \\ & I\end{pmatrix}$$

$$\gamma^a\gamma^a = \begin{pmatrix} & -\sigma^a \\ \sigma^a & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -\sigma^a \\ \sigma^a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^a\sigma^a & \\ & -\sigma^a\sigma^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & \\ & -I\end{pmatrix}$$

tehát $\underline{(\gamma^\mu)^2 = g_{\mu\mu} I}$

Nézzük az antikommutátorokat:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \underline{2 g^{\mu\nu} I_4}$$

Ha a hullámfv. transzformálódik: $\psi \to \psi' = U\psi$

$\gamma \to \gamma' = U\gamma U^{-1}$

Ez nem Lorentz-trafó, hanem általános bázistrafó.

Vesszük a két oszlopnyi U-kat, látjuk, hogy invariánsak

Képzünk egyfél látványt:

Def: azok a Dirac-mátrixok, amelyek kielégítik a fenti összefüggést.
(Sőt tetszőleges $D \neq 4$-re is működik)

Állítás: Az összes megoldás az ekvivalens hasonlóság és csak unitér trafóban

Lássuk be, hogy a Dirac-egyenlet relativisztikusan invariáns

$$(U p_\mu U^{-1})\gamma^\mu (U\psi) = mc\,(U\psi)$$

$$p'_\mu \gamma^\mu \psi' = mc\,\psi' \qquad \text{de} \quad p'_\mu = L_\mu{}^{\varrho} p_\varrho$$

Ha a kettőt p_μ' u.a. alakban jön, vagyunk. Ezt kell belátni

Írjuk fel nem relativisztikus alakban:

$$(p_0\gamma_0 - \underline{p}\,\underline{\gamma})\psi = mc\,\psi \qquad |\cdot\gamma_0^{-1}$$

$$[p_0 - \underline{p}(\gamma_0\underline{\gamma})]\psi = mc\,\gamma^{-1}\psi \qquad \beta := \gamma_0$$

$$\underline{\alpha} := \gamma_0\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -\sigma \\ \sigma & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \\ & -\sigma \end{pmatrix}$$

$$p_0\psi = \underline{\alpha}\,\underline{p}\,\psi + mc^2\beta\psi$$

x-repr-ben,

$$\frac{\hbar}{i}\partial_t\psi = \underline{\alpha}\frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\psi + mc^2\beta\psi$$

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi = [c\underline{\alpha}\hat{\underline{p}} + mc^2\beta]\psi \qquad \text{Dirac innen indult}$$

Dirac tulajdonképpen az L^2 térből csinált $L^2 \times \mathbb{C}^2$ teret,
mert az egyenes utáni gyökvonás miatt bővített meg.

Komponensekben kiírva két féle indexszel látni és járni

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\mu A}(\underline{x},t) = c(\varrho_1)_{\mu\nu}\sigma^a_{AB}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_a}\psi_{\nu B}(\underline{x},t) + mc^2(\varrho_3)_{\mu\nu}\delta_{AB}\psi_{\nu B}$$

a lényeg kedvéért mi a kétféle index helyett egy db spinorindexet használunk.

KVANTUM IV.

5. előadás (04.08.)

A Dirac:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi = \sqrt{c^2\hat{p}^2 + m^2c^4}\,\psi = c\,\rho_1 |p| + mc^2\rho_3 = c\,\rho_1 \underline{\sigma}\,\underline{p} + mc^2\rho_3$$

$$\text{ahol } \rho_1^2 = \rho_3^2 = 1 \quad , \quad \rho_1\rho_3 + \rho_3\rho_1 = 0$$

szokásos írásmód: $c\,\underline{\alpha}\,\underline{p} + \beta mc^2$

Mi lesz a spinnel?

A valamennyi változását írjuk fel:

$$\frac{d}{dt}\underline{\hat{L}}(t) = \frac{i}{\hbar}[\underline{L}, \hat{H}]$$

ekkor:
$$\frac{d}{dt}\hat{L}_k = \frac{i}{\hbar}[\hat{L}_k, \hat{H}] = \frac{i}{\hbar}[\hat{L}_k, c\,\underline{\alpha}\,\underline{p}] = \frac{ic}{\hbar}[\hat{L}_k, \alpha_e \hat{p}_e] =$$

$$= \frac{ic}{\hbar}\alpha_e [\hat{L}_k, \hat{p}_e] = \frac{ic}{\hbar}\alpha_e [\varepsilon_{kqt}\hat{x}_q \hat{p}_t, p_e] =$$

$$= \frac{ic}{\hbar}\alpha_e\,\varepsilon_{kqt}[x_q p_t, p_e] = \frac{ic}{\hbar}\alpha_e\,\varepsilon_{kqt}(x_q p_t p_e - p_t p_e x_q)$$

$$(\underbrace{x_q p_t - p_t x_q}_{i\hbar\delta_{tq}\,\underline{I}} + p_t x_q)\,p_e - \ldots \text{ i.e.}$$

$$= \frac{ic}{\hbar}\alpha_e\,\varepsilon_{kqt}\left(-\frac{\hbar}{i}p_t\,\delta_{eq}\right) = -c\,\alpha_e\,p_t\,\varepsilon_{ket} = c(\underline{p}\times\underline{\alpha})_k \neq 0$$

$\Rightarrow$ nem marad meg az L!

Legyen $\underline{S} = \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma}$! ennek a változása:

$$\frac{d}{dt}S_k = \frac{i}{\hbar}[S_k, \hat{H}] = \frac{i}{2}[\sigma_k, H] = \frac{i}{2}[\sigma_k, c\rho_1\sigma_e p_e] =$$

$$= \frac{i}{2}c\rho_1 p_e[\sigma_k, \sigma_e] = \frac{i}{2}c\rho_1 p_e \cdot 2i\varepsilon_{kem}\sigma_m = -c\rho_1\,\varepsilon_{kem}\sigma_m p_e =$$

$$= -c(\underline{p}\times\underline{\sigma})_k \neq 0$$

Ez se 0, de $\quad \frac{d}{dt}(\underbrace{\hat{L}_k + \hat{S}_k}_{J_k}) = 0 \quad$ tehát $[\hat{J}_k, \hat{H}] = 0$.

Tehát van spin!

Honnan tudjuk, hogy milyen? Dirac azt mondta, hogy $\frac{1}{2}$, de mi próbáljuk ki, mi van másra?

Próba:

Legyen $\hat{H} = c\rho_1 \underline{S}\,\underline{p} + \rho_3 mc^2$ ahol $S^{(k)}_{\ell m} = -i\,\varepsilon_{k\ell m}$

a Schr.: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ Csak most 2×2 helyett 2×3 dimes.

A S-k [illegible], a többi [illegible] ezt.

$\psi_{\alpha k}(\underline{r},t)$, $H_{\alpha\beta,k\ell}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_{\alpha k}(t,\underline{r}) = \sum_\beta \sum_\ell H_{\alpha\beta,k\ell}\,\psi_{\beta\ell} =$$

$$= \sum_\beta \sum_\ell \left[c(\rho_1)_{\alpha\beta}(\underline{S}\,\underline{p})_{k\ell} + mc^2(\rho_3)_{\alpha\beta}\,\delta_{k\ell}\right]\psi_{\beta\ell}$$

Ez mondja, [illegible] egyben ψ 6 komponensű vektor.

$$\psi = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \alpha = 1 \\ \\ \leftarrow \alpha = 2 \end{matrix}$$

Ekkor:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{G} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \end{pmatrix}(\underline{S}\,\underline{p})\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{G} \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \boxed{1} & \\ & \boxed{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{G} \end{pmatrix}$$

külön:

$$\left.\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} &= c(\underline{S}\,\underline{p})\underline{G} + mc^2\underline{F} \\ i\hbar \frac{\partial \underline{G}}{\partial t} &= c(\underline{S}\,\underline{p})\underline{F} - mc^2\underline{G} \end{aligned}\right\}$$

indexesen:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial F_k}{\partial t} &= c(\underline{S}\,\underline{p})_{k\ell}G_\ell + mc^2 F_k = \\ &= c(S^m p_m)_{k\ell}G_\ell + mc^2 F_k \\ &= c\left(-i\,\varepsilon_{mk\ell}\,\frac{\hbar}{i}\partial_m\right)G_\ell + mc^2 F_k = \\ &= -c\hbar\,\varepsilon_{mk\ell}\,\partial_m G + mc^2 F_k \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F_k}{\partial t} = -i\,\varepsilon_{km\ell}\,\partial_m G_\ell - \frac{imc}{\hbar}F_k$$

ugyanígy: $\frac{1}{c}\frac{\partial G_k}{\partial t} = -i\,\varepsilon_{km\ell}\,\partial_m F_\ell + \frac{imc}{\hbar}G_k$

vektorosan írva:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{F}}{\partial t} &= -i\,\mathrm{rot}\,\underline{G} - \frac{imc}{\hbar}\underline{F} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{G}}{\partial t} &= -i\,\mathrm{rot}\,\underline{F} + \frac{imc}{\hbar}\underline{G} \end{aligned}\right]$$

