MAT MÓDSZ

1. előadás (02. 14.)

Nagyjából félév felén nagy ZH volt eddig
Jelenleg opcionális ZH az anyagrész végén

- görbevonalú koordinátarendszer (és vektoranalízis ebben)
- komplex fgv. tan
- variációszámítás
- Lineáris operátorok / harmonikus analízis

Görbe vonalú koordináták

Gyakorlati okok miatt lehet lényeges
Az átszámítás lényegtelen. A mezők megadása a kérdés

Jelenleg a síkban görbe vonalas leírást keressük
teret, vagy vmi szerint görbe koordinátarendszer, mert alkalmas görbe (pl. Föld felszín, általános)

Rögzített origóval egyértelműen hozzárendelhető vektorral van, ezt reprezentálhatjuk

$$P \to \vec{r} \to \underline{r}$$

$$\Phi(P) \to \Phi(\vec{r}) \to \Phi(\underline{r}) \to \Phi(x, y, z)$$

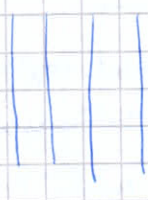
Így a mező tulajdonképpen ~~többváltozós~~ függvény

Mi van, ha P-t alapból 2 számmal jellemezzük? Hogyan?

$$P \to (r, \varphi)$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Ez nem vektor, hanem 2db valós szám

Keressük a sík azon halmazát, ahol x konstans:
A sík minden pontján átmegy egy vonal, ahol a x konst,
y-ra változó



U.e. polárkoordináták

Itt az origón ∞ sok egyenes megy át, ahol a φ konstans. Ez egy szinguláris pont

Elég könnyű a polárkoord. és Descartes.

Egy pont környezetét le lehet képezni ~~egy~~ a φ és r szerinti Descartes rendszerben: koordinátasík   Térképezés ⟷ koordinátázás

A térképen vannak határai, ezeket rögzíteni kell

A teljes vizsgált alakzatról általában több térképet készítünk → Atlasz

A földgömböt nem lehet egy lapra leképezni a folytonosság megtartásával (Topológia)

Tehát P → két féle képpen lehet leképezni:

$$P \to (x, y) \Updownarrow \to (r, \varphi)$$

A kettő között van némi kapcsolat

$$x = r \cos \varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \sin \varphi \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Az ide-oda számítások különbözőek, mert nem lineáris

Lehet úgy is venni egy két pont körül a $r_1 + r_2 = áll \to$ ellipszis
$r_2 - r_1 = áll \to$ hiperbola

Na de ezeket hogy lehet átszámítani?

Skalármezőknél csak a képletet kell átírni, de vektormezőknél bonyolult, mert ott a vektorok reprezentációjához kell egy bázis

A vektormező jelentése: A tér pontjaihoz hozzárendelhető vektorok alkotta lineáris tér közül kiválasztjuk azt az egyet, ami érdekel minket.

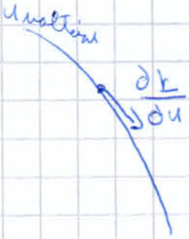
Úgy, az adott pontban kell bázist választani, és ez mindenhol önkényes. Legyen a bázis változás folytonos, tehát ne teljesen önkényes.

Ahhoz minden ponton átmegy 2 db konstans vonal ($\varphi = konst$, $r = konst$) ezek kínálnak egy természetes bázist. Célszerű ezt választani

Ha ezek érintőit normáljuk, akkor a bázis ortogonális (ortonormált) ilyenekkel fogjuk foglalkozni

Ha a paraméterek u, v, w, akkor a térhelyzet

$$\left.\begin{array}{l} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{array}\right\} \underline{r}(u,v,w)$$



$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \underline{t_u}$$ (u szerinti érintő)

$$\underline{t_v} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$$ (v szerinti érintő)

Ha a koordinátarendszer ortogonális, akkor $\underline{t_u}, \underline{t_v}, \underline{t_w}$ merőlegesek

$\Downarrow$

Ennek ellenőrzése sk. szorzással.

A $\underline{t}$-k is u, v, w függvényei

A $\underline{t}$-k alkotják a lokális bázist

A $\underline{t}$-k vegyesszorzata a Jakobi-determináns. Jelentése: A valóság nagyítás térfogat.

Ez a gömbkoordináta-rendszerben:

$$\boxed{\begin{array}{l} z = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ x = r\sin\theta\cos\varphi \end{array}} \rightarrow \underline{r}(r,\theta,\varphi)$$

Ez a szokásos gömbkoordináta rendszer

$$\underline{t_r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{t_\theta} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ +r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{t_\varphi} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

merőlegesség ellenőrzése: $\underline{t_r}\,\underline{t_\theta} = 0$

$\underline{t_r}\,\underline{t_\varphi} = 0$

$\underline{t_\varphi}\,\underline{t_\theta} = 0$

A $\underline{t}$-knak van mértékegysége, ráadásul különbözhet. Így az együtthatók mértékegysége is különbözhet

Ezt korrigálva le kéne normálni

$$\underline{t}_\theta = r\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\underline{t}_\varphi = r\sin\theta\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

A $\underline{t}$-k helyett a $\underline{t}$ irányú egységvektort vezetem be:

$$\underline{e}_r = \frac{\underline{t}_r}{|\underline{t}_r|} \qquad \underline{e}_\varphi = \frac{\underline{t}_\varphi}{|\underline{t}_\varphi|} \qquad \underline{e}_\theta = \frac{\underline{t}_\theta}{|\underline{t}_\theta|}$$

Így már az együtthatók dimenziója megegyezik pl.: $\underline{E} = E_r\,\underline{e}_r + E_\varphi\,\underline{e}_\varphi + E_\theta\,\underline{e}_\theta$

Bevezetünk új számokat
$$h_r = |\underline{t}_r| = 1$$
$$h_\varphi = |\underline{t}_\varphi| = r$$
$$h_\theta = |\underline{t}_\theta| = r\sin\theta$$

Lamé állandók

Ha van
$$\underline{a} = \sum_k a_k\,\underline{t}_k$$
$$\underline{b} = \sum_l b_l\,\underline{t}_l$$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ sk. szorzata

metrikus Tenzor

$$\underline{a}\,\underline{b} = \left(\sum_k a_k\,\underline{t}_k\right)\left(\sum b_l\,\underline{t}_l\right) = \sum_k\sum_l a_k b_l(\underline{t}_k\,\underline{t}_l) = \sum_k\sum_l a_k b_l\, g_{kl}$$

Gömb esetén $\underline{g} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$ ortogonális esetén $\underline{g}$ diagonális mátrix, ahol a főátlóban a h^2-ek vannak

Mivel normáltuk őket, ezért ebben az esetben $g_{kl} = \delta_{kl}$

Vagyis: $\underline{a}\,\underline{b} = \sum_k\sum_l \delta_{kl}\, a_k b_l = \sum_k a_k b_k$ Ez az szokásos képlet

Ha deriválunk, akkor arra van most a bázis is változik, így azt is le kell deriválni.

Számoljuk ki egy vektor div-jét hengerkoordinátarendszerben!

paraméterek (ρ, φ, z)

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \underline{r}(\rho, \varphi, z)$$

$$\underline{t}_\rho = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_\rho = |\underline{t}_\rho| = 1 \qquad \underline{e}_\rho = \underline{t}_\rho$$

$$\underline{t}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{t}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h_z = |\underline{t}_z| = 1$$

$$h_\varphi = |\underline{t}_\varphi| = \rho \qquad \underline{e}_z = \underline{t}_z$$

$$\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vegyünk egy $\underline{v}$ vektormezőt az eredeti koordinátákkal

eredeti bázis: $\underline{E}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{E}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{E}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{v} = v_x \underline{E}_x + v_y \underline{E}_y + v_z \underline{E}_z =$$

$$= v_\rho \underline{e}_\rho + v_\varphi \underline{e}_\varphi + v_z \underline{e}_z$$

Mivel $\underline{v}(\underline{r})$ ezért $v_x(x, y, z)$
$v_y(x, y, z)$
$v_z(x, y, z)$

Tehát $\Phi(\underline{r}) = \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ ← ezeket ki kell fejezni v_ρ, v_φ és v_z függvényében

Ehhez a komponenseket kell kifejezni a paraméterekkel
és a parciális deriváltakat

$$\underline{v}\,\underline{E}_x = v_x \cdot 1 + v_y \cdot 0 + v_z \cdot 0 = v_\rho \underbrace{(\underline{e}_\rho \underline{E}_x)}_{\cos\varphi} + v_\varphi \underbrace{(\underline{e}_\varphi \underline{E}_x)}_{-\sin\varphi} + v_z \underbrace{(\underline{e}_z \underline{E}_x)}_{0}$$

tehát $v_x = v_\rho \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi$

$$\underline{v}\,\underline{E}_y = v_x \cdot 0 + v_y \cdot 1 + v_z \cdot 0 = v_\rho \underbrace{(\underline{e}_\rho \underline{E}_y)}_{\sin\varphi} + v_\varphi \underbrace{(\underline{e}_\varphi \underline{E}_y)}_{\cos\varphi} + v_z \underbrace{(\underline{e}_z \underline{E}_y)}_{0}$$

tehát $v_y = v_\rho \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi$

$$\underline{v}\,\underline{E}_z = v_x \cdot 0 + v_y \cdot 0 + v_z \cdot 1 = v_\rho \underbrace{(\underline{e}_\rho \underline{E}_z)}_{0} + v_\varphi \underbrace{(\underline{e}_\varphi \underline{E}_z)}_{0} + v_z \underbrace{(\underline{e}_z \underline{E}_z)}_{1} =$$

tehát $v_z = v_z$

$v_x = \cos\varphi\, v_\rho - \sin\varphi\, v_\varphi + 0\cdot v_z$

$v_y = \sin\varphi\, v_\rho + \cos\varphi\, v_\varphi + 0\cdot v_z$

$v_z = 0\cdot v_\rho + 0\cdot v_\varphi + 1\cdot v_z$

tömören: $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\rho \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix}$

Ez analóg az egyik rész másik irányával áttérés, de itt a transzformáló mátrix helyfüggő

v - ugyani

$$\phi(\underline{r}) = \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_\rho \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_\rho \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Ez közvetett fgv deriválás

$$f(\rho, \varphi, z) = f(\rho(x,y), \varphi(x,y), z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Mivel $x = \rho\cos\varphi$ akkor $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = \rho\sin\varphi$ $\quad\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho} = \cos\varphi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

Így

$$\phi(\underline{r}) = \operatorname{div}\underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_\rho\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_\rho\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} =$$

$$= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(v_\rho\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v_\rho\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi\right) + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(v_\rho\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi\right) +$$

$$+ \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v_\rho\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} =$$

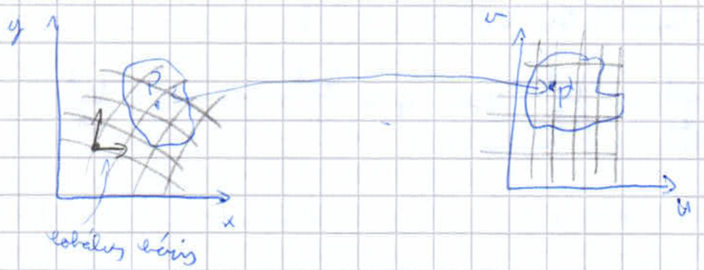
$$= \cos\varphi\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}\cos\varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho}\sin\varphi\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\cos\varphi - v_\rho\sin\varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\sin\varphi - v_\varphi\cos\varphi\right) +$$

$$+ \sin\varphi\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}\sin\varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho}\cos\varphi\right) + \frac{\cos\varphi}{\rho}\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\sin\varphi + v_\rho\cos\varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial v_\rho}{\partial\rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

MAT. MÓDSZ.

2. előadás (02. 21.)



$$\left.\begin{matrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{matrix}\right\} \quad \underline{r}(u,v,w)$$

$$\underline{t}_k = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_k} \quad \text{érintő vektor}$$

Ha $\underline{t}_k \underline{t}_l = 0$ ha $k \neq l$ akkor a koordinátarendszer ortogonális

$h_k = |\underline{t}_k|$ (helyfüggő)

$$\underline{e}_k = \frac{\underline{t}_k}{h_k} \qquad \underline{e}_k \underline{e}_l = \delta_{kl}$$

Ha az $x_k(u_k)$ fgv-k megvannak, a fenti szerint számolva, ellenőrizhető, hogy ortogonális-e.

De a gyakorlatban általában $u_k(x_k)$ van megadva. → invertálni kell

DE! tekinthetjük $u_k(x_k)$-t úgy, mint n db skalármezőt. Ezt gradiálhatjuk

$$\underline{\nabla} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ha csak a derékszögűség a kérdés, az jó

$$\phi(P) \longrightarrow \phi(\vec{r}) \longrightarrow \phi(\underline{r}) \longrightarrow \phi(x,y,z)$$

$$\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) - \phi(\vec{r}) = \vec{g}(P)\,\vec{\delta} \qquad \text{ez a grad defje}$$

$\vec{r}$, $\vec{\delta}$, $\vec{r}+\vec{\delta}$

Ha $\vec{\delta} = \vec{n}\,\delta$ ahol $n = 1$

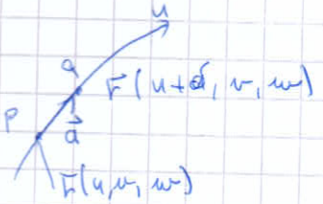
$$\vec{g}(\vec{r})\,\vec{n} = \frac{\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) - \phi(\vec{r})}{\delta} \qquad \text{iránymenti derivált}$$

$$\underline{g}(\underline{r})\,\underline{n} = \frac{\phi(\underline{r}+\underline{\delta}) - \phi(\underline{r})}{\delta} \qquad \text{Spec eset: } \underline{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{g}(\underline{r}) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\phi(x+\delta,y,z) - \phi(x,y,z)}{\delta} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Tehát $g_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ de csak Descartes-ban

Nézzük görbén:



$$\vec a = \frac{\partial \vec r}{\partial u} \cdot du = \underline{t}_u \, du$$

$$\phi(Q) - \phi(P) = \phi(\vec r + \vec a) - \phi(\vec r) = \vec g(\vec r)\, \vec a = \vec g\, \vec t_u\, \delta = \vec g\, \vec e_u\, h_u\, \delta$$

vagy

$$\phi(u+\delta, v, w) - \phi(u, v, w) = \frac{\partial \phi}{\partial u} \delta$$

Emiatt $\frac{\partial \phi}{\partial u} = \underbrace{\vec g\, \vec e_u}\, h_u$

Ez a grad ϕ u. komponense

Tehát $\boxed{(\text{grad}\, \phi)_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial u_k}}$

Spec: hengerkoordináta rendszerben: $\text{grad}\, \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$

De mi a helyzet a div-vel? azt reprezentációban definiáltuk. $\text{div}\, \underline v = \partial_k v_k$

A Gauss-tétel szerint $\oint \underline v \, dF = \int \text{div}\, \underline v \, dV$

kis tartományra: $\underline{\qquad} \approx \text{div}\, \underline v\, \Delta V$ itt csökkentsük ΔV-vel

Ez már lehet a definíció $\text{div}\, \vec v(\vec r) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec v(\vec r)\, d\vec F$

Vegyük az u, v, w paraméterteret és benne egy kicsi téglatestet

$\boxed{\text{itt nem egy álmos}}$

Egy téglatest képe (u, v, w)-ből (x, y, z)-be téglatestet mint integrális

$P(u, v, w)$ $\quad$ $D(u+\delta u, v+\delta v, w)$

$A(u+\delta u, v, w)$ $\quad$ $E(u+\delta u, v, w+\delta w)$

$B(u, v+\delta v, w)$ $\quad$ $F(u, v+\delta v, w+\delta w)$

$C(u, v, w+\delta w)$ $\quad$ $G(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w)$

$2x(x^2+y^2-1) = 2x^3+2xy^2+2x$

$2xy^2 - 2y^3$

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} du = \underline{t}_u \delta u = \underline{e}_u h_u \delta u \quad \Rightarrow \quad |\underline{a}| = h_u \delta_u$$

$$|\underline{b}| = h_v \delta v$$

$$|\underline{c}| = h_w \delta w$$

ebből $\Delta V = |\underline{a}||\underline{b}||\underline{c}| = h_u h_v h_w \delta u \delta v \delta w$

$$\oint \underline{v}\, d\underline{F} = \Big(\int_{PCFB} + \int_{ADGE}\Big) + \Big(\int \ldots \int\Big) + \Big(\int \ldots \int\Big)$$

$$u \qquad u+\delta u \qquad v \qquad v+\delta v \qquad w \qquad w+\delta w$$

$\int_{PCFB}$-ről $\underline{n} = -\underline{e}_u$ így az integrál a vektormező u. komponense

$$\int_{PCFB} \underline{v}\, d\underline{F} \approx \underline{v}(-\underline{e}_u)\Delta A = -v_u |\underline{b}||\underline{c}| = -v_u h_v \delta v h_w \delta w$$

$$\int_{ADGE} \underline{v}\, d\underline{F} \approx \underline{v}\, \underline{e}_u \Delta A = v_u h_v \delta v h_w \delta w \qquad \text{itt mind mennyiség helyfüggő}$$

$$\int_{PCFB} + \int_{ADGE} = \delta v\, \delta w \Big((v_u h_v h_w)_{u+\delta u} - (v_u h_v h_w)_u \Big) = \delta v\, \delta w \frac{\partial}{\partial u}(v_u h_v h_w)\delta u$$

Ez alapján a többi is levezethető: $\delta u\, \delta w \frac{\partial}{\partial v}(v_v h_u h_w)\delta v$ és $\delta u\, \delta v \frac{\partial}{\partial w}(v_w h_u h_v)\delta w$

Így tehát

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \underline{v}\, d\underline{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(v_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(v_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(v_w h_u h_v)\Big)}$$

A múltkor kiszámoltuk hengerre

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \underline{t}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{t}_\varphi = \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{t}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_\rho = 1 \qquad h_\varphi = \rho \qquad h_z = 1$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(v_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(v_z \rho)}{\partial z}\right] = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}\rho + v_\rho \cdot 1 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\cdot\rho\right] =$$

$$= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Ugyanez gömbkoordinátarendszerben

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{t}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \underline{e}_r$$

$$\underline{t}_\varphi = r\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = r\sin\vartheta$$

$$\underline{t}_\vartheta = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \quad h_\vartheta = r$$

$$\operatorname{div}\underline{v} = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(v_r\, 1\cdot r\cdot r\sin\vartheta\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(v_\vartheta\, 1\cdot r\sin\vartheta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v_\varphi\, 1\cdot r\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}r^2 + v_r\frac{\partial r^2}{\partial r}\right) + r\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}\sin\vartheta + v_\vartheta\frac{\partial\sin\vartheta}{\partial\vartheta}\right) + r\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}r^2 + 2r\, v_r\right) + r\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}\sin\vartheta + v_\vartheta\cos\vartheta\right) + r\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right] =$$

$$= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r}v_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

Ebben benne van a Bronsteinben

$$(\operatorname{grad}\phi)_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$(\operatorname{grad}\phi)_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}$$

$$(\operatorname{grad}\phi)_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

Ebből már adott Laplace-t gömbi koordinátákban!

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

Gömb

Laplace henger koordinátákban

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Henger

De vektorosnál nem lehet csak úgy, arra az azonosság:

$$\Delta\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$

Nagy Károly: Elméleti mechanika könyvében van a megfordítás:

Ha $\underline{w} = \Delta \underline{v}$

Hengeren

$$w_\rho = \Delta(v_\rho) - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_\rho}{\rho^2}$$

$$w_\varphi = \Delta(v_\varphi) + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{\rho^2}$$

$$w_z = \Delta(v_z)$$

Gömb:

$$w_r = \Delta(v_r) - \frac{2}{r^2}\left(v_r + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta\, v_\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

$$w_\vartheta = \Delta(v_\vartheta) + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{2\sin^2\vartheta} - \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

$$w_\varphi = \Delta(v_\varphi) + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{2\sin\vartheta}\right)$$

Általános Laplace:

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)}{\partial u} + \frac{\partial\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)}{\partial w}\right) =$$

A rot diffjéhez kell a Stokes-tétel

$$\oint \underline{v}\, d\underline{r} = \int \operatorname{rot}\underline{v}\, d\underline{F} = \int \operatorname{rot}\underline{v}\, \underline{n}\, dA$$

Ha kis alakot veszünk $\approx \operatorname{rot}\underline{v}\,\underline{n}\,\Delta A$ Ez alapján

$$\vec{n}\operatorname{rot}\vec{v} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

itt van egy ábra

$$\underline{e}_w \operatorname{rot}\underline{v} = \frac{1}{\Delta A}\oint_{PABC} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \frac{1}{|a||b|}\oint_{PABC} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \frac{1}{h_u h_v \delta u \delta v}\left(\int_{PA} + \int_{AC} + \int_{CB} + \int_{BP}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta A}\left(\int_{PA} + \int_{CB}\right) + \frac{1}{\Delta A}\left(\int_{AC} + \int_{BP}\right) = \text{a [illegible] hasonlóan} = \frac{1}{\Delta A}\left(-\delta u\,\delta v\frac{\partial(v_u h_u)}{\partial v} + \delta u\,\delta v\frac{\partial(v_v h_v)}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{1}{h_u h_v}\left(-\frac{\partial(v_u h_u)}{\partial v} + \frac{\partial(v_v h_v)}{\partial u}\right)$$

Ez alapján a többi

$$\underline{e}_u \operatorname{rot}\underline{v} = \frac{1}{h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}(v_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(v_v h_v)\right)$$

$$\underline{e}_v \operatorname{rot}\underline{v} = \frac{1}{h_u h_w}\left(\frac{\partial}{\partial w}(v_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(v_w h_w)\right)$$

Hengeren:

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_\rho = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_\varphi \rho\right] = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} v_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} v_z$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_z = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(v_\varphi \rho) - \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\rho\right] = \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi}$$

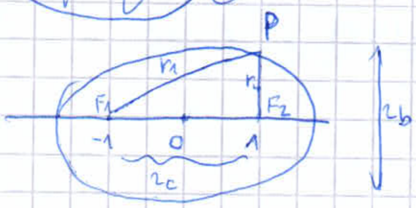
Gömbi:

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_r = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(v_\varphi r \sin\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(v_\vartheta r)\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} + \mathrm{ctg}\,\vartheta\, v_\varphi - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi}\right]$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi} v_r - \frac{\partial}{\partial r} v_\varphi (r\sin\vartheta)\right] = \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(v_\vartheta r) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} v_r\right] = \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta}$$

Gyakorlat



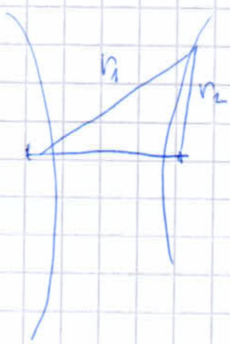
$r_1 + r_2 = 2a$

$a^2 = b^2 + c^2$

excentricitás: $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

azonos szakaszok, különböző ε esetén különböző ellipszisek



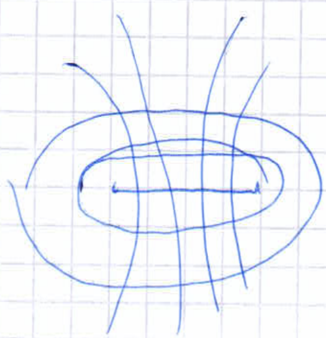
$r_1 - r_2 = 2a$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\varepsilon = \frac{c}{a} \geq 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

azonos szakasz különböző ε esetén különböző hiperbolák



Ez ortogonális rendszer.

