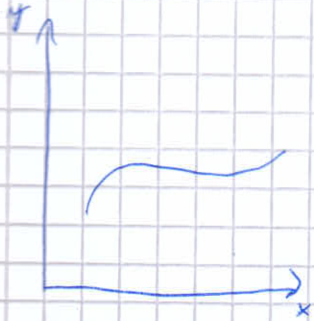
MECHA



$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = ?$$

Legyen

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\, \frac{dg}{dx} \cdot dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x')\, dx'}$$

Kinematika

Egy test mozgását írjuk le. Két független dolog kell:

- Hol van? $\rightarrow$ Ennek megadásához 3 szám kell $(x; y; z)$
- Mikor van ott? $\rightarrow$ Ennek megadásához 1 szám kell (t)

A klasszikus fizikában a hely és az idő független egymástól

$$(x, y, z) = \underline{r} = \vec{r} = \mathbf{r}$$

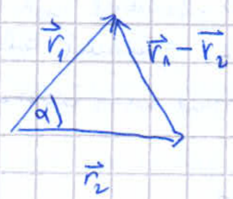
$$\vec{r}_1 \doteq (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1+x_2,\, y_1+y_2,\, z_1+z_2) \qquad |\vec{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$d\vec{r}_1 = (dx_1, dy_1, dz_1) \qquad |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2(x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) =$$

Legyen $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$

$$= |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2\, \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$$



Cos-tétel miatt $|r_1 - r_2|^2 = |r_1|^2 + |r_2|^2 - 2|r_1| \cdot |r_2| \cos\alpha$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |r_1| \cdot |r_2| \cos\alpha = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

A mozgás megadása az $\vec{r}(t)$ függvénnyel lehetséges

MECHANIKA

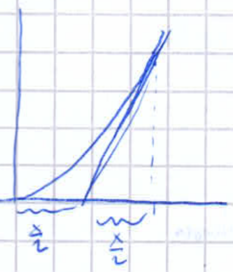
3. előadás

$\vec r=(x,y,z)$ ⇒ Akkor tudjuk, hogy mit csinálunk, ha ismerjük a $\vec r(t)$ függvényt.

$|\vec r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ → távolság

Új fogalom: sebesség: $\vec v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t}=(\dot x,\dot y,\dot z)=\dot{\vec r}$

gyorsulás: $\vec a(t)=\lim\limits_{\Delta t\to}\dfrac{\vec v(t+\Delta t)-\vec v(t)}{\Delta t}=(\ddot x,\ddot y,\ddot z)=\dot{\vec v}=\ddot{\vec r}$



Függőleges hajítás esetén a pálya parabola:

Előző: $\vec a=(0,0,-g)$ $\vec v(t)=?$

végtelen sok ilyen függvény van

$\vec v(t)=(v_{x0},v_{y0},v_{z0}-gt)$ ⇒ A gyorsulás ismeretében nem tudom egyértelműen megmondani a sebességet

Kell tudnunk a $\vec v(0)=(v_{x0},v_{y0},v_{z0})$

Ilyen alakban: $\vec r(t)=(x_0+v_{x0}t,\ y_0+v_{y0}t,\ z_0+v_{z0}t-\frac{1}{2}gt^2)$ $\vec r(0)=(x_0,y_0,z_0)$

Ferde és függőleges hajítás mozgása több más, a gyorsulásuk mégis egyenlő

A rendszer gyorsulását nem tudom befolyásolni, de van 6 adatom, amit megváltoztathatok
↳ se több, se kevesebb

Rugón rezgő test:

$\ddot z=-\omega_0^2 z$ kísérleti tapasztalatból

Látható: $z(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$

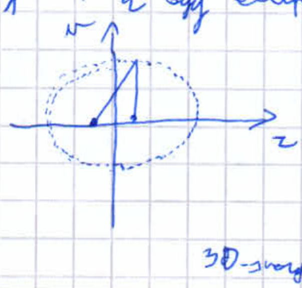
$\dot z(t)=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$\ddot z(t)=-A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi)=-\omega_0\, z(t)$

Stimmel, ez a megoldás. ω_0-t mérjük, de A, φ nem egyértelmű, ezek a kezdeti feltételektől függnek, de ω_0-t nem lehet megváltoztatni.

$z(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)=z_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{z}{A}\right)^2&=\sin^2(\omega_0 t+\varphi)\\ \left(\frac{\dot z}{A\omega_0}\right)^2&=\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\end{aligned}\right\}\quad \left(\frac{z}{A}\right)^2+\left(\frac{v}{A\omega_0}\right)^2=1 \rightarrow \text{Ez egy ellipszis}$$



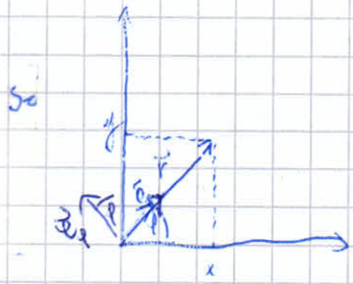
Hogy a pont honnan indul, azt én mondom meg, de a ellipszis tengelyeinek hossza van.

Ez a fázistér ⇒ 2 adatot adok meg

3D-mozgás esetén 6 koordinátát adok meg!

MECHANIKA

4. előadás



$\vec{r}(x,y) = (r,\varphi)$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\dot{\vec{r}} = ?$

Bevezetjük $\vec{e}_r$ egységvektort $\vec{e} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$$\boxed{\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r}$$

$\vec{e}_r$ függ az időtől sajnos. r is

$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\cdot\dot{\vec{e}}_r$

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt}\left(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))\right) = \left(-\dot\varphi\sin\varphi, \dot\varphi\cos\varphi\right) = \dot\varphi\left(-\sin\varphi, \cos\varphi\right)$$

→ Ez is egységvektor, ami $\perp$ $\vec{e}_r$-re ☺

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi}$$

→ Ez két egymásra merőleges vektor lineáris kombinációja felbontható radiális és tangenciális kompre

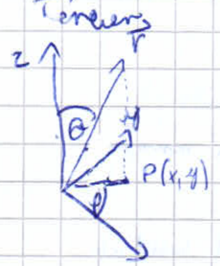
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\dot\varphi\cos\varphi, -\dot\varphi\sin\varphi) = -\dot\varphi\,\vec{e}_r$$

$$\boxed{\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi + r\ddot\varphi\,\vec{e}_r - r\dot\varphi^2\,\vec{e}_r = (\ddot{r} - r\dot\varphi^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot\varphi + r\ddot\varphi)\,\vec{e}_\varphi}$$

Legyen $\omega = \dot\varphi$

síkbeli polárkoordinátás leírásmód

Térben



$\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$

$z = r\cos(\theta)$

$x = r\sin(\theta)\cdot\cos\varphi$

$y = r\sin(\theta)\cdot\sin\varphi$

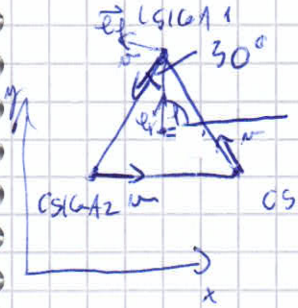
$\vec{t}$ egységvektor $\vec{v}$ irányába

$\vec{v} = v\cdot\vec{t}$ Ez körpályamozgásnál érdekes lehet

$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{t} + v\,\dot{\vec{t}}$

$\dot{\vec{t}} = \dot\varphi\,\vec{n} = \frac{v}{R}\vec{n}$ [$\vec{n}$ a simulókör középpontja felé mutat]

$$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}}$$



Az egyenlő oldalú Δ egyenlő oldalú Δ marad,
(és a középpont megmarad)

Legyen a középpont az origó, és síkbeli polár koordinátákban

$$v = \dot r e_r + r\dot\varphi \vec e_\varphi$$

$v_r = -v\cos 30°$ $\quad\|\quad \dot r$ $\qquad v_\varphi = v\sin 30°$ $\quad\|\quad r\dot\varphi$ $\qquad$ Mind az r, mind a φ irányú sebesség állandó

$r = r_0 - v\cos(30°)t$ → a csigák egyenletesen közelednek a középponthoz

$$r_0 - v\cos(30°)T = 0 \quad (1) \quad \rightarrow \quad T = \frac{r_0}{v\cos(30°)}$$

$$\dot\varphi = \frac{v\sin(30°)}{r_0 - v\cos(30°)t} \qquad - \qquad \frac{d}{dt}\ln\left(r_0 - v\cos(30°)\right) = \frac{-v\cos(30°)}{r_0 - v\cos(30°)}$$

$$\varphi = -\mathrm{tg}(30°)\ln\left(r_0 - \cos(30°)t\right) + \varphi_0 \equiv -\mathrm{tg}(30°)\ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)$$

Logaritmikus spirál

Mekkora szöget fordultak el?

Ha T időt mentek, $r(T) = 0$, de $\ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right) = -\infty$ ⇒ ∞ szöget fordultak el. Feloldás: a csigák nem pontok, előbb-utóbb összeakadnak.
Ez azért van, mert bizonyos effektusokat (a csigák kiterjedését) elhanyagoltuk.

Ha a mozgást akkor lennessük mi gond van.

Newton-féle rendszer → Newton axiómái $\qquad$ Ebből a keretből nem lépünk ki

- Kell egy koordinátarendszer

akármelyiket vehetjük, csak néha kényelmesebb, néha nehezebb

(1) Van olyan koordinátarendszer, amelyben a magára hagyott test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ennek neve inerciarendszer.

Bizonyos problémák szempontjából egy koordinátarendszer néha inerciális, néha nem.

(2)

$\vec{F} = m\vec{a}$ $\rightarrow$ ez nem mond semmit!!! $/ : m$

$\vec{f} = \vec{a}$ $\rightarrow$ ez u. a. de még mindig nem mond semmit

f függ valamitől $\vec{f}(t, \vec{r}, \vec{v})$

f nem függhet a helynek magasabb, mint a 2. deriváltjától

DE erre nincs bizonyíték, honnan tudjuk?