összeadva:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{F}+i\underline{G}) &= \mathrm{rot}(\underline{F}-i\underline{G}) - \frac{imc}{\hbar}(\underline{F}-i\underline{G}) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{F}-i\underline{G}) &= -\mathrm{rot}(\underline{F}+i\underline{G}) - \frac{imc}{\hbar}(\underline{F}+i\underline{G}) \end{aligned}\right\}$$

Legyen $\underline{E} = \underline{F} - i\underline{G}$, $\underline{B} = \underline{F} + i\underline{G}$

akkor $\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} &= \mathrm{rot}\,\underline{E} - \frac{imc}{\hbar}\underline{E} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} &= -\mathrm{rot}\,B - \frac{imc}{\hbar}\underline{B} \end{aligned}\right\}$ Proca-egyenletek

Ha $m=0$ akkor ez a Maxwell.

Ez egy bivektor, amit célszerű antiszimm. tenzorként kezelni => relat II.

Hogy értelmezzük a spint, hogy vetítsük ki a p-re? mozgás irányban: Helicitás.

az elektron $\frac{1}{2}$ spinű + és −

a foton 1 spinű: +1, 0, −1. Hova tűnt a 0?

a foton mindig c-vel megy, nem tudunk nyugalomba állni $SO(3) \to SO(2)$

Ez kommutatív => 1 spinállapot + tükrözés

A neutrínóban nincs szimmetriája a tükrözés, ezért annak nem lesz tükörképe.
DE annak nem 0 a tömege => kell legyen ellentétes
DE az univerzum nem elég öreg ehhez.

Hova tűntek a div-es Maxwellek?
Helyettesítsük egymásba a Procat:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{rot}\,B - i\frac{mc}{\hbar}B\right) = \frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial B}{\partial t} - i\frac{mc}{\hbar}\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} =$$

$$= -\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,E - i\frac{mc}{\hbar}E\right) - i\frac{mc}{\hbar}\left[\mathrm{rot}\,E - i\frac{mc}{\hbar}E\right] =$$

$$= -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,E - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}E = \Delta\underline{E} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\underline{E} - \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{E})$$

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{E}}{\partial t^2} = \Delta\underline{E} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}_{\text{KG egyenlet.}} - \underline{\nabla}(\underline{\nabla}E)$$

akkor legyen KG-t, ha $\underline{\nabla}\underline{E} = 0$.

legyen $\underline{B}$-re $\underline{\nabla}\underline{B} = 0$

A $\frac{1}{2}$ spinél nem volt mellékfeltétel

Vagy Visszafelé is: ha $\hat{H}$-t négyzetre emeljük:

$$\hat{H}^2 = c\,\varrho_1^2(\underline{S}\underline{p})^2 + \varrho_3^2 m^2c^4 + c(\underline{S}\underline{p})mc^2(\varrho_1\varrho_3 + \varrho_3\varrho_1) =$$

$$\hat{H}^2_{\alpha\beta k\ell} = \delta_{\alpha\beta}\left((Sp)^2_{k\ell} + m^2c^4\delta_{k\ell}\right) = \delta_{\alpha\beta}\left((Sp)_{km}(Sp)_{m\ell} + m^2c^4\delta_{k\ell}\right) =$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\Big(c^2 \underbrace{S^a_{km}p_a}_{(-i\varepsilon_{akm}p_a)} \underbrace{S^b_{m\ell}p_b}_{(-i\varepsilon_{bm\ell}p_b)} + m^2c^4\delta_{k\ell}\Big) \qquad (-i\varepsilon_{akm}p_a)(-i\varepsilon_{bm\ell}p_b) = p^2\delta_{k\ell} - p_kp_\ell$$

$$\hat{H}^2_{\alpha\beta k\ell} = \delta_{\alpha\beta}\left(m^2c^4\delta_{k\ell} + c^2p^2\delta_{k\ell} - c^2p_kp_\ell\right)$$ ⇐ ez nem az elvárt, nem működik, hogy Dirac nem azt kapta.

Konstatáljuk a síkhullám-teret azon, ahol az egyenlőség fennáll

Keresünk olyan Ψ-ket amire $H^2\Psi = (m^2c^4 + c^2p^2)\Psi$

Ezt ami $k_e p_e \Psi_{\alpha e} = 0 \Rightarrow p_e \Psi_e \Rightarrow \underline{\partial_e \Psi_e = 0}$

Ebből következik a $\nabla \underline{E} = 0$, $\nabla \underline{B} = 0$ mellékfeltétel.

A teljes Proca-egyenletből következik.

$s > 1$-re ugyanezt el lehet játszani, csak több egyenlet
több mellékfeltétel.

Landau IV.

Ahhoz, hogy az időfejlődést egyszerű egyenlet mellékfeltétel nélkül kell kiírni $s = 1/2$-nél. Ezért kapta Dirac a $1/2$-s egyenletet

---

Nézzük a sebességoperátort.

TFH a Dirac-egyenlet egy Heisenberg kép beli egyenlet a helyre!

Szabad részecskére:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_k(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, x_k] = \frac{i}{\hbar}[c\underline{\alpha}\hat{\underline{p}} + \beta mc^2, \hat{x}_k] = \frac{ic}{\hbar}[\alpha_e \hat{p}_e, \hat{x}_k] = \frac{ic}{\hbar}\alpha_e[p_e, x_k] =$$

$$= \frac{ic}{\hbar}\alpha_e\frac{\hbar}{i}\delta_{ke} = c\alpha_k =: \hat{v}_k$$

Az $v_k^2 = \alpha_k\alpha_k = \begin{pmatrix} & \sigma_k \\ \sigma_k & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma_k \\ \sigma_k & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_k^2 & \\ & \sigma_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = I$

Ha összegzünk: $\sum \alpha_k \alpha_k = 3I \Rightarrow v^2 = 3c^2 I$ ez hogy lehet?

Úgy, hogy a v_k-k nem kommutálnak
nem mérhetjük egyszerre, ezt nem tudjuk.

v_k komponenseit c-nek kapjuk, de egyszerre nincs értelme

Deriváljuk még egyszer:

$$\hat{a}_k = \frac{d}{dt}\hat{v}_k = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{v}_k] = \frac{ic}{\hbar}[\hat{H}, \alpha_k] = \frac{ic}{\hbar}[c\alpha_e p_e + \beta mc^2, \alpha_k] =$$

$$= \frac{ic}{\hbar}\left(cp_e[\alpha_e, \alpha_k] + mc^2[\beta, \alpha_k]\right)$$

ezeknek csak az antikommutátorát ismerjük.

$$\{\alpha_k, \alpha_e\} = 2\delta_{ke} I \qquad \{\alpha_k, \beta\} = 0$$

Írjuk be ezeket:

$$\frac{ic}{\hbar}\left(cp_e(\{\alpha_e, \alpha_k\} - 2\alpha_k\alpha_e) + mc^2(\{\beta, \alpha_k\} - 2\beta\alpha_k)\right) = \frac{ic}{\hbar}(2cp_k - 2cp_e\alpha_k\alpha_e - 2mc^2\alpha_k\beta) =$$

$$= \frac{2ic}{\hbar}(cp_k - c\alpha_k(p_e\alpha_e) - \alpha_k mc^2\beta) = \frac{2ic^2}{\hbar}p_k - \alpha_k\frac{2ic}{\hbar}\Big(\underbrace{c(\underline{p}\underline{\alpha}) + mc^2\beta}_{H}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(c\alpha_k) = \frac{2ic^2}{\hbar}p_k - \frac{2ic}{\hbar}\alpha_k H$$

v-re ismerjük:

$$\frac{d}{dt}(\hat{v}_k) + \frac{2i}{\hbar}\hat{v}_k\hat{H} = \frac{2ic^2}{\hbar}\hat{p}_k$$

inhomogén diffegyenlet, de $\hat{p}_k$ változik?

$$\frac{d}{dt}\hat{p}_k = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}_k] = 0$$ (az ált. lineáris mozgás miatt)

$\hat{H}$ mindig konstans értékű

$\hat{H}$ és $\hat{p}$ közös alterében az állapot nem megy ki.