[illegible]

$$u = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+1+2x} + \sqrt{x^2+y^2+1-2x}}{2}$$

$$v = \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{\sqrt{} - \sqrt{}}{2}$$

$$\underline{\nabla} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+y^2+1+2x}} + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2+y^2+1-2x}} \\ \frac{2y}{2\sqrt{}} + \frac{2y}{2\sqrt{}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla} v = \dots$$

A kettőt összeszorozva 0-t kell kapjunk, hogy merőleges legyen

Ezt invertálni kell, erre van univerzális recept

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = u + v \\ r_2 = u - v \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1^2 = u^2 + 2uv + v^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \\ r_2^2 = u^2 - 2uv + v^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \end{array}\right\}$$

Kivonva: $4x = 4uv \Rightarrow \underline{x = uv}$

visszahelyettesítve: $y^2 = u^2 + v^2 - u^2v^2 - 1 = (u^2-1)(1-v^2)$

$\underline{y = \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}}$ $\Big\}$ $\underline{r}(u,v)$

Ha megforgatjuk:

$$\left.\begin{array}{l} z = uv \\ x = \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \cos\varphi \\ y = \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \sin\varphi \end{array}\right\} \underline{r}(u,v,\varphi)$$

most legyen $z = 7$

és $\underline{r}(u,v,z)$

vagy:

$$\left.\begin{array}{l} z = \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \\ x = uv \cos\varphi \\ y = uv \sin\varphi \end{array}\right\} \underline{r}(u,v,\varphi)$$

$$\underline{t}_u = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\sqrt{1-v^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{t}_v = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\sqrt{u^2-1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{t}_z = \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezek egymással 0-t adnak sk. szorozva.

$$h_u^2 = |\underline{t}_u|^2 = v^2 + \frac{u^2(1-v^2)}{u^2-1} = \frac{v^2(u^2-1) + u^2(1-v^2)}{u^2-1} = \frac{u^2-v^2}{u^2-1}$$

$$h_v^2 = \underline{t}_v^2 = u^2 + \frac{v^2(u^2-1)}{1-v^2} = \frac{u^2-v^2}{1-v^2}$$

$$h_z = 1$$

Innen formális..

$\underline{r}(u_k)$ akkor $d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_k} du_k = \underline{t}_k du_k$

$$ds^2 = d\underline{r}\,d\underline{r} = \underline{t}_k du_k \, \underline{t}_e du_e = \underline{t}_k \underline{t}_e du_k du_e = \underline{\underline{g}}_{ke} du_k du_e$$

Jelenleg $\underline{t}_k \underline{t}_e = \delta_{ke} h_e \Rightarrow \qquad ds^2 = h_k^2 du_k^2$

MATMÓDSZ

Komplex fgv. tan

$z = a + ib$ ahol $a, b \in \mathbb{R}$

$a = \mathrm{Re}\, z$

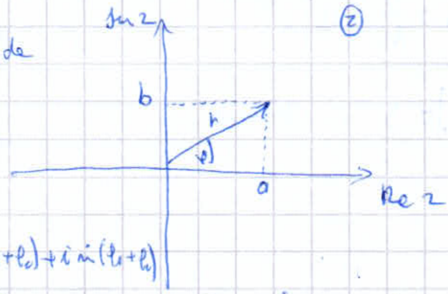
$b = \mathrm{Im}\, z$

A test axiómák érvényessége miatt úgy számolunk ahogy eddig

De, a $\mathbb{C}$ nem csak test, hanem 2D-s lineáris tér: komplex sík

az összeadás a vektorok összeadásának megfelelő, de

a szorzás nem egészen



$z = a + ib = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

hatványozás ebből: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ DE a szöghöz mindig ezért lehet adni $2k\pi$-t

$$z = r\left[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\right] \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right]$$ elvileg n db különböző $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a komplexeknek n különböző gyöke van.

Legyen $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Ugyanakkor: $f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha + \beta)$ van olyan, mint az exp fgv.

Jelöljük így: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{c\varphi}$! Mi lehet c? Ha jó, ha $c = i$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Hatványozás komplexszel: $e^{3+2i} = e^3 e^{2i} = e^3(\cos 2 + i\sin 2)$

Logaritmálás: $z = r e^{i(\varphi + 2k\pi)}$

$\cancel{\log z}$ $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ $\qquad k \in \mathbb{Z}$

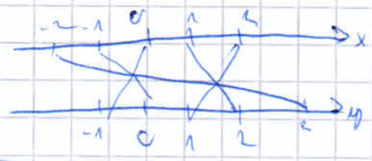
Átalakítva: $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ $\qquad$ itt φ-t kiterjeszthetjük $\mathbb{C}$-re.

A $\mathbb{C}$ fgv-tan a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$-vel foglalkozunk

Hogy képzeljük el a 4D-s teret ?

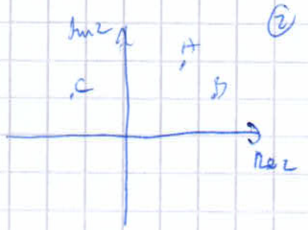
Ha 2D-be rajzolnánk :

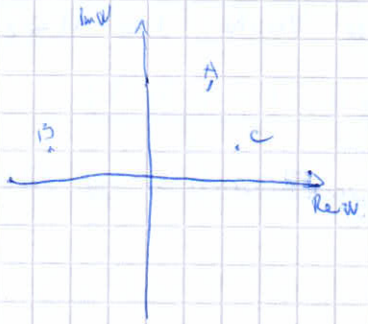


Nem szemléletes

Ugyanez $\mathbb{C}$-ben

$$z \longmapsto w = f(z)$$





Vegyünk olyan pontokat, amik ⓩ-n egyenes mentén vannak, és nézzük, hogy folytonos vonalat képeznek-e:

görbe vonalú koordináta rendszer

A tetszőleges* komplex fgv. képe létrehoz egy ortogonális koord. rendszert

↳ az mi?

$z = x + iy$

$w = \begin{cases} u + iv \\ \varphi + i\psi \end{cases}$ ← konvenció kérdése

$\phi + i\psi = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$ Egy $\mathbb{C}$ fgv. 2 db 2 változós fgv.-ként adhatjuk meg

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $z \longmapsto w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xiy - y^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$\phi(x,y) = x^2 - y^2$

$\psi(x,y) = 2xy$

ϕ és ψ nem lehet bármilyen, függnek

<u>harmonikus pár</u>

Az $x =$ konst vonal képe olyan, mint a $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ görbe paraméterezése

A ⓩ síkon a $\psi =$ konst vonal a φ fgv. szintvonala sorozatok határértéke : $N \to \mathbb{R}$

a_k sorozat $\quad k \in N$

$a \in \mathbb{R}$

komplex sorozat : $N \to \mathbb{C}$

z_k: $\quad k \in N$

$z \in \mathbb{C}$

konvergens, ha $\forall \varepsilon\ \exists N\ \ \forall n > N: \ |a_n - A| < \varepsilon$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = Z}$$

~~Ha a~~ sorozat tagjai beleesnek egy körbe

Fgv. határértéke

Legyen x_n sorozat és $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Ha $f(x_n)$ konvergens, akkor ez a fgv. pontbeli határértéke

De feltétel, hogy minden x_n sorozatra $f(x_n)$ határértéke u.a. legyen

És a komplexeknél vannak erős kritériumok

ököl: ami képlettel leírható, az ilyen

Ha valahol mindenhol folytonos az jó, de erős volt. Megengedjük, hogy csak véges sok helyen ne legyen folytonos : meromorf

Differenciálás:

valósban : $f'(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$

komplexben: Legyen $\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\psi'(z) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(z+\delta)-f(x)}{\delta}$$

Ez minden határesetben létezzen. Ez nagyon sok fgv-t kizár

<u>Tétel</u>: Ha vízszintes és függőleges irányban egy pontban létezik és azonos, akkor tetszőleges útra igaz

$\Rightarrow$ Elég ψ-t és ϕ-t vizsgálni

$$w = f(z) = \phi(z) + i\,\psi(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$

$z = x + iy$ a) $\delta = \varepsilon \in \mathbb{R}$

$$f(z+\delta) = f(x+\varepsilon, y) = \phi(x+\varepsilon, y) + i\,\psi(x+\varepsilon, y)$$

$$f(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{[\phi(x+\varepsilon, y) + i\,\psi(x+\varepsilon, y)] - [\phi(x,y) + i\,\psi(x,y)]}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\phi(x+\varepsilon, y) - \phi(x,y)}{\varepsilon} + i\,\frac{\psi(x+\varepsilon, y) - \psi(x,y)}{\varepsilon} \to \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

b) $\delta = i\varepsilon$ $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$f(z+\delta) = \phi(x, y+\varepsilon) + i\,\psi(x, y+\varepsilon)$$

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{[\phi(x, y+\varepsilon) + i\,\psi(x, y+\varepsilon)] - [\phi(x,y) + i\,\psi(x,y)]}{i\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\phi(x, y+\varepsilon) - \phi(x,y)}{\varepsilon} + i\,\frac{\psi(x, y+\varepsilon) - \psi(x,y)}{\varepsilon}\right) \to \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\,\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Akkor lesz a f deriválható, ha a két végeredmény egyenlő, tehát a képzetes és valós részek egyeznek meg:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}}$$

Cauchy - Riemann - diffegyenletek

Pl.: $f(z) = z^2$: $\phi(x,y) = x^2 - y^2$

$\psi(x,y) = 2xy$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x$ ✓

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2y$ $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y$ ✓

$$f(z) = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

$$\phi(x,y) = e^{x} \cos y$$

$$\psi(x,y) = e^{x} \sin y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^{x} \cos y \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = e^{x} \cos y \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -e^{x} \sin y \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \cancel{x}} = e^{x} \sin y \quad \checkmark$$

Ha csak az $\phi(x,y)$-t tudjuk meg lehet keresni $\psi(x,y)$-t

Mi van a Young tétellel

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} \overset{CR.}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} \overset{Y.T.}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} \overset{CR.}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} \overset{CR.}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \overset{Y.T.}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \Delta \psi = 0$$

ezeknek a feltételeknek is teljesülnie kell

Ami kielégíti a Laplace-egyenletet, az a harmonikus egyenlet.

A ϕ és ψ egyenként is harmonikus, de együtt-harmonikus fv.

Olyban nem értelmezett

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad z=0\text{-ban nincs ért.}$$

$$\phi = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \psi = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{stb...}$$

Gyakorlatilag a deriválás u.a.m. R-ben

$f(z) = ch(\sin z^2)$

$f'(z) = sh(\sin z^2)\,(\cos z^2) \cdot 2z$

Hatványsorozni is lehet

$z,\ c_k \in \mathbb{C}$

$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots c_n z^n + \dots$

Adott c_k-khoz létezik egy konvergencia kör, amin belül a sor konv, azon kívül nem

három eset:

a)

$R = 0$ $\quad f(0) = c_0$

ilyen is van, persze pl.: $1 + z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$

b)

$R = a \in \mathbb{R}$ tipikus eset

pl.: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & \text{ha } |z| < 1 \\ \infty & \text{ha nem} \end{cases}$

c)

$R = \infty$ minden számra értelmes ([illegible])

pl.: $1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots = e^z$

Ha konvergens, akkor szabad tagonként deriválni, integrálni

MAT. MÓDSZ.

4. előadás (03. 07.)

Komplex függvények

$$z = x + iy \longrightarrow w = \phi + i\psi$$

$$w = f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

Ahhoz, hogy a limesz mindenhol értelmes legyen áll a Cauchy-Riemann-feltétel

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \\ \Delta\psi &= 0 \end{aligned}$$

A komplex fgv.-k alaptétele

TFH. $f'(z_0) = C \neq 0$

$$\text{Ekkor } f'(z_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0+\delta) - f(z_0)}{\delta}$$

$$\Rightarrow f(z_0+\delta) \approx f(z_0) + C\delta = w_0 + C\delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = C\delta$$

Vegyünk két komplex δ-t: δ_1; δ_2

Ha $f(z_0+\delta_1) = w_0 + \Delta_1$

$f(z_0+\delta_2) = w_0 + \Delta_2$

Mivel $\Delta_1 = C\delta_1$ és $\Delta_2 = C\delta_2$ és a komplex szorzás a forgatás, ezért Δ_1 és Δ_2 szöge $=$ δ_1 δ_2 szögével

$\Rightarrow$ A komplex függvény egy szögtartó leképezés (Konform)

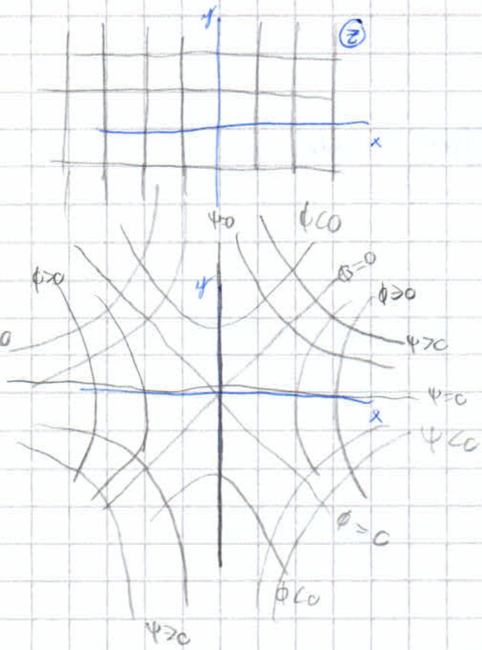
Emiatt a Descartesi koordináta-háló a képen ortogonális koordinátarendszer

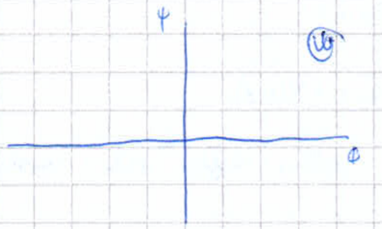
Kivéve, ahol a függvény deriváltja 0.

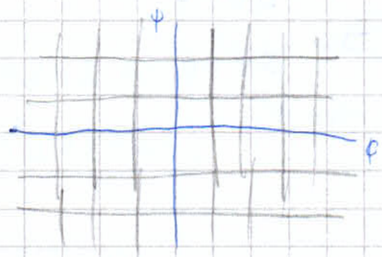
Pl.: $w = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2ixy$

$\phi(x,y) = x^2 - y^2$

$\psi(x,y) = 2xy$







A szögtartás a origóban sérül, ezen $(z^2)' = 2z = 0$

Mivel u.a. az értéket kétszer is felveszi: kétlevelű Riemann felület

Az eredeti kép területéhez vesszük a $\sqrt{z}$ függv.

$$z = \sqrt{w} = \sqrt{\phi + i\psi} = x + iy$$

$$x(\phi,\psi);\ y(\phi,\psi)$$

$\phi + i\psi = x^2 - y^2 + 2ixy$ másodfokúvá visszavezethető a rendszer

$$x = \sqrt{\frac{\phi + \sqrt{\phi^2+\psi^2}}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{\phi^2+\psi^2} - \phi}{2}}$$

valahol útközben valahogy $4x^4 - 4x^2\phi - \psi^2 = 0$

ha x konst akkor ez egy parabola

Pl2: $w = \ln z = \ln(r e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi = \ln(x^2+y^2) + i \,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\phi = \cancel{\ln}\ \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

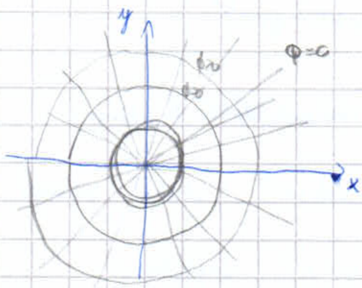
$$\psi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

CR. ellenőrzés

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot -\frac{y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ✓$$



Jó, ez a polárkoordináta rendszer.

Az egység kör (z) sík csak a (w) sík mely a $\psi \in [0;2\pi]$ részére képződik le.

Tört - lineáris - függvények

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{ahol } a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

mivel konstanssal egyszerűen u.a. lesz, normáljuk: $ad - bc = 1$

Nézzük a kompozíciót

$$u = g(w) = \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta} = \frac{\alpha\frac{az+b}{cz+d}+\beta}{\gamma\frac{az+b}{cz+d}+\delta} = \frac{\alpha(az+b)+\beta(cz+d)}{\gamma(az+b)+\delta(cz+d)} = \frac{(\alpha a+\beta c)z+(\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z+(\gamma b+\delta d)} = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

- Egy törtlineáris fgv-t törtlineárisba téve, újabb törtlineárist kapunk
- ezek asszociatív
- van egységük: $\frac{1\cdot z+0}{0\cdot z+1}$
- van inverz $\Rightarrow$ Csoportot alkotnak

$A = \alpha a+\beta c$

$B = \alpha b+\beta d$

$C = \gamma a+\delta c$

$D = \gamma b+\delta d$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Még jó, így kiértékelve kapjuk a $\det \neq 0$

Mivel mindegyik detje 1, ezért a struktúra továbbra zárt, ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ A törtlineáris fgv-k izomorfak a 2×2-es 1 detű mátrixokkal

$$SL(2, \mathbb{C}) \qquad \text{(relativisztikus kvantummechanika)}$$

Mi van, ha a nevező 0?

Ha $z = -\frac{d}{c}$, akkor nincs értelmezve, de most mondjuk, hogy a ∞ is egy fgv. érték $\Rightarrow$ így már jó

Ha megadjuk a függvényt a ∞-nek, akkor be is kell helyettesíteni

$$f(\infty) = \frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} = \frac{a}{c}$$

~~(projektív geometria)~~

A síkra helyezett gömb minden pontja kivetíthető a síkra, a gömb csúcsa a végtelen

$\rightarrow$ Sztereografikus projekció

Ha az sík a $\mathbb{C}$, akkor az a Riemann féle számgömb

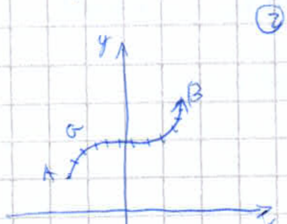
A törtlineáris fgv a gömb forgatásának felel meg (síkról gömbre, elforgatás, gömbről síkra)

Tétel: kiválasztunk A, B, C pontokat megadhatjuk pontosan 1 db törtlineárist, hogy

$A \rightarrow A'$
$B \rightarrow B'$
$C \rightarrow C'$

Integrálás

$\mathbb{Z}$



$t \in \mathbb{R}$

$z(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

A G görbét felosztjuk részekre, de ez egy szám, így nem kell a mértékkel [illegible]

ezek alapján def-ját kapjuk: $\sum f(z)\, dz \rightarrow \int f(z)\, dz$

A komplex függvény összetettebb, paraméterezni kell

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} \qquad dz = \dot{z}\, dt$$

$$f(z)\, dz = \underbrace{f(z(t))\, \dot{z}(t)}_{F(t)}\, dt$$

$$\int f(z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt$$

$$\int(\phi+i\psi)(dx+i\,dy)=\int(\phi\,dx+i\psi\,dx+i\phi\,dy-\psi\,dy)=\int(\phi\,dx-\psi\,dy)+i\int(\psi\,dx+\phi\,dy)=*$$

Legyen $d\underline{r}=\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$ $\quad \underline{u}(x,y)=\begin{pmatrix}\phi(x,y)\\-\psi(x,y)\end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}(x,y)=\begin{pmatrix}\psi(x,y)\\\phi(x,y)\end{pmatrix}$

$* = \int\underline{u}(\underline{r})d\underline{r}+i\int\underline{v}(\underline{r})d\underline{r}$ $\qquad \underline{u}\,\underline{v}=0$ (ortogonálisak)

Az integrál függ a görbétől, de mi azt akarjuk, hogy csak a végpontoktól függjön. Ez csak akkor jó, ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ grad. Ha ez van a rotjuk 0, de az csak 3D-ben van

Legyen: $\underline{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad \underline{u}=\begin{pmatrix}\phi\\-\psi\\0\end{pmatrix}$

$$\text{rot}\,\underline{u}=\begin{pmatrix}\partial_y u_z-\partial_z u_y\\\partial_z u_x-\partial_x u_z\\\partial_x u_y-\partial_y u_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\partial_x u_y-\partial_y u_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\partial_x(-\psi)-\partial_y\phi\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\end{pmatrix}=0$$

$\underline{u}$ rotja 0, tehát az integrál tényleg csak a végpontoktól függ.

Cauchy-tétele: komplex integrál csak a végpontoktól függ

Ez alapján $\int\underline{u}\,d\underline{r}=\int\underline{\nabla}F\,d\underline{r}=F(B)-F(A)$

$\int\underline{v}\,d\underline{r}=\int\underline{\nabla}G\,d\underline{r}=G(B)-G(A)$

$$\int_{A\to B}f(z)\,dz=\underbrace{(F(B)+iG(B))}_{S(z_B)}-\underbrace{(F(A)+iG(A))}_{S(z_A)}$$

Newton–Leibniz-tétel

Ez alapján $f(z)=S'(z)$ kéne lennie

S-re is teljesülni kell a C.R.-nek: $\frac{\partial F}{\partial x}\overset{!}{=}\frac{\partial G}{\partial y}$

$\frac{\partial F}{\partial y}\overset{!}{=}-\frac{\partial G}{\partial x}$

Mivel $\underline{u}=\underline{\nabla}F=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}\\\frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi\\-\psi\end{pmatrix}$

$\underline{v}=\underline{\nabla}G=\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial x}\\\frac{\partial G}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi\\\phi\end{pmatrix}$ ezért teljesül

$\Rightarrow$ Az a komplex függvény, amelyik differenciálható, az integrálható is.

zárt görbe mentén az integrál akkor 0, ha reguláris tartomány van (nincs szinguláris pont)

De mi van, ha van szingularitás?