Ahhoz, hogy egy mozgást pontosan leírjak, kelleni 6db adat kell

(3)

a_1 a_2

$\bullet$ $\bullet$ $\rightarrow$ két test, amely hatással van egymásra.

a_1 és a_2 a gyorsulások

$\frac{a_1}{a_2} = áll$ valamint $\vec{a}_1$ és $\vec{a}_2$ ellentétes

Segen az arány $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ Mennyi m_1 és m_2?

1 dm^3 víz tömege jellemző m legyen 1!

Vegyünk egy tetszőleges testet, és párosával próbáljuk ki, és azt látjuk, hogy az egyes m-ek a testekhez hozzárendelhető.

$\Rightarrow$ $m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$

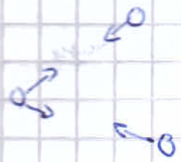
$\downarrow$ $\downarrow$

F_{12} F_{21}

MECHANIKA

5. előadás

3 test



Ha egy testre több erő is hat, több erő ért rá

Az erőket ELVILEG össze kell adni vektoriálisan

DE csak a Newton törvényei csak olyan testekre igazak, amelyek pontszerűek.

4. axióma: Több erő együttes hatása

$$\vec F = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i$$

A kiterjedt testek dinamikáját ebből vezetjük le.

Szabadesésnél láttuk, hogy $\vec a = \vec g$

Az erő: $m\vec a = m\vec g = \vec G$ → súly

rugóhoz: $\vec a = -\omega^2 \vec x$ az erő $m\vec a = -m\omega^2 \vec x = -D\vec x$

$D = m\omega^2$ rugóállandó

Rugón lógó test esetén: $m\ddot x = -Dx + G$

$\ddot x = -\omega^2 x + g$ → Spec megoldás $0 = -\omega^2 x_\infty + g$ ⇒ $x_\infty = \frac{g}{\omega^2} = \frac{G}{D}$

$x(t) = x_\infty + A\sin(\omega t + \varphi)$ → H.rezgés eltolva

Közegben eső golyót állandó sebesség egyenesen arányos a mélységgel

$$m\ddot x = G - \lambda \dot x$$

$$m\dot v = G - \lambda v$$

$\dot v = g - \beta v$ → $v(t) = v_\infty + A e^{\alpha t}$

$v'(t) = \alpha A e^{\alpha t} = g - \beta v_\infty - \beta A e^{\alpha t}$ ⇒ $\alpha = -\beta$

és $v_\infty = \frac{g}{\beta} = \frac{G}{\lambda}$

$v(t) = \frac{g}{\beta} + A e^{-\beta t}$ Mivel $v(0) = 0$

$A = -\frac{g}{\beta}$

Elég hosszú idő után a sebesség állandó

⇒ Arisztotelész nem tévedett, csak nem vizsgálta a kezdeti időket, bizonyos érvényességi körben jó

Kérdés: Mennyi idő múlva lehet $Ae^{-\beta t}$-től eltekinteni?

$v(t) = v_\infty + A e^{-\frac{t}{\tau}}$ ahol $\tau = \frac{1}{\beta}$, ahol τ idő dimenziójú

5τ idő múlva $e^{-5} \approx 0{,}01$, tehát ezt nagyságrendileg, egy 5τ-t kell várni

Tegyük be a rugón rezgő testet tömegbe!

$ma = -Dx - \lambda v + G$ Ha a G nélkül igaz valamilyen x'-re, akkor a G-vel is igaz $x' + C$-re.

$ma = -Dx - \lambda v$

$a = -\omega^2 x - 2\beta v$ ahol $2\beta = \frac{\lambda}{m}$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet

Lin: Ha van 1 db megoldás, az számszorosa is

homogén: a jobb oldal 0 sor.

A mozgás alapjában olyan, mint egy olyan H rezgés, aminek lassan változik az amplitúdója

$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi)$ Ez természetesen minden fgv.-re igaz, tehát most $A(t)$-t kell megoldani

$\dot{x} = \dot{A}\sin(\omega t + \varphi) + A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} = \ddot{A}\sin(\omega t + \varphi) + 2\dot{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) - A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$

$$\left[\ddot{A} - \omega^2 A + 2\beta\dot{A} + \omega_0^2 A\right]\sin(\omega t + \varphi) + \left[2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega\right]\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Mivel az eredmény 0, ezért a sin-os és a cos-os tag is eltűnik:

$\dot{A} + \beta A = 0 \Rightarrow A = A_0 e^{-\beta t}$

ebből a sin-os tag: $\beta^2 A - \omega A + 2\beta(-\beta)A + \omega_0 A = 0$?

$\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Vagyis: $x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi\right)$ Legyen $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Vegyük az egymás utáni maximumokat!

$x(t_1) = A_0 e^{-\beta t_1}$ $x(t_1 + T) = A_0 e^{-\beta(t_1 - T)}$

$\frac{x(t_1)}{x(t_1+T)} = e^{\beta T}$ $\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_1+T)}\right) = \beta T$ $\Rightarrow$ kísérleti méréseknél ω_0 és β meghatározhatók, ezek a tömegre és a rugóra jellemző mennyiségek

A_0 és φ a két kezdeti feltétel, ezt én határozom meg

DE A mejét és a lécezet mi határozza meg, így simán lehet, hogy

$\beta > \omega_0$, de így $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$, és akkor $\omega \notin \mathbb{R}$

Vagyis ez a megoldás csak az $\omega_0 > \beta$ esetre jó

$\Rightarrow$ vissza a gyökerekhez

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{TFH} \quad x(t) = Ae^{-\alpha t}$$

$$\alpha^2 x - 2\beta\alpha x + \omega_0^2 x = 0$$

Ez akkor jó, ha $\alpha^2 - 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$

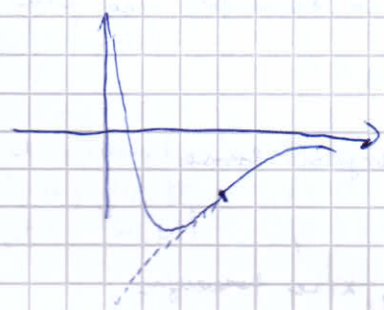
$$\alpha_{1,2} = \frac{2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Két megoldás van. Ha A_1-gyel a egyik jó és A_2-vel a másik, akkor a kettő összege is

$$x(t) = A_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \qquad \text{ha } \beta > \omega_0$$

A_1 és A_2 a kezdeti feltételek

A hosszú távú viselkedés a 1. tag határozza meg



negatív A_1 esetén alulról közelít

A_2 előjelétől függően pozitív vagy negatív irányból indul

Ha $\beta = \omega_0$, akkor $x(t) = A e^{-\beta t}$, de itt csak 1 db szabad paraméter van

Mivel ugyanis lehetnek egyenlőek, β-t tartassuk α-hoz, így kapjuk

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

DE nézzük meg komplexekkel

$$x(t) = A_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t} + A_2 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t}\right)$$

Ha A-k komplexek, azokban benne van 2 szabad paraméter, tehát A_2 nem független A_1-től. Ha $A_2 = A_1^*$, akkor két konjugált összege van, ami valós.

$$x(t) = e^{-\beta t}|A_1|\left(e^{-i[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t - \varphi]} + e^{i[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t - \varphi]}\right) = e^{-\beta t}|A_1| \cdot 2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t - \varphi\right)$$

Vagyis a két megoldás valójában ugyanaz a komplex számok körében,

MECHANIKA
6. előadás

Rugós inga gerjesztett rezgéssel

Egyenlet:

$$m\ddot{x} = -Dx - \lambda\dot{x} + F_0 \sin(\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = f_0 \sin(\omega t)}$$

ahol $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ $2\beta = \frac{\lambda}{m}$

Megoldás:

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

Itt sem A-t sem φ-t nem mi határozzuk meg, ω-tól függnek

$$\dot{x}(t) = A(\omega)\,\omega\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\ddot{x}(t) = -A(\omega)\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

Mivel a bal oldalon $\sin(\omega t + \varphi(\omega))$-k vannak a jobb oldalon $\sin(\omega t)$-k, ezt kell kezelni

$$\Downarrow$$

$$x(t) = A\cos\varphi\sin(\omega t) + A\sin\varphi\cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos\varphi\cos(\omega t) - A\omega\sin\varphi\sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\varphi\sin(\omega t) - A\omega^2\sin\varphi\cos(\omega t)$$

Behelyettesítés

$$\left[-A\omega^2\cos\varphi - 2\beta A\omega\sin\varphi + \omega_0^2 A\cos\varphi\right]\sin(\omega t) + \left[-A\omega^2\sin\varphi + 2\beta A\omega\cos\varphi + \omega_0^2 A\sin\varphi\right]\cos(\omega t) = f_0\sin(\omega t)$$

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos\varphi - 2\beta A\omega\sin\varphi\right]\sin(\omega t) + \left[(\omega_0^2 - \omega^2)A\sin\varphi + 2\beta A\omega\cos\varphi\right]\cos(\omega t) = f_0\sin(\omega t)$$

Ekkor: $\left((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi\right)A = f_0$

$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)A\sin\varphi + 2\beta A\omega\cos\varphi\right] = 0$ $\Rightarrow$ $(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi = -2\beta\omega\cos\varphi$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi(\omega) = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Emeljük ^{2}-re és adjuk össze a két egyenletet

$$\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right)A^2 = f_0^2$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

Baj van, mert a megoldásban nincs benne a kezdeti feltétel

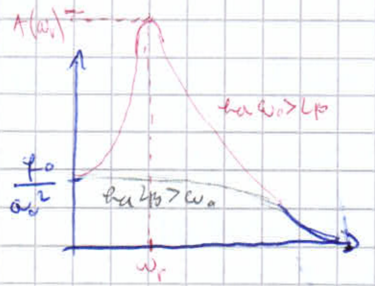
módosítsuk a szétvést: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega)) + x'(t)$

x'-re behelyettesítve: $\ddot{x}' + 2\beta\dot{x}' + \omega_0 x' = 0$

$\Rightarrow$ x': exponenciálisan lecseng, és hamar eltűnik.

Ennek a feltételeit mi határozzuk meg

Milyen az $A(\omega)$ függvény?