$\hat{p} \to p \qquad \hat{H} \to E$

Ekkor az egyenlet:

$$\frac{d\hat{v}_k(t)}{dt} + \frac{2iE}{\hbar}v_k(t) = \frac{2ic^2}{\hbar}p_k$$

$$\frac{d\hat{v}_k}{dt} + \frac{2iE}{\hbar}\Big(\underbrace{\hat{v}_k - \frac{c^2}{E}p_k}_{w_k}\Big) = 0 \to \hat{w}_k = \hat{v}_k - V$$

$$\frac{dw_k}{dt} = -\frac{2iE}{\hbar}\hat{w}_k$$ V az átlagos sebesség

$$w_k(t) = w_k(0)\, e^{-\frac{2iE}{\hbar}t}$$

$$\hat{v}_k(t) = \hat{V}_k + w_k(0)\, e^{-\frac{2iEt}{\hbar}}$$

a sebesség konstans, ami a konstans körül oszcillál

integrálva:

$$\hat{r}_k(t) = \hat{r}_0 + \hat{V}_k t + \hat{w}_k(0)\left(-\frac{\hbar}{2iE}\right)\left(e^{-\frac{2iEt}{\hbar}} - 1\right)$$

Ez jönne ki a Schr.-ből. $\hat{r}_k(t)$-t rendszeresen is ez jön ki + az utolsó tagból korrekció

Zitterbewegung (rezgető mozgás)

nagyon nagy a frekv.: $\omega = \frac{2E}{\hbar} = \frac{2mc^2}{\hbar}$ (nagyon nagy)

amplitudó: $A = \frac{c\hbar}{E} = \frac{c\hbar}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc}$ Compton hullámhossz.

Úgy tűnik az egyrészecske-elméletből. Ennél kisebb helyen nem értelmes 1 részecskés leírás

itt a részecske nem egyenes vonalú egyenletes mozgás, de átlagban terjedő.

A grafénnél kijön ez a megoldás, mert a diszp. reláció olyan mint a fénykúp de c nem a fénysebesség, hanem egy paraméter. (lényegében u.a., de 300-szor nagyobb c)

$\Rightarrow$ mérhető (2004.)

DGy népítette, hogy sokkal több a relativ. és a spektr.

KVANTUM IV.

6. előadás (04.15.)

Dirac-egyenlet EM-mezővel:

A hatás relativisztikusan:

$$S = mc^2\int d\tau - g\int U(x)\,d\tau - \frac{e}{c}\int A_\mu(x)\,dx^\mu = \int -(mc^2+gU)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt -$$

$$-\frac{e}{c}\int(\phi\, c\, dt - \underline{A}\,d\underline{r}) =$$

$$= \underbrace{\int\left[-(mc^2+gU)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\phi + \frac{e}{c}\underline{A}\,\underline{v}\right]dt}_{L(\underline{r},\underline{v},t)}$$

$$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = \underbrace{\left(m+\frac{g}{c^2}U\right)}_{M}\frac{\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\underline{A} \qquad (*)$$

$$H = \underline{p}\underline{v} - L = \frac{Mv^2}{\sqrt{}} + \frac{e}{c}\underline{A}\,\underline{v} + M\sqrt{} - \frac{e}{c}\underline{A}\,\underline{v} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\phi$$ ezt ki kell fejezni p-vel.

(*)-ből: $$\left(\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A}\right)^2 = \left(\frac{M\underline{v}}{\sqrt{}}\right)^2 = \frac{Mv^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow P^2 = \frac{Mv^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v^2 = \frac{P^2}{M^2+\frac{P^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{M^2+\frac{P^2}{c^2}}}{M}$$

Tehát a Hamilton:

$$H = \sqrt{M^2c^4+P^2c^2} + e\phi = \sqrt{\left(m+\frac{g}{c^2}U\right)c^4 + \left(\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A}\right)^2c^2} + e\phi$$

kvantálva:

$$\boxed{\hat{H} = \left(m+\frac{g}{c^2}U(x)\right)c^2\rho_3 + c\rho_1\underline{\sigma}\left(\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A}(x)\right) + e\phi(x)}$$

A standard repr.:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad \text{és} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I\end{pmatrix} \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}$$

ahol ψ 4D-s vektor.

Mi a fizikai jelentése a kapott $\hat{H}$-nak?
Hasonlítsuk össze a nem relativisztikus $\hat{H}$-val! Ehhez a Mc^2 + kicsi közelítést vesszük.

Első közelítésben nézzük a KG-t:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

$$-\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2\psi + \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\underline{A}\right)^2\psi + m^2c^4\psi = 0$$ (jelöljük $(\widehat{KGEM})\psi$-vel)

Ezt kéne visszakapni a Diracból, de majd ennél többet is fogunk!

A nem relat. Schr.:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{(\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A})^2}{2m}\psi-e\phi\psi$$

hosszan:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_\alpha-\frac{ie}{\hbar c}A_\alpha\right)\left(\partial_\alpha-\frac{ie}{\hbar c}A_\alpha\right)\psi-e\phi\psi$$

itt az A-k deriváltjainál hagyjuk a megfelelő tagokat

A nemrel. Schr. (Dirac):

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}-e\phi\right)-mc^2\rho_3-c\rho_1\underline{\sigma}\left(\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A}\right)\right]\psi=0$$

Ha kihasználjuk, hogy e negatív: $e\to -e$

$$\underbrace{\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)+mc^2\rho_3+c\rho_1\underline{\sigma}\left(\underline{p}+\frac{e}{c}\underline{A}\right)\right]}_{\hat{D}}\psi=0$$

Legyen $\hat{Z}:=\left[-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)+mc^2\rho_3+c\rho_1\underline{\sigma}\left(\underline{p}+\frac{e}{c}\underline{A}\right)\right]$

Vegyük most $\hat{Z}\hat{D}$ hatását! Az eredmény legyen 0.

$$\hat{Z}\hat{D}\psi\overset{!}{=}0$$

beírva: (kihasználjuk, hogy $\rho_1\rho_3+\rho_3\rho_1=0$)

$$-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)^2\psi+m^2c^4\psi+c^2\left(\underline{p}+\frac{e}{c}\underline{A}\right)^2\psi-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)mc^2\rho_3\psi+mc^2\rho_3\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)\psi-$$

$$-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)c\rho_1\underline{\sigma}\,\underline{P}\,\psi+c\rho_1\underline{\sigma}\,\underline{P}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)\psi=0$$

$$(\hat{KGEM})\psi-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}c\rho_1(\underline{\sigma}\,\underline{P})\psi+e\phi c\rho_1\underline{\sigma}\,\underline{P}\psi+c\rho_1\underline{\sigma}\,\underline{P}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-c\rho_1\underline{\sigma}\,\underline{P}e\phi\psi=0$$

$$(\hat{KGEM})\psi+\frac{\hbar c}{i}\rho_1\sigma_\alpha\left[\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha\right)\psi\right]+ec\rho_1\sigma_\alpha\left[\phi\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha\right)\psi-\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha\right)\phi\psi\right]=$$

$$=(\hat{KGEM})\psi+\frac{\hbar c}{i}\rho_1\sigma_\alpha\left[\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{e}{c}A_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\partial_\alpha\psi-\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial t}(A_\alpha\psi)\right]+$$

$$+ec\rho_1\sigma_\alpha\left[\frac{\hbar}{i}\phi\partial_\alpha\psi+\frac{e}{c}\phi A_\alpha\psi-\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha(\phi\psi)-\frac{e}{c}A_\alpha\phi\psi\right]=$$

$$=(\hat{KGEM})+\frac{\hbar c}{i}\rho_1\sigma_\alpha\frac{e}{c}\left(-\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}\right)\psi-\frac{e}{c}\rho_1\sigma_\alpha\frac{\hbar}{i}(-\partial_\alpha\phi)\psi=$$

$$=(\hat{KGEM})\psi+\frac{\hbar ce}{i}\rho_1\sigma_\alpha\left(-\partial_\alpha\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}\right)=(\hat{KGEM})\psi-i\hbar ce\rho_1(\underline{\sigma}\,\underline{E})$$

Tehát ami kijött:

$$\hat{Z}\hat{D}\psi=\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)^2+m^2c^4\psi+(c\rho_1\underline{\sigma}\,\underline{P})(c\rho_1\underline{\sigma}\,\underline{P})-i\hbar ce\rho_1(\underline{\sigma}\,\underline{E})\psi=0$$

a második tag:

$$\sigma_\alpha P_\alpha\sigma_\beta P_\beta=\sigma_\alpha\sigma_\beta P_\alpha P_\beta=(\delta_{\alpha\beta}I+i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma)P_\alpha P_\beta=$$

$$=P_\alpha P_\alpha I+i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma P_\alpha P_\beta$$

A KGEM-ben a P^2 szerepelt, szóval amit eddig annak hittünk, az valójában van az, tehát $ie\sigma PP$-t is írni kell.