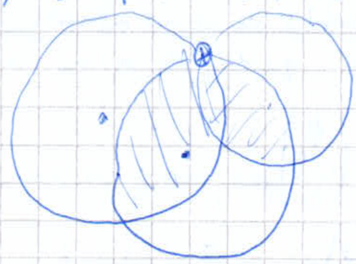
Pl.: $\frac{1}{z^2+1}$ -nek szinguláris i, akkor a reziduum 0.

~~Másként~~ Minden határon definiál egy konv. kört, és azon belül definiál egy fgv-t.

Általában azért nem megy, mert ott szingularitás van.

Ha haladunk, legfőbb rendben egy részét körül, ott is van konvergencia kör.

Analitikus folytatás:



Nem mindig lehet kikerülni a szingularitást

$$f(z) = \dots c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-1}\frac{1}{z^1} + c_0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \dots \qquad \text{Laurent-sor}$$

Ha véges sok van, vagy véges, akkor felszorozható:

$$z^n f(z) = c'_0 + c'_1 z + \dots$$

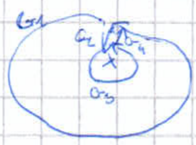
Megszüntethető szingularitás

Ahol megszüntethető a szingularitás, az a nódus. Ahol van, az pólus

Ha a fgv. akkor megszüntethető a konvergencia, az reziduum.

itt minden esetben működik

Integrálás szingularitások körül



$$0 = \oint = \int_{G_1} + \overbrace{\oint_{G_2}}^{0} + \int_{G_3} + \int_{G_n} = \int_{G_1} + \int_{G_2}$$

Szingularitás körüli kör körül ugyanaz az integrál

Pl.: $\oint z^2 dz$

parametrizálás: $z = Re^{i\varphi}$ $\qquad \frac{dz}{d\varphi} = iRe^{i\varphi}$

$$z^2 = R^2 e^{2i\varphi}$$

$$z^2 dz = R^2 e^{2i\varphi}\, iRe^{i\varphi} d\varphi = iR^3 e^{3i\varphi} d\varphi$$

$$\oint z^2 dz = iR^3 \int_0^{2\pi} e^{3i\varphi} d\varphi = iR\left(\int_0^{2\pi} \cos 3\varphi\, d\varphi + i \int_0^{2\pi} \sin 3\varphi\, d\varphi\right) = 0$$

a zárt kitevős tagokra a körintegrál 0.

$$\oint \frac{1}{z^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}d\varphi}{R^2e^{2i\varphi}} = \frac{i}{R}\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi}d\varphi = 0$$ (a negatív tagok is kivéve a -1.)

$$\oint \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$ tényleg kiesni a síkján

$$f(z) = C_{-n}z^{-n} + \dots C_{-2}z^{-2} + C_{-1}z^{-1} + C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots$$

$$\oint f(z)dz = C_{-1}\, 2\pi i$$

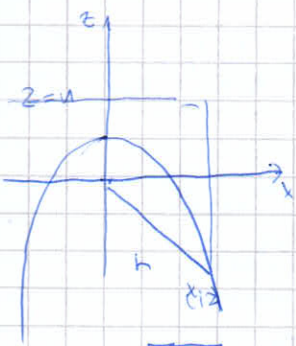
A sok együttható közül csak a C_{-1} marad

maradék = reziduum

Egy adott függvény adott pontja körüli sor reziduuma

Gyakorlat

Előző ZH:



$$\sqrt{x^2+z^2} = z - u$$

$$x^2 + z^2 = z^2 - 2zu + u^2$$

$$x^2 = u^2 - 2zu \qquad\qquad x^2 = v^2 + 2zv$$

Ez két parabola sereg.

$$u = z - \sqrt{x^2+z^2}$$

$$v = \sqrt{x^2+z^2} - z$$

Ezeket x és z szerint deriválva belátható az ortogonalitás

Mi x-t és z-t akarjuk kifejezni: $z = \frac{u-v}{2}$

$$x = \sqrt{uv}$$

Megforgatva: $\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{uv}\cos\varphi \\ y &= \sqrt{uv}\sin\varphi \\ z &= \frac{u-v}{2} \end{aligned}}$

$$\underline{t}_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \sqrt{v} \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \underline{t}_u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{v}{u}} \cos\varphi \\ \sqrt{\frac{v}{u}} \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{t}_v = \frac{1}{2\sqrt{v}} \sqrt{u} \cos\varphi$$

$$\underline{t}_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} \cos\varphi \\ \sqrt{\frac{u}{v}} \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{t}_\varphi = \sqrt{uv}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_u = |\underline{t}_u| = \sqrt{\frac{v}{u} + 1} = \sqrt{\frac{u+v}{u}}$$

$$h_v = |\underline{t}_v| = \sqrt{\frac{u}{v} + 1} = \sqrt{\frac{u+v}{v}}$$

$$h_\varphi = \sqrt{uv}$$

innen behelyettesítés

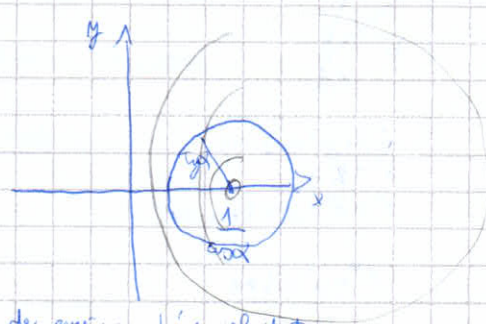
(2)

$$\cos\alpha = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

$$x^2+y^2+1 = \frac{2x}{\cos\alpha}$$

$$x^2 - \frac{2x}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} + y^2 = -1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\left(x - \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \qquad \text{Ez egy kör egyenlete, -}$$



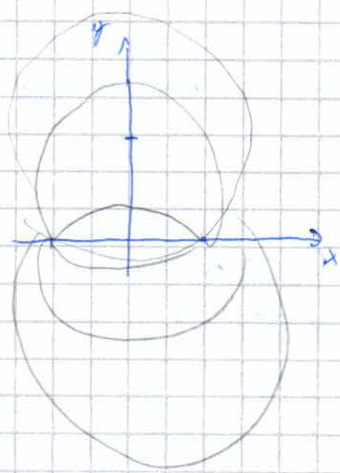
[illegible] [illegible], x tengely mentén, de egyre [illegible] el y-t

A 0 x=1 körüli 0 sugarú kör, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$x^2+y^2-1 = \frac{2y}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$x^2+y^2-2y\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta}$$



Bipoláris koordináta

egyben $r^2 = x^2 + y^2 = \frac{2x}{\cos\alpha} - 1 = \frac{2y}{\operatorname{tg}\beta} + 1$

$$\frac{2x}{\cos\alpha} - \frac{2y}{\operatorname{tg}\beta} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{x}{\cos\alpha} - 1$$

$$x^2 + \operatorname{tg}^2\beta\left(\frac{x}{\cos\alpha} - 1\right)^2 + 1 - \frac{2x}{\cos\alpha} = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \frac{x^2}{\cos^2\alpha}$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} - 1\right)^2 + \operatorname{tg}^2\beta\left(\frac{x}{\cos\alpha} - 1\right)^2 + x^2 - \frac{x}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} - 1\right)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\beta\right) + x^2\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 0$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} - 1\right)^2 \frac{1}{\cos^2\beta} = x^2 \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha} - 1\right)\frac{1}{\cos\beta} = \pm x \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{egyik } +$$

$$\frac{x}{\cos\alpha\cos\beta} - x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\beta}$$

$$x\,\frac{1 - \sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{1}{\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha\cos\beta}$$

$$y = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1 - \sin\alpha\cos\beta}$$

Ha $\alpha = 0$ $\quad x = 0 \quad y = 0$

inver farágás

---

komplex

$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{x + iy}$

$\phi^2 - \psi^2 + 2i\phi\psi = x + iy$ $\qquad$ vaulvolak lesznek

Elektrosztatikában $\quad \underline{E}(\underline{r})$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$$

$$\underline{\nabla}\,\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

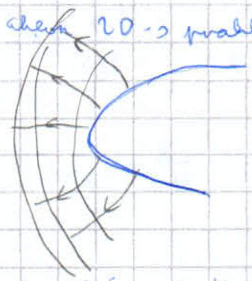
$$\underline{\nabla}(-\underline{\nabla}\phi) = -\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{Ha } \rho = 0 \text{ akkor } \Delta\phi = 0$$

ekkor ϕ lehetne a komplex fgv egyik része

↪

Ha az elrendeződés eltolás szimmetrikus, akkor 2D-s probléma

pl.: parabola alakú fém:
(ekvipot. felület)



Mindegy, hogy az ekvipotenciális vonalak közül melyik a fémlap
(minden komplex fgv. megold egy elektrosztatikus feladatot ⇒
⇒ visszafele: minden elektrosztatikus feladathoz található egy komplex fgv.)

Elég a határokkal foglalkozni, a többi adódik (?)

Vissza a $\sqrt{z}$-hez!

$$\phi = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$$

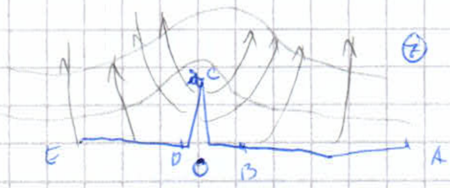
Ez a fenti ??? potenciálja

Elvileg ennek gradiense adja az erővonalakat,
Nade

$$\psi = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$$

Értem, hogy ez pont az? Meglehet

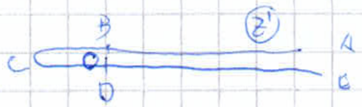
Nézzük a vázlatot:



	A	B	C	D	E
z	∞	$0+\varepsilon$	i	$0-\varepsilon$	$-\infty$
z'	$\infty + i\varepsilon$	$0+\varepsilon + i\varepsilon$	-1	$0+\varepsilon - i\varepsilon$	$\infty - i\varepsilon$
z''	$\infty + i\varepsilon$	$1+\varepsilon$	0	$1-i\varepsilon$	$\infty - i\varepsilon$
z'''	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$

Milyen transzformáció esetén?

$z' = z^2$



$z'' = z' + 1$

A ~~kontúrt les~~

$z''' = \sqrt{z''}$ (Ez bonyolultabb, de már csak ...)

A kontúrt leképeztük a végtelen egyenesre, itt könnyen számítható ez.
Ez már visszatranszformálható

$$w = \sqrt{z''} = \sqrt{z'+1} = \sqrt{z^2+1} = \phi + i\psi$$

kifejezve :
$$\boxed{\begin{aligned} x^2 - y^2 + 1 &= \phi^2 - \psi^2 \\ xy &= \phi\psi \end{aligned}}$$

innen ϕ és ψ kifejezhető, ez az a potenciál és az erőtér

Ha egyenes negatív töltésű akkor bonyolultabb, de nem lehetetlen

MATMÓDSZ.

9. előadás (03.14.)

$$w = f(z) \qquad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$z = x + iy$$

$$w = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$

ahol $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ és $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $\Delta\phi = 0$, $\Delta\psi = 0$

$$\int_G f(z)\,dz = \int(\phi + i\psi)(dx + i\,dy) = \underbrace{\int(\phi\,dx + \psi\,dy)}_{\int \underline{u}\,d\underline{r}} + i\underbrace{\int(\phi\,dy + \psi\,dx)}_{\int \underline{v}\,d\underline{r}} = *$$

Mivel $\mathrm{rot}\,\underline{u} = \mathrm{rot}\,\underline{v} = 0$

$* = S(B) - S(A)$ $\Rightarrow$ független az úttól

$$S = F + iG$$

$\Rightarrow$ $\oint f(z)\,dz = 0$ ha nincs szinguláris pont.

De mi van, ha van?

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

vagy

$$f(z) = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \dots$$

szinguláris pont esetén balra is írható: $\dots \dfrac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dfrac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$

Ha balra végtelen: lényeges szingularitás

Ha balra véges: megszüntethető szingularitás (beszorozva $(z-a)^n$-nel)

$\Rightarrow$ itt a fgv-nek pólusa van.

A tagok körintegrálja 0, kiv. a -1. hatványra: $\oint \dfrac{1}{z-a}\,dz = \pm 2\pi i$

Pl.:
$$f(z)=\frac{z^2}{z-1}=\frac{z^2-z+z}{z-1}=\frac{z(z-1)+z}{z-1}=z+\frac{z}{z-1}$$

Tudjuk, hogy $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots$

Így $f(z)=z-z\frac{1}{1-z}=z-z(1+z+z^2+\dots)$

vagy $f(z)=z+\frac{z}{z-1}=z+1+\frac{1}{z-1}=\boxed{\frac{1}{z-1}+2+(z-1)}+0(z-1)^2+\dots$

$$\oint=2\pi i$$

ennek a $z=1$-ben van [illegible]

Pl.:
$$\frac{e^z}{z-1}=\frac{e^{z-1+1}}{z-1}=\frac{e\,e^{z-1}}{z-1}=\frac{e}{z-1}\left(1+\frac{z-1}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\dots\right)=$$
$$=e\left(\frac{1}{z-1}+1+\frac{z-1}{2!}+\frac{(z-1)^2}{3!}+\dots\right)$$

$\oint=e\cdot2\pi i$ Ha a számláló egy reguláris fgv, akkor nincs gond

Legyen $f(z)$ egy reguláris fgv.! Legyen $g(z)=\frac{f(z)}{(z-a)}$! Integráljuk ezt a körüli görbén:

Itt a $f(z)$ egy konstans: $f(a)$

$$\oint g(z)\,dz=f(a)\oint\frac{1}{z-a}\,dz=f(a)\,2\pi i$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a)}$$ Cauchy-integrál-tétel

Ez azért van, mert a reguláris fgv-k pontjai nem függetlenek egymástól.

(Ez a Dirac-delta komplex reprezentációja.)

Deriváljuk a szerint:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{\partial}{\partial a}f(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{z-a}\right)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz=f'(a)$$

Folytatva $$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

$\oint g(z)\,dz = 2\pi i\, f(a)$

Ha $g(z) = \frac{f(z)}{z-a} = \frac{f(a)}{z-a} + \frac{f'(a)}{z-a} + \frac{f''(a)}{z-a} + \dots$

$f(a)$ a függvény reziduuma a-ban.

$$f(a) = \mathrm{Res}\, g(z)$$

Hogy találjuk meg?

$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ $\quad$ $g(a)$ elszáll, de $(z-a)g(z)$ már nem.

$$f(a) = f(z\to a) = \lim_{z\to a}\big(g(z)(z-a)\big) = \mathrm{Res}\, g(a)$$

Pl.:

$g(z) = \frac{5}{(z-a)^2} + \frac{6}{(z-a)} + 3 - 2(z-a)$ $\quad$ (Ránézésre: $\mathrm{Res}\, g(a) = 6$)

Ez $(z-a)g(z) = \frac{5}{z-a} + 6 + 3(z-a) - 2(z-a)^2$

Ha $z \to a$, ez még mindig nem jó. ☹

De $(z-a)^2 g(z) = 5 + 6(z-a) + 3(z-a)^2 - 2(z-a)^3$

Ennek a limesze 5. (Nekünk 6 kell)

De $\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 g(z)\right] = \frac{d}{dz}\left[5 + 6(z-a) + 3(z-a)^2 - 2(z-a)^3\right] = 6 + 3(z-a) - 2(z-a)^2$

Ennek limesze már 6 ☺

Innen már $\oint g(z)\,dz = 2\pi i \cdot 6$

Mi van, ha több szinguláris pont van?

$$\oint_{G'} f = 0$$

$$\oint G' = \oint_G + \oint_{a_1} + \oint_{a_2} + \dots = 0$$

$$\oint_G = \sum_k \oint_{a_k} = \sum_k 2\pi i\, \mathrm{Res}\, f(a_k)$$

Szóval: $\boxed{\oint_G f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\, f(a_k)}$ Cauchy Reziduum tétele

Egy szabó:

Pl.: $\oint \operatorname{ctg} z \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(\operatorname{ctg}(0)) = 2\pi i \cdot 1.$

Feladat:

$\oint \frac{1}{z^2+1} dz$ egy ~~egység~~ két sugarú körön

Ennek a fgv.-nek 2 pólusa van $a_1 = i$, $a_2 = -i$

$$\oint \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f(a_k))$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

$a_1 = i$

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i} \left((z-i) f(z)\right) = \lim_{z \to i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

$a_2 = -i$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \lim_{z\to i} \left((z+i) f(z)\right) = \lim_{z\to i} \frac{z+i}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z \to i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i}$$

$\operatorname{Res} f(a_1) + \operatorname{Res} f(a_2) = 0$, így $\oint f(z) dz = 0$

Más körön nem feltétlenül lett volna 0.

$f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ kapjuk a 2 sugarú körön.

pólusok u.a.

$a_1 = i$:

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^z}{z^2+1} = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^z}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i} \frac{e^z}{z+i} = \frac{e^i}{2i}$$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \frac{e^{-i}}{-2i}$$

$$\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-i) = \frac{e^i}{2i} + \frac{e^{-i}}{-2i} = \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = \sin 1$$

$$\oint \frac{e^z}{z^2+1} dz = 2\pi i \sin 1$$

Analitikus folytatás: amikor egy fgv. ért tart. egy komplex integrállal való értelmezésével is ki lehet.

Más módszerek a Res kiszámításához

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{A(z+i)+B(z-i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{(A+B)z+(A-B)i}{z^2+1}$$

Akkor jó, ha
$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ i(A-B)&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2i}, \qquad B = \frac{i}{2} = \frac{1}{-2i}$$

A és B a reziduumok

Vagyis
$$\frac{e^z}{z^2+1} = e^z\left(\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}\right) = \frac{e^z\frac{1}{2i}}{z-i} + \frac{e^z\frac{1}{-2i}}{z+i}$$

Legfontosabb eset:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad h(a)=0 \qquad h'(a)\neq 0$$
$$g(a)\neq 0$$

$$h(z) = \underbrace{h(a)}_{0} + h'(a)(z-a) + \frac{h''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots$$

$$f(z) \approx \frac{g(z)}{h'(a)(z-a) + \frac{h''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots} \approx \frac{g(z)}{h'(a)(z-a)} \approx \frac{g(a)}{h'(a)}\cdot\frac{1}{z-a}$$

$$\text{Res } f(a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

Pl.: $\frac{e^z}{z^2+1}$

$$g(z)=e^z$$
$$h(z) = z^2+1 \qquad h'(z)=2z$$
$$a_1 = i$$
$$a_2 = -i$$

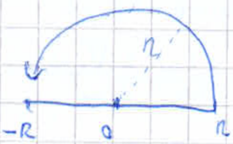
$$\text{Res } f(i) = \frac{e^i}{2i} \qquad \text{Res } f(-i) = \frac{e^{-i}}{-2i}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctg x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Ugyanez komplexben:

$$I = \int_G \frac{dz}{1+z^2}$$ Ahol G a valós tengely

a reziduum tétel szerint görbére vegyük.



$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{1+z^2} = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{\frown} \frac{dz}{1+z^2} - \int_{\curvearrowleft} \frac{dz}{1+z^2} \right]$$

A második tag $R \to \infty$-nél $\to 0$.

$$I = \int_{\frown} \frac{dz}{1+z^2}$$ Ennek van pólusa az $a = i$-ben. $\Rightarrow$

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \underline{\underline{\pi}}$$ kijött ☺

Másik:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{1+x^2}$$ Ennek nem tudjuk a primitív fgv-ét.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos z \, dz}{1+z^2} = \int \left(\frac{e^{iz}}{2(1+z^2)} + \frac{e^{-iz}}{2(1+z^2)} \right) dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos z \, dz}{1+z^2} = \operatorname{Re} \int \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \cancel{\ldots}$$ Nem kell Re, mert úgyis $\frac{1}{1+x^2}$ is valós.

$z = x + iy$

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix} e^{-y}$$ Ha $y < 0$, akkor e^{-y} elszáll, ezért,

mindig a pozitív irányban körbemenni

$$\int_{\frown} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$$ Ennek van pólusa $a = i$-nél.