$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

kis ω-ra

$$A(0)=\frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^4}}=\frac{f_0}{\omega_0^2}$$

nagy ω-ra:

$$A(\omega)=\frac{f_0}{\omega^2}=0$$

$\rightarrow \frac{1}{x^2}$ - lecsengés

0 és ∞ között -re deriválunk:

Ahol a $(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2$ fgv-nek maxja van, ott A-nak min-a van és fordítva

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]=0$$

$$-2(\omega_0^2-\omega^2)2\omega+4\beta^2\cdot 2\omega=0$$

$$2\omega\left(4\beta^2-2(\omega_0^2-\omega^2)\right)=0 \quad\longrightarrow\quad \omega_1=0$$

$$2\beta^2=\omega_0^2-\omega^2 \quad\longrightarrow\quad \omega_2^2=\omega_0^2-2\beta^2$$

Ha β elég nagy, akkor ω_2 nem létezik

feltétel: $\omega_0 > 2\beta$

ha van ilyen akkor $\omega_2=\omega_r$: rezonancia frekvencia

$$A(\omega_r)=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2-2\beta^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}}=\frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4-8\beta^4+4\beta^2\omega_0^2}}$$

$$=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

Mekkora az a frekvencia sáv, ahol $A(\omega) > \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}}$

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2=2\cdot 4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega_0^4-2\omega_0^2\omega^2+\omega^4+4\beta^2\omega^2=8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega^4+(4\beta^2-2\omega_0^2)\omega^2+\omega_0^4-8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)=0$$

$$x_1-x_2=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$\omega_2^2-\omega_1^2=\sqrt{(4\beta^2-2\omega_0^2)^2-4\left[\omega_0^4-8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)\right]}=\sqrt{16\beta^4-16\beta^2\omega_0^2+4\omega_0^4-4\omega_0^4+32\beta^2\omega_0^2-32\beta^4}=$$

$$=4\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=(\omega_2-\omega_1)\underbrace{(\omega_2+\omega_1)}_{\text{kb. } 2\omega_r} \longrightarrow \Delta\omega \sim \beta$$

Ahol nagyobb az amplitúdó, ott hamarabb leesik az A.

$\Rightarrow$ kis megváltozást jól lehet mérni $\Rightarrow$ fontos mérések alapja

MECHANIKA
7. előadás (10.20.)

Két rezgés összege [illegible] mellett

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$x_1(t) + x_2(t) = A_1(\sin\omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1) + A_2(\sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2) =$$

$$= [A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2]\sin(\omega t) + [A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2]\cos(\omega t) \equiv A\cos\varphi\sin(\omega t) + A\sin\varphi\cos(\omega t) =$$

$$= A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ahol} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$A^2 = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2 =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Interpretáció: Ha $\varphi_1 = \varphi_2$ $\quad A^2 = (A_1 + A_2)^2$

Beláthatő, hogy $A' = A$ és $\varphi' = \varphi$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Legyenek a rezgések leírása: $A_1 e^{i\varphi_1}$ és $A_2 e^{i\varphi_2}$

$$A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} \Rightarrow A e^{i(\omega t + \varphi)}$$ a komplexeket könnyebb összeadni

Merőleges rezgéseknél mi van?

$$x = A_1\sin(\omega t) \qquad y = A_2\sin(\omega t + \varphi) = A_2[\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi]$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos\varphi \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2}\sin\varphi$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2\right]\sin^2\varphi$$

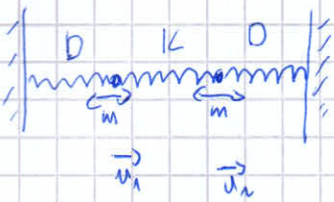
$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} \frac{1}{A_1^2} & -\frac{1}{AA_2}\cos\varphi \\ -\frac{1}{A_1A_2}\cos\varphi & \frac{1}{A_2^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sin^2\varphi$$

Ha $\varphi = 0°$ $\quad \frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2} \rightarrow$ egyenes

Ha $\varphi = 90°$ $\quad \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \rightarrow$ elfektetett ellipszis

Más esetben a mátrix sajátértékeivel belátható, hogy egy elforgatott ellipszis



Az egyensúlyi helyzettől való eltérülés legyen u_1 és u_2!

$$m\ddot{u}_1 = -Du_1 + K(u_2 - u_1) \rightarrow \ddot{u}_1 = -\omega_0^2 u_1 + \Omega^2(u_2 - u_1)$$

$$m\ddot{u}_2 = -Du_2 + K(u_1 - u_2) \rightarrow \ddot{u}_2 = -\omega_0^2 u_2 + \Omega^2(u_1 - u_2)$$

Keressük a megoldást $u_1 = A_1 \sin(\omega t)$ $\quad u_2 = A_2 \sin(\omega t)$ alakban!

$$-\omega^2 A_1 \cancel{\sin(\omega t)} = -\omega_0^2 A_1 \cancel{\sin(\omega t)} + \Omega^2(A_2 - A_1)\cancel{\sin(\omega t)}$$

$$-\omega^2 A_1 = -\omega_0^2 A_1 + \Omega^2(A_2 - A_1) \rightarrow -\omega^2 A_1 = -(\omega_0^2 + \Omega^2)A_1 + \Omega^2 A_2$$

$$-\omega^2 A_2 = -\omega_0^2 A_2 + \Omega^2(A_1 - A_2) \rightarrow -\omega^2 A_2 = -(\omega_0^2 + \Omega^2)A_2 + \Omega^2 A_1$$

$A_1 = A_2 = 0$-ra jó. Deja!

$\Downarrow$

$$A_2 = \frac{\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} A_1 \Rightarrow (\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) A_2 = \Omega^2 A_1$$

$$\frac{(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)^2}{\Omega^2} A_1 = \Omega^2 A_1$$

$$\frac{(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)^2 - \Omega^4}{\Omega^2} A_1 = 0$$

$\Downarrow$ vagy $A_1 = 0$

vagy ügyes ω esetén bármely A_1-re jó az egyenlet

VAN NEM TRIVI MEGOLDÁS

$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)^2 = \Omega^4$$

$$\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 = \pm\Omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \xrightarrow{\text{ebből}} A_1 = A_2$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \xrightarrow{\text{ebből}} A_1 = -A_2$$

Ha a két test kitérése egyforma, vagy ellentétes, harmonikusan fognak rezegni

Ezeket elemi úton is be lehetne látni

Bármilyen tömegekre és rugókra létezik 2 olyan frekvencia, amelyre harmonikusan rezegnek

$$\left.\begin{aligned} u_1^1 &= A_1^1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ u_2^1 &= A_2^1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

~~A két test egyenletében van 4 szabad paraméter (A_1, A_2,~~ Két szabad paraméter van, mert A_2^1 A_1^1-től függ

$$\left.\begin{aligned} u_1^2 &= A_1^2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ u_2^2 &= A_2^2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}$$

az egy másik eset, szintén két paraméterrel

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= u_1^1(t) + u_1^2(t) \\ u_2(t) &= u_2^1(t) + u_2^2(t) \end{aligned}\right\}$$

is megoldás, és ebben már 4 szabad paraméter van, így tuti, hogy ez az általános megoldás

MECHANIKA

8. előadás (10.21.)

összetett rezgés:

$$x_1 = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

Ha ω_1 és ω_2 közel van, akkor szinuszos rezgés, amelynek amplitúdója lassan változik

Előző órán ↑

(1) $m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \qquad \text{legyen } m\vec{v} = \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \text{ és } \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p}$$

1db 2. rendű egyenlet — 2db 1. rendű egyenlet

Előző $\vec{p}(t+\Delta t) \cong \vec{p}(t) + \vec{F}(t)\Delta t$

$\vec{r}(t+\Delta t) \cong \vec{r}(t) + \frac{1}{m}\vec{p}(t)\Delta t$

⇓

A kezdőfeltételek ismeretében rekonstruálható a mozgás

(1)-ből:

$$\vec{r}\times m\vec{a} = \underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\vec{M}}$$

$\vec{M} \rightarrow$ forgatónyomaték

$$\vec{r}\times m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) \text{ mert } = \underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{0} + \vec{r}\times m\dot{\vec{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{r}\times m\vec{v})}_{\vec{N}} = \vec{M}$$

$\vec{N} \rightarrow$ impulzus momentum $\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{N} = \vec{M}$

Ha $\vec{M}=0$, akkor $\vec{N}$ = állandó

Ilyenkor vagy $\vec{F}=0$, vagy $\vec{r}\parallel\vec{F}$

az ilyen erőtér CENTRÁLIS erőtér

centrális erőtérben az impulzus momentum nem változik

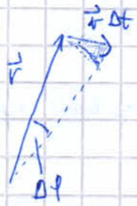
$$\vec{r}\vec{N} = \vec{r}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = m\vec{v}\left(\vec{r} \times \vec{r}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ a részecske egy centrális erőtérben CSAKIS síkmozgást végez, mert $\vec{r}$ és $\vec{N}$ mindig merőleges $\Rightarrow$ leírható síkbeli polárkoordinátákkal

$$\vec{r} = r\,\vec{e_r} \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{N} = mr\,\vec{e_r} \times \left(\dot{r}\,e_r + r\dot{\varphi}\,e_\varphi\right) = mr\dot{r}\underbrace{\left(\vec{e_r} \times \vec{e_r}\right)}_{0} + mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e_r} \times \vec{e_\varphi}}_{\text{1 hosszúságú, síkra merőleges vektor}}$$

$\Rightarrow$ $r^2\dot{\varphi} =$ állandó



$$\Delta T = \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\,\Delta t$$ $\rightarrow$ Az egységnyi idő alatt súrolt terület állandó

$$\dot{T} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \text{állandó}$$

Kepler ezt a gravitációnál kísérleti alapon mondta, de ez minden centrális erőtérben igaz

---

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \Big|\cdot v$$

$$m\vec{v}\,\vec{a} = \vec{v}\,\vec{F}$$ legyen $\vec{v}\,\vec{F} = P \rightarrow$ teljesítmény

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\,\vec{v}\right) = 2\vec{v}\,\vec{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = P$$ Ha van olyan erőtér, hol $\vec{v} \perp \vec{F}$ akk a sebesség állandó

kinetikus energia $\rightarrow E_k$

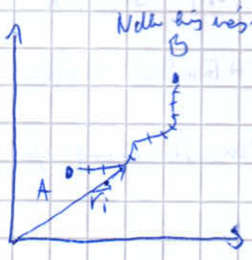
$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_0}^{t}P(t)\,dt$$

$$E_k(t) - E_k(t_0) = \int_{t_0}^{t}P(t)\,dt \equiv W \rightarrow \text{munka}$$

$\Rightarrow$ Munkatétel: $\Delta E_k = W$

Más megközelítés: Nézzünk egy olyan rendszert, amelyben a erő csak a helytől függ: erőtér

$\vec{F}(\vec{r})$



$$\sum_{i=0}^{N-1}\vec{F}(\vec{r}_i)\left(\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i\right) \longrightarrow \text{ez egy szám}$$

Finomítsuk a felosztást! $N \rightarrow \infty$

$$\int_G \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} \longrightarrow \text{vonal menti integrál}$$

$$\equiv W'$$

Az eredeti munka:

$$W = \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} \vec F(\vec r(t_i))\,\vec v(t_i)\,(t_{i+1}-t_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \vec F(\vec r(t_i))\,\frac{\vec r(t_{i+1})-\vec r(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\,(t_{i+1}-t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \vec F\,\vec r_i(\vec r_{i+1}-\vec r_i) \Rightarrow W'$$

$\Rightarrow$ A két módon értelmezett munka ugyanaz!