A maradék eredmény:

$$(\ldots\hat{\sigma}EM)\psi + c^2 i\,\sigma_\gamma\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\beta+\frac{e}{c}A_\beta\right)\psi - i\hbar c e\,\rho_1\,\underline{\sigma}\,\underline{E} = 0$$

2. tag:

$$c^2 i\,\sigma_\gamma\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big(\underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_\alpha\frac{\hbar}{i}\partial_\beta\psi}_{\sim} + \frac{e}{c}A_\alpha\frac{\hbar}{i}\partial_\beta\psi + \frac{\hbar}{i}\partial_\alpha\frac{e}{c}(A_\beta\psi) + \underbrace{\frac{e^2}{c^2}A_\alpha A_\beta}_{\sim}\Big) =$$

$\sim$: szimmetria miatt kiesik

$$= i c^2\frac{\hbar}{i}\frac{e}{c}\sigma_\gamma\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big(\underbrace{A_\alpha\partial_\beta\psi + A_\beta\partial_\alpha\psi}_{\text{miatt szimmetrikus}} + (\partial_\alpha A_\beta)\psi\Big) =$$

$$= \hbar e c\,\sigma_\gamma\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\partial_\alpha A_\beta\,\psi = \hbar e c(\underline{\sigma}\,\underline{B})\psi$$

Tehát az eredmény:

$$\hat{Z}\hat{O} = \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2\psi + m^2c^4\psi + c^2\left(\underline{p}+\frac{e}{c}\underline{A}\right)^2\psi + \hbar e c(\underline{\sigma}\,\underline{B})\psi - i(\hbar e c)\rho_1(\underline{\sigma}\,\underline{E})\psi \stackrel{!}{=} 0$$

legyen $\hat{\underline{\mu}} = -\frac{e\hbar}{2mc}\underline{\sigma}$ $\quad\hat{\underline{d}} = i\rho_1\hat{\underline{\mu}}$

Tehát az utolsó két tag: $-2mc^2(\hat{\underline{\mu}}\hat{\underline{B}})\psi - 2mc^2(\hat{\underline{d}}\hat{\underline{E}})\psi$

$\Rightarrow$ A Dirac-egyenletben benne van a mágneses momentum és elektromos dipól momentum.

Mivel ρ_1 $\frac{v}{c}$ faktort jelent, ezért a $\hat{\underline{d}}$ $\frac{v}{c}$-vel kisebb, mint $\hat{\underline{\mu}}$.

Ezért számoltak először csak $\hat{\underline{\mu}}$-vel.

Leosztva $2mc^2$-tel:

$$\left[\frac{(\hat{\underline{p}}+\frac{e}{c}\underline{A})^2}{2m} - (\underline{\mu}\,\underline{B}) - (\underline{d}\,\underline{E})\right]\psi = \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2 - m^2c^2\right]\psi$$

TFH az energia s.é.-hez tartozó $\psi \sim e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi_0$

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\right.$$

$$\ldots\quad(-E\psi_0 - e\phi\psi_0)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{c^2}(-E-e\phi)^2\psi_0 + \frac{i\hbar e}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi_0\right]e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

vagyis:

$$\left[\frac{(\hat{\underline{p}}+\frac{e}{c}\underline{A})}{2m} - (\underline{\mu}\,\underline{B}) - (\underline{d}\,\underline{E})\right]\psi_0 = \frac{1}{2m}\left[\frac{(E+e\phi)^2}{c^2} - m^2c^2 + e\phi + \frac{i\hbar e}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]\psi_0$$

Ha a rel. energia: $E = mc^2 + \varepsilon$ ezt beírva, akkor a maradó tag az ε, alábbi kiesik

így a szétválasztott egyenlet:

$$\left[\frac{(\hat{\underline{p}}+\frac{e}{c}\underline{A})}{2m} - (\underline{\mu}\,\underline{B}) - (\underline{d}\,\underline{E})\right]\psi_0 = \varepsilon\psi_0$$

Klasszikusan az energia operátor a $\dfrac{(\underline{p} + \frac{e}{c}\underline{A})^2}{2m}$

most kvázi jött négyzetes és elektron momentum

$$\underline{\mu} = -\frac{e\hbar}{2mc}\underline{\sigma} = -\frac{e}{mc}\underline{S}$$

A klasszikus képletből $\frac{e}{2mc}\underline{S}$ jött volna, de itt 2-szer akkora.

$\Rightarrow$ $\underline{g_e = 2}$.

Mit ad a klasszikus tag?

$$\frac{(\underline{p} + \frac{e}{c}\underline{A})^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 + \frac{e}{2mc}(p_\alpha A_\alpha + A_\alpha p_\alpha) =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 + [\underline{p}, \underline{A}] + 2\underline{A}\underline{p} = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{\frac{e^2}{2mc^2}A^2}_{\text{elhagyni}} + \underbrace{\frac{e}{2mc}\frac{\hbar}{i}(\nabla\underline{A})}_{\text{mérték feltétel}} + \frac{e}{2mc}(2\underline{A}\underline{p}) =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{2mc}\underline{\hat{B}}\hat{L}$$ ez a kölcsönhatási tag kiszámolva

Láttuk, hogy spinre $\frac{e}{mc}\underline{\hat{S}}\underline{\hat{B}}$ ez tényleg 2-szeres.

Mi a hatása az elektron momentumnak?

KVANTUM IV.

7. előadás (04.29.)

A 4D-s mennyiségekkel vissza kéne írni 2D-sre:

Láttuk, hogy $\rho_1 \sim \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

$\rho_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

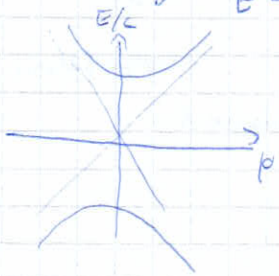
$\alpha = \rho_1 \sigma = \begin{pmatrix} & \sigma \\ \sigma & \end{pmatrix}$ $\qquad \beta = \rho_3 I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

A hullámfv.: $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ $\qquad$ operátor: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \\ & \sigma \end{pmatrix}$

Másik út volt: $\Psi = \begin{pmatrix} \xi_A \\ \eta_A \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi = \dfrac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$

$\chi = \dfrac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$

Azt tudjuk, hogy $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$



Az alsó hiperbolán látszólag nincs értelme, de anélkül nem lesz teljes rendszer.

Kérdés: miért nem ugrik le a $-\infty$ energiára?

Dirac tenger: ott tele van „[illegible]".

itt teljes katyvasz van, ezért inkább QFT kell.

Nézzük az előző tárgyalást:

$$\hat{H} = mc^2\beta + c\underline{p}\,\underline{\alpha} = mc^2\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} + c\underline{p}\begin{pmatrix} & \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} & \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \qquad \text{ahol } \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\left[mc^2\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + c\underline{p}\begin{pmatrix} & \sigma \\ \sigma & \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} mc^2\varphi + c\underline{p}\,\underline{\sigma}\chi &= E\varphi \\ -mc^2\chi + c\underline{p}\,\underline{\sigma}\varphi &= E\chi \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} (E - mc^2)\varphi &= c\underline{p}\,\underline{\sigma}\chi \\ (E + mc^2)\chi &= c\underline{p}\,\underline{\sigma}\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi = \frac{c\underline{p}\,\underline{\sigma}}{E + mc^2}\varphi \quad \text{ha } E > 0 \qquad \chi < \varphi$$

χ: kis spinor

φ: nagy spinor

nem relat. közelítésben: $\chi \sim \dfrac{\underline{p}\,\underline{\sigma}}{2mc^2}\varphi$

ezt kell használni, ha be akarjuk helyettesíteni.