Az előbbiek miatt

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

$\beta > 0$

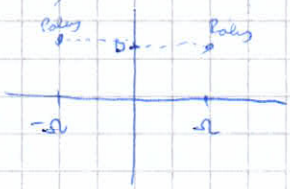
Pl.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + 2i\beta\omega - \omega_0^2}\, d\omega = G(t) = \int_{\longrightarrow} \frac{e^{izt}}{z^2 - 2i\beta z - \omega_0^2}\, dz$$

Van zérushelye a nevezőnek?

$$z^2 \mp 2i\beta z - \omega_0^2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{+2i\beta \pm \sqrt{(2i\beta)^2 + 4\omega_0^2}}{2} = +i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = +i\beta \pm \sqrt{\Omega^2} = +i\beta \pm \Omega$$



$$G(t) = \int_{\longrightarrow} \frac{e^{izt}}{(z-z_1)(z-z_2)}\, dz \qquad z = x + iy$$

$$izt = it(x+iy) = itx - ty$$

$$e^{izt} = e^{itx} e^{-ty} \qquad \begin{matrix} t<0 & y<0 \\ t>0 & y>0 \end{matrix}$$

$$G(t) = \begin{cases} t<0 & \oint \dots dz = 0 \quad \text{mert nincs pólus a félsíkon} \\ t>0 & \oint \dots dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}(z_k) \end{cases}$$

$$g(z) = e^{izt} \qquad h(z) = z^2 - 2i\beta z - \omega_0^2$$

$$h'(z) = -2i\beta + 2z = 2(z - i\beta)$$

$$\mathrm{Res}\, z_1 = \frac{e^{iz_1 t}}{2(z_1 - i\beta)} = \frac{e^{i(i\beta+\Omega)t}}{2(i\beta+\Omega-i\beta)} = \frac{1}{2\Omega} e^{-\beta t} e^{i\Omega t}$$

$$\mathrm{Res}\, z_2 = \frac{e^{iz_2 t}}{2(z_2 - i\beta)} = \frac{e^{i(i\beta-\Omega)t}}{2(i\beta-\Omega-i\beta)} = \frac{-1}{2\Omega} e^{-\beta t} e^{-i\Omega t}$$

$$\mathrm{Res}\, z_1 + \mathrm{Res}\, z_2 = e^{-\beta t}\left(\frac{e^{it\Omega} - e^{-it\Omega}}{2\Omega}\right) = \frac{e^{-\beta t} i \sin \Omega t}{\Omega}$$

$$\int = 2\pi i \frac{e^{-\beta t} i \sin\Omega t}{\Omega} = -2\pi \frac{e^{-\beta t} \sin \Omega t}{\Omega}$$

Tehát

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ \dfrac{e^{-\beta t}\sin\Omega t}{\Omega} & \text{ha } t>0 \end{cases} \qquad \text{kauzális Green-fgv}$$

Újfajta példa:

$$I(p)=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2}\qquad \text{ahol}\quad 0<p<1,\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

Legyen φ az egységsugarú kör szöge

$$z=e^{i\varphi}\Rightarrow \ln z=i\varphi\Rightarrow \varphi=\frac{1}{i}\ln z$$

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{1}{iz}\Rightarrow d\varphi=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$I(p)=\oint\frac{\frac{dz}{iz}}{1-2p\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)+p^2}=\frac{1}{i}\oint\frac{dz}{z-2p\frac{z^2+1}{2z}+p^2z}=\frac{2}{i}\oint\frac{dz}{2z(1+p^2)-2p(z^2+1)}=$$

$$=\frac{2i}{p}\oint\frac{dz}{z^2+1-2z\left(\frac{1+p^2}{p}\right)}$$

Hol van a nevező zérushelye

$$z^2-2z\left(\frac{1+p^2}{p}\right)+1=0$$

$$z_{12}=\frac{2\left(\frac{1+p^2}{p}\right)\pm\sqrt{4\left(\frac{1+p^2}{p}\right)^2-4}}{2}=\frac{\frac{1+p^2}{p}\pm\sqrt{\left(\frac{1+p^2}{p}\right)^2-4}}{2}=$$

$$=\left(\frac{1+p^2}{p}\pm\sqrt{\frac{1-2p^2+p^4}{p^2}}\right)\frac{1}{2}=\begin{cases}p\\ \frac{1}{p}\end{cases}$$

$$I(p)=\frac{2i}{p}\oint\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)}=$$

A körön az egyik most nem esik körül

$$=\frac{2i}{p}\,2\pi i\,\operatorname{Res}f(p)$$

$$g(z)=1$$

$$h(z)=z^2+1-2z\frac{1+p^2}{p}\qquad h'(z)=2z-2\frac{1+p^2}{p}$$

$$\operatorname{Res}f(p)=\frac{1}{2p-2\frac{1+p^2}{p}}=\frac{p}{2p^2-2(1+p^2)}=\frac{p}{p^2-1}$$

$$I(p)=\frac{-4\pi}{p}\cdot\frac{p}{p^2-1}=\frac{4\pi}{1-p^2}$$

Gyakorlat

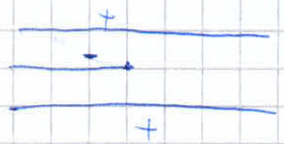
$w = f(z)$

A Descartes ~~képe~~ W-n képe z-n egy ortogonális rendszer

Ha Φ = konst vonal ősképe egy fémfelület, akkor z-n a Φ = konst vonalak ekvipot., Ψ = konst pedig az erővonalak

Egy adott fémfelületet le kell képezni egy egyenesre egy komplex fgv.-nyel

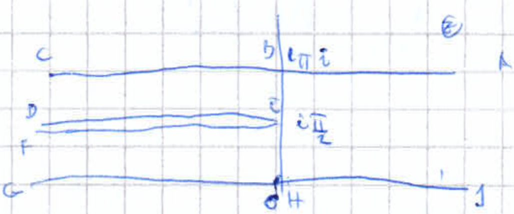
Pl.:



Milyen a tér?

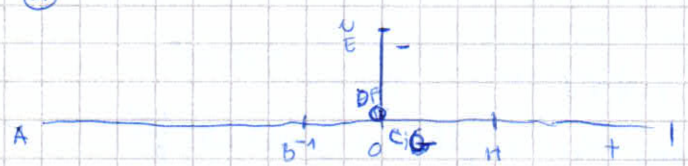
Tipikus elrendezések: – végtelen sík
– kondenzátor
– henger

A Riemann gömbön a végtelenek összeesnek

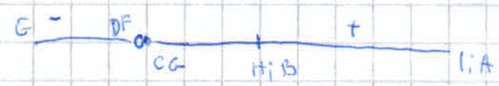


	ⓩ	$z_1 = e^z$	$z_2 = z_1^2$	$z_3 = z_2 + 1$	$z_4 = \sqrt{z_3}$
A	$\infty + \pi i$	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$
B	$0 + \pi i$	-1	1	2	$-\sqrt{2}$
C	$-\infty + \pi i$	0	0	1	-1
D	$-\infty; \frac{\pi}{2} i$	0	0	1	-1
E	$0; i\frac{\pi}{2}$	i	-1	0	0
F	$-\infty; \frac{\pi}{2} i$	0	0	1	1
G	$-\infty; 0$	0	0	1	1
H	$0; 0$	1	1	2	$\sqrt{2}$
I	$\infty; +0$	∞	∞	∞	∞

z_1



z_2

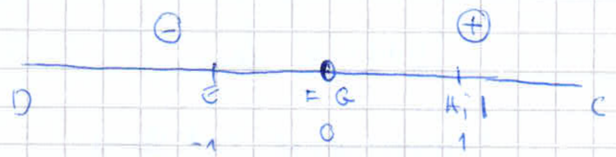


z_4

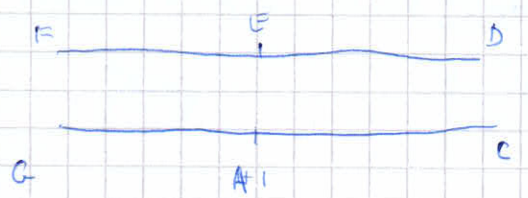
z_5

cél $-1 \to \infty$ törtlineáris fgv. $\frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow z_5 = \frac{z_4 - 1}{z_4 + 1}$

$1 \to 0$



w



Ez még konvenciókban, amivel a tér ismert.

Az ami visszaírható z-be

$$w = \frac{1}{\pi} \ln z_5 = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{z_4-1}{z_4+1}\right) = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{z_3}-1}{\sqrt{z_3}+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{z_2+1}-1}{\sqrt{z_2+1}+1}\right) = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{z_1^2+1}-1}{\sqrt{z_1^2+1}+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{e^{z}+1}-1}{\sqrt{e^{z}+1}+1}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\sqrt{e^{2z}+1}-1\right) - z\right]$$

$$w'(z) = \frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{e^{2z}-1}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{2z}+1}} \, 2e^{2z} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{e^{2z}}{\sqrt{e^{2z}+1}\left(\sqrt{e^{2z}+1}-1\right)} - 1 = E_y + iE_x$$

$z_5 = \frac{z_4-1}{z_4+1}$	$w = \ln z_5 \frac{1}{\pi}$
1	0
∞	∞
∞	$\infty + i$
-1	i
0	$-\infty + i\pi$
0	$-\infty$
1	0

Alaptétel: tetszőleges sokszög leképezhető egy egységsugarú körre egy komplex fgv.-nyel. (felírható, de nem számítható)

Sőt tetszőleges zárt görbe leképezhető (nincs exakt képlet rá)

~~Még konstans~~

MAT. MÓDSZ.

6. előadás (03.21.)

Általános harmonikus analízis / lineáris diffegyenletek elmélete

$u(t)$:

$$\ddot{u} = -u \quad \rightarrow \text{harmonikus oszcillátor}$$

$u(t,x)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{hullámegyenlet}$$

$\sin(\omega t)\ddot{u} + e^{2t}\dot{u} = -\cos(2\omega t)$ Ezt hogy a ⋆⋆⋆ oldjuk meg?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}_{\Delta u}$$

vagy $\ddot{u} = -u + \cos(\omega t)$ kényszerrezgés

Lineáris diffegyenlet: ahol az ismeretlen fgv. és deriváltjai lineáris kombinációja van összefüggés

- Állandó eh.-s: az eh.-k konstansok
- változó eh.-s: nem ↑

egyváltozós fgv. esetén: közönséges diffegyenlet

többváltozós fgv.: parciális diffegyenlet

Ha van olyan tag, ami nem tartalmazza az ismeretlent: inhomogén

Homogén lineáris diffegyenletnek mindig van megoldása (triviális megoldás)

Kell kezdőfeltétel. Ökölszabály: annyi kezdőfeltétel kell, ahányadrendű a diffegyenlet

parciálisnál: határ- és kezdeti feltétel (peremfeltétel)

Korrekt megfogalmazás: van pontosan egy megoldás

A lineáris diffegyenleteknek mindig van megoldásuk. Adott feltételek mellett egy megoldás van, és vannak ~~kezdeti feltétele~~ megoldási módszereik

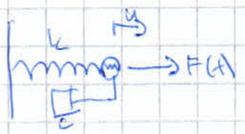
Állandó együtthatós lineáris diffegyenlet

	közönséges	parciális
homogén	SÉ	SÉ
inhomogén		

a megoldás menetét

A homogén esetben főszerepet játszik egy egyenlet, mint a sajátérték problémán.

Csillapított oszcillátor



$$m\ddot{u}(t) = -ku(t) - c\dot{u}(t) + F(t)$$

Másodrendű, közönséges lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet.

$$\ddot{u} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\beta}\dot{u} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}u = \underbrace{\frac{1}{m}F(t)}_{f(t)}$$

$$\underline{\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)}$$

Ez a standard alak

$$\ddot{u} = \frac{d^2}{dt^2}u$$

A $\frac{d}{dt}$ egy fgv-hez fgv-t rendel, és ez additív és homogén.

Ez egy lineáris operátor a fgv-k halmazán. A fizikusok által elképzelhető fgvk halmaza lineáris tér, így a $\frac{d}{dt}$ ennek az operátora

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)u(t) = f(t)$$

ω_0^2 mellé kéne az egység operátor
az leszorzódik

$$\hookrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{d}{dt}\right)^1 + \omega_0^2\left(\frac{d}{dt}\right)^0\right]u(t) = f(t)$$

Az operátoroknak egy polinomja van ott

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = L\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} f(t)$$

Hogy kell a ~~diffoperátor~~ operátor inverzét meghatározni: Gauss elimináció

Node a diffoperátor repr-je végtelen mátrix, arra ez nem jó

$\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{b}$ TFH ennek megoldása $\underline{y}$

akkor $\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{0}$ megoldása $\underline{y}_0$

Ekkor $\underline{\underline{A}}(\underline{y}+\underline{y}_0) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{\underline{A}}\,\underline{y}_0 = \underline{b}+\underline{0}=\underline{b}$ Ez is megoldása az ~~diff~~egy. inhomogén problémának

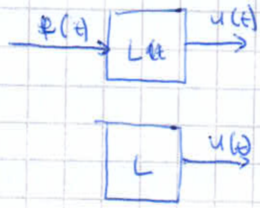
Homogén esetben a megoldások lineáris teret alkotnak

Az inhomogén ált. megoldása: 1 konkrét megoldás + homogén ált. megoldás

$\Rightarrow$ Az inhomogén esetben meg kell oldani a homogén esetet.

Lépések kérdései: – hogy kell a homogént megoldani?
– hogy kell az inhomogént partikulárisan megoldani?

Hírközléstechnikus ábrázolás:



inhomogén

homogén eset

Parciális eset:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]u = 0$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = 0$$

homogén esetben: $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = f(t,x)$

általánosan: $\underline{\underline{L}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\underline{\nabla}\right)\underline{u}(t,\underline{r}) = \begin{cases} 0 \\ \underline{f}(t,\underline{r}) \end{cases}$

Eddigi esetek $L\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases}$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = \begin{cases} 0 \\ f(t,x) \end{cases}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\underline{\nabla}\right)u(t,\underline{r}) = \begin{cases} 0 \\ f(t,\underline{r}) \end{cases}$$

$$\underline{\underline{L}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\underline{\nabla}\right)\underline{u}(t,\underline{r}) = \begin{cases} 0 \\ \underline{f}(t,\underline{r}) \end{cases}$$

homogének alesete: $L\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = \lambda \cdot u(t)$ sajátérték-probléma

itt nem a probléma, hanem a határfeltétel határozza meg λ-t
a határfeltétel megkvantálja a frekvenciát.

Sturm–Liouville-probléma = sajátérték probléma

Közönséges, homogén

$$\boxed{L\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = 0}$$

Miért szeretjük az exp fgv-t?

$$\frac{d}{dt} e^{ct} = c\, e^{ct}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{ct} = c^n e^{ct}$$

$$\left(5\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + 2\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 3\frac{d}{dt} + 7\right) e^{ct} = \left(5c^3 + 2c^2 - 3c + 7\right) e^{ct}$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) e^{ct} = L(c)\, e^{ct}$$

(A $\frac{d}{dt}$ operátornak az e^{ct} a sajátfgv.-e a c pedig a sajátérték)

$\Rightarrow$ Akkor van megoldása az $L\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = 0$ egyenletnek, ha

$L(c)\, e^{ct} \equiv 0$ $\qquad$ e^{ct} sose lesz minden t-re 0, tehát

a feltétel: $\underline{L(c) = 0}$ $\qquad$ Ez már egy algebrai egyenlet

n-ed fok esetén n db c van. (TFH különbözőek)

$c_k \in \mathbb{C}$

Van az egyenletnek $e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, \dots e^{c_n t}$ megoldása. Mivel a megoldások lin. komb.-ja is megoldás, és teret alkotnak, amelynek ezek a bázisfgv-i.

Ált. megoldás: $\boxed{u(t) = \sum_k A_k e^{c_k t}}$ ahol A_k önkényes konstansok $A_k \in \mathbb{C}$

$L(c)$ a karakterisztikus egyenlet

mi van, ha van egybeeső megoldás? két lehetőség van:

- Szimmetria $\Rightarrow$ Csoportelmélet
- véletlen $\Rightarrow$ perturbáció

Mivel c általában komplex, a végén ezt értelmezni kell, és valós

TFH: $u(t) = e^{i\omega t}$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) e^{i\omega t} = L(i\omega)\, e^{i\omega t} = 0$$

ekkor: $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n \in \mathbb{C}$

Gyakorlat

m [illegible]

$$m\ddot{u} = -ku - c\dot{u}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m} = 0$$

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 = 0$$

TFH: $u = e^{ct}$ $\quad \dot{u} = c e^{ct}$ $\quad \ddot{u}\ c^2 e^{ct}$

$$c^2 e^{ct} + 2\beta c e^{ct} + \omega_0^2 e^{ct} = 0$$

$$(c^2 + 2\beta c + \omega_0^2) e^{ct} = 0$$

$$c^2 + 2\beta c + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow c_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

3 eset:
- $\beta > \omega_0 \longrightarrow c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- $\beta = \omega_0 \longrightarrow$ [illegible]
- a) $\beta < \omega_0 \longrightarrow c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Mivel [illegible] $i\omega$-val [illegible]

TFH: $u = e^{i\omega t}$ $\quad \dot{u} = i\omega e^{i\omega t}$ $\quad \ddot{u} = (i\omega)^2 e^{i\omega t}$

$$(i\omega)^2 e^{i\omega t} + 2\beta(i\omega) e^{i\omega t} + \omega_0^2 e^{i\omega t} = 0$$

$$\left[(i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2\right] e^{i\omega t} = 0$$

$$(i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2 = 0$$

$$-\omega^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2 = 0$$

$$\omega^2 - 2\beta i\omega - \omega_0^2 = 0 \longrightarrow \omega_{12} = \frac{2i\beta \pm \sqrt{(2i\beta)^2 + 4\omega_0^2}}{2} = i\beta \pm \sqrt{-\beta^2 + \omega_0^2} =$$

$$= i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

3 eset

a) $\beta < \omega_0$

~~[illegible]~~ $\quad 0 < \omega_0^2 - \beta^2 = \Omega^2$

$$\omega_{12} = i\beta \pm \Omega$$

$$u_1(t) = e^{i\omega_1 t} = e^{-\beta t} e^{i\Omega t}$$

$$u_2(t) = e^{i\omega_2 t} = e^{-\beta t} e^{-i\Omega t}$$

$$u_{\text{ált}}(t) = A u_1(t) + B u_2(t) = A$$

b)

Általános megoldás

$$u(t) = A e^{-\beta t} e^{i\Omega t} + B e^{-\beta t} e^{-i\Omega t} = e^{-\beta t}\left(A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}\right) =$$

A és B önkényes, de a KF.-ek valósak, így nem lehetnek A-ra B-re

$$= e^{-\beta t}\left[A(\cos\Omega t + i\sin\Omega t) + B(\cos\Omega t + i\sin\Omega t)\right] = e^{-\beta t}\left[(A+B)\cos\Omega t + i(A-B)\sin\Omega t\right] =$$

Ha $B = A^*$, akkor eltesik a képzetes rész legyen $A+B = a$ és $i(A-B) = b$

$$= e^{-\beta t}\left(a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)\right)$$

KF. $u(0) = u_0$

$v(0) = v_0$

$$\dot u(t) = i\omega_1 A e^{i\omega_1 t} + i\omega_2 B e^{i\omega_2 t} \qquad \dot u(0) = i\omega_1 A + i\omega_2 B \stackrel{!}{=} v_0$$

$$u(t) = A e^{i\omega_1 t} + B e^{i\omega_2 t} \qquad u(0) = A + B = u_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_1 & i\omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$ Akkor nincs mo., ha $\omega_1 = \omega_2$

$$A = \frac{-i v_0 + \omega_2 u_0}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{-i v_0 + u_0(i\beta - \Omega)}{2\Omega} \qquad B = \frac{-i v_0 - \omega_1 u_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{i v_0 - u_0(i\beta + \Omega)}{2\Omega}$$

ezek tényleg konjugáltak

MAT. MÓD.

7. előadás (03. 28.)

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=\begin{cases}0 & \text{homogén}\\ f(t) & \text{inhomogén}\end{cases}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=\begin{cases}0\\ f(t,x)\end{cases}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\underline{\nabla}\right)u(t,\underline{r})=\begin{cases}0\\ f(t,\underline{r})\end{cases}$$

A homogén egyenletek megoldásai lineáris teret alkotnak, a cél ilyenkor bázist találni.
Továbbá, a homogén egyenlet tetszőleges megoldása hozzáadható az inhomogénhez

---

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=0$$

Keressük a megoldást $u(t)=e^{i\omega t}$

mert az sajátfüggvény $\frac{d}{dt}e^{i\omega t}=i\omega e^{i\omega t}$

tehát $L\left(\frac{d}{dt}\right)u=L(i\omega)u=0$

$L(i\omega)=0 \rightarrow n$ db megoldás

$e^{i\omega_1 t};\ e^{i\omega_2 t};\ e^{i\omega_n t}$

$$u(t)=\sum_k c_k e^{i\omega_k t}$$

Be kéne bizonyítani, hogy ezek az $e^{i\omega_k t}$-k bázis, mert akkor teljes és az ált. mo.

Többváltozós: $u(t,x)$

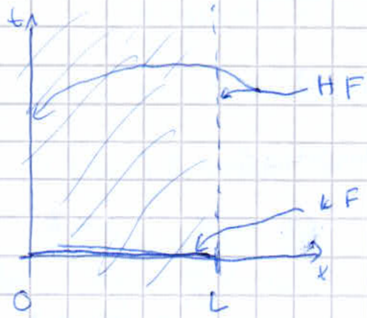
$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=0$$

több megoldási módszer van, majd ismerjük a hátt.

Húr

rugalmas húr jelenségére érvényes, hogy: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Mellék feltételek:



$u(t, x=L) = 0 \quad \forall t$

$u(t, x=0) = 0 \quad \forall t$

$u(t=0, x) = \alpha(x) \quad \forall x$

természetesen $\alpha(0) = 0$

$\alpha(L) = 0$

TFH: $u(t, x) = T(t) X(x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{T}(t) X(x) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) X''(x)$$

visszaírva: $\ddot{T}(t) X(x) = c^2 T(t) X''(x)$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Ha t vagy x változik, de a másik nem, az egyenlőség csak úgy működhet $\forall x$-re, t-re, ha $\frac{\ddot{T}}{T}$ és $c\frac{X''}{X}$ konstans

Két diffegyenletet kapunk:

$$\ddot{T}(t) = k T(t)$$
$$c^2 X''(x) = k X(x)$$

Mindkettő lineáris homogén, de összeköti őket k

diszkutálni kell k előjele szerint. Belátható, hogy $k \geq 0$ nem lehet

$k < 0$

Legyen $k = -\omega^2$

(1) $\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t)$ egyszerű harmonikus: $T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

(2) $X''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} X(x)$ legyen $\frac{\omega^2}{c} = k$

$X''(x) = -k^2 X(x) \longrightarrow$ ez is egyszerű oszcilláció $X(x) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$

$u(t,x) = T(t)\left(C\cos(kx) + D\sin(kx)\right)$

HF1: $x=0$

$$u(t, x=0) = T(t)\left(C\cos(0) + D\sin(0)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$C = 0$$

HF2 $x=L$ $\quad u(t, x=L) = T(t)\, D \stackrel{!}{=} 0$

$$\sin(kL) = 0$$

$$kL = n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

A határfeltétel meghatározza a szeparációs állandót

$$k_n = n\frac{\pi}{L} \qquad \omega_n = n\frac{\pi c}{L}$$

A frekvencia egy alapfrekvencia többszörösei

$X_n(x) = \sin(k_n x)$

$T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$ $\qquad$ ahol $ck_n = n\frac{c\pi}{L}$

$$n \in \mathbb{N}$$

Általános megoldás: $\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\right)\sin(k_n x)}$

A-k és B-k a kezdőfeltételektől függ

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\omega_n A_n\sin(\omega_n t) + B_n\omega_n\cos(\omega_n t)\right)\sin(k_n x)$$

Mivel $u(t=0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(k_n x) = \alpha(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t=0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n\sin(k_n x) = \beta(x)$$

Általában α és β fgv-t fel kell venni nivosak bonyolult kell-járó

A függvények egy teret alkotnak

$\vec{v} = c_1\vec{e}^{(1)} + c_2\vec{e}^{(2)}$ $\qquad$ Ha $\vec{e}^{(i)}$ ortonormált akkor $\vec{v}\,\vec{e}^{(1)} = c_1$

Általánosan: $\vec{e}^{(k)}\,\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$

$$\vec{v} = \sum_k v_k\,\vec{e}^{(k)}$$

$$\vec{v}\,\vec{e}^{(l)} = \sum_k v_k\,\vec{e}^{(k)}\,\vec{e}^{(l)} = \sum_k v_k\,\delta_{kl} = v_l$$

Ismert v_k-k esetén előállítható $\vec{v}$. Ismert $\vec{v}$ esetén előállíthatók v_k-k.