(Az eredeti munka átlagosításnál integrálja, azaz a munkatétel, és belátható, hogy az egyenlő az erőtérben a vonal menti integrállal)

Nézzünk két adott pont között a munkát! Ha bármely úton egyforma a munka egyenlő, az erőtér konzervatív.

Másképp megfogalmazva: Ha egy úton visszafelé megyek, az erő ellentett
(az definíció kiterjesztése) Ha $W_{AB1} = W_{AB2}$, akkor $W_{AB1} = -W_{BA2}$

Egymás után megtéve: $W_{AB1} + W_{BA2} = 0$. Ez egy zárt görbe.

$\oint \vec F(\vec r)\,d\vec r = 0 \Rightarrow$ Ha egy erőtér ilyen az konzervatív

zárt görbe szerinti integrál (Ennél egyszerűbb megfogalmazás a rotáció)

Vegyünk egy konzervatív erőteret!

Válasszunk egy O pontot! Legyen $\phi(\vec r) = -\int_{\vec r(0)}^{\vec r} \vec F(\vec r)\,d\vec r$

$\phi(\vec r)$ csak a $\vec r$-től függ, tehát a helyre jellemző. (Az origó áthelyezésénél $\phi(\vec r)$ csak konstanssal tér el.)

$$\phi(\vec r_2) = -\int_{\vec r_0}^{\vec r_2} \vec F(\vec r)\,d\vec r = \underbrace{-\int_{\vec r_0}^{\vec r_1} \vec F(\vec r_1)\,d\vec r}_{\phi(\vec r_1)} \underbrace{-\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F(\vec r)\,d\vec r}_{\vec W_{12}}$$

$\Rightarrow \quad W_{12} = \phi(\vec r_1) - \phi(\vec r_2)$

Tehát konzervatív erőtérben: $E_k(t) - E_k(t_0) = \phi(\vec r(t_0)) - \phi(\vec r(t))$

$\Rightarrow E = E_k(t) + \phi(\vec r(t)) = \phi(\vec r(t_0)) + E_k(t_0) =$ áll

KONZERVATÍV ERŐTÉRBEN a kinetikus és potenciális energiájuk összege áll

EZ AZ ENERGIA MEGMARADÁS

(Csak konzervatív erőtérben értelmezhető)

MECHANIKA

9. előadás (10.27.)

Erőtér: adott $\vec{F}(\vec{r})$ függvény

konzervatív: $\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

$\Rightarrow$ potenciális energia: $\phi(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$

$$W_{12} = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2)$$

Emiatt: $E_{kin} + \phi$ = állandó = teljes energia $\rightarrow$ energiamegmaradás

$\phi(\underline{r_2}) - \phi(\underline{r_1}) = -\int_{\underline{r_1}}^{\underline{r_2}} \underline{F}\, d\underline{r}$ Legyen $\underline{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$ $r_2(x, y_1, z_1)$

$\phi(x, y_1, z_1) - \phi(x_1, y_1, z_1) = -\int_{x_1}^{x_2} \underline{F}(x, y_1, z_1)\, dx$ $\rightarrow$ itt ez már nem görbe-integrál, hanem Riemann-integrál

$\Rightarrow$ $F_x(x_1, y_1, z_1) = -\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{y_1, z_1}$

$= -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ (parciális derivált)

Ez alapján: $\underline{F} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = -\operatorname{grad} \phi = -\underline{\nabla} \phi$

Ebből: $\phi(\underline{r_2}) - \phi(\underline{r_1}) = \int_{\underline{r_1}}^{\underline{r_2}} \operatorname{grad} \phi\, d\underline{r}$ (ez egy azonosság)

ha $\underline{r_1}$ és $\underline{r_2}$ közel van

$\approx (\operatorname{grad} \phi)(\underline{r_2} - \underline{r_1})$

Elegánsan: $\underline{\phi(\underline{r} + \underline{h}) \cong \phi(\underline{r}) + (\operatorname{grad} \phi)\, \underline{h}}$,

ez olyan, mint az deriválás 3 változós megfelelője

A gradiens egy vektor. Az iránya azt mutatja, hogy merre változik leggyorsabban a vektor

Ha $\underline{h}$ ekvipotenciálison mozog, akkor a ϕ változása 0, tehát $(\operatorname{grad} \phi)\, \underline{h} = 0$,
tehát $\underline{h} \perp \operatorname{grad} \phi$.

Legyenek erővonalak, amelyek minden pontban p.h. graddal

$\Rightarrow$ az erővonalak minden pontban merőlegesek az ekvipotenciálisra

Az erővonalak az ekvipotenciális felületek ortogonális trajektóriái.

Példa 1.

Legyen $\phi(\underline{r}) = |\underline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{|\underline{r}|}$$ ez a többire is úgy van.

$$\mathrm{grad}|\underline{r}| = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \underline{n}$$

Példa 2.

$$\phi = \frac{1}{|\underline{r}|}$$

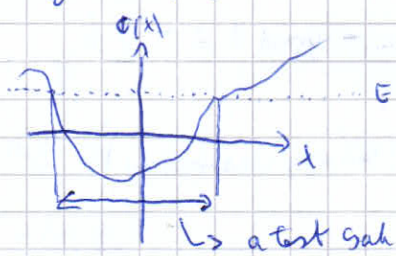
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{|\underline{r}|^3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{grad}\frac{1}{|\underline{r}|} = -\frac{1}{|\underline{r}|^2}\cdot\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = -\frac{1}{|\underline{r}|^2}\underline{n}$$

Állítás: ha a potenciális energia csak $|\underline{r}|$-től függ, akkor az erőtér centrális

Ha az erő csak egy komponenstől függ, akkor $F(x) = -\frac{d\phi}{dx}$

Ebből: $\frac{1}{2}mv^2 + \phi(x) = \text{áll} = E$



↳ a test csak itt mozoghat, különben v^2 negatív lenne

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\phi(x)\right)}$$ → ez egy elsőrendű diffegyenlet, de minden E mellett meg kell oldani (2 szabad paraméter miatt)

$$1 = \pm\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\phi(x)\right)}} \Rightarrow t - t_0 = \pm\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\phi(x)\right)}}\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\phi(x)\right)}}$$ konkrét $\phi(x)$ esetén ez megoldható

Ha csökkentjük az energiát, akkor a grafikon a vízszintes vonal lemegy.

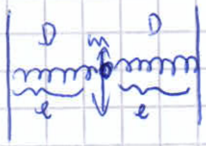
$\phi(x)$ minimuma körül közelíthető parabolával → egyensúlyi helyzet körül harmonikus rezgés

$$\phi(x) \approx \frac{D^*}{2}(x-x_0)^2 \quad \left(\text{ahol } \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x_0} = 0\right) \Rightarrow F(x) \approx -\frac{d\phi}{dx} \approx -D^*(x-x_0)$$

ahol $D^* = -\frac{dF}{dx}\Big|_{x_0} = \frac{d^2\phi}{dx^2}\Big|_{x_0}$

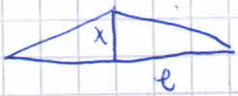
innen $\omega = \sqrt{\frac{D^*}{m}}$ meghatározható (ha $D^*=0$, akkor az nem jó ☹)

Példa 3.



$\ell - \ell_0 = F$ (Feladat)

kis megpendítés mit okoz?



$$\phi(x) = 2\frac{D}{2}\left(\sqrt{x^2-\ell^2}-\ell_0\right)^2$$

$$\phi'(x) = D\cdot 2\left(\sqrt{x^2+\ell^2}-\ell_0\right)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+\ell^2}} = 2D\left(\sqrt{x^2+\ell^2}-\ell_0\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}} =$$

$$= 2D\left(x - \frac{\ell_0 x}{\sqrt{x^2+\ell^2}}\right)$$ Mivel $\phi'(0)=0$, ezért $x_0=0$

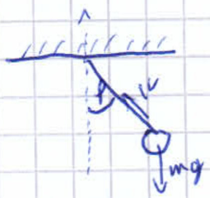
$$D^* = \phi''(0) = 2D\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right) = 2D\frac{\ell-\ell_0}{\ell} = 2F\frac{1}{\ell_0+\frac{F}{D}}$$

- $F=0$ esetén $D^*=0$, tehát feszítetlen rezgés mellett nem harmonikus [ezért kell megfeszíteni a hegedűhúrt]
- kicsi F esetén $\omega_T \sim \sqrt{\frac{2F}{\ell_0 m}} \sim \sqrt{F}$ ⇒ ez megegyezik a tapasztalattal

ha vízszintesen térítettük ki $m\ddot{x} = -2Dx \to \omega_L = \sqrt{\frac{2D}{m}}$

$$\omega_T^2 = \omega_L^2\left(\frac{\ell-\ell_0}{\ell}\right)$$

Példa 4.