A neutronál:

$$\underbrace{\left[\frac{(\underline{p}+\frac{e}{c}\underline{A})^2}{2m} - e\phi - (\underline{\mu}\,\underline{B})}_{H_1} - (\underline{d}\,\underline{E})\right]\psi = \varepsilon\psi$$

és $\varepsilon = E - mc^2$

$\mu = -\frac{e\hbar}{2mc}\underline{\sigma} = -\frac{e}{mc}\underline{S}$

$\underline{d} = i\varrho_1\underline{\mu}$

Bevezetve a $\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$-t

$$\left[\begin{pmatrix}H_1 & \\ & H_1\end{pmatrix} + i\mu E\begin{pmatrix} & I\\ I & \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} H_1\varphi + i(\mu\underline{E})\chi &= \varepsilon\varphi\\ H_1\chi + i(\mu\underline{E})\varphi &= \varepsilon\chi\end{aligned}\right\}$$

kezdve a $\chi = \frac{\underline{p}\,\underline{\sigma}}{2mc}\varphi$ -t

$$H_1\varphi + \frac{i(\underline{\mu}\underline{E})(\underline{p}\underline{\sigma})}{2mc}\varphi = \varepsilon\varphi$$

$$\underbrace{\left[\frac{(\underline{p}+\frac{e}{c}\underline{A})^2}{2m} - e\phi - (\underline{\mu}\,\underline{B}) + \frac{i\left(-\frac{e\hbar}{2mc}\right)(\underline{\sigma}\underline{E})(\underline{\sigma}\underline{p})}{2mc}\right]}_{H_{eff}}\varphi = \varepsilon\varphi$$

Az 1-3 tag jelentését tudjuk. De mi a 4.?

$$(\underline{\sigma}\underline{E})(\underline{\sigma}\underline{p}) = (\sigma_{kl} I + i\varepsilon_{klm}\sigma^m)E_k p_l = (\underline{E}\underline{p})I + i(\underline{E}\times\underline{p})\sigma$$

Mivel $\underline{E}\sim\underline{r}$ a negyedik tag: $\sim (\underline{E}\times\underline{p})\underline{S}$

$(\underline{r}\times\underline{p})\underline{S}$

$\underline{L}\,\underline{S}$

A pálya kvantumszámát is már dipól momentum, ott spinnel is van, és ezek külön hatnak egymásra. spin-pálya KH $\Rightarrow$ finom felhasadás

Írjuk fel relativisztikusan a Dirac-egyenletet:

$$(\gamma_\mu p^\mu - mc)\psi = 0$$

$$(\gamma_0 p^0 - \underline{\gamma}\vec{p} - mc)\psi = 0 \qquad \text{ahol } \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$$

adjungálva: $\psi^+(\gamma_0^+\overleftarrow{p_0} - \underline{\gamma}^+\overleftarrow{p} - mc) = 0$

γ-k alakja miatt: $\gamma^{0+} = \gamma^0$ és $\underline{\gamma}^+ = -\underline{\gamma}$

tehát $\psi^+(\gamma_0\overleftarrow{p_0} + \underline{\gamma}\overleftarrow{p} - mc) = 0$

megváltozott az előjel $\Rightarrow$ ez nem kovariáns egyenlet.

Beírva γ_0-akat:

$$\psi^+\gamma_0(\gamma_0\gamma_0 p_0\gamma_0 + \gamma_0\underline{\gamma}\gamma_0\overleftarrow{p} - mc\gamma_0\gamma_0) = 0$$

$$(\psi^+\gamma_0)(p_0\gamma_0 - \overleftarrow{p}\underline{\gamma} - mc) = 0 \Rightarrow \bar{\psi}(\gamma_\mu p^\mu - mc) = 0 \qquad \text{ez már kovariáns}$$

Ahhoz adjungálás szabályait meg kell változtatni

Dirac-adjungálás: $\psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$

$$\psi^+ = (\varphi^+ \ \chi^+)$$

$$\bar\psi = (\varphi^+ \ \chi^+)\gamma^0 = (\varphi^+ \ \chi^+)\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = (\chi^+ \ \varphi^+)$$

Ebből lehet Lagrange-egyenletet csinálni:

$$\mathcal{L} = \bar\psi(\partial_\mu\gamma^\mu - mc)\psi$$

$$S = \int \mathcal{L}\, d^4x$$

Ezt $\bar\psi$-szerint variálva, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar\psi} = (\partial_\mu\gamma^\mu - mc)\psi \stackrel{!}{=} 0$

ez meg a Dirac.

Átszorzom $\frac{i}{\hbar}$-sal.

$$(\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{imc}{\hbar})\psi = 0 \xrightarrow{\bar\psi\cdot} \bar\psi(\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{imc}{\hbar})\psi = 0$$

adjungálva: $\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu + \frac{imc}{\hbar}\bar\psi = 0 \xrightarrow{\cdot\psi} \bar\psi(\partial_\mu\gamma^\mu + \frac{imc}{\hbar})\psi = 0$

összeadva: $\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi = 0$

$$\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi) = 0 \Rightarrow j^\mu = e\bar\psi\gamma^\mu\psi \quad \text{áram megmarad.}$$

Gauge-elmélet

Felejtsünk el mindent, vegyük a Lagrange-t:

$$\mathcal{L} = -i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\bar\psi\psi \qquad \text{itt } \psi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^4$$

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\bar\psi = \psi^+\gamma_0 \to \bar\psi' = e^{-i\alpha}\bar\psi$$

$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ ez a trafó tehát inv. a Lagrange

„Globális elsőfajú mértéktrafó" U(1) csoportot alkotnak

Mi van, ha α függ a helytől

$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ lokális elsőfajú mértéktrafó

De ez nem ilyen szimmetria, mert

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = -i\bar\psi'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - mc\bar\psi'\psi' = -ie^{-i\alpha(x)}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu(\psi e^{i\alpha}) - mc\bar\psi e^{-i\alpha}\psi e^{i\alpha} =$$

$$= \mathcal{L} + \frac{1}{e} j^\mu\partial_\mu\alpha$$

Miután azt akarjuk, hogy ez is szimmetria legyen, megváltoztatjuk a Lagrange-t

$$\begin{array}{l} \partial_\mu\psi \to D_\mu\psi \\ \downarrow \\ \partial_\mu\psi' \to D_\mu\psi' = D_\mu\left(e^{i\alpha(x)}\psi\right) \overset{!}{=} e^{i\alpha(x)} D_\mu\psi \end{array}$$

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ieA_\mu(x)\psi$$

$$D_\mu\psi' = \partial_\mu\psi' + ieA'_\mu(x)\psi' = \partial_\mu(\psi e^{i\alpha}) + ieA'_\mu e^{i\alpha}\psi = \partial_\mu\psi e^{i\alpha} + i\partial_\mu\alpha e^{i\alpha}\psi + ieA'_\mu e^{i\alpha}\psi =$$

$$= e^{i\alpha}\underbrace{\left(\partial_\mu\psi + i\underbrace{(\partial_\mu\alpha + eA'_\mu)}_{eA_\mu}\right)\psi}_{D_\mu\psi} = e^{i\alpha} D_\mu\psi$$

tehát $A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$ Másodfajú lokális mértéktranszf.

Ezt a D-t írjuk be $\mathcal{L}$-be:

$$\mathcal{L}^{\psi} = -i\bar\psi\gamma^\mu D_\mu\psi - mc\bar\psi\psi = -i\bar\psi\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - mc\bar\psi\psi = \mathcal{L}_0(\psi,\partial\psi) - j^\mu A_\mu$$

A transzf.: $\psi \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$

$A_\mu \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$

nem csak számunkra, vektormező is, és kijött, hogy kell kölcsönhatni: $j^\mu A_\mu$

A fermionok és a vektorbozon kölcsönhatása, amit kellett speciell-ba tettem A_μ előírást

1952-ben nagyjából általánosították.

Ne egy nevezzük legyen, hanem több! $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_N\end{pmatrix}$ mindegyik ψ_i U(1)-s spinor

$$\mathcal{L} = -i\sum_i^N \bar\psi_i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_i - \sum_i^N m_i c\,\bar\psi_i\psi_i$$

transzf.: $\psi'_A = \sum_B U_{AB}\psi_B$ $U \in G$

ha U csoportot alkot, a $\mathcal{L}$ erre is szimmetria kell legyen.

még általánosabban m is mátrix

Legyen U-is helyfüggő: U(x) egyre bonyolultabb és bonyolultabb...