Hipotézis: Bármilyen α és β esetén lesz megoldás, csak kell kellő megoldás

$\Rightarrow$ Bármilyen α és β felbontható sinusokra (Fourier-sorba) és ezáltal megoldható.

Ehhez kell egy skaláris szorzás.
$$\int f(x)g(x)\,dx = (f, g)$$

ortogonális fgv-rendszerek: ahol a bázisok skaláris szorzata δ

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \int \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,dx \qquad \Rightarrow \int \varphi_k^2(x)\,dx = 1$$

Ez alapján kifejthető α fgv: $\alpha(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x)$

vagyis $(\varphi_l, \alpha) = \sum c_k \underbrace{(\varphi_l \varphi_k)}_{\delta_{kl}} = c_l$

A sinusok ortogonálisak?

Legyen $\varphi_n(x) = \sin(k_n x)$ $\qquad k_n = n k_1 = n\frac{\pi}{L}$

$\varphi_m(x) = \sin(k_m x)$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^L \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,dx = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\cos[(k_n - k_m)x] - \cos[(k_n + k_m)x]\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos(n-m)k_1 x - \cos(n+m)k_1 x\right] =$$

$\int \cos(n-m)k_1 x\,dx = 0$ kivéve ha $n = m$

$$= \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

egyébként $\int \cos(n-m)k_1 x\,dx = L$

Vagyis

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin(k_m x)\sin(k_n x)\,dx = \int_0^L \sin(k_m x)\,\alpha(x)\,dx$$

$$\sum_n A_n \frac{L}{2}\delta_{nm} = \cancel{\dots} \qquad \Rightarrow \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(k_n x)\,\alpha(x)\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(k_n x)\,\beta(x)\,dx$$

TEHÁT eredeti probléma: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

HF: $u(t, x=0) = 0$

$u(t, x=L) = 0$

KF: $u(t=0, x) = \alpha(x)$

$u(t=L, x) = \beta(x)$

megoldás: $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)\sin(k_n x)$

ahol $A_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L \sin(k_n x)\,\alpha(x)\,dx \qquad B_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L \sin(k_n x)\,\beta(x)\,dx$

$k_n = n\frac{\pi}{L} \qquad \omega_n = n\frac{c\pi}{L}$

1DE

$$u(t,x) = T(t)\, X(x)$$

TFH: $T(t) \to e^{-i\omega t}$, $X(x) \to U(x)$

$$u(t,x) = U(x)\, e^{-i\omega t}$$

$\forall$ fgy $L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = \left(L\left(-i\omega, \frac{d}{dx}\right) U(x)\right) e^{-i\omega t} \overset{!}{=} 0$

$L\left(-i\omega, \frac{d}{dx}\right) U(x) = 0$ Ez már közönséges diffegyenlet U-ra

Az eredeti diffegyenletben: $(-i\omega)^2 U = c^2 \frac{d^2 U(x)}{dx^2}$

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2} U(x) = -i\omega^2 U(x)$$ sajátérték probléma

A megoldásban vannak a sajátfüggvényei, így ezeken számunk

Ha föl akarunk írni egy fgv-t bizonyos fgv-k lineáris komb.-jaként az az általános Fourier-probléma

Vegyünk olyan fgv-eket $[0; L]$-en, ahol $f(0) = f(L)$! Terjesszük ki a fgv.-t a teljes számegyenesre (periodikus fgv.) $f(x+L) = f(x)$

Legyen $k_1 = \frac{2\pi}{L}$ $\sin k_1 x$ ilyen

$\sin 2k_1 x$ is

$\sin(n k_1 x)$ is és $\cos(n k_1 x)$ is

~~Ezek a fgv~~ Ezek a sajátos mindenhol periodikus fgv.-k Fourier bázis általában

Kritériumok: - korlátos

- véges sok szakadás a periódusban

- a szakadásoknál a fgv. értéke a határok átlaga

Az ilyenek kifejthetők a következő alakban:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)\right)$$ Fourier-sor

Belátható, hogy ezek ortogonálisak

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2L}{2L} \int_0^L f(x) \cos(k_n x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k_n x)\, dx$$

MATMÓD

8. előadás (04.04.)

periodikus függvények lebontása $1;\ \sin kx;\ \cos kx$ elemeire ahol $k = \frac{2\pi}{L}$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nk_1x) + b_n \sin(nk_1x)\right]$$

ahol $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(nk_1x)dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(nk_1x)dx$

Ezek eddig valósak voltak. komplexekkel

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{ink_1x}+e^{-ink_1x}}{2} + b_n \frac{e^{ink_1x}-e^{-ink_1x}}{2i}\right] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{ink_1x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-ink_1x} =$$ átírva a 2. summában $-n$-re

$$= a_0 e^{0ik_1x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{ink_1x} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}e^{ink_1x}$$

Legyen $c_0 = a_0$ ha $n>0$ $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

ha $n<0$ $c_n = \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}$

$$f(x) = c_0 e^{i0k_1x} + \sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{ink_1x} + \sum_{n=-\infty}^{-1}c_n e^{ink_1x}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ink_1x}}$$

ahol ha $n>0$ $\quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(nk_1x)dx - i\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(nk_1x)dx\right) =$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\left(\cos(nk_1x) - i\sin(nk_1x)\right)dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-inkx}dx$$

ha $n<0$ $\quad c_n = \frac{a_n + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(-nk_1x)dx + i\frac{2}{L}\int f(x)\sin(-nk_1x)dx\right) =$

$$= \frac{1}{L}\int f(x)\left(\cos(nk_1x) - i\sin(nk_1x)\right)dx = \frac{1}{L}\int f(x)e^{-ink_1x}dx$$

ha $n=0$ $\quad c_0 = \frac{1}{L}\int f(x)dx = \frac{1}{L}\int f(x)e^{0ik_1x}dx$

Tehát minden esetben: $\boxed{c_n = \frac{1}{L}\int f(x)e^{-ink_1x}dx}$

A spektrum elemeinek távolsága : $\Delta k = k_1 = \frac{2\pi}{L}$: nagyobb periódus, sűrűbb spektrum

Növeljük a periódust $L \to \infty$-be

ekkor $c_k \to 0$

$\Delta k \to 0$

de $\frac{c_k}{\Delta k}$ nem

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\Delta k} e^{ink_1x} \Delta k \qquad \text{és} \qquad \frac{c_n}{\Delta k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-ink_1x} dx$$

írjuk újra át :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n\sqrt{2\pi}}{\Delta k} e^{ink_1x} \Delta k$$

$$\frac{c_n\sqrt{2\pi}}{\Delta k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-ink_1x} dx$$

nk_1 helyett legyen k és az $L \to \infty$ esetén általában

$$\frac{c_n\sqrt{2\pi}}{\Delta k} \to F(k)$$

Tehát elnyerjük a határátmenetet :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dx} \quad \text{ahol} \quad \boxed{F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx}$$

Vagyis nem periodikus fgv összerakásához az összes hullámhosszra kell

Integráltranszformáció $F(k)$ és $f(x)$ ugyanazon a $|f\rangle$ absztrakt vektor repr-je

Általában az integrál transzformáció

$$f(t) = \int K(t,\omega)\, F(\omega)\, d\omega$$

$$F(\omega) = \int S(\omega,t)\, f(t)\, dt \qquad \text{ahol } S \text{ nem független } K\text{-tól}$$

Adott K-hoz megtalálni S-t bonyolult feladat

Többváltozós esetén

$$f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int dk_1 \int dk_2\, F(k_1,k_2)\, e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2}$$

$$F(k_1,k_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1,x_2)\, e^{-ik_1x_1} e^{-ik_2x_2}$$

Ugyanígy több változó esetén

$$\boxed{\begin{aligned} f(\underline{r}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int F(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\underline{r}}\, d^n\underline{k} \\ F(\underline{k}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int f(\underline{r})\, e^{-i\underline{k}\underline{r}}\, d^n\underline{r} \end{aligned}}$$

Vektortranszformációk:

$$v'_k = \sum_l K_{kl} v_l$$

$$v_m = \sum_k S_{mk} v'_k$$

Együttesen: $v_m = \sum_k S_{mk}\left(\sum_l K_{kl} v_l\right) = \sum_l \Big(\underbrace{\sum_k S_{mk} K_{kl}}_{(SK)_{ml}}\Big) v_l = \sum_l \underbrace{(SK)_{ml}}_{\delta_{ml}} v_l$

tehát $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{1}}$

Fourier esetén ugyanez:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dk \qquad \text{és} \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-iky}\, dy$$

Együttesen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-iky}\, dy\right) e^{ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi} \int\left[\int f(y)\, e^{ik(x-y)}\, dy\right] dk = \text{cserés határok mellett}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[f(y) \underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-y)}}{2\pi}\, dk\Big)}_{D(x-y)}\Big] dy = \int_{-\infty}^{\infty} D(x-y)\, f(y)\, dy$$

$D(x-y)$ analóg δ_{kl}-lel

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq l \\ 1 & \text{ha } k = l \end{cases}$$

$D(x-y) \to \delta(x-y)$ Ez nem függvény!!!

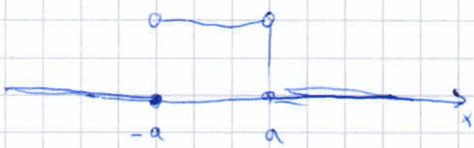
de ez az integráltranszformációnak az egységoperátora

Szinguláris [illegible] marad, így ez egy szinguláris magú integrál operátor

Dirac-delta.

Vegyünk egy fgv-t: $f(x)$

Vegyünk egy $D_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < -a \\ 0 & \text{ha } x > a \\ \frac{1}{2a} & \text{ha } -a < x < a \end{cases}$



$$\int_{-\infty}^{\infty} D_a(x)\,dx = 1$$

A $D_a(x) f(x)$ csinál az $f(x)$ fgv.-ből kivág egy darabot

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_a(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} f(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$ Ez az $f(x)$ fgv átlagos nagysága $[-a; a]$-n

$\exists\, \xi \in [-a, a] : f(\xi) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, mert $f(x)$ folytonos

Legyen $a \to 0$

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_a(x)\,dx = \lim_{a \to 0} f(\xi) = f(0)$$

Felcserélve a limeszt $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\left(\lim_{a\to 0} D_a(x)\right)}_{\delta(x)} dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$ általában: $f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-y)\,dx$

A Dirac-delta az egységoperátor e_k alapján

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-y)}}{2\pi}\, dk = \delta(x-y)$$

Gerjesztett oszcillátor

$$m\ddot{u} = -ku - c\dot{u} + F(t)$$

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{d}{dt}\right) + \omega_0^2\right) u(t) = f(t)$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = f(t)$$

$f(t)$-t írjuk fel egyszerű fgv.-k lin. kombinációjára

azokra megoldjuk, és újra összerakjuk

ha csak $e^{i\omega t}$-ekre jó

$$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{L\left(\frac{d}{dt}\right)} \longrightarrow C e^{i\omega t}$$

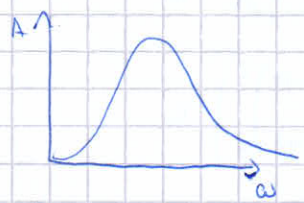
$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\left(C e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t}$$

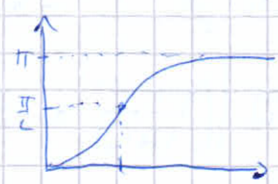
$$C\, L\left(\frac{d}{dt}\right) e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$C\, L(i\omega)\, e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$\underline{C\, L(i\omega) = 1} \longrightarrow C = \frac{1}{L(i\omega)} = C(\omega) \quad \text{átviteli függvény}$$

megoldás: $\mathrm{Re}\left(C e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(A e^{-i\varphi} e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(A e^{i(\omega t - \varphi)}\right) = A \cos(\omega t - \varphi)$





$$f(t) = \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \int F(\omega)\, C(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = u(t)$$

Felírva f-t és u-t Fourier-re:

$$f(t) = \int F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \qquad u(t) = \int U(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\int U(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\int U(\omega)\, L\left(\frac{d}{dt}\right)e^{i\omega t}\cdot d\omega = \int F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\int U(\omega)L(i\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Ez csak akkor lehet, ha $U(\omega)L(i\omega) = F(\omega)$

és az eredeti diffegyenlettel ekvi, de algebrai

$$U(\omega) = \frac{F(\omega)}{L(i\omega)} = C(\omega)F(\omega)$$

Tehát $u(t) = \int C(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ ezt reziduum-tétellel lehet kiszámolni

Gyakorlat

Fourier [illegible]

$$f(t) = \begin{cases} \sin\Omega t & \text{ha } 0 \le t \le \frac{2\pi}{\Omega} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T f(t)e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T \sin\Omega t\, e^{i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T \frac{e^{i\Omega t}-e^{-i\Omega t}}{2i}e^{i\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_0^T \left(e^{i(\Omega-\omega)t} - e^{-i(\Omega+\omega)t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{e^{i(\Omega-\omega)t}}{i(\Omega-\omega)} + \frac{e^{-i(\Omega+\omega)t}}{+i(\Omega+\omega)}\right]_0^T\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i(\Omega-\omega)T}}{\Omega-\omega} + \frac{e^{-i(\Omega+\omega)T}}{\Omega+\omega} - \frac{1}{\Omega-\omega} - \frac{1}{\Omega+\omega}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\left((\Omega+\omega)\left(e^{i(\Omega-\omega)T}-1\right) + (\Omega-\omega)\left(e^{-i(\Omega+\omega)T}-1\right)\right) =$$

$$= +\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega^2-\Omega^2}\left((\Omega+\omega)\left(e^{-i\omega T}-1\right) + (\Omega-\omega)\left(e^{-i\omega T}-1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega^2-\Omega^2}2\Omega\left(e^{-i\omega T}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\left(e^{-i\omega T}-1\right)$$

Fourier sor

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{ha } 0<t<T\\ 1/2 & \text{ha } t=T\\ 0 & \text{ha } T<t<2T\\ 1/2 & \text{ha } t=2T\end{cases} = a_0+\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right)$$

ahol $\omega_1=\frac{2\pi}{2T}=\frac{\pi}{T}$

$$a_0=\frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)\,dt=\frac{1}{2T}\cdot T=\frac{1}{2}$$

$a_i = 0$ mert páratlan

$$b_n=\frac{1}{2T}\int_0^{2T}\underbrace{f(t)\,dt}_{\sin(n\omega_1 t)}=\frac{1}{T}\int_0^{T}\sin(n\omega_1 t)\,dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{\cos(n\omega_1 t)}{n\omega_1}\right]_0^T=\frac{1}{Tn\omega_1}\left(1-\cos(n\omega_1 T)\right)=$$

$$=\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\begin{cases}0 & \text{ha } n=2k\\ \frac{2}{n\pi} & \text{ha } n=2k+1\end{cases}$$

tehát: $f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\left((2k+1)\omega_1 t\right)$

MAT MÓD

9. előadás (04.11.)

Fourier transzformáció

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

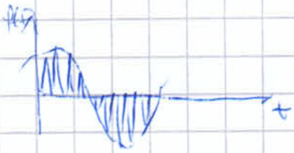
Egyszerűen írva:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \; e^{i\omega t} d\omega = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right) =$$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \, \delta(t-\tau) \, d\tau \qquad \sim \qquad f_t = \sum_{\tau} \delta_{t\tau} f_\tau$$

Ez olyan, mint ha a fgv-t sok tüskéből rakná össze

↳ $\delta(t-\tau)$



DE! Ez is olyan, mintha kifejtettük volna.

$\cancel{f_t = \sum_\tau c}$

$$f(t) = \sum_k c_k f_k(t)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$f(t) = \int f(\tau) \, \delta(\tau) \qquad \text{Ez is analóg}$$

[illegible] probléma:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = f(t) \qquad f \to \boxed{L} \to u$$

megoldás menete:

① $f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t) \Rightarrow c_k$

② $L \xi_k(t) = \varphi_k(t) \Rightarrow$ megoldás ξ_k $\quad$ ∞ sok feladat

③ $u(t) = \sum_k c_k \xi_k(t)$ mert $Lu = L\left(\sum_k c_k \xi_k\right) = \sum_k c_k L\xi_k = \sum_k c_k \varphi_k = f(t)$ ✓

Az első esetben, amikor minket [illegible] a jó, [illegible]

Fourier módszer:

$$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow C e^{i\omega t} \qquad \text{ahol} \qquad C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$$

tehát $$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underbrace{F(\omega)\, C(\omega)}_{U(\omega)} e^{i\omega t}\, d\omega$$

itt U az u transzformáltja

$$\underbrace{L u = f \xrightarrow[\mathcal{F}]{} L U = F}$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = f(t) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} L(i\omega)\, U(\omega) = F(\omega)$$

$$U(\omega) = \frac{F(\omega)}{L(i\omega)}$$

Diffegyenletet visszavezettük algebraira.

Ez összetett rezgéseknél borzasztó hosszas!!! (Mátrix invertálás)

Beírva itt is $F(\omega)$-t

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(\omega) C(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} C(\omega)\, d\omega =$$

$$= \int f(\tau) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int C(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right)}_{G(t-\tau) = *} d\tau = \int f(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau$$

Összefoglalva:

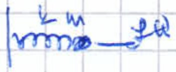
$$f(t) = \int f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

$$u(t) = \int f(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau$$

A Green-fgv egy Dirac-deltára adott válasz

A * a Green-fgv kiszámítási módja. Ez adott operátor esetén adott

Példa: gerjesztett, csillapított oszcillátor



$$\ddot u + 2\beta \dot u + \omega_0^2 u = f(t)$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{d}{dt}\right) + \omega_0^2$$

$$L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta(i\omega) + \omega_0^2 = -\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2$$

$$G(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2}$$

$$G(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2}\, d\omega$$

legyen $\omega \to z$

legyen $\tau = 0$

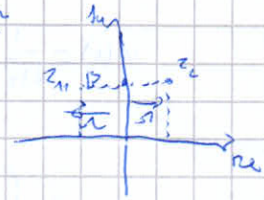
$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{-z^2 + 2i\beta z + \omega_0^2}\, dz = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{z^2 - 2i\beta z - \omega_0^2}\, dz$$

A nevező zérushelyei: $z_{1,2} = \frac{i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{1}$

ha $\omega_0 > \beta$

$\omega_0^2 - \beta^2 = \Omega^2$

$z_{1,2} = i\beta \pm \Omega$



$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{(z-z_1)(z-z_2)}\, dz = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}\, e^{-yt}}{(z-z_1)(z-z_2)} =$$

$= \begin{cases} \text{ha } t<0 & \int = \text{itt nincs pólus} = 0 \\ \text{ha } t>0 & -\frac{1}{2\pi}\oint \dots dz = -\frac{1}{2\pi}\sum_k \operatorname{Res} f(z_k)\, 2\pi i = -i\left(\frac{e^{iz_1 t}}{z_1 - z_2} + \frac{e^{iz_2 t}}{z_2 - z_1}\right) = \end{cases}$

$$= \frac{i}{2\Omega}\left(e^{iz_2 t} - e^{iz_1 t}\right) = -\frac{i}{2\Omega}\left(e^{i(i\beta+\Omega)t} - e^{i(i\beta-\Omega)t}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2\Omega}e^{-\beta t}\left(e^{+i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right) = \frac{e^{-\beta t}\sin\Omega t}{\Omega}$$

tehát
$$G(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{e^{-\beta t}\sin\Omega t}{\Omega} & t>0 \end{cases}$$

Ez a homogén probléma megoldása, ha $u(0)=0$, $\dot u(0)=1$

kauzális Green-függv.

Általánosítás több D-ben:

$u(x,y,z) = u(\underline{r})$ $\qquad$ $L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = L(\underline{\nabla})$

$L(\underline{\nabla})u(\underline{r}) = f(\underline{r})$ $\qquad$ (Pl.: elektro: $\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$)

Azaz ① $f(\underline{r}) = \sum_{\varphi} c_{\varphi}\varphi(\underline{r})$

~~$f(\underline{r}) = \sum c_n f_n$~~

① $L(\underline{\nabla})\xi(\underline{r}) = \varphi_{\varphi}(\underline{r})$

② $u(\underline{r}) = c_{\varphi}\xi(\underline{r})$

Ismerjük az elf-t: $\varphi(\underline{r}) \Rightarrow e^{i\underline{k}\underline{r}}$ $\qquad$ (síkhullám megoldás)

$$f(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int F(\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{r}}d^n\underline{k}$$

$L(\underline{\nabla})\xi(\underline{k},\underline{r}) = e^{i\underline{k}\underline{r}}$ $\qquad$ $\xi(\underline{k},\underline{r}) = ?$

$\underline{\nabla}e^{i\underline{k}\underline{r}} =$

$\nabla_e e^{i\underline{k}\underline{r}} = \frac{\partial}{\partial x_e}e^{ik_1x_1}e^{ik_2x_2}\ldots = ik_e e^{ik_\alpha}\ldots$

k_e a ∇-nak a sajátérték-je

Tehát $\underline{\nabla}e^{i\underline{k}\underline{r}} = i\underline{k}e^{i\underline{k}\underline{r}}$ $\quad$ ezért $L(\underline{\nabla})e^{i\underline{k}\underline{r}} = L(i\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{r}}$

Ha $\xi(\underline{k},\underline{r}) = C(\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{r}}$ akkor

$$L(\underline{\nabla})\left(C(\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{r}}\right) = C(\underline{k})\left(L(\underline{\nabla})e^{i\underline{k}\underline{r}}\right) = C(\underline{k})L(i\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{r}} \stackrel{!}{=} e^{i\underline{k}\underline{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(\underline{k})L(i\underline{k}) = 1 \Rightarrow \quad C(\underline{k}) = \frac{1}{L(i\underline{k})}$$

Vagyis $\xi(\underline{k},\underline{r}) = \frac{1}{L(i\underline{k})}e^{i\underline{k}\underline{r}}$

Így: $u(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int F(\underline{k})\frac{1}{L(i\underline{k})}e^{i\underline{k}\underline{r}}d^n\underline{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int U(\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{r}}d^n\underline{k}$

Miről $F(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int f(\underline{r})e^{-i\underline{k}\underline{r}}d^n\underline{r}$

~~Egyébként~~

Egyben:

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int f(\underline{\rho}) e^{-i\underline{k}\underline{\rho}} d^n\underline{\rho} \right) \frac{1}{L(i\underline{k})} e^{i\underline{k}\underline{r}} d^n\underline{k} =$$

$$= \int f(\underline{\rho}) \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{e^{i\underline{k}\underline{r}} e^{-i\underline{k}\underline{\rho}}}{L(i\underline{k})} d^n\underline{k} \right)}_{G(\underline{r}-\underline{\rho})} d^n\underline{\rho}$$

Így tehát itt is:

$$f(\underline{r}) = \int f(\underline{\rho}) \delta(\underline{r}-\underline{\rho}) d^n\underline{\rho}$$

$$u(\underline{r}) = \int f(\underline{\rho}) G(\underline{r}-\underline{\rho}) d^n\underline{\rho}$$ (itt a $G(\underline{r}-\underline{\rho})$ az, hogy milyen teret kelt a ponttöltés)

Példa

$$L(\underline{\nabla}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \Delta$$

Egyenlet $\Delta\phi = \rho$

$$L(i\underline{k}) = (i\underline{k})(i\underline{k}) = -k^2$$ Ekkor a Green-fv.:

$$G(\underline{r}-\underline{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{\rho})}}{-k^2} d^3\underline{k}$$

Ez G nem mindig jó a HF miatt, de bizonyos határfeltételek mellett meg lehet adni hasonló megoldást (pl.: tükörtöltés)

Most csak a korlátlan térre, HF-ek nélkül: $\underline{\rho} = 0$

$$G(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\underline{k}\underline{r}}}{-k^2} d^3\underline{k}$$ itt koordinátázni kell, érdemes gömbire

$$\underline{k} = |k| \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$d^3\underline{k} = k^2 \sin\vartheta \, dk \, d\vartheta \, d\varphi$$

ϑ: a $\underline{k}$ és $\underline{r}$ szöge

$$G(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} k^2 \sin\vartheta \frac{e^{ikr\cos\vartheta}}{-k^2} dk\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta \, e^{ikr\cos\vartheta} dk\, d\vartheta = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{k=0}^{\infty} \int_{w=1}^{-1} -e^{ikrw} dk\, dw =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{e^{ikrw}}{ikr} \right]_{w=-1}^{1} dk = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{k=0} \frac{2i\sin(kr)}{ikr} dk = \frac{-1}{(2\pi)^2 r} \int_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kr)}{k} dk =$$

$$= \frac{-1}{2\pi^2}\frac{1}{r}\int_{u=0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du = \frac{-1}{2\pi^2 r}\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4\pi r}$$ ponttöltés tere

Mi van, ha helytől és időtől is függ?