$\phi = mgh$

A kényszererő definíció szerint $\int \underline{K}\,d\underline{s} = 0$, hogy ne végezzen munkát

⇒ kényszererő mellett is teljesül a munkatétel

$\underline{v} = \dot r\,\underline{e_r} + r\dot\varphi\,\underline{e_\varphi}$ Mivel kényszer van, $\dot r = 0$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\,\ell^2\dot\varphi^2 + mg(\ell - \ell\cos\varphi) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi^2 + mg\ell(1-\cos\varphi) = E$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot\varphi\ddot\varphi + mg\ell\sin\varphi\cdot\dot\varphi = 0 \to \ell\ddot\varphi + g\sin\varphi = 0$$

kis φ-re: $\ddot\varphi = -\frac{g}{\ell}\varphi \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

MECHANIKA

10. előadás (10.28.)

Kopernikusz: Napközpontú világkép

Kepler: Kepler-törvények *

Newton: 1760: Általános tömegvonzás

Cavendish: gravitációs állandó megmérése (Groma szerint a legextravagánsabb ember)

Eötvös Loránd: tehetetlen és súlyos tömeg

Einstein: Ált. relativitás elmélet

*: állítólag elrontotta a hólyagjóhurkát és 10 évet kellett számolni a logaritmusra

Arányosság: $\underline{F} \sim \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r} = m\underline{a}$ → akar, hogy a mozgás ne függjön a tömegtől a másik oldalon is kell egy m. ⇒ $F \sim m$

Mivel a grav. szimmetrikus, szerint kell M is: $F \sim M$

+ konstans

$$\underline{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

Lehet, hogy végre lehet egyneműsíteni, így használjuk két féle tömegét

$$-\gamma \frac{m_G M_G}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = m_t \underline{a}$$

m_G és m_t arányossága nagyon függ a körülményektől és ezért nehéz bizonyítani

A súlyos tömeg kísérlet, hogy pontosan kell a tapasztalat alapján

gravitációs térerősség: $\underline{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

Vajon konzervatív az erőtér? tudjuk, hogy $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

Így tehát $\phi = -\gamma \frac{mM}{r}$ - re jó az, hogy $-\operatorname{grad} \phi = F$, tehát konzervatív

Ez alapján: $\underline{g} = +\operatorname{grad} \gamma \frac{M}{r}$ $\quad V = -\gamma \frac{M}{r}$ → potenciál

Nézzük meg, hogy hogyan mozog M terében m!

Mivel $M \gg m$, M-et tekintsük rögzítettnek

Centrális erőtér $\Rightarrow$ síkmozgás $\rightarrow r^2\dot{\varphi} = C$ (1)

Konzervatív erőtér $\Rightarrow$ energiamegmaradás $\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r} = E$ (2)

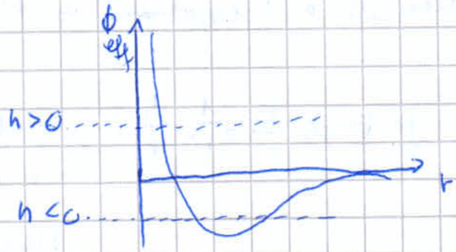
Mivel $\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e_r} + r\dot{\varphi}\,\underline{e_\varphi}$ $\qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

(2): $\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2\mu}{r} = h$ $\qquad$ ahol $h = \frac{2E}{m}$ $\quad \mu = \gamma M$

(1): $r^2\dot{\varphi} = C \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{C^2}{r^4}$

$$\Rightarrow \quad \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = h$$

$$\dot{r}^2 + \Phi_{eff} = h$$



Diszkusszió

- Ha $h < 0$, akkor a test be van szorítva egy intervallumba
- Ha $h > 0$, akkor egy bizonyos szintig megközelíti, és utána messze elmehet. Ez nem lehet ellipszis $\Rightarrow$ Newton újat is hozott, nem csak régit igazolt

Sajnos a diff egyenlet nem oldható meg a $r(t)$-re, de lehet számolni $\varphi(t)$ és $r(\varphi)$, akkor $r(\varphi(t)) = r(t)$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{C}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2} = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}} \quad (*)$$

Mivel $\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{C}{r}\right) = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{C} - \frac{C}{r}\right) = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

Állítás: $(*)$: $\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{C} - \frac{C}{r}\right) = \sqrt{A^2 - \left(\frac{\mu}{C} - \frac{C}{r}\right)^2}$

ment: $= \sqrt{A^2 - \left(\frac{\mu}{C}\right)^2 + 2\frac{\mu}{r} - \frac{C^2}{r^2}}$ $\qquad$ Legyen $A^2 - \left(\frac{\mu}{C}\right)^2 = h$

Legyen $K(\varphi) = \frac{\mu}{C} - \frac{C}{r}$

$$\frac{dk}{d\varphi} = \pm\sqrt{A^2 - k^2}$$

ha $k = A\cos\varphi$, akkor jó

vagyis $\frac{\mu}{c} - A\cos\varphi = \frac{c}{r}$

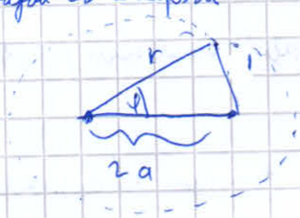
$$r = \frac{c}{\frac{\mu}{c} - A\cos\varphi} = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$ ahol $\varepsilon = \frac{Ac}{\mu}$

$$r(\varphi) = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

c: felületi sebesség

$\mu = \gamma M$

Vajon ez ellipszis?



állandó $= 2d = r + \sqrt{r^2 + 4a^2 - 4ar\cos\varphi}$

$$(2d-r)^2 = r^2 + 4a^2 - 4ar\cos\varphi$$

$$4d^2 - 4dr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 4a^2 - 4ar\cos\varphi$$

$$r = \frac{d^2-a^2}{d-a\cos\varphi} = \frac{\frac{d^2-a^2}{d}}{1-\frac{a}{d}\cos\varphi}$$

Ha ellipszisről van szó, akkor $\varepsilon = \frac{a}{d}$ ami a Δ egyenlőtlenség miatt $\varepsilon < 1$

(Belátható, hogy ha $\varepsilon > 1$ akkor hiperbola, ha $\varepsilon = 1$ akkor parabola)

$$\varepsilon = \frac{cA}{\mu} = \frac{c}{\mu}\sqrt{\left(\frac{\mu}{c}\right)^2 + h} = \sqrt{1+\frac{c^2}{\mu^2}h}$$

ha $h < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$

ha $h = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$

ha $h > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$

$\Rightarrow$ Akkor van zárt pályája (ellipszis) ha az energia negatív. Ez jött ki a szemléletünkből is

Ellipszis esetén: $r = \frac{\frac{b^2}{d}}{1-\varepsilon\cos\varphi}$

b: kistengely

d: nagyféltengely

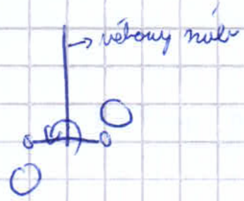
$\frac{b^3}{d} = \frac{c^2}{\mu}$ $\quad \frac{c}{2} = \frac{\pi b d}{T} \Rightarrow \frac{4\pi^2 b^2 d^2}{T^2} = \mu\frac{b^2}{d}$

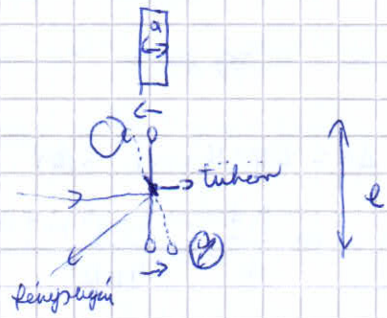
$\Rightarrow \frac{d^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$ Ez a Kepler III.

MECHANIKA

11. előadás (11.10)

Cavendish kísérlete





$m = 20g$ $M = 1{,}5\ kg$ $l = 10cm$ $D = 64mm$ $d = 15mm$ $a = 30mm$

$r = \frac{D}{2} + \frac{d}{2} \approx 47mm$

$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$

A testeket átrakom a másik oldalra, az ugyanúgy gyorsul, és a lézerfény elmozdulása $y = \frac{a}{2}T^2$-tel

$\gamma = \frac{y}{L} \cdot \frac{r^2 l}{4MT} = \frac{y}{L} \cdot 6{,}51 \cdot 10^{-9} \frac{m^3}{kg\,s}$

$y = 11cm$, így $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$

$g \rightarrow$ gravitációs térerősség

$U \rightarrow$ gravitációs potenciál

Hogyan kell kiterjedt testekre ezeket kiszámolni?

TFH érvényes a szuperpozíció elve

$$g(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\underline{r} - \underline{r_i}|^2} \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r_i}}{|\underline{r} - \underline{r_i}|}$$ De ez bonyi

$$U(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\underline{r} - \underline{r_i}|}$$

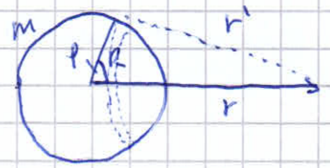
Mondjuk, hogy ΔV térfogatban van Δm tömeg, így $\rho(\underline{r}) = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ $\rightarrow$ TFH. ez ismert

$\Delta m_i = \rho(\underline{r_i}) \Delta V_i$ így $U(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho(\underline{r_i})}{|\underline{r} - \underline{r_i}|} \Delta V_i$

$\rightarrow$ térfogati integrál

$$U(\underline{r}) = -\gamma \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}' - \underline{r}|} dV'$$

Példa 1: Vegyük egy végtelen vékony gömbhéjat m tömeggel



Egy gömb öv minden pontja egyenlő távolban,

$$\Delta A = 2\pi \cdot R \sin\varphi \cdot R \Delta\varphi$$

$$\Delta m = m \frac{\Delta A}{A} = m \frac{2\pi R^2 \sin\varphi \Delta\varphi}{4\pi R^2} = \frac{m}{2} \sin\varphi \Delta\varphi$$

$r' =$

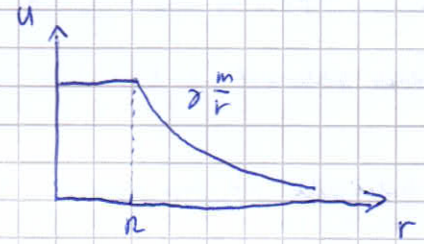
$$\Delta U = -\gamma \frac{m}{2} \frac{\sin\varphi \;\Delta\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}$$

$$U(\underline{r}) = -\gamma \frac{m}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi \; d\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}$$