$\mathcal{L}$-t módosítjuk, és úgy találo

Ami nem kell, ahány paraméteres a csoport, és ha a kommutátor is bejönnek

A részletekbe megkívánják, hogy tömegtelen legyen minden, ezt el kell rontani $\Rightarrow$ Higgs-mező

KVANTUM IV.

8. előadás (05.06.)

Másodkvantálás

Az eredeti kvantálást tanultuk:

A klasszikus képleteket megtartottuk, de a mennyiségek operátorok ⇒ kommutátorok

DE! ezt csinálhattuk volna másképp.

A [illegible] előbb végezték el az interferenciát, mint a Millikan-kísérletet

⇒ elektronmezőt írtak le.

$\Psi(\underline{r},t)$: e^- mező

$U(\underline{r},t)$: E-mező

Az egyenlet: $i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\alpha\Delta\Psi+\beta U\cdot\Psi=0$

(valóban: $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi-eU\Psi$)

$\alpha=\frac{\hbar}{2m},\ \beta=\frac{e}{\hbar}$

Ez egy folytonos Ψ-re vonatkozó kísérleti tapasztalat.

[illegible] (mint annak Newton II.)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi-eU\Psi=0$$

konjugálva: $-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi^*-eU\Psi^*=0$

$$\Rightarrow i\hbar\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Psi^*\Delta\Psi-\Psi\Delta\Psi^*\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi)+\frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi\right)=0$$

⇒ ha $\rho=e\Psi^*\Psi$ és $j=\frac{i\hbar e}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*\right)$

akkor $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\underline{j}=0 \quad\Rightarrow\quad Q=\int\rho\, dV$ megmarad.

Egy másik megmaradás: $\varepsilon=(\ )(\nabla\Psi^*)(\nabla\Psi)-e\Psi^*+U$

$$S_k=(\ )\left(\partial_k\partial_e\Psi\,\partial_e\Psi^*-\partial_k\partial_e\Psi^*\partial_e\Psi\right)-U(\underline{r})\,j_k$$

ezekre: $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\underline{S}=0 \quad\Rightarrow\quad E=\int\varepsilon\, dV$ is megmarad.

Ezek után Millikan megállapítja, hogy $Q=q\cdot N$ ahol N egész!

Ki alapulhat meg, hogy ő kellene olyan legyen, amikor alapjuk

[illegible]: ki alapulhat meg, hogy a [illegible] és az impulzust kiállítom.

Megoldás: kvantáljuk a mennyiséget!

Másodkvantált kvantálásakor a ψ-t kell kvantálni

$\hat{\psi}$: operátor értékű $\rightarrow$ $\hat{Q}$, $\hat{E}$ operátorok

feltétel: $\hat{Q}$ s.é.-i legyenek a q egész számú többszörösei.

Probléma: nem tudjuk mit operálnak, és amit a derivált függvény.

$$\underset{q,p}{K.F} \xrightarrow{1.\ \text{kvantálás}} \underset{\hat{q},\hat{p}+\psi}{QM} \xrightarrow{2.\ \text{kvantum}} \hat{q},\hat{p},\hat{\psi}$$

De ED-ben!

$$E(\underline{r}), B(\underline{r}) \longrightarrow \hat{E}(\underline{r}), \hat{B}(\underline{r})$$

A elektrodinamikában ez az első kvantálás, mert az ED-re nem jó a klasszikus fizikai közelítés.

$$\psi(\underline{r},t) \longrightarrow \hat{\psi}(\underline{r},t)$$

$$\psi^*(\underline{r},t) \longrightarrow \hat{\psi}^+(\underline{r},t)$$

A kommutációs relációt itt ψ és ψ^+ között vesszük:

$$\left.\begin{aligned} &[\psi(\underline{x}), \psi(\underline{y})] = 0 \\ &[\psi^+(\underline{x}), \psi^+(\underline{y})] = 0 \\ &[\psi(\underline{x}), \psi^+(\underline{y})] = \delta(\underline{x}-\underline{y})\,\hat{I} \end{aligned}\right] \quad \text{ez az axióma.}$$

Q-t és E-t akarjuk kiszámolni. Reprezentálni kéne. Válasszuk mint a helyfgv-t és a operátort

Legyen a helyfv.-ként egy bázis és fejtsük ki szerint:

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \ni u_k(\underline{x}) : \quad (u_k, u_l) = \int u_k^*(\underline{x})\, u_l(\underline{x})\, d^3x = \delta_{kl}$$

akkor $\forall f(\underline{x})\ \exists c_k \in \mathbb{C}$: $f(\underline{x}) = \sum_k c_k u_k(\underline{x})$ ahol $c_k = (u_k, f) = \int u_k^*(\underline{x}) f(\underline{x})\, d^3x$

$$f(\underline{x}) = \sum_k \left(\int u_k^*(\underline{y}) f(\underline{y})\, d^3y \right) u_k(\underline{x}) = \int f(\underline{y}) \Big(\underbrace{\sum_k u_k^*(\underline{y})\, u_k(\underline{x})}_{\delta(\underline{x}-\underline{y})} \Big)\, dy$$

~~[illegible]~~

Ugyanez operátorokra:

$$\forall\, \hat{\psi}(\underline{x}) \quad \exists\, \hat{a}_k \qquad \hat{\psi}(x) = \sum_k \hat{a}_k u_k(\underline{x})$$

az e.h.: $\hat{a}_k = \int u_k^*(\underline{y})\, \hat{\psi}(\underline{y})\, d^3y$

Ezekkel:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l] = 0$$

$$\hat{a}_k^+ = \int u_k(\underline{y})\, \hat{\psi}^+(\underline{y})\, d^3y$$

$$[\hat{a}_k^+, \hat{a}_l^+] = 0$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^+] = \left[\int u_k^*(\underline{x})\hat{\psi}(\underline{x})d^3x,\ \int u_l(\underline{y})\hat{\psi}^+(\underline{y})d^3y\right] = \int\int u_k^*(\underline{x})u_l(\underline{y})\left[\hat{\psi}(\underline{x}), \hat{\psi}^+(\underline{y})\right] d^3y\, d^3x =$$

$$= \int\int u_k^*(\underline{x})\, u_l(\underline{y})\, \delta(\underline{x}-\underline{y})\hat{I}\, d^3y\, d^3x = \hat{I}\int u_k^*(\underline{x})\, u_l(\underline{x})\, d^3x = \underline{\delta_{kl}\hat{I}}$$

Ez a relációk olyan, mint a harmonikus oszcillátor.

$Q = \int e\psi^*\psi\, dV$ volt. Most:

$$\hat{Q} = \int e\hat{\psi}^+(\underline{x})\hat{\psi}(\underline{x})\, d^3\underline{x} = e\int\left(\sum_k \hat{a}_k^+ u_k^*(\underline{x})\right)\left(\sum_l \hat{a}_l u_l(\underline{x})\right)d^3\underline{x} =$$

$$= e\sum_k\sum_l \hat{a}_k^+\hat{a}_l \int u_k^*(\underline{x})u_l(\underline{x})\, d^3x = e\sum_k\sum_l \hat{a}_k^+\hat{a}_l\delta_{kl} = e\sum_k \hat{a}_k^+\hat{a}_k$$

$$\hat{N}_k = \hat{a}_k^+\hat{a} \quad\Rightarrow\quad \hat{Q} = e\sum_k \hat{N}_k$$

$\hat{N}_k$ spektrumát ismerjük: $N|n\rangle = n|n\rangle$ ahol $n \in \{0, 1, 2 \dots\}$

Mivel $[\hat{N}_k, \hat{N}_l] = 0 \Rightarrow \hat{Q}$ s.é.i.: $q = e\underbrace{(n_1 + n_2 + \dots)}_{N \in \mathbb{N}^+}$

Hol laknak az operátorok? Az oszcillátornak végtelen sok repr.-ja van, de ez a fermalizmus ismert, és ezen ezek Hilbert-tér.

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \qquad \text{ahol ezen direkt összeg}$$

$e\sum_k \hat{N}_k = \hat{Q}$ az $\hat{N}_k$-knak direkt szorzatán hat.

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \cdots\ |n_k\rangle \otimes \cdots$$

$$|n_1\, n_2\, n_3 \cdots n_k \cdots\rangle \quad \text{vagy} \quad |\{n_k\}\rangle$$

$$\hat{Q}\,|n_1\, n_2 \cdots n_k \cdots\rangle = (n_1 + n_2 \cdots n_k + \cdots)\,|n_1\, n_2 \cdots n_k \cdots\rangle$$

Minden altérben van egy kvantum, aminek van e töltése.

kvantum $\cong$ részecske. DE ez repr függő.