$u(t,\underline{r})$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\underline{\nabla}\right)u(t,\underline{r}) = f(t,\underline{r}) \qquad \left(\text{pl. } \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi^2}{\partial t^2}-\Delta\phi = \rho(t,\underline{r})\right)$$

ismeretlen $f(t,\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\iint F(\omega,\underline{k})\, \underbrace{e^{i\underline{k}\underline{r}}\, e^{-i\omega t}}\, d^3\underline{k}\, d\omega$

inverz: $F(\omega,\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\iint f(t,\underline{r})\, e^{-i\underline{k}\underline{r}}\, e^{i\omega t}\, d^3\underline{r}\, dt$

∂t: $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\underline{\nabla}\right) e^{i\underline{k}\underline{r}} e^{-i\omega t} = L(-i\omega, i\underline{k})\, e^{i\underline{k}\underline{r}} e^{-i\omega t}$

IFT: $u(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\iint U(\omega,\underline{k})\, e^{i\underline{k}\underline{r}}\, e^{-i\omega t}\, d^3\underline{k}\, d\omega$

$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\underline{\nabla}\right)u = \frac{1}{\cdot}\iint U(\omega,\underline{k})\, L(-i\omega, i\underline{k})\, e^{i\underline{k}\underline{r}}\, e^{-i\omega t}\, d^3\underline{k}\, d\omega$

tehát ezek egyenlőek, ha

$$U(\omega,\underline{k})\, L(-i\omega, i\underline{k}) = F(\omega,\underline{k})$$

tehát $U(\omega,\underline{k}) = \dfrac{F(\omega,\underline{k})}{L(-i\omega, i\underline{k})}$

Visszahelyettesítve:

$$u(t,\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint \frac{1}{L(-i\omega, i\underline{k})}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\iint f(\tau,\underline{R})\, e^{-i\underline{k}\underline{R}}\, e^{i\omega\tau}\, d^3\underline{R}\, d\tau\right) e^{i\underline{k}\underline{r}}\, e^{-i\omega t}\, d^3\underline{k}\, d\omega =$$

$$= \iint f(\tau,\underline{R})\underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\iint \frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{R})}\, e^{-i\omega(t-\tau)}}{L(-i\omega, i\underline{k})}\, d^3\underline{k}\, d\omega\right)}_{G(t-\tau,\,\underline{R}-\underline{r})} d^3\underline{R}\, d\tau$$

síkhullám: $e^{i\underline{k}\underline{r}}e^{-i\omega t}$

mert $\mathrm{Re}\left[c\,e^{i\underline{k}\underline{r}}e^{-i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[A\,e^{i(\underline{k}\underline{r}-\omega t-\varphi)}\right] = A\cos(\underline{k}\underline{r}-\omega t-\varphi)$

Akkor max, ha $\underline{k}\underline{r}-\omega t-\varphi = 2\pi N \qquad N\in\mathbb{Z}$

Legyen $\underline{k} = k\underline{n}$ ahol $|\underline{n}|=1$

$k\underline{n}\underline{r}-\omega t-\varphi = 2\pi N$

$\underline{n}\underline{r} = (2\pi N+\varphi+\omega t)\frac{1}{k}$ sík egyenlete és pontosan

A maximumok a helye síkot alkotnak. Ezek távolsága $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Ha az idő telik, a maximum $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ sebességgel mozognak (fázissebesség)

Mivel ez bármely az $(\underline{r},t)$-től független fgv. k feltételezte síkhullámokra.

MATMÓD

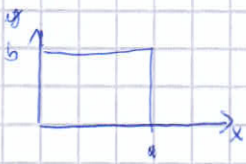
10. előadás (04. 29.)

A végesl veltonténe minden esős egyenértékű, de vannak különbségek.

A függvények terén az nem igaz mondhatalanul, de ott is vannak különbségek

A különbség ered a fizikai problémán adja, így nem mindig a separációs a legjobb

2 feladat



téglalap membrán a szélén rögzítve

a nyugvó membrán a szélén rögzítve

A kérdés: $u(x, y, t) = ?$

A kérdés: $u(r, \varphi, t) = ?$

A kérdésre a differenciál a hullámegyenlet:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u}$$

Kellenek kezdeti feltételek:

$t \in [0, \infty]$

$x \in [0, a]$

$y \in [0, b]$

$r \in [0, a]$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

HF:
$$\left.\begin{aligned} &u(x=0, y, t) = 0 \\ &u(x=a, y, t) = 0 \\ &u(x, y=0, t) = 0 \\ &u(x, y=b, t) = 0 \end{aligned}\right\}$$

HF: $u(r=a, \varphi, t) = 0$

KF: $u(x, y, t=0) = \alpha(x, y)$

ahol α kielégíti HF-t

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t=0) = \beta(x, y)$

KF: $u(r, \varphi, t=0) = \alpha(r, \varphi)$

ahol α kielégíti a HF-t

$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \varphi, t=0) = \beta(r, \varphi$

Ezek így konkrét kitűzési feladatok.

Keressünk szorzatalakú megoldást

TFH: $u(x,y,t) = U(x,y)\,T(t)$ $\qquad$ $u(r,\varphi,t) = U(r,\varphi)\,T(t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = U(x,y)\,\ddot{T}(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = U(r,\varphi)\,\ddot{T}(t)$$

$$\Delta u = (\Delta U)\,T(t) \qquad \Delta u = (\Delta U)\,T(t)$$

behelyettesítve:

$$U\ddot{T} = c^2 (\Delta U) T \qquad U\ddot{T} = c^2 (\Delta U) T$$

$$\frac{\ddot{T}}{T}(t) = c^2 \frac{\Delta U}{U}(x,y) \qquad \frac{\ddot{T}}{T}(t) = c^2 \frac{\Delta U}{U}(r,\varphi)$$

$\forall\, t, x, y$-ra teljesül,

tehát egy konstanssal egyenlő:

$-\omega^2$

dimenziónak belátható, hogy negatív

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \quad (1) \qquad \ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \quad (1)$$

$$\Delta U(x,y) = -\frac{\omega^2}{c^2} U(x,y) \quad (2) \qquad \Delta U(r,\varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2} U(r,\varphi) \quad (2)$$

(1)-ből T ismert: ...

$$T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Legyen $k = \frac{\omega^2}{c^2}$

$$(\Delta + k^2)U = 0 \qquad (\Delta + k^2)U = 0$$

Helmholtz-egyenlet: ez az új probléma,
ezt kell megoldani

$$\Delta U(x,y) = -k^2 U(x,y) \qquad \Delta U(r,\varphi) = -k^2 U(r,\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = -k^2 U(x,y) \qquad \frac{\partial^2 U(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = -k^2 U(x,y)$$

értelmezve:

$x \in [0,a]$ $\qquad$ $r \in [0,a]$

$y \in [0,b]$ $\qquad$ $\varphi \in [0,2\pi[$

HF: $U(x=0,y) = 0$ $\qquad$ HF: $U(r=a,\varphi)$

$U(x=a,y) = 0$

$U(x,y=0) = 0$

$U(x,y=b) = 0$

innen újra jól kiírható

Sajátérték problémát tekintve

A Δ operátor sajátértékét keressük

A fgv-k terén a sajátérték problémához kell a P.F.

és általában végtelen sok van

Keressük a megoldást szorzat alakban

TFH: $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)\,Y''(y)$$

TFH: $u(r,\varphi) = R(r)\,\phi(\varphi)$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = R'(r)\,\phi(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''(r)\,\phi(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = R(r)\,\phi''(\varphi)$$

behelyettesítve:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -k^2 X(x)Y(y)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2$$

minden elemre, az egyik irányú, amit az egyes változóig egy egyszerű konst:

$$-k_1^2 - k_2^2 = -k^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{X''(x)}{X(x)}}$$

$$X''(x) = -k_1 X^2(x)$$

$$Y''(y) = -k_2 Y(y)$$

harm. oszcillátor

$$X(x) = A\cos(k_1 x) + B\sin(k_1 x)$$

$$Y(y) = C\cos(k_2 y) + D\sin(k_2 y)$$

HF miatt $X(x=0) = 0 = A$

$X(x=a) = 0 = B\sin(k_1 a)$

$Y(y=0) = 0 = C$

$Y(y=b) = 0 = D\sin(k_2 b)$

tehát $A = 0$; $k_1 a = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$

$C = 0$; $k_2 b = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$

behelyettesítve:

$$R''(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\phi''(\varphi) = -k^2 R(r)\phi(\varphi)$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = -k^2$$

Ha φ irányba nézzük, csak a második változó, de nem változik $\Rightarrow$ az konst.

$$\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = -m^2 \Rightarrow \phi''(\varphi) = -m^2\phi(\varphi)$$

harm. oszcillátor

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{m^2}{r^2} = -k^2$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R(r) = 0 \quad \text{Bessel-egyenlet}$$

A harm. osc. megoldása: $\phi(\varphi) = e^{im\varphi}$

mivel $u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi)$

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi + 2\pi)}$$

$$e^{im2\pi} = 1 \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

Így $k_1 = \frac{n\pi}{a}$

$k_2 = \frac{m\pi}{b}$

Tehát $\frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + k_2^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$

$$\boxed{\omega_{nm} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}}$$

ω-ra végtelen sok értéke lehet és a sajátérték

az ehhez tartozó megoldás:

$$\boxed{u(x,y) = X(x)Y(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)}$$

Ez a Δ op. sajátfgv.-e a Descartes-ban

$m=3$

$n=6$

Legyen $w = kr$

$R(r) \to B(w)$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dB(w(r))}{dr} = B'(w)\frac{dw}{dr} = kB'(w)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dR}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left(kB'(w)\right) = k^2B''(w)$$

Behelyettesítve

$$R''(r) + \frac{R'(r)}{r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R(r) = 0$$

$$k^2B''(w) + \frac{kB'(w)}{r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)B(w) = 0$$

$$\boxed{B''(w) + \frac{B'(w)}{w} + \left(1 - \frac{m^2}{w^2}\right)B(w) = 0}$$

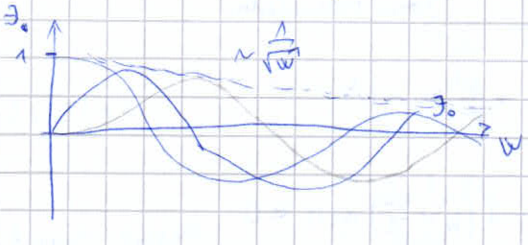
Ez maga a Bessel-egyenlet

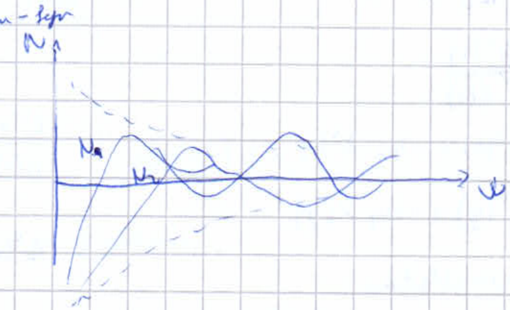
A paraméter az m

Változó eh.-s lineáris homogén egyenlet m.o.-i lin. teret alkotnak, annyi dim.-st, ahány rendű

A két alapmegoldás: $J_m(w)$ és $N_m(w)$ $w \in [0, \infty[$

$w \to 0$ esetén $J_m \sim w^m$ Bessel-fgv. $N_m \sim \frac{-1}{w^{m+1}}$ Neumann-fgv. ha $m > 0$





J_0 olyan hasonlít a cos-ra

J_1 hasonlít a sin-ra

nagy w-kre már hasonlítanak a szögfüggvényekhez

$$J_m(w) \sim \frac{\cos\left(w - m\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{w}}$$

Az m. Bessel-fgv. n. zérushelye ξ_{mn}

Az ált. megoldás:

$$B(w) = C J_m(w) + D N_m(w)$$

Mivel $r=0$ esetén u véges, ezért a Neumann-függvény nincs jelen $D=0$

$$B(w) = C J_m(w)$$

HF: $r=a$ $\quad w=ka$ $\quad B(ka)=0$

$J_m(ka)=0 \Rightarrow ka = \xi_{mn}$ ez megoldás k-ra $\quad k_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{a}$

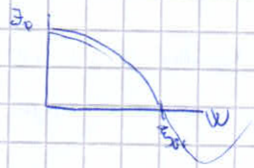
$$\boxed{\omega_{mn} = c\frac{\xi_{mn}}{a}}$$

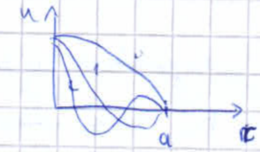
m: a ϕ fgv. HF-éből

n: melyik Bessel ZH-a a jó

Ha $m=0$ $\quad \phi = e^{im\varphi} = 1$

$$u(r,\varphi) = R(r) = J_m(kr)$$

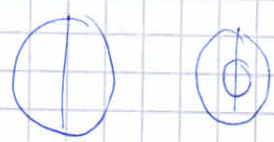




Ha $m=1$

$J_1(w)\cdot\cos(\varphi)$

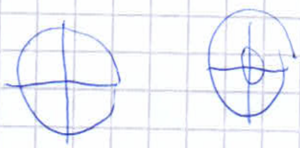
$J_1(w)\sin(\varphi)$



Ha $m=k$

$J_k(w)\cos(k\varphi)$

$J_k(w)\sin(k\varphi)$



Az m azt jelenti, hány sugárirányú, az n azt, hány tangenciális körrel tartományra osztjuk

Téglalapnál

$$\omega_{nm} = c\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

Körnél

$$\omega_{mn} = \frac{c}{a}\xi_{mn}$$

Nagy ω-ra megszorítható, hogy $\Delta\omega$-n belül hány állapot van: állapotsűrűség elvileg az alakfüggetlen

$$U_{nm}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad \text{ahol} \quad \omega_{nm} = c\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

$$u_{nm}(x,y,t) = U_{nm}(x,y)\left(A\cos\omega_{nm}t + B\sin\omega_{nm}t\right)$$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\cos(\omega_{nm}t) + B_{nm}\sin(\omega_{nm}t)\, U_{nm}(x,y)$$

$$U_{mn}(r,\varphi) = J_m\left(\frac{\xi_{mn}}{a}r\right)e^{im\varphi}$$

$$\text{és} \quad \omega_{mn} = \frac{c}{a}\xi_{mn}$$

$$u_{mn}(x,y,t) = U_{mn}(r,\varphi)\left[A\cos(\omega_{mn}t) + B\sin(\omega_{mn}t)\right]$$

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t\right)U_{mn}(r,\varphi)$$

Kezdőfeltételek miatt:

$$\sum_n\sum_m A_{nm}U_{nm}(x,y) = \alpha(x,y)$$

$$\sum_n\sum_m \omega_{nm}B_{nm}U_{nm}(x,y) = \beta(x,y)$$

Mivel U_{nm}-ek egymással ortogonálisak, a fentit beintegrálva U_{ke}-el az összes 0 lesz kivéve 1, így A_{nm} és B_{nm} értékei adja α és β integrál-trafója

FELADAT MEGOLDVA !

MATMÓD.

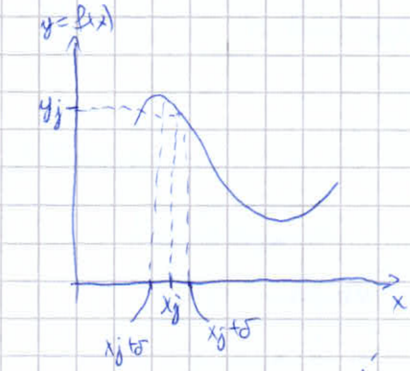
11. előadás (05.02.)

Kósa András: Variációszámítás

Műszaki tankönyvek

Budó: Mechanika (ide tartozó rész)

Tetszőleges fgv-k feltételes szélsőértékei



Hol van a szé.? Feltételezzük x_j pontban.

Hogyan ellenőrizzük?

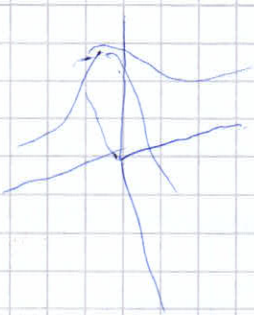
Megnézzük $f(x_j+\delta)$ és $f(x_j-\delta)$-t, hogy jó-e vagy nem.

Nem túl elegáns.

Így alakult ki az alapgondolat: $f'(x)=0$ egyenlet megoldását keressük

Mi van többváltozós esetben

$z=f(x,y)$



A szé. feltétele, az, hogy kicsit odébbmenve ne változzon a fgv.

$\phi(\vec{r})$ $\qquad \phi(\vec{r}+\vec{\delta}) \approx \phi(\vec{r}) + \vec{g}(\vec{r})\vec{\delta}$

$$\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) - \phi(\vec{r}) \approx \vec{g}(\vec{r})\vec{\delta}$$

A jobb oldal lehet 0, ha $\vec{g}(\vec{r}) \neq 0$, de mivel $\forall\vec{\delta}$-ra teljesülni kell, szét csak ott lesz szé., ahol $\vec{g}(\vec{r})$.

Vegyünk egy másodrendű felületet:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \varphi yz$$

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + C = 0$$

Akkor lesz ellipszoid, ha a mátrix sajátértékei egyformán pozitívak.

Konstruáljunk ilyet: $\underline{e}^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{e}^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{e}^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{P}}^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{P}}^{(3)} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Legyenek $\lambda_1 = 9 \quad \lambda_2 = 18 \quad \lambda_3 = 27 \qquad > 0$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 \\ -6 & 15 & 0 \\ -6 & 0 & 21 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} d_1 = 3 \\ d_2 = 6 \\ d_3 = 9 \end{matrix}$$

Tehát a ellipszoid egyenlete:

$$\underline{6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy - 4xz = 1}$$

Kérdés: hol van a teteje?

$$\underline{g} = \underline{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$ ha van explicit alak

pl.: $f(x,y) = x^2 y + \sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y\cos(xy) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x\cos(xy)$$

hol lesz $\underline{g} = 0$ ezen
$$\left.\begin{matrix} 2xy + y\cos(xy) = 0 \\ x^2 + x\cos(xy) = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} y(2x + \cos(xy)) = 0 \\ x(2x + \cos(xy)) = 0 \end{matrix}\right\} < \begin{matrix} y = 0 \\ \\ \end{matrix}$$

innen ok

Vissza az ellipszoidhoz:

itt implicit alakunk van: $F(x,y,z) = 0$

$$7x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4zy - 4xz = 1$$

ebből elvileg kifejezhető $z = f(x,y)$. Behelyettesítve:

$F(x, y, f(x,y)) = 0$ (ez nem egy görbe, ez egy azonosság)

2D esetén $F(x,y) = 0 \rightarrow f(x) = y$

$$F(x, f(x))$$

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$G(x,y) + H(x,y)\, y'(x) = 0$$ innen simán diffegyenlet

3D-ben:

$$G(x,y) = F(x, y, f(x,y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Pl.: $F(x,y,z) = 7x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4yz - 4xz - 1 = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 14x - 4z \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 4z \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 12z - 4x - 4y$$

$$G(x,y) = F(x,y,f(x,y)) = 7x^2 + 5y^2 + 6\left(f(x,y)\right)^2 - 4y\, f(x,y) - 4x\, f(x,y) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 14x + 6\cdot 2\, f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} - 4y\frac{\partial f}{\partial x} - 4f(x,y) - 4x\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 10y + 6\cdot 2\cdot f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} - 4f(x,y) - 4y\frac{\partial f}{\partial y} - 4x\frac{\partial f}{\partial x}$$

Ezalapján az egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} 14x - 4f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(12f - 4y - 4x) &= 0 \\ 10y - 4f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(12f - 4y - 4x) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{4f - 14x}{12f - 4x - 4y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{4f - 10y}{12f - 4x - 4y} \end{aligned}\right\}$$

A szé feltétele: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

vagyis $4f - 14x = 0$

$4f - 10y = 0$ De $12f - 4x - 4y \neq 0$

$$z = \frac{7}{2}x, \quad z = \frac{5}{2}y \implies 7x = 5y$$

Mindent kifejezve z-vel: $x = \frac{2}{7}z$, $y = \frac{2}{5}z$

$F(x,y,z)$:

$$7\left(\frac{2z}{7}\right)^2 + 5\left(\frac{2}{5}z\right)^2 + 6z^2 - 4\left(\frac{2}{5}z\right)z - 4\left(\frac{2}{7}z\right)z = 1$$

$$\frac{4}{7}z^2 + \frac{4}{5}z^2 + 6z^2 + \frac{8}{5}z^2 - \frac{8}{7}z^2 = 1$$

$$z^2\left(\frac{4}{7} + \frac{4}{5} + 6 + \frac{8}{5} - \frac{8}{7}\right) = 1$$

$$z^2 = A \implies z = \pm\sqrt{A}$$

Ezek lesznek z szélsőértékei

Kezdő példa

A turista út legmagasabb pontját keresem, de ez nem egyezik a hegy C csúcsával

$z = f(x,y)$ a hegy egyenlete

$g(x,y) = 0$ turista út egyenlete

$\rightarrow y(x)$ vagy $x(s), y(s)$

$z(x(s), y(s)) = F(s)$ és $F'(s) = 0$

de ez komplikált, mert az megtalálása kemény.