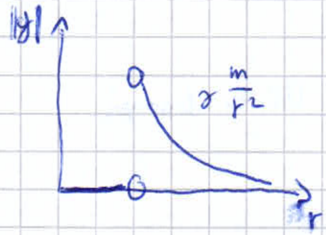
Mivel $\frac{d}{d\varphi}\left(\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}\right) = \frac{1}{2} \frac{+2Rr\sin\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}$

ezért $U(\underline{r}) = -\gamma \frac{m}{2Rr}\left[\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}\right]_0^{\pi} = -\gamma \frac{m}{2Rr}\left[|R+r| - |R-r|\right]$

$$U(\underline{r}) = \begin{cases} -\gamma \frac{m}{r} & \text{ha } r > R \\ -\gamma \frac{m}{R} & \text{ha } R > r \end{cases}$$



$g(\underline{r}) = U'(\underline{r})$



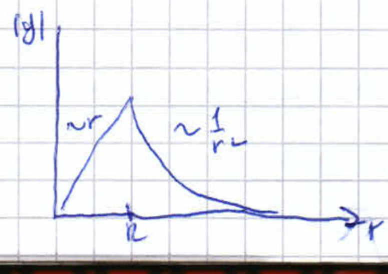
egy tömör gömb felbontható gömbhéjakra és ennek belátható ez a képlet

$|g(r>R)| = \gamma \frac{m}{r^2}$ (egyedüli feltétel, hogy a sűrűség gömbszimmetrikus)

ha viszont $r<R$, akkor a kinnlevő gömbhéjak nem számítanak

$|g(r<R)| = \gamma \frac{1}{r^2} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ (itt feltétel a homogenitás)

$= \gamma \frac{4\pi}{3} \rho r$



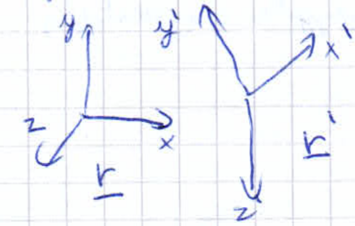
TFH a világegyetemnek van egy átlagos S sűrűsége. A lokális tömegsűrűség függ attól hogy hol a világ térképe, tehát nem mindegy egy tartomány végtelen

Hubble óta tudjuk, hogy a világ tágul, tehát a világegyetem nem statikus

MECHANIKA

12. előadás

Két koordinátarendszer :



$$\underline{r} = \hat{O}\, \underline{r}'$$

$$\underline{r}(t) = \hat{O}(t)\, \underline{r}'(t)$$

TFH $\underline{r}$ inerciarendszer

$$\dot{r}(t) = \dot{\hat{O}}(t)\, r'(t) + \hat{O}(t)\, \dot{r}'(t)$$

$$\tilde{\underline{\underline{O}}}(t)\, \dot{\underline{r}}(t) = \underbrace{\tilde{\underline{\underline{O}}}(t)\, \dot{\underline{\underline{O}}}(t)}_{\underline{\underline{\Omega}}(t)}\, r'(t) + \dot{r}'(t) \quad \text{mert } \tilde{\underline{\underline{O}}}(t) \text{ forgásmátrix}$$

tudjuk, hogy

$$\tilde{\underline{\underline{O}}} \cdot \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{1}} \quad \text{ebből} \quad \dot{\tilde{\underline{\underline{O}}}}\, \underline{\underline{O}} + \tilde{\underline{\underline{O}}}\, \dot{\underline{\underline{O}}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\widetilde{\tilde{\underline{\underline{O}}}\, \dot{\underline{\underline{O}}}} + \underline{\underline{\Omega}} = 0$$

$$\tilde{\underline{\underline{\Omega}}} + \underline{\underline{\Omega}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\Omega}} \text{ egy antiszimmetrikus tenzor}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r} \quad \text{ahol } \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

tehát

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{r}' \Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}' \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \underline{\omega} \times$$

ez alapján:

$$\underline{a} = \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega} \times\right)\left(\frac{d'r}{dt} + \underline{\omega} \times r\right) =$$

$$= \frac{d'^2 \underline{r}}{dt^2} + \underline{\omega} \times \frac{d'\underline{r}}{dt} + \underbrace{\frac{d'}{dt}(\omega \times r)}_{\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}' + \omega \times \frac{d'r}{dt}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) =$$

$$= \underline{a}' + 2\omega \times v' + \underline{\beta} \times \underline{r}' + \omega \times (\omega \times r')$$

$$\underline{F} = m\underline{a}' + 2m\, \omega \times v' + m\beta \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

Mivel csak keresztes tagok vannak, ezt elhagyjuk

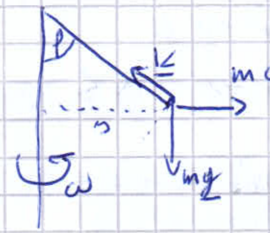
$$m\underline{a}' = F - m\underline{a}_0 + \underbrace{2m\, \underline{v} \times \underline{\omega}}_{\text{Coriolis-erő}} + \underbrace{m\, \underline{r} \times \underline{\beta}}_{\text{Euler-erő}} - m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

[illegible]

$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \underline{\omega}(\underline{\omega}\underline{r}) - \underline{r}\,\omega^2 = -\omega^2 \underline{\rho}$, ahol $\underline{\rho} = \underline{r}$ merőleges komponense

Ez a centrifugális erő

A képletben az m-et a tehetetlenségi ereje, de ha F a grav. törvény, akkor ~~akkor~~ akkor a súlyos tömeg van. Így kimutatható a $m_{grav} = m_{teh}$!



Ic akkor, ha $a_r = 0$ legyen

$$m a_\varphi = m l \ddot{\varphi} = -mg \sin\varphi + m\omega^2 l \sin\varphi \cos\varphi$$

Ebből: $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi + \omega^2 \sin\varphi\cos\varphi = f(\varphi)$

Hogy $\ddot{\varphi} = 0$ legyen

$\varphi_1 = 0$

$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\omega^2}\frac{g}{l}$ → van ilyen, ha $\omega^2 > \frac{g}{l}$

$$f'(\varphi) = -\frac{g}{l}\cos\varphi + \omega^2\left[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right]$$

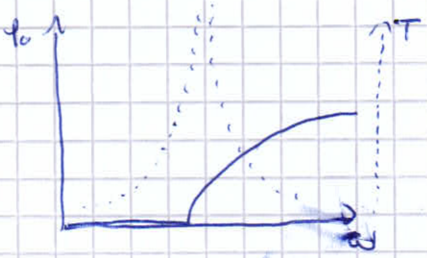
$f'(\varphi_1) = \omega^2 - \frac{g}{l}$ ha $\omega^2 > \frac{g}{l}$, akkor pozitív különben negatív

$f'(\varphi_2) = \left(\frac{g}{l}\right)^2 \frac{1}{\omega^2} - \omega^2$ ha $\omega^2 > \frac{g}{l}$ (mindig) akkor negatív

<u>bifurkáció</u>

Mozgásegyenlet: $\ddot{\varphi} = \frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)$ az egyensúlyi h. körül

$\omega_r^2 = -\frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi_0} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ $\omega^2 = \frac{g}{l}$ -nél $\omega_r = 0$, így nem harmonikus rezgés



A bifurkációhoz tartozik kritikus lassulás

MECHANIKA

13. előadás (11.17.)

$$m\underline{a} = m\underline{g} + 2m\,\underline{v}\times\underline{\omega} + m\,\omega^2\underline{r}$$

Ha a v-hez tartozó idő sokkal kisebb, mint az ω-hoz tartozó, akkor a 3. tag elhagyható

z: sugárirányú

y: érintő a x. kört

x: legyen

$$\underline{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \qquad \underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\underline{\omega} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)\,\omega \qquad \underline{g} = (0, 0, -g)$$

$$(\underline{v}\times\underline{\omega})\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}, & \dot{y}, & \dot{z} \\ \omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \\ i & j & k \end{vmatrix} = \dot{x}\cdot 0\,k + \dot{y}\,\omega\sin\varphi\, i - \dot{z}\,\omega\cos\varphi\, j - \dot{z}\cdot 0\, i - \dot{x}\,\omega\sin\varphi\, j + \dot{y}\,\omega\cos\varphi\, k$$

$$= \dot{y}\,\omega\sin\varphi\, i + (-\dot{z}\,\omega\cos\varphi - \dot{x}\,\omega\sin\varphi)\, j + \dot{y}\,\omega\cos\varphi\, k \Rightarrow (\underline{v}\times\underline{\omega}) = \begin{pmatrix} \dot{y}\,\omega\sin\varphi \\ -\dot{z}\,\omega\cos\varphi - \dot{x}\,\omega\sin\varphi \\ \dot{y}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \ddot{x} = 2\dot{y}\,\omega\sin\varphi \\ &(2)\quad \ddot{y} = -2\dot{z}\,\omega\cos\varphi - 2\dot{x}\,\omega\sin\varphi \\ &(3)\quad \ddot{z} = -g + 2\dot{y}\,\omega\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}(2) \rightarrow \quad \dddot{y} = -2\ddot{z}\,\omega\cos\varphi - 2\ddot{x}\,\omega\sin\varphi$$

$$\dddot{y} = -2\omega\cos\varphi(-g + 2\dot{y}\,\omega\cos\varphi) - 2\omega\sin\varphi(2\dot{y}\,\omega\sin\varphi)$$

$$\dddot{y} = -4\omega^2\dot{y} + 2\omega g\cos\varphi$$

$$\ddot{v}_y = -4\omega^2 v_y + 2\omega g\cos\varphi$$

$$v_y(t) = A\cos(2\omega t + \varphi) + B$$

$$\ddot{v}_y(t) = -4\omega^2 A\cos(2\omega t + \varphi) \qquad -4\omega^2 A\cos(2\omega t + \varphi) = -4\omega^2(A\cos(2\omega t + \varphi) + B) + 2\omega g\cos\varphi$$

$$0 = -4\omega^2 B + 2\omega g\cos\varphi$$

$$v_y(t) = A\cos(2\omega t + \varphi) + \frac{g\cos\varphi}{2\omega} \qquad B = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}$$