Honnan vehetünk ON fv-rendszert? A $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ téren ható operátor sajátfüggvényeit

$$\check{h} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$$

pl.: $\check{h} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - eU(\underline{r}) = \check{h}^+$

$$\check{h}\, u_k(\underline{x}) = \varepsilon_k u_k(\underline{x})$$

A teljes mező energia operátora: $\hat{E} = \int \hat{\varepsilon}(\underline{x})\, dV = \int \left[(\cdot)(\underline{\nabla}\psi^+(\underline{x}))(\underline{\nabla}\psi(\underline{x})) - eU\psi^+\psi\right] d^3\underline{x}$

$$= \int \left[(\cdot)\nabla\psi^*\nabla\psi - eU\psi^*\psi\right) dV = \int \psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - eU\psi\right) dV = \int \psi^* \check{h}\, \psi \, dV$$

Tehát kvantálva a energia: $\hat{E}$

$$\hat{E} = \int \hat{\psi}^+(x)\check{h}\,\psi(x)\, d^3x = \int \left(\sum_k \hat{a}_k^+ u_k^*(x)\right)\check{h}\left(\sum_l \hat{a}_l u_l(x)\right) d^3x = \sum_k\sum_l \hat{a}_k^+\hat{a}_l \int u_k^*(x)\,\check{h}\, u_l(x)\, d^3x =$$

$$= \sum_k\sum_l \hat{a}_k^+\hat{a}_l \int u_k^*(x)\,\varepsilon_l u_l(x)\, d^3x = \sum_k\sum_l \hat{a}_k^+\hat{a}_l\,\varepsilon_l\,\delta_{kl} = \sum_k \hat{a}_k^+\hat{a}_k\,\varepsilon_k = \sum_k \varepsilon_k \hat{N}_k$$

Tehát a mező kvantálva:

$$Q = \int \rho\, dV \longrightarrow \hat{Q} = e\sum_k \hat{N}_k$$

$$E = \int \varepsilon\, dV \qquad\qquad \hat{E} = \sum_k \varepsilon_k \hat{N}_k$$

A sajátállapot: $|n_1 n_2 \cdots n_k \cdots\rangle$

$$\hat{Q}|\cdots\rangle = e(n_1 + n_2 + \cdots n_k + \cdots)|\cdots\rangle$$

$$\hat{E}|\cdots\rangle = (n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \cdots + n_k\varepsilon_k + \cdots)|\cdots\rangle$$

interpretáció: a k. részecskének ε_k az energiája és n_k van belőle.

DE! Ez még mindig rossz fajta.

Ebben még mindig benne a részecske KH-ja. Ebben az EM teret is kvantálni kell.

Fock-tér (azt kvantáljuk)

Írjuk fel ennek az általános alakját:

$$\mathcal{H}_F \ni \phi = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\cdots c_{n_1 n_2 \cdots n_k \cdots}\,|n_1 n_2 \cdots n_k \cdots\rangle$$

feltétel: $\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\cdots |c_{n_1 n_2\cdots n_k\cdots}|^2 = 1$

Hány részecskét tartalmaz? különböző.

Mekkora az energia? különböző

Minta felfogás: 0 részecske állapot 1 részecske állapotok

$$\phi = c_0|00\ldots0\rangle + \left(c_{100\ldots0}|100\ldots\rangle + c_{010\ldots0}|010\ldots0\rangle + \ldots\right) +$$

$$+\left(c_{1100\ldots}|1100\ldots\rangle + c_{1010\ldots}|1010\ldots\rangle + \ldots\right.$$

$$\left. + c_{200\ldots}|200\ldots\rangle + c_{020\ldots}|0200\ldots\rangle + \ldots\right) +$$ ← 2 részecske állapotok

$$+ \ldots$$

De a vektorok is előállíthatók: $|n_1 n_2 \ldots n_k \ldots\rangle = \frac{(a_1^+)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a_2^+)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \ldots |00\ldots0\ldots\rangle$

Másképp is leírhatjuk: $\hat{\psi}^+(\underline{r}) = \sum_k a_k^+ u_k(\underline{r})$

ha $|\underline{r}\rangle := \hat{\psi}^+(\underline{r})|00\ldots0\rangle$ akkor $\hat{Q}|\underline{r}\rangle = e\cdot|\underline{r}\rangle$

helyoperátor átírása: $\check{A} \to \bar{A} = \int \psi^*(\underline{r})\check{A}\psi(\underline{r})\, d^3r$

$$\hat{A} := \int \hat{\psi}^+(\underline{r})\check{A}\hat{\psi}(\underline{r})\, d^3\underline{r}$$

hely várható érték operátora: $\hat{N\underline{R}} = \int \hat{\psi}^+(\underline{r})\,\check{\underline{r}}\,\hat{\psi}(\underline{r})\, d^3\underline{r}$

Állítás: az $|\underline{r}\rangle$ állapot a hely sajátállapota!

$$\hat{N\underline{R}}|\underline{y}\rangle = \left(\int \hat{\psi}^+(\underline{x})\,\underline{x}\,\hat{\psi}(\underline{x})\, d^3x\right)\hat{\psi}^+(\underline{y})|0\rangle = \int \underline{x}\left(\hat{\psi}^+(\underline{x})\hat{\psi}(\underline{x})\hat{\psi}^+(\underline{y})\right)|0\rangle\, d^3\underline{x} =$$

$$= \int \underline{x}\left(\hat{\psi}^+(\underline{x})\hat{\psi}^+(\underline{y})\hat{\psi}(\underline{x}) + \hat{\psi}^+(\underline{x})\delta(\underline{x}-\underline{y})\mathbb{1}\right)|0\rangle\, d^3x = \quad \text{mivel } \hat{\psi}(\underline{x})|0\rangle = 0$$

$$= \int \underline{x}\,\hat{\psi}^+(\underline{x})\delta(\underline{x}-\underline{y})|0\rangle d^3\underline{x} = \underline{y}\,\hat{\psi}^+(\underline{y})|0\rangle = \underline{y}|\underline{y}\rangle$$

Tehát $\hat{N\underline{R}}|\underline{y}\rangle = \underline{y}|\underline{y}\rangle$

$|\underline{y}\rangle$ egy 1 részecske állapot az $\underline{y}$ helyen.

Mi van, ha kettőt rakunk?

$$|\underline{x},\underline{y}\rangle = \hat{\psi}^+(\underline{x})\hat{\psi}^+(\underline{y})|0\rangle \qquad \hat{N}|\underline{x},\underline{y}\rangle = 2|\underline{x},\underline{y}\rangle$$

$$\hat{N\underline{R}}|\underline{x},\underline{y}\rangle = (\underline{x}+\underline{y})|\underline{x},\underline{y}\rangle \Rightarrow \hat{\underline{R}} = \hat{N}^{-1}(\hat{N\underline{R}}) \Rightarrow \hat{\underline{R}}|\underline{x},\underline{y}\rangle = \frac{\underline{x}+\underline{y}}{2}|\underline{x},\underline{y}\rangle$$

Tehát az általános állapot:

$$|\phi\rangle = c_0|0\rangle + \int f(\underline{x})|\underline{x}\rangle d^3x + \iint g(x,y)|x,y\rangle d^3y\, d^3x + \ldots$$

ahol $f(\underline{x}) = \langle x|\phi\rangle$, $g(x,y) = \langle x,y|\phi\rangle$, ... „hullámfüggvény"

Mi az egyenlet? $i\hbar\frac{d}{dt}|\phi\rangle = \hat{H}|\phi\rangle$

KVANTUM IV.

9. előadás (05.07.)

A múltkor még nem vezettük be a $\hat{p}$-vel megfelelő operátort.

Többféle képpen lehet: a kvantum deriválva
az áramsűrűség eltolt szorozva m-mel.

Először nyugodjunk meg.