TFH: ismert $y = \varphi(x)$

$$z = f(x, \varphi(x))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x) = \vartheta(x) \overset{!}{=} 0$$

DE ez is macerás

PÉLDA

hegy: $z = 9 - x^2 - y^2$ (forgási paraboloid)

turistaút: $y = 2x - 4$ egyenes

$$z = 9 - x^2 - (2x-4)^2 = 9 - x^2 - 4x^2 + 16x - 16 = -5x^2 + 16x - 7$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -10x + 16 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$y = \frac{16}{5} - 4 = -\frac{4}{5}$ a $\left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ pont a turistaút maximuma

VIGYÁZAT!!! bonyolult fgv-k esetén ez nem működik

Lagrange-probléma:

Keresem $z = f(x,y)$ szé-jét

miközben $g(x,y) = 0$

f a függvény, g a feltétel (feltételes szélsőérték)

Megoldás:

Legyen $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

Állítás: F szélsőértéke megadja f feltételes szé-jét.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= g(x,y) \overset{!}{=} 0
\end{aligned}\right\}$$

Vegyük észre, hogy ez maga a kényszer

TFH $\exists\ x(s)$ és $y(s)$

$$\frac{d}{ds} g\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x}(s) + \frac{\partial g}{\partial y}\dot{y}(s) \overset{!}{=} 0$$

(1)-ből adott $\frac{\partial g}{\partial x}$

(2)-ből adott $\frac{\partial g}{\partial y}$

Behelyettesítve egyenletet kapunk λ-ra

$\underline{\lambda(x,y)}$

Általánosan: $f(x_1, x_2 \dots x_n)$

$$\left.\begin{aligned}
g_1(x_1 \dots x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
g_r(x_1, \dots x_n) &= 0
\end{aligned}\right\} \text{kényszer}$$

$$F(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_r) = f(x_1 \dots x_n) + \lambda_1 g_1(x_1 \dots x_n) + \dots \lambda_r g_r(x_1 \dots x_n)$$

aminek a szé-jét keressük:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_\ell \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \overset{!}{=} 0 \qquad k = 1 \dots n \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_\ell} &= g_\ell(x_1 \dots x_n) \overset{!}{=} 0 \qquad \ell = 1 \dots r
\end{aligned}\right\}$$

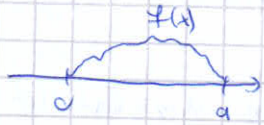
Függvénytől függő függvény (funkcionál)

$$\mathcal{F} \ni f \longrightarrow S[f] \in \mathbb{R}$$

$$S : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

pl.: milyen alakban kerítse be Dido-királynő marhabőrrel a területet, hogy jó nagyot kapjon

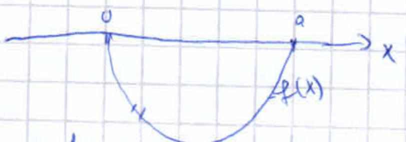
A görögök elvei után kiszámította, hogy félkör



A terület: $T[f] = \int_0^a f(x)\,dx$

korlát a madzag hossza: $H[f] = \int_0^a \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \stackrel{!}{=} L$

Másik: milyen alakú a lelógó kötél alakja.



Olyan lesz, hogy a rendszer pot E-ja legyen min.

$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$dm = \rho\, ds$

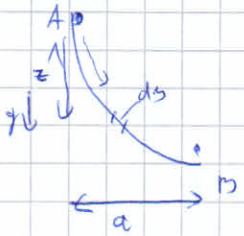
$$dV = dm \cdot g \cdot (-f(x))$$

$$V = -g\rho \int_0^a f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = V[f]$$

ez is funkcionál és itt is van korlát a kötél hosszára

Adott f esetén honnan tudjuk, hogy V[f] mi? itt is egyenletté kell átfordítani, de itt diffegyenlet lesz.

Bernoulli-féle feladat



Mekkora T idő alatt ér a golyó A-ból B-be, és milyen pálya esetén ez a minimális?

$T[f]$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

E megmaradás miatt: $\frac{mv^2}{2} + mgz = E = mgh \Rightarrow v^2 = 2g(h-z)$

$$v = \sqrt{2g(h-z)}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}$$ tudjuk, hogy $ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$$dt = \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\sqrt{2g(h-f(x))}} \qquad T[f] = \int_0^a \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{2g(h-f(x))}}\,dx$$

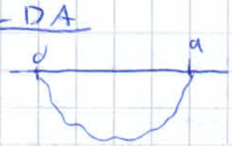
A variációszámítás alapproblémája: Egy függvénytől és annak deriváltjától függő funkcionál szé-jét keressük.

Függvények halmaza > Skalármezőkbe bocsátott fgv-k

Ehhez próbálkozunk, és vagy jó, vagy nem
Ha ügyes vagyok, fgv.-családot keresek, akkor az adott fgv. család legjobb fgv.-je adható meg

Ez a variációszámítás direkt módszere

PÉLDA

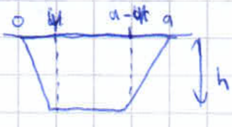


milyen alakú a lógatott lánc?

$$f(0) = 0; \; f(a) = 0; \; \int_0^a \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = L$$

$$V[f] = -\rho g \int_0^a f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \quad \text{min?}$$

TFH: trapéz alakú:



$$2\sqrt{u^2+h^2} + a - 2u = L$$

$$\Rightarrow h^2 = \left(\frac{L-a+2u}{2}\right)^2 - u^2$$

$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{u}x & x<u \end{cases}$

ha $x<u$: $f' = \frac{h}{u}$ $\quad f(x) = \frac{h}{u}x$

$$V_1 = -g\rho \int_0^u \frac{h}{u}x\sqrt{1+\frac{h^2}{u^2}}\,dx = -\rho g \sqrt{1+\frac{h^2}{u^2}}\,\frac{h}{u}\cdot\frac{u^2}{2} = V_3$$

$$V_2 = -\rho g\,(L-2a)$$

$$V_{össz} = -\varrho g\left[\sqrt{1+\frac{h^2}{u^2}}\, hu + h(a-2u)\right] = -\varrho g\left(\sqrt{u^2+h^2}\, h + (a-2u)h\right) = -\varrho g h\left(\sqrt{u^2+h^2} + (a-2u)\right) = V(u)$$

Ez differenciálással megoldható

Általában elég unalmas, de az egyenlőtlen egy felső becslés V-re.

Ha ügyes vagyok vagy nem egyenes vásznon vagyok, és numerikusan megoldom tetszőleges precízióval

Van, egy alapból $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{ik_n x}$ alakban keresem, de ezzel 7. rendig megyek el.

Ez akkor működik, ha $A[f] = \int_a^{\infty} f(x) D f(x)\, dx$ a funkcionál.

kvantummechanikában ez tipikus

Ált. megfogalmazás:

Legyen $S[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(f, f', x)\, dx$ egy funkcionál

ennek a szé-jét keressük

Euler-Lagrange-diffe.: ezzel lehet a variációszámítás diffegyenletét visszaírni

A Fizika minden egyenlete egy funkcionál EL-diffegyenlete.

MATMÓD

12. előadás (05.09.)

[illegible] szó.

A_{ke} mátrix szimmetrikus, legyen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ számok

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{1}{2} \sum_k \sum_e A_{ke} x_k x_e$$

Mikor lesz a mondat maximális, ha

x-k egységnyi hosszúak $G(x, \dots)\ \sum x_k x_k = 1$

megoldás: legyen $H(x_1 \dots \lambda) = F(x) + \frac{\lambda (1 - G)}{2}$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{1-G}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}\sum_p \sum_q A_{pq} x_p x_q + \frac{\lambda}{2}\left(1 - \sum_p x_p x_p\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_p \sum_q A_{pq}\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_k} x_q + x_p \frac{\partial x_q}{\partial x_k}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(-\sum_p 2 x_p \frac{\partial x_p}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_p \sum_q A_{pq}\left(\delta_{kp} x_q + x_p \delta_{qk}\right) - \lambda \sum_p x_p \delta_{pk} =$$

$$= \sum_q \frac{A_{kq}}{2} x_q + \sum_p \frac{A_{pk}}{2} x_p - \lambda x_k = \sum_p A_{kp} x_p - \lambda x_k \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_p A_{kp} x_p = \lambda x_k$$

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad \text{sajátérték probléma}$$

A szó nemcsak megoldása egyszerűbb a sajátértéknél, ezért ezt vissza lehet vezetni

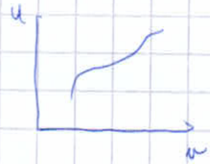
Funkcionálok:

$f(x) \longrightarrow F[f]$

$\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$

nulltani feladat: - Didó királynő
= brachisztochron probléma (leggyorsabb lejtő)
- gömb felületén a legrövidebb út

Utána a ennyezett fgv.



$u(t) \quad \rightarrow du = \dot{u}(t)\,dt$

$v(t) \quad \rightarrow dv = \dot{v}(t)\,dt$

$$ds = \sqrt{h_1^2(u,v)\,\dot{u}^2(t) + h_2^2(u,v)\,\dot{v}^2(t)}\;dt$$

$$S = \int ds \qquad S(u(t), v(t), \dot{u}(t), \dot{v}(t))$$

Vegyük az alábbit:

$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$S[f] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{A}{2} f'(x)^* f'(x) + V(x) f(x)^* f(x) \right] dx$$

Ennek nincs c é-je, mert ha f nagyobb, I is nagyobb.

DE rendelhetjük, hogy $\int f^*(x) f(x)\,dx = 1$ feltételként

Ez az óra eleji vektoros példa analógiája

MOST JÖN A MÓDSZER: variációs számítás

Keressük a fgv. stacionárius pontjait (ahol a szé, vagy infl. van)

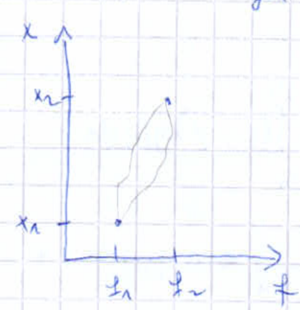
itt bizit változtatjuk a fgv-t, a funkcionál nem változik

Feladat: Keressük $f(x)$-t!

adott: $L(f, f', x)$ $\qquad S[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(f, f', x)\,dx$ $\qquad$ stacionárius helyét keressük

adott még: $f(x_1) = f_1$

$f(x_2) = f_2$

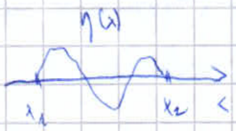


Adott görbét össze kell hasonlítani
a „szomszédjaival" (ez mit jelent?) és ha.
egyaléaihe kell lenni

elhanyagolás: próbafüggvény: konkurenciális ecsetelt fgv.
variációs együtthatók; variált fgv.

f ; $f+\delta f$ kell összehasonlítani

$\delta S = S[f+\delta f] - S[f]$ ez a funkcionál variációja



Vegyünk $\eta(x)$ függvényt, ami $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ (végpontokban nem variálunk)

$\delta f = \varepsilon \eta(x)$ kicsi ε esetén kicsi

$f_\varepsilon = f(x) + \varepsilon \eta(x)$

$f_\varepsilon' = f' + \varepsilon \eta'$

$$\delta S = S[f+\delta f] - S[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(f+\delta f, f'+\delta f', x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} L(f, f', x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} L(f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta', x)\,dx}_{} - \int_{x_1}^{x_2} L(f, f', x)\,dx = *$$

$$L(f,f',x) + \frac{\partial L}{\partial f}\varepsilon\eta + \frac{\partial L}{\partial f'}\varepsilon\eta' = L(f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta', x)$$

$$* = \int_{x_1}^{x_2}\left(L(f,f',x) + \frac{\partial L}{\partial f}\varepsilon\eta + \frac{\partial L}{\partial f'}\varepsilon\eta'\right)dx - \int_{x_1}^{x_2} L(f,f',x)\,dx =$$

$$= \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial f}\eta + \frac{\partial L}{\partial f'}\eta'\right)dx =$$

rövidítés: $\frac{\partial L}{\partial f} = Q(f,f',x)$

$\frac{\partial L}{\partial f'} = p(f,f',x)$

$$= \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}(Q\eta + p\eta')\,dx = *$$

$p\eta' = (p\eta)' - p'\eta$ de p közvetetten függ x-től, így ezt összetett deriválással.

$$* = \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left[Q\eta + (p\eta)' - p'\eta\right]dx = \underbrace{\varepsilon\left[p\eta\right]_{x_1}^{x_2}}_{} + \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}(Q\eta - p'\eta)\,dx =$$

0, mert η a határon 0 (HAMILTON nem dicséretesen)

$$= \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}(Q - p')\,\eta(x)\,dx$$

Ez legyen 0 $\forall\eta$-ra, ez lesz a jó

Lemma: ha $\int_a^b h(x)\,\eta(x)\,dx = 0$ $\forall\eta$ esetén (folytonos) akkor $h(x) = 0$

A megoldás az, ha $Q - p' = 0 \Rightarrow p' = Q$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) = \frac{\partial L}{\partial f}}$$

Euler-Lagrange-diffegyenlet (Általában f-re másodrendű)

Konkrét módszer

0) Mit kell érteni változónak: x? $f(x)$? $S[f]$ } fizika

1) funkcionál megtalálása

2) L integrál } mechanika

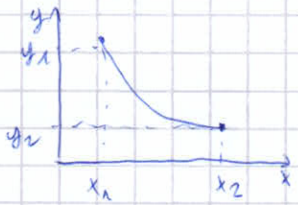
3) Deriválás: $p = \frac{\partial L}{\partial f'}$ $\quad Q = \frac{\partial L}{\partial f}$

4) összetett deriválás: $\frac{dp}{dx}$ } matematika

5) EL egyenlet felírása

6) EL megoldása } Diffegyenlet megoldása

Brachisztochron-probléma



$y = f(x)$ -t keressük

Funkcionál kiszámítása: 

$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ és mivel $\Delta y = f'(x)\Delta x$

$\Delta s^2 = \Delta x \left(1 + f'(x)^2\right)$

$\Delta s = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\Delta x \sqrt{1+f'(x)^2}}{v}$$

$E = \frac{mv^2}{2} + mgy = mgy_1$ ez fizikai ismeret

$v^2 = 2g(y_1 - y) \quad \to \quad v = \sqrt{2g(y_1 - y)}$

Ekkor $dt = \dfrac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{2g(y_1 - f)}}$

$$T = \int dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{y_1 - f}}\, dx \qquad \text{tehát} \quad L(f, f') = \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{y_1 - f}}$$

Innentől lényeges

$$G = \frac{\partial L}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{y_1 - f}}\right) = \sqrt{1+f'^2}\,\frac{\partial}{\partial f}\frac{1}{\sqrt{y_1 - f}} = \sqrt{1+f'^2}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{-1}{(y_1 - f)^{3/2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+f'^2}}{(y_1 - f)^{3/2}}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{\partial}{\partial f'} \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{y_1 - f}} = \frac{1}{\sqrt{y_1-f}} \frac{\partial}{\partial f'} \sqrt{1+f'^2} = \frac{1}{\sqrt{y-f}} \frac{1}{2} \frac{2f'}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y_1-f}} \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{y_1-f}} \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right) = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\left(-\frac{1}{2}\frac{+1}{(y_1-f)^{3/2}}(-f')\right) + \frac{1}{\sqrt{y_1-f}}\left(\frac{f''\sqrt{1+f'^2} - f'\frac{2f'f''}{2\sqrt{1+f'^2}}}{1+f'^2}\right)$$

ismert diffegyenlet megoldás, de alakítgatni lehet

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{f'^2}{\sqrt{1+f'^2}}\frac{1}{(y_1-f)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{y_1-f}}\frac{f''(1+f'^2) - f'f'f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = +\frac{1}{2}\frac{f'^2}{\sqrt{1+f'^2}}\frac{1}{(y_1-f)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{y_1-f}}\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} =$$

$$+\frac{1}{2}\frac{f'^2}{\sqrt{1+f'^2}} + (y_1-f)\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{(y_1-f)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{2}f'^2(1+f'^2) + (y_1-f)f'' = \frac{1}{2}(1+f'^2)^2$$

$$2(y_1-f)f'' = (1+f'^2)^2 - f'^2(1+f'^2)$$

$$= (1+f')(f+f'-f'^2) = 1+f'$$

$$\boxed{2(y_1-f)f'' = 1+y'^2}$$ Ez a EL-diffegyenlet

Mi van, ha több fgv.-t keresünk

$$L(\underbrace{f_1, \dots f_n, f_1', \dots f_n', x}_{2n+1})$$ $$S = \int_{x_1}^{x_2} L\, dx$$ $$f_k(x_1) = f_{k1}$$

$$f_k \to f_k + \delta f_k = f_k + \varepsilon \eta_k$$ ahol η_k-t kell keresni

$$S[f+\delta f] - S[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(f+\delta f, f'+\delta f', x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} L(f, f', x)\,dx =$$

$$= \int\left(L(f, f', x) + \sum_k \frac{\partial L}{\partial f_k}\varepsilon\eta_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial f_k'}\varepsilon\eta_k'\right)dx - \int L(f, f', x)\,dx =$$

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial f_k}$$

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial f_k'}$$

$$= \varepsilon \sum_k \int_{x_1}^{x_2} Q_k\eta_k + P_k\eta_k'\,dx = \varepsilon\sum_k \int_{x_1}^{x_2}\left(Q_k\eta_k + (P_k\eta_k)' - P_k'\eta_k\right)dx =$$

$$= \varepsilon\sum_k\left((P_k\eta_k)\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}(Q_k - P_k')\eta_k\,dx\right) \doteq 0$$

$$\Rightarrow \sum_k \int (Q_k - P_k')\eta_k\,dx = 0$$ Tetsz. η_k-kra.

Ha $\eta_1 = 0$ de $\eta_k \neq 0$, akkor $Q_1 - P_1' = 0$, Mind k-ra minden k-ra egy.

$$\boxed{P_k' = Q_k}$$ $\forall k$-ra. Diffegyenlet rendszer.

Brachisztochron-probléma másképp:

Keressük $x(u)$-t és $y(u)$-t. (A görbe paraméterezése)

$$\Delta x = \dot{x}(u)\Delta u \qquad \Delta y = \dot{y}(u)\Delta u \qquad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \left(\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u)\right)\Delta u^2$$

$$\Delta s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, du$$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, du}{\sqrt{2g(y_1 - y)}} \qquad T = \int dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\sqrt{y_1 - y}}\, du$$

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y} | u) = \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\sqrt{y_1 - y(u)}}$$

nem függ x-től, mert az x irányú eltolásra invariáns a rendszer, úgyhogy ez egy megmaradás

$$Q_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$Q_y = \frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{-1}{(y_1-y)^{3/2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{(y_1-y)^{3/2}}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{y_1-y}} \frac{2\dot{x}}{2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{1}{\sqrt{y_1-y}} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{\sqrt{y_1-y}} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

Mivel $Q_x = 0$ ezért az egyik EL egyenlet: $\frac{dp_x}{du} = 0 \Rightarrow p_x$ megmarad

$$\frac{1}{\sqrt{y_1-y}} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = K \qquad K \text{ kezdőfeltételekből}$$

Ami nem szerepel a L-ben, az a ciklikus koordináta. A ciklikus koordinátára érvényesek a megmaradási tételek

$$\frac{dp_y}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{y_1-y}} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

Általánosítás: többváltozós függvények függvénye

$S[f(x,y)]$

$S[f_1(x,y), f_2(x,y) \dots]$ Itt az EL-egyenletek parciális differenciálegyenletek rendszere

(pl.: Maxwell-egyenletek)

Gyakorlat

Mi van, ha $x(t)$

$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - V(x)$ $S = \int_{t_1}^{t_2}$

$\delta S = 0$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ált impulzus

$Q = \frac{\partial L}{\partial x} = -V'(x) = F$

EL egyenlet: $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = Q$

$m\ddot{x} = F$ Newton egyenlet

Polárkoordináták: $x = r\cos\varphi$ $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$y = r\sin\varphi$ $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$

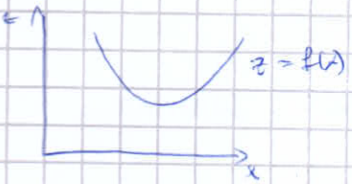
$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

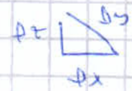
$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$

$Q_r = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - V'(r)$ $Q_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - V(r)$ $mr^2\dot{\varphi} = 0$ impulzus momentum megmaradás



milyen alakú a lógó kötél



$$dm = \rho \Delta s$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} = \sqrt{1+f'^2}\,\Delta x$$

$$\Delta V = \Delta m\, g\, z = \rho \sqrt{1+f'^2}\,\Delta x\, g\, f(x)$$

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \rho g\, f(x) \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

mellékfeltétel : $S = \int ds = \int \sqrt{1+f'^2}\, dx = H$

$\Psi = V + \lambda (S - H)$ globális m.F esetén λ konstans

$$= \int \left(\rho g f \sqrt{1+f'^2} + \lambda \sqrt{1+f'^2} \right) dx - \lambda H$$

$$L(f, f') = \rho g f \sqrt{1+f'^2} + \lambda \sqrt{1+f'^2}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial f'} = (\rho g f + \lambda) \frac{2 f'}{2\sqrt{1+f'^2}} = (\rho g f + \lambda) \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$a = \frac{\partial L}{\partial f} = \rho g \sqrt{1+f'^2}$$

$$\underline{\frac{d}{dx}\left[(\rho g f + \lambda) \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right] = \rho g \sqrt{1+f'^2}}$$

Ekkor benne van λ, de a diffegyenlet megoldása f függni fog λ-tól, amit a MF.-be behelyettesítve kiküszöbölhető.