Kezdeti feltételek: $v_y(0)=0$; $a_y(0)=0$

erellöl a sz. paraméterek: $\varphi=0$

$$A=\frac{g\cos\varphi}{2\omega}$$

$$v_y=\frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(1-\cos(2\omega t)\right)$$

Ha $\omega t \ll 1$ $\quad$ így $v_y(t)=\frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(1-1+\frac{1}{2}(2\omega t)^2\right)=g\cos\varphi\,\omega t^2$

$$\ddot z(t)=-g+2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\, g t^2\simeq -g$$

$$\ddot x(t)\cong 0$$

A szabad esés forgó földön: ugyanúgy esik, de a kerszírásuni kéu majdu elmozul

100 m magasságból leejtve 1,5 cm, ami nem túl sok a kísérletben

---

Inga esetén van egy kötél irányú erő

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad \ddot x=2\dot y\,\omega\sin\varphi+\lambda x\\
&(2)\quad \ddot y=-2\dot z\,\omega\cos\varphi-2\dot x\omega\sin\varphi+\lambda y\\
&(3)\quad \ddot z=-g+2\dot y\,\omega\cos\varphi+\lambda z\\
&(4)\quad x^2+y^2+z^2=\ell^2
\end{aligned}\right\}\rightarrow\quad z=\pm\sqrt{\ell^2-x^2-y^2}=\pm\ell\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{\ell^2}}$$

Mivel csak kicsit van kitérítve $\frac{x^2+y^2}{\ell^2}\to 0$

$$\Rightarrow z=-\ell$$

(3)-ból: $\quad 0=g-\lambda\ell$ $\quad$ (mivel $\ddot z$ kicsi) $\Rightarrow \lambda=\frac{g}{\ell}$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot x&=2\dot y\,\omega\sin\varphi-\frac{g}{\ell}x\\
\ddot y&=-2\dot x\,\omega\sin\varphi-\frac{g}{\ell}y
\end{aligned}\right\}$$

Legyen $\omega_1=\omega\sin\varphi$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot x-2\omega_1\dot y+\frac{g}{\ell}x=0\\
&\ddot y+2\omega_1\dot x+\frac{g}{\ell}y=0
\end{aligned}\right\}\begin{aligned}
&\Rightarrow \ddot x+i2\omega_1 i\dot y+\frac{g}{\ell}x=0\\
&\rightarrow i\ddot y+i2\omega_1\dot x+\frac{g}{\ell}iy=0
\end{aligned}$$

Legyen $Z=x+iy$

$+$

$$\ddot Z+2\omega_1 i\dot Z+\frac{g}{\ell}Z=0$$

$$\ddot{z} + 2\omega_1 i \dot{z} + \frac{g}{\ell} z = 0$$

TFH:

$$z(t) = z_0 e^{i\alpha t} \quad \rightarrow \quad -\alpha^2 z - 2\omega_1 \alpha z + \frac{g}{\ell} z = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{\ell}}$$

$\frac{g}{\ell} \rightarrow$ az inga lengésideje $\Rightarrow \omega_1^2 \ll \frac{g}{\ell}$

két megoldás

$$z(t) = z_1 e^{-i\omega t} e^{i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} + z_2 e^{-i\omega t} e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} =$$

$$= e^{-i\omega_1 t}\left[z_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} + z_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t}\right]$$

Kezdeti feltétel: $z(0) = a \quad ; \quad \dot{z}(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} & z_1 + z_2 = a \\ & z_1\left(-\omega_1 + \sqrt{\tfrac{g}{\ell}}\right) + z_2\left(-\omega_1 - \sqrt{\tfrac{g}{\ell}}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 a + \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,(z_2 - z_1) = 0$$

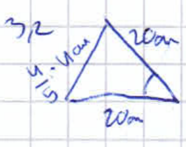
$$\Rightarrow \quad z_1 = \frac{1}{2}\left[a + \frac{\omega_1 a}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}\right] \qquad z_2 = \frac{1}{2}\left[a - \frac{\omega_1 a}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}\right]$$

$$z(t) = e^{i\omega_1 t}\left[\frac{1}{2}\left[1 + \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}\right] a\, e^{i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}\right] a\, e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t}\right] =$$

$$= e^{i\omega_1 t}\left[a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right) + \frac{i\omega}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}\, a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right)\right]$$

A zárójeles kifejezés egy x irányába elnyúlt ellipszis.

az $e^{i\omega_1 t}$ miatt ez az ellipszis lassan forog



$c^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos\alpha$

~~$\cos\alpha = 1 - \frac{c^2}{2a^2}$~~

$c^2 - 2a^2 = -2a^2 \cos\alpha$

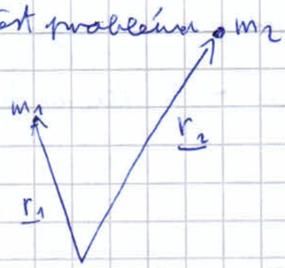
$\cos\alpha = 1 - \frac{c^2}{2a^2}$

$\alpha = 9{,}2^\circ$

MECHANIKA

14. előadás (11.18.)

Két test probléma



$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}$

$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{F}$

⇒ Mivel a rendszer zárt, az erők ellentétek

Konzervatív ~~rotátorangyú~~ erőteret tesszünk fel: $\underline{F}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$

$$\boxed{\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= F(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= F(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \end{aligned}}$$

→ összeadva: $m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{0}$

$$\ddot{\left(\frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}\right)} = \underline{0}$$

$$\underline{r}_0(t) = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \leftarrow \text{tömegközéppont}$$

(1) $M \ddot{\underline{r}}_0 = 0$ ahol $(M = m_1 + m_2)$

Tehát a TKP egyenes vonalú egy. mozgást végez ⇒ $\dot{\underline{r}}_0 = \underline{v}_0$ = állandó

$\dot{(m_1 v_1 + m_1 v_2)} = 0$

$p_1 + p_2 =$ áll

kivonás: $m_1 m_2 (\ddot{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}) = (m_1 + m_2) F(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$ Legyen $R(t) = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

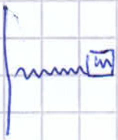
$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\underline{R}} = \underline{F}(\underline{R}) \qquad m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \leftarrow \text{redukált tömeg}$$

(2) $m^* \ddot{\underline{R}} = \underline{F}(\underline{R})$

Az eredeti csatolt diff-egyenletet 2 db független diff egyenletté esnek, amiből (1) triviális, (2) pedig az 1 test probléma

⇒ Az egytest probléma megoldása ekvivalens a kéttest problémával $\underline{r}_0$ és $\underline{R}$ koordinátákba

Rugó:

- Egytest  rezgés $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

- kéttest  rezgés: $\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{m^*}}$

Grav:

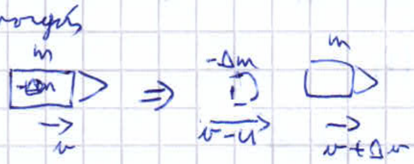
$$\underbrace{F = \gamma \frac{M}{r^2}\frac{r}{r}}$$

$$m^* \ddot{R} = -\gamma \frac{mM}{R^2}\frac{R}{R}$$

mivel $m + M$ durván ugyanaz mint M, de a potenciál kétszeresére változik

$\Rightarrow$ Ez az oka, hogy a D és a H színképe más

Rakétamozgás



impulzus megmaradás: $(m - \Delta m)v = m(v + \Delta v) - \Delta m(v - u)$

$$m\Delta v + \Delta m u = 0$$

$$v'(m) = \frac{\Delta v}{\Delta m} = -\frac{u}{m}$$

$$\int_{m_0}^{m} v'(m')\,dm' = -\int_{m_0}^{m} \frac{u}{m'}\,dm'$$

$$v(m) - v(m_0) = -u \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

$$v(m) = v_0 + \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

TFH $m_0 = m_H + m_{\ddot{u}}$ és $v(m_0) = 0$

$$v_{rak} = u \ln\left(\frac{m_H + m_{\ddot{u}}}{m_H}\right)$$ $\rightarrow$ a logaritmus a leglassabban divergáló fgv. szerint kéne nehéz kijutni az űrbe

Ciolkovszkij-egyenlet

ütközések

feltevések:
- centrális ütközés
  A két TKP és az ütk. pont egy egyenesen esik és az merőleges az ütk. felületre
- Centrális erők hatnak
- konzervatív erők (E-megmaradás)
- rövid hatótávolságú erők

Amit tudunk: $\underline{p}_{10}+\underline{p}_{20}=\underline{p}_{100}+\underline{p}_{200}$ (1)

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}(\underline{r}_1-\underline{r}_2)\\ m_1\ddot{\underline{r}}_2 &= -\underline{F}(\underline{r}_1-\underline{r}_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2 v_2^2\right)^{\cdot} = F(\underline{r}_1-\underline{r}_2)(\underline{v}_1-\underline{v}_2)$$

$$\dot{E}_{kin} = \underline{F}(\underline{R})\,\dot{\underline{R}} = -\dot{E}_{pot}(\underline{R})$$

$$E_{kin}+E_{pot} = \text{áll}$$

$E_{kin0} = E_{kin00}$ (2) (Megegyezik, az ütközés rugalmas)

Az (1) egyenlet valójában 3, így a 6 paraméterből van 2 szabad paraméter

Térjünk át a TKP vonatkoztatási rendszerébe

$$\underline{r}_0(t) = \frac{m_1\underline{r}_1(t)+m_2\underline{r}_2(t)}{m_1+m_2} \to v_0(t) = \frac{m_1 v_1+m_2 v_2}{m_1+m_2}$$

$$\underline{\rho}_1 = \underline{r}_1-\underline{r}_0 = \frac{m_1\underline{r}_1+m_2\underline{r}_1}{m_1+m_2}-\frac{m_1\underline{r}_1+m_2\underline{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\underline{r}_1-\underline{r}_2)}{m_1+m_2}$$

$$\underline{\rho}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\underline{r}_2-\underline{r}_1)$$

$$\underline{p}_1^t = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\underline{v}_1-\underline{v}_2) \qquad \underline{p}_2^t = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\underline{v}_2-\underline{v}_1) = -p_1^t$$