Ha $\quad j \sim \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right) =$
$\left(\nabla(\psi\psi^*) - 2\psi^*\nabla\psi\right)$

teljes div, tehát $\int \psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\psi$

$$\int \hat{\psi}^+ \underline{p}\,\hat{\psi} =: \hat{P}$$

Hogy kommutál $\hat{P}_k$ és $(\hat{N R})_e$

$$\left[\hat{P}_k, (\hat{N R})_e\right] = \left[\int \hat{\psi}^+(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\hat{\psi}(x)\, d^3x\ ,\ \int \hat{\psi}^+(y)\, y_e\, \hat{\psi}(y)\, d^3y\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\iint y_e\left[\hat{\psi}^+(x)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}, \hat{\psi}^+(y)\psi(y)\right] d^3y\, d^3x =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\iint y_e\left(\hat{\psi}^+(x)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}\hat{\psi}^+(y)\hat{\psi}(y) - \hat{\psi}^+(y)\hat{\psi}(y)\hat{\psi}^+(x)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}\right) d^3y\, d^3x =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\iint y_e\left(\hat{\psi}^+(x)\psi^+(y)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}\hat{\psi}(y) + \hat{\psi}^+(x)\underbrace{\left[\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}, \psi^+(y)\right]}_{\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(x-y)}\hat{\psi}(y) - \psi^+(y)\hat{\psi}^+(x)\hat{\psi}(y)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} - \psi^+(y)\underbrace{\left[\hat{\psi}(y), \hat{\psi}(x)\right]}_{\delta(y-x)}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\right) d^3x\, d^3y$$

$$= \frac{\hbar}{i}\iint y_e\left(\hat{\psi}^+(x)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x_k}\hat{\psi}(y) - \hat{\psi}^+(y)\delta(x-y)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}\right) d^3y\, d^3x =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\iint y_e\left(-\frac{\partial\hat{\psi}^+}{\partial x_k}\delta(x-y)\hat{\psi}(y) - \psi^+(y)\delta(x-y)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}\right) d^3y\, d^3x =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\int x_e\left(-\frac{\partial\hat{\psi}^+}{\partial x_k}\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}^+(x)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_k}\right) d^3x =$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\int x_e\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\psi^+(x)\psi(x)\right) d^3x = \frac{\hbar}{i}\int\frac{\partial x_e}{\partial x_k}(\psi^+\psi)\, d^3x = \frac{\hbar}{i}\delta_{ke}\underbrace{\int(\psi^+\psi)\, d^3x}_{N}$$

$$\Rightarrow \left[\hat{P}_k, (\hat{N R})_e\right] = \frac{\hbar}{i}\hat{N}\delta_{ke} \quad \Rightarrow \quad \left[\hat{P}_k, \hat{R}_e\right] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ke}\,\hat{I}$$

Azt láttuk a múlt órán, hogy

$$\mathcal{H}_F \ni \Phi = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots c_{n_1 n_2 \dots}\,|n_1 n_2 \dots\rangle =$$

$$= c_0|0\rangle + \left(c_{100\dots}|100\dots\rangle + c_{010\dots}|010\dots\rangle + \dots\right) + \left(c_{110\dots}|110\dots\rangle + c_{1010\dots}|1010\dots\rangle + c_{200}|200\dots\rangle + \dots\right) + \dots$$

az $= c_0|0\rangle + \int f(\underline{x})|\underline{x}\rangle\, d^3x + \dots$

ahol $f(\underline{x}) = \langle x|\phi\rangle$ $\qquad$ Mi lesz az egyenlet?

a Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle = \hat H|\phi(t)\rangle$$

és $E=\int \varepsilon(r)\, d^3r$

amiből $\hat E = \sum_k \hat\varepsilon_k \hat a_k^+ \hat a_k = \sum_k \hat\varepsilon_k \hat N_k$

Beszorozva $\langle x|$-szel:

$$i\hbar \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\langle x|\phi(t)\rangle = \langle x|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle\right) = \langle x|\hat H|\phi(t)\rangle =$$

$$= \langle 0|\hat\Psi(x)\hat H|\phi(t)\rangle = \langle 0|\sum_e u_e(x)\hat a_e \sum_k \hat\varepsilon_k \hat a_k^+ \hat a_k|\phi(t)\rangle =$$

$$= \sum_k\sum_e u_e(x)\hat\varepsilon_k\langle 0|\hat a_e \hat a_k^+ \hat a_k|\phi(t)\rangle = \sum_k\sum_e \hat\varepsilon_k u_e(x)\underbrace{\langle 0|[\hat a_k^+\hat a_e}_{0} + \delta_{ke}\hat I]\hat a_k|\phi\rangle$$

$=$ mivel $\hat a_e|0\rangle = 0$ ezért $\langle 0|\hat a^+ = 0$

$$= \sum_k \hat\varepsilon_k u_k(x)\langle 0|\hat a_k|\phi\rangle =$$

$$= \langle 0|\sum_k \check h\, u_k(x)\hat a_k|\phi(t)\rangle = \check h\,\langle 0|\sum_k u_k(x)\hat a_k|\phi\rangle =$$

$$= \check h\,\langle 0|\hat\Psi(x)|\phi\rangle = \check h\,\langle x|\phi\rangle = \check h\, f(x,t)$$

tehát $i\hbar \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \check h\, f(x,t)$ tehát az egyrészecske repr-ban kielégíti a Sch-t.

Van értelme, hogy az egyrészecske állapotot kifejtjük a hely sajátállapotai sz.

$\Rightarrow$ ez tart a hagyományos hullámfv.

A QM defje: ez az elmélet leszűkítve az egyrészecske altérre.

Anno: „Miért nem tettünk az m-re feltételt"

mert az egyrészecske állapotok az az 1·m sajátállapotat.

Mi a helyzet 2 részecske esetén?

Ugyanaz a számolás. A végén:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} g(x,y,t) = (\check h_x + \check h_y)\, g(x,y,t)$$

DE ez nem veszi figyelembe a KH-t, mert úgy írtuk fel, függetlenül részei nagyjából a külső térben.

Figyelembe kéne venni a KH kölcsönh., de ezt csak relativisztikus QM-en lehet

$\Rightarrow$ Diractól kéne kiindulni

Van egy másik út.

TEH nincs KH, akkor h_x és h_y a szabad részek, és a megoldás a síkhullám ⇒ átmennek egymáson, mintha nem lenne töltött.

Ekkor harm. osz.-ok szuperpozíciója.

A KH akkor lép be perturbációként.

A Fock-tér elemei olyan állapotok, amik mutatják, hogy hány részecske van egy

DE a folyamatok nem hagyják békén valahogy az állapotokat,

Mi lehet a QED kölcsönhatási tag?

klasszikusan: $-\frac{1}{c}\int A_k j^k \, d^4x$

most: $j_k = e\bar{\Psi}\partial_k\Psi$

tehát a hamilton: $\int e A^k \bar{\Psi}\partial_k\Psi \, d^3r$

operátorokkal: $\int e \hat{A}^k \hat{\bar{\Psi}} \partial_k \hat{\Psi} \, d^3r$

$$c_m c_m^\dagger \qquad a_e^\dagger b_e \qquad a_e b_e^\dagger$$

Olyan szorzatok lesznek, hogy: $c_m^\dagger a_e d_e^\dagger$ meg hasonlók.

Ez hat a Fock-térre, de ezek kifejthetők a szokásos alapokban:

$c^\dagger(k_1)\hat{a}(k_2)\hat{a}^\dagger(k_3)\,|3\gamma, 1e, 2p\rangle$

Ezeket a 3-as szorzatokat írják le a Feynman-gráfok.

C-ben van c és c^+ is, tehát a fotonok keletkezhetnek és eltűnhetnek is.
A töltés száma mindig megmarad.

A csúcs körüli integrálás tényezője:

$$\int e^{ik_1 r} e^{ik_2 r} e^{-ik_3 r} \dots d^3r$$

$$\int e^{i(k_1-k_2-k_3)r} \, dr = (2\pi)^3 \delta(k_1-k_2-k_3)$$

⇒ A formalizmus automatikusan teljesíti az impulzusmegmaradást.

Lokálisan van hiba: virtuális részecskék.

De az egészet ki kell integrálni ⇒ A mérésnek stimmelni kell!

Lehetnek hurkok ⇒ divergencia   itt jönnek be a bonyolult dolgok.

Van egy Hamiltonunk. oké, de mi a sajátállapot?

Mi a gyorsítóban szabad részecskéket tudunk vizsgálni, azok tudni, hogy nem kölcsönhatnak egy. Észlelni szintén csak szabad részecskéket tudunk.

Ha a Hamilton nem egyszerű, akkor ezek nem s. á.-k, de bázist alkotnak, és ezekben való kifejtést le tudjuk írni ⇒ A Hamilton feltérképezéséhez

„Szórásmátrix" a szórásállapotok vizsgálatával nyerhető

Ez olyan mint [illegible] az inverz szórási probléma.

Ez megoldhatatlan, de próbálkozással lehet tippelni

A dinamika megtalálásához a szimmetriák tanulmányozása segített, és bevált.