Az eredmény: $f = b + a\, \mathrm{ch}\left(\frac{x-c}{a} \right)$

Mi van, ha forgatjuk? Lesz még centrifugális erő: $F_{cf} = m\omega^2 r$. Ekkor integrálva potenciál: $V_{cf} = -\frac{m}{2}\omega^2 r^2$

Ha azt akarom, hogy a részecske rajta maradjon a hegyen:

$x(t),\ y(t),\ z(t)$ $\qquad z = F(x,y)$

$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + \lambda(t)\,(z - F(x,y))$

Az igazi Lagrange: $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \lambda, \dot{\lambda})$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = z - F(x,y)$ $\quad$ kényszerező

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0$

Nézzük az óra eleji feladatot

$S[\psi] = \int \left[\frac{A}{2} \psi'^{*}(x)\, \psi'(x) + V(x)\, \psi^{*}(x)\, \psi(x) \right] dx$

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\psi = g(x) + i\,h(x)$

$\psi^{*} = g(x) - i\,h(x)$ $\quad$ így ez a feladat [illegible]

$g(x) = \frac{\psi(x) + \psi^{*}(x)}{2}$ $\qquad h(x) = \frac{\psi(x) - \psi^{*}(x)}{2i}$ $\quad$, Ezért ψ és ψ^{*} kezelhető a két független függvényként

$L(\psi, \psi^{*}, \psi', \psi^{*\prime}, x \ldots)$

$Q_\psi = \frac{\partial L}{\partial \psi} = V(x)\, \psi^{*}$ $\qquad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \psi'} = \frac{A}{2} \psi^{*\prime}$

$Q_{\psi^*} = \frac{\partial L}{\partial \psi^{*}} = V(x)\, \psi$ $\qquad p_{\psi^*} = \frac{\partial L}{\partial \psi^{*\prime}} = \frac{A}{2} \psi'$

$\frac{d}{dx} p_\psi = \frac{A}{2} \psi^{*\prime\prime}$ $\qquad \frac{d}{dx} p_{\psi^*} = \frac{A}{2} \psi''$

$\frac{A}{2} \psi'' = V(x)\, \psi$ $\qquad \frac{A}{2} \psi^{*\prime\prime} = V(x)\, \psi^{*}$

mellékfeltétel: $\int \psi^{*} \psi \, dx = 1 = \phi$

új funkcionál: $W = S - E\phi =$

$$= \int \Big[\underbrace{\tfrac{1}{2} \psi^{*} \psi + V(x) \psi^{*} \psi - E \psi^{*} \psi}_{L} \Big]$$

$$Q_{\psi^{*}} = \frac{\partial L}{\partial \psi^{*}} = \frac{1}{2} \psi + V(x) \psi - E \psi$$

$$P_{\psi^{*}} = \frac{\partial L}{\partial \psi^{*\prime}} = \frac{1}{2} \psi' \qquad \frac{d}{dx} P_{\psi^{*}} = \frac{1}{2} \psi''$$

$$\frac{1}{2} \psi'' = V(x) \psi - E \psi$$

$$-\frac{1}{2} \psi'' + V(x) \psi = E \psi$$

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$ sajátérték-probléma

MATMÓD

13. előadás I

Skalármezők $f_a(x)$ fgv.-ek

$$S = \int_{x_1}^{x_2} L(f_a, f_a', x)\, dx$$ szé-lét keressük f_a fgv.-ben

akkor $\delta S = 0$

$$\delta S = \sum_a \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f_a} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f_a'} \right) \varepsilon \eta_a(x)\, dx \overset{!}{=} 0 \qquad \forall \eta_a\text{-ra}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial f_a} \overset{!}{=} \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f_a'} \qquad \text{EL - egyenlet}$$

Kérdés: vajon a fizika minden egyenlete átírható funkcionálok alakjába.

Miért? [illegible] egyszerűsít

Ellentmondásos választás: legyen $L(f, f', x) = f'$

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial f'} = 1$$

$$Q_a = \frac{\partial L}{\partial f} = 0$$

$$\frac{d}{dx} p_a = 0$$

$$0 = 0 \qquad \text{ez mire jó?}$$

másik választás $L(f, f', x) = f$

$$p_a = 0$$

$$Q_a = \frac{\partial L}{\partial f} = 1$$

$$\frac{d}{dx} p_a = 1$$

$$0 = 1 \qquad \text{Miért?}$$

feladat:

① $S = \int L\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx = f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow$ Csak határtól függ

②

Nincs olyan fgv amire S szé.-van.

Legyen $L_1(f, f', x) \quad \rightarrow L_2 = L_1(f, f', x) + 2f'$

mi következik

$$\frac{\partial L_2}{\partial f} = \frac{\partial L_1}{\partial f}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial f'} = \frac{\partial L_1}{\partial f'} + 2 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L_2}{\partial f'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L_1}{\partial f'}\right)$$

Tehát L függvénynek u.a. az EL egyenlete

Ha $L' = L + \frac{d}{dx} G(f, f', x)$ -t hozzáteszünk, akkor S csak konstansra vált

Tanulság: L-hez tetszőleges teljes derivált hozzáadható

Mi van, ha $L(f, f', q, q')$ nem függ q-tól

$$p_f = \frac{\partial L}{\partial f'} \qquad p_q = \frac{\partial L}{\partial q'}$$

$$Q_f = \frac{\partial L}{\partial f} \qquad Q_q = \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{dp_f}{dx} = Q_f$$

$$\frac{dp_q}{dx} = Q_q = 0 \Rightarrow \underline{p_q = \text{konst}}$$

Ügyes koordinátákkal felírva, L nem függ az egyiktől akkor a megmaradás

Beltrami tétele: Ha L nem függ x-től

Legyen $B = \sum_a p_a f'_a - L$ (az L fgv. Legendre-transzformáltja)

$$\frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_a p_a f'\right) - \frac{d}{dx} L\left(f_a(x), f'_a(x), x\right) = \sum_a \left(\frac{dp_a}{dx} f'_a + p_a \frac{df'_a}{dx}\right) - \left[\sum_a \frac{\partial L}{\partial f_a} f'_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial f'_a}\frac{df'_a}{dx} + \frac{\partial L}{\partial x}\right] =$$

$$= \sum_a f''_a \underbrace{\left(p_a - \frac{\partial L}{\partial f'_a}\right)}_{0 \text{ def miatt}} + \sum_a f'_a \underbrace{\left(\frac{dp_a}{dx} - Q_a\right)}_{0 \text{ az EL miatt}} - \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{dB}{dx} = -\frac{\partial L}{\partial x}}$$

Ha L nem függ x-től, akkor B megmarad

Megfordított parabola (paraboloid) felszínén melyik a legrövidebb út

paramétersík (φ, ρ)

$\underline{r}(x, y, z)$ $\quad$ x, y és z-re teljesül egy egyenlet

$$z = a\rho^2 \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z^2 = a(x^2+y^2)$$

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = a\rho^2$$

$$P \xrightarrow{d\varphi, d\rho} Q$$

$$\underline{b} = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\Delta\varphi$$ amikor $d\varphi$ fordul

$$\underline{c} = \frac{\partial r}{\partial \rho}\Delta\rho$$ amikor $d\rho$ fordul

$$\Delta s^2 = b^2 + c^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 \Delta\varphi^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\right)^2 \Delta\rho^2$$ ívelem négyzet

$$ds^2 = g_{ik}(u)\, du_i\, du_k$$ g_{ik} metrikus tenzor

$$g_{ik} = \underline{t}_i \underline{t}_k \qquad \text{ahol } t_i = \frac{\partial r}{\partial u_i}$$

Minden koordinátarendszert a metrikus tenzor jellemez

feladat: $\underline{t}_\rho = \frac{\partial r}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2a\rho \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{t}_\varphi = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{t}_\varphi \underline{t}_\rho = 0$$

$$\underline{t}_\rho \underline{t}_\rho = 1 + 4a^2\rho^2$$

$$\underline{t}_\varphi \underline{t}_\varphi = \rho^2$$

$$ds^2 = (1 + 4a^2\rho^2)\, d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2$$

Tetszőleges út a paraméter térben milyen hosszú a paraboloidon?

$$d\rho = f'(\varphi)\, d\varphi$$

$$ds = \sqrt{(1 + 4a^2\rho^2) f'^2 + \rho^2}\, d\varphi$$

$$S = \int ds = \int \sqrt{}\, d\varphi = \int \sqrt{(1 + 4a f^2) f'^2 + f^2}\, d\varphi$$

Ennek kell a szé-je

Két görbe esetén a görbe t paraméter fgv-je

$$u_1(t);\ u_2(t) \longrightarrow \underline{r}(t)$$

$$du_k = \dot{u}_k(t)\, dt \implies ds^2 = g_{kl}(u)\, \dot{u}_k \dot{u}_l\, dt^2$$

$$ds = \sqrt{g_{kl}(u)\, \dot{u}_k \dot{u}_l}\, dt$$

$$S = \int \underbrace{\sqrt{g_{kl}(u)\, \dot{u}_k \dot{u}_l}}_{L(u_k,\, \dot{u}_k)}\, dt$$

tehát:

$$L(u, \dot{u}) = \sqrt{g_{mn}(u)\, \dot{u}_m \dot{u}_n}$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = \frac{}{2\sqrt{}} \sum_m \sum_n g_{mn}\left(\frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \dot{u}_k} \dot{u}_n + \dot{u}_m \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial \dot{u}_k} \right) = \frac{1}{2\sqrt{}}\, g_{mn}\left(\delta_{mk} \dot{u}_n + \delta_{nk} \dot{u}_m \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{}} \left(g_{kn} \dot{u}_n + g_{mk} \dot{u}_m \right) = g \text{ szimmetrikus} = \frac{g_{kn} \dot{u}_n}{\sqrt{}} = \frac{g_{kl} \dot{u}_l}{\sqrt{g_{mn} \dot{u}_m \dot{u}_n}}$$

$$a_k = \frac{\partial L}{\partial u_k} = \frac{1}{2\sqrt{}} \frac{\partial g_{mn}}{\partial u_k} \dot{u}_m \dot{u}_n$$

EL:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{kl} \dot{u}_l}{\sqrt{g_{mn} \dot{u}_m \dot{u}_n}} \right) = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{sr}}{\partial u_k} \dot{u}_s \dot{u}_r}{\sqrt{g_{mn} \dot{u}_m \dot{u}_n}}}$$

geodétikus egyenlet

A paraboloid esetén: $L(\varphi, f) = \sqrt{(1+4a^2f^2)\varphi'^2+f^2}$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = \frac{(1+4a^2f^2)2\varphi'}{2\sqrt{\;}} = \frac{(1+4a^2f^2)\varphi'}{\sqrt{(1+4a^2f^2)\varphi'^2+f^2}}$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial f} = \frac{8a^2f\varphi'+2f}{2\sqrt{\cdots}} = \frac{f(4a^2\varphi'^2+1)}{\sqrt{(1+4a^2f^2)\varphi'^2+f^2}}$$

φ ciklikus változó, ~~ugy~~ és mivel L nem függ a B megmarad

$$B = \cancel{\dot{q}} \, p\varphi' - L = \frac{(1+4a^2f^2)\varphi'^2}{\sqrt{\;}} - \sqrt{\cdots} = \text{áll}$$

$$\frac{(1+4a^2f^2)\varphi'^2 - [(1+4a^2f^2)\varphi'^2+f^2]}{\sqrt{\;}} = \frac{-f^2}{\sqrt{(1+4a^2f^2)\varphi'^2+f^2}} \quad \text{ez konst} \quad = -E$$

$$\frac{(1+4a^2f^2)\varphi'^2+f^2}{f^4} = \frac{1}{E^2}$$

$$(1+4a^2f^2)\varphi'^2 \cancel{+f^2} = \frac{f^4}{E^2} - f^2$$

$$\varphi' = \frac{\sqrt{\frac{f^4}{E^2}-f^2}}{\sqrt{1+4a^2f^2}}$$ szeparálható diffegyenlet

Didó - királynő

$F(x_1, \dots x_n)$ ~~extr~~ szélét keressük

$G(x_1 \dots x_n) = 0$ kényszer mellett

$H(x_1 \dots x_n, \lambda) = F + \lambda G$ Ezt kell megoldani

---

$S = \int L(f, f', x)\,dx$ szélét keressük

$G(f) = 0$ kényszer mellett

$S' = \int [\underbrace{L + \lambda(x) G(f)}_{L'}]\,dx$ szélét kell megoldani

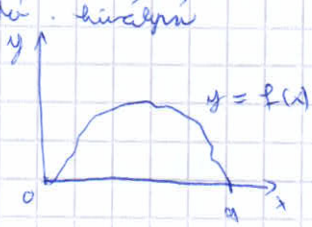
---

$S = \int L(f, f', x)\,dx$

$K = \int G(f, f')\,dx$ kényszer, feltétel

$S' = S + \lambda K$

Didó - királynő



TFH: a rögzített

$T = \int_0^a f(x)\,dx$ ez a cél

feltétel: $S = \int_0^a \sqrt{1+f'^2}\,dx = H$

$$F = T + \lambda(S - H) = \int_0^a f(x)\,dx + \lambda\left(\int_0^a \sqrt{1+f'^2}\,dx - H\right) = \int_0^a \underbrace{\left(f(x) - \lambda\sqrt{1+f'^2}\right)}_{L(f, f')} dx - \lambda H$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial f'} = \lambda \frac{1}{2\sqrt{1+f'^2}} \cdot 2f' = \frac{\lambda f'}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$q = \frac{\partial L}{\partial f} = 1 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right) = 1 \quad \text{EL - egyenlet}$$

$\boxed{\frac{dq}{dx} = 0}$

L nem függ x-től:

$$B = p f' - L = \frac{\lambda f'}{\sqrt{1+f'^2}} f' - \left(f + \lambda\sqrt{1+f'^2}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+f'^2}}\left(f'f' - (1 + f'^2)\right) - f \equiv$$

$$= \frac{-\lambda}{\sqrt{1+f'^2}} - f = \cancel{B} - y_0$$

$$\frac{-\lambda}{\sqrt{1+f'^2}} = f - y_0$$

$$\sqrt{1+f'^2} = -\frac{\lambda}{f-y_0}$$ y_0-t mindenhol ki kell javítani

$$1+f'^2 = \frac{\lambda^2}{f^2}$$

$$f'^2 = \frac{\lambda^2}{f^2} - 1 = \frac{\lambda^2 - f^2}{f^2}$$

$$f' = \sqrt{\frac{\lambda^2 - f^2}{f^2}}$$

$$\int dx = \int df \sqrt{\frac{f^2}{\lambda^2 - f^2}}$$

Legyen $f(x) = \lambda \sin\varphi(x)$

$$\lambda^2 - f^2 = \lambda^2(1-\sin^2\varphi) = \lambda^2\cos^2\varphi$$

$$\frac{f^2}{\lambda^2 - f^2} = \frac{\lambda^2\sin^2\varphi}{\lambda^2\cos^2\varphi} = \mathrm{tg}^2\varphi$$

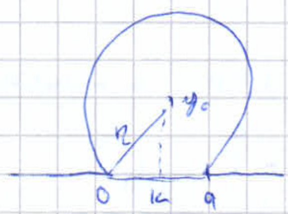
$$\sqrt{\frac{f^2}{\lambda^2 - f^2}} = \mathrm{tg}\varphi\, \lambda\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\int dx = \int \lambda \sin\varphi\, d\varphi$$

$$x - k = -\lambda\cos\varphi$$

$$x - k = -\sqrt{\lambda^2 - f^2}$$

$$\lambda^2 = (x-k)^2 + (f - y_0)^2$$



minimum H-ra $\quad 2R\pi - 2R\alpha \doteq H$

Ha nem tudjuk a-t:

$$T = R^2\pi - R^2\alpha + R^2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$2\pi R - 2R\alpha = H$$

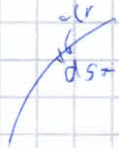
$$2R(\pi - \alpha) = H \Rightarrow R = \frac{H}{2(\pi-\alpha)}$$

$$T = \frac{H^2}{4(\pi-\alpha)^2}(\pi - \alpha + \cos\alpha\sin\alpha)$$

Fermat-elv

$$n = \frac{c_0}{c_{anyag}} \qquad c_{anyag}(\underline{r}) \Rightarrow n(\underline{r})$$

Fermat-elv: Egy fénysugár úgy megy A-ból B-be, hogy a legrövidebb idő alatt jusson oda

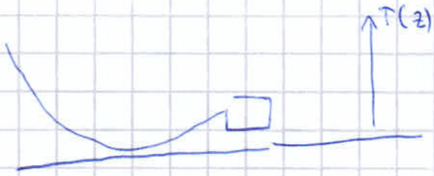


$$dt = \frac{ds}{c(\underline{r})} = \frac{ds}{c_0/n(\underline{r})} = \frac{1}{c_0}\, n(\underline{r})\, ds$$

$$T = \int dt = \frac{1}{c_0} \int n(\underline{r})\, ds$$

Milyen függvényt keresünk? a görbét, de nem paraméteresen ☹

Délibáb:



Keressük $z = f(x)$

$$ds^2 = dz^2 + dx^2 = (1 + f'(x)^2)\, dx^2$$

$$T = \frac{1}{c_0} \int \underbrace{\left[n(f) \sqrt{1 + f'^2} \right]}_{L(f', f)} dx$$

$$\frac{\partial L}{\partial f'} = n(f) \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \qquad \frac{\partial L}{\partial f} = n'(f) \sqrt{1 + f'^2}$$

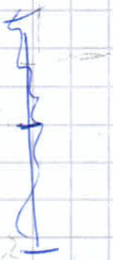
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) = \frac{d}{dx}\left[n(f(x)) \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right] - n'(f)\sqrt{1 + f'^2}$$

Ez ronda, de használható a Beltrami

$$B = \frac{\partial L}{\partial f'} f' - L = n(f) \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} f' - n(f)\sqrt{1 + f'^2} = n(f)\left(\frac{f'^2}{\sqrt{\ }} - \sqrt{\ } \right) =$$

$$= \frac{f'^2 - 1 - f'^2}{\sqrt{1 + f'^2}}\, n(f) = -n(f) \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} = \text{konst}$$

Adott n esetén ez szeparálható



[illegible] ?

M_i [illegible] coordinata [illegible]?

$$d\underline{r} = \dot{\underline{r}}(t)\,dt$$

$$ds = |d\underline{r}| = |\dot{\underline{r}}(t)|\,dt$$

$$T = \int \frac{1}{c_0} n(\underline{r})\,|\dot{\underline{r}}(t)|\,dt = \frac{1}{c_0}\int n(x,y,z)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = n\frac{\dot{x}_k}{\sqrt{}}$$

$$Q_k = (\partial_k n)\sqrt{}$$

$$\frac{d}{dt}p_k = Q$$

$$\frac{d}{dt}\left(n\frac{\dot{x}_k}{\sqrt{}}\right) = (\partial_k n)\sqrt{}$$

$$\frac{d}{dt}n(\underline{r}(t)) = \underline{\nabla}\,\underline{n}\,\dot{\underline{r}}$$

Mechanikus: $L = K - V$

$$S = \int L(x, \dot{x}, t)\,dt \qquad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \qquad Q_k = \frac{\partial L}{\partial x_k}$$

$$\frac{d}{dt}p_k = Q_k$$

Inga

$$x(t) = R\sin\varphi(t) \qquad \dot{x} = R\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$z(t) = R\cos\varphi(t) \qquad \dot{z} = -R\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$v^2 = R^2\dot{\varphi}^2 \qquad K = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2$$

$$V = mg(-z) = -mgR\cos\varphi$$

$$L = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + mgR\cos\varphi = L(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgR\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}p = Q$$

$$mR\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi$$

Beltmaradt

$$H = p\dot{\varphi} - L = mR^2\dot{\varphi}^2 - \left(\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + mgR\cos\varphi\right) = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 - mgR\cos\varphi$$

Ez pont az energia

Hol fog elszakadni az fonál?

itt nem R a paraméter, és mire kényszer

$$L = K - V$$

$$x = r\sin\varphi \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$z = r\cos\varphi \quad \rightarrow \quad \dot{z} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \quad \rightarrow \quad K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$V = -mgz = -mgr\cos\varphi$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi$$ kényszer: $r \overset{!}{=} R$ (jelölés $r \overset{w}{=} R$)

$$L' = L - \lambda(r-R) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi - \lambda(r-R)$$ $\lambda(t)$

$L'(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, \lambda, \dot{\lambda})$ ($\dot{\lambda}$-tól éppen nem függ)

$$p_r = \frac{\partial L'}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad Q_r = \frac{\partial L'}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - \lambda$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \qquad Q_\varphi = \frac{\partial L'}{\partial \varphi} = -mgr\sin\varphi$$

$$p_\lambda = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \qquad Q_\lambda = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} = -r + R$$

EL:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - \lambda \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) &= mgr\sin\varphi \\ 0 &= -r + R \end{aligned}\right\}$$

(a):

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - \lambda \\ 2m\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} &= -mgr\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$r = R \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \text{ és } \ddot{r} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= mR\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - \lambda \\ mR^2\ddot{\varphi} &= -mgR\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi$$ az ki [illegible] [illegible]

(1) - első kifejezés λ-ra

$\lambda = mR\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi$ Ez a kényszererő, a dinamikus tag, amelyhez előjelet vált

$B = E = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 - mgR\cos\varphi$

negyedik esetén $E = \frac{mv_0^2}{2} - mgR$

ebből: $mR\dot{\varphi}^2 = 2mg\cos\varphi + \frac{m v_0^2}{R} - 2mg$

visszaírva: $\lambda = 3mg\cos\varphi + m\frac{v_0^2}{R} - 2mg$

mikor lesz 0? $\lambda = 0$

$3mg\cos\varphi = 2mg - m\frac{v_0^2}{R}$

$\cos\varphi = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3Rg} \in [-1, 1]$

Euler tétel a homogén egyenletekre:

ha $f(x_k)$ olyan, hogy $f(\lambda x_k) = \lambda^n f(x_k)$ az n. rendű homogén

$\frac{d f}{d\lambda}$: $\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k = n\lambda^{n-1} f(x_k)$

$$\boxed{\sum_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = n f(x)}$$

Spec: $n=1$

$\sum x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 1$ Tanuló Euler tétel

Spec $n=0$

$\sum x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ Gibbs-Duhem reláció

Állítás: $L = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_k \sum_e A_{ke}(q,t)\dot{q}_k\dot{q}_e}_{2.\text{ rendű}} + \underbrace{\sum_k B_k(q,t)\dot{q}_k}_{1.\text{ rendű}} + \underbrace{C(q,t)}_{0.\text{ rendű}}$

ennél bonyolultabb L nincs a mechanikában

Bizonyítás: $B = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = \frac{1}{2}\sum_k\sum_e A_{ke}\dot{q}_k\dot{q}_e - C(q,t)$