$\underline{p}_1^t+\underline{p}_2^t = \underline{0}$ → az jó nekünk

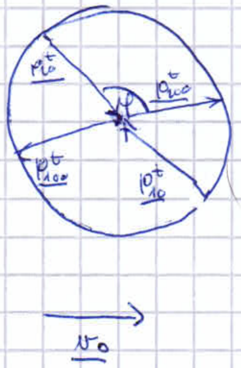
mert $\underline{p}_{10}^t = -\underline{p}_{20}^t$ és $\underline{p}_{100}^t = -\underline{p}_{200}^t$

E megmaradás miatt: $\frac{1}{2m_1}p_{10}^{t\,2}+\frac{1}{2m_2}p_{20}^{t\,2} = \frac{1}{2m_1}p_{100}^{t\,2}+\frac{1}{2m_2}p_{200}^{t\,2}$

Mivel $|p_1^t| = |p_2^t|$: $\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)p_{10}^{t\,2} = \left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)p_{100}^{t\,2}$

$$|\underline{p}_{10}^t| = |\underline{p}_{100}^t| = m_*|\underline{v}_{10}-\underline{v}_{20}|$$

$m_* |\underline{v}_{10} - \underline{v}_{20}|$ sugarú kör



Az, hogy a körön hogy térül el, nincs megszabva, így az szabad paraméter. térben 2 db ilyen szög van → 2 paraméter

Ekkor már csak hozzá kell adni a $m_1 \underline{v}_0$-t és $m_2 \underline{v}_0$-t.

Mi van, ha $\underline{v}_{20} = \underline{0}$

$$|p_{10}^t| = |p_{20}^t| = |p_{100}^t| = |p_{200}^t| = m_* |\underline{v}_{10}|$$

Van érdekes játék is, ha $m_1 = m_2$ akkor derékszögben szóródnak

ha $m_1 < m_2$ visszapattanhat

ha $m_1 > m_2$ van egy szórási határszög

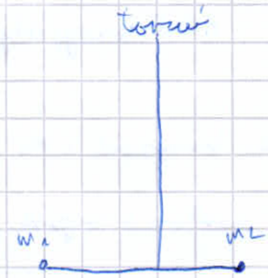
MECHANIKA

15. előadás (11.24.)

Ez alatt milyen

Eötvös-ingával: Nemzetközi felhívás volt a súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlőségére

A földön álló testre ható erő: $\underline{F} = m_s \underline{g} + m_t \omega^2 \underline{r}$



Mivel az nagyon kicsi effektus van ettől

A torziós szál elfordul, és ha visszaforgatjuk, másképp fordul el.

A mérés lényege az, hogy γ függ-e az anyagi minőségtől

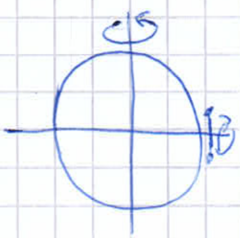
eredmény: 10^{8} nagyságrendig nem függ.

Érdekelte a Föld grav. terének pontos meghatározása

hasznosság: - kőolaj

- pontos GPS

terepen végzett mérések (geofizikus)



Ha forgatjuk egy testet, az egyik nehezebb, mint a másik, és lebillen, de mivel forog, egy idő után a másik lesz lenn.

Megfelelő szögsebességnél a billenés és a forgás frekvenciája egyenlő, és nagy az amplitúdó. : Eötvös-mérleg

Gond: - rövid mérés

- rezonancia

A soktest probléma nem kezelhető matematikailag.

De, ha valami közelítést végzünk, az sokban segít.

Merev test: A test tömegpontjai egymáshoz képest nem mozdulnak

N darab tömegpont: m_i, $\underline{r_i}$

Az i pontra a mozgása: $m_i \underline{\ddot{r}_i} = \underline{F_i} + \sum_j \underline{K_{ij}}$ (1)

$\underline{F_i}$: a külső erő a i. pontra ható erő

$\underline{K_{ij}}$: a j. test az i.-re ható erő

Összeadva az összes tömegpontra

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\ddot{r}_i} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i} + \sum_{i,j=1}^{N} \underline{K_{ij}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i} + \sum_{j,i}^{N} \underline{K_{ji}}$$

Newton miatt $K_{ij} = -K_{ji}$

$$\sum_{ij} K_{ij} = \sum_{ji} K_{ji} = -\sum_{ji} K_{ij} \Rightarrow \sum_{ij} K_{ij} = 0$$

a belső erők összege 0.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\ddot{r}_i} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v_i}}_{p_i}\Big) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i}$$

A rendszer össz lendületét csak a külső erők tudják megváltoztatni

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i}$$

Legyen $\underline{r_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$ és $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ össz tömeg

TKP

$$\boxed{M \underline{\ddot{r}_0} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i}}$$

(1)-t megszorozva $\underline{r}_i$-vel

$$\underline{r}_i \times m\underline{\ddot{r}}_i = \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{k}_{ij}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{N}_i = \underline{M}_i + \underline{\qquad}$$

összadva

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\underline{N}_i = \sum_{i=1}^{N}\underline{M}_i + \sum_{i,j=1}^{N} r_i \times k_{ij}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{k}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{N} \underline{r}_j \times \underline{k}_{ji} \overset{N.3}{=} -\sum_{i,j=1}^{N} \underline{r}_j \times \underline{k}_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$2\sum_{i,j} \underline{r}_i \times \underline{k}_{ij} = \sum_{i,j}^{N}\left((\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times k_{ij}\right)$$

Ha $(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \parallel \underline{k}_{ij}$ $\forall i,j$, akkor a jobb oldal 0.

ez centrális erőkre esetén igaz.

Általában nem centrális erőkre is igaz, de azt külön be kell látni

$$\frac{d}{dt}\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} M_i \qquad \text{ahol } \underline{N} = \sum_{i=1}^{N} N_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i = \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_i \quad \leftarrow$$ Ez a koordinátarendszerrel változik, így nem túl szerencsés

$$\frac{d}{dt}\sum \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_i$$

Legyen $\underline{r}_i = \underline{r}_0 + \underline{\rho}_i$

$\underline{v}_i = \underline{v}_0 + \underline{\dot{\rho}}_i$

$$\frac{d}{dt}\left(M(\underline{r}_0 \times \underline{v}_0) + \sum_{i=1}^{N}\underline{\rho}_i \times m_i \underline{\dot{\rho}}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\underline{r}_0 \times m_i \underline{\dot{\rho}}_i}_{\underline{r}_0 \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\dot{\rho}}_i}_{0}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\rho}_i \times \underline{v}_0}_{0 \text{ mert a TKP rendszerben a TKP}}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(M(\underline{r}_0 \times \underline{v}_0) + \sum_{i=1}^{N} \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i\right) = \underline{r}_0 \times \sum_{i=1}^{N} F_i + \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times F_i$$

Ez csak a TKP-re felelő

Ez csak attól mozgásokon $\underline{N}_S$ saját imp. nyom.

$$\underbrace{M(\underline{v}_0 \times \underline{v}_0)}_{0} + M\, r_0 \times \dot{v}_0 + \frac{d}{dt}\underline{N}_S = \underline{r}_0 \times \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times \underline{F}_i$$

Mivel $M\underline{r}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0 = \underline{r}_0 \times \left(\sum_{i=1}^{N} F_i\right)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{N}_S = \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times \underline{F}_i}$$ ← Ez koordinátarendszer-független

Ez nem triviális $N-1$-hez, mert a TKP nem inerciarendszer

Merev testek leírásához elég a két kiemelt egyenlet.

MECHANIKA

16. előadás (11.25.)

$$m\ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \underline{k}_{ij}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}mv_i^2 = \sum_{i=1}^{N} P_i + \sum_{ij}^{N} \underline{v}_i\,\underline{k}_{ij}$$

ha. ezentúl elhanyag.

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^{N} V_i + \sum_{i<j} \phi_{ij} = \text{áll}$$

Legyen $\underline{v}_i = \underline{v}_0 + \dot{\underline{\rho}}_i$

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\underline{v}_0 + \dot{\underline{\rho}}_i\right)^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\underline{\rho}}_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{v}_0 m_i\,\dot{\underline{\rho}}_i}_{0}$$

(10 független paraméter van a vektorra, mert a 4×4-es mátrixban a független tételek száma 10.)

Mivel merev test mozgásánál az összes belső erő teljesítménye $\sum_j v_i K_{ij} = 0$ $\forall i$-re

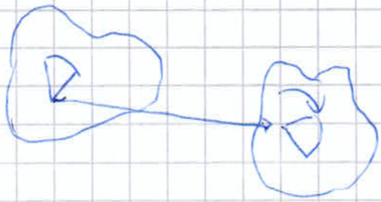
A merev test a 3 test problémára egyszerűsödik. Ez 3×3 koordináta, de mivel a távolságok kötöttek, $3 \cdot 3 - 3 = 6$ szabadsági fok van

6 egyenlet kell:

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \qquad (1-3)$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i \qquad (4-6)$$

Vegyünk egy merev testet



Egy merev test mozgása felbontható egy kitüntetett pont eltolására és e körüli elfordulásra

$$\Delta \underline{r} = \Delta \underline{r_0} + \Delta \underline{\varphi} \times (\underline{r} - \underline{r_0})$$

$$\frac{d r}{dt} = \frac{d r_0}{dt} + \underline{\omega} \times (r - r_0)$$

$$\underline{v} = \underline{v_0} + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r_0}) \quad \leftarrow \text{ Ez pont is adott}$$

Ez más kitüntetett pontra is igaz

$$\Delta \underline{r} = \Delta \underline{r_0} + \Delta \underline{\varphi} \times (\underline{r} - r_0) = \Delta(\underline{r_0} + \underline{a}) + \Delta \varphi' \times (\underline{r} - (\underline{r_0} + \underline{a}))$$

$$\Delta \varphi \times (\underline{r} - \underline{r_0}) = \Delta \underline{\varphi}' \times (\underline{r} - \underline{r_0}) + \Delta \varphi' \underline{a}$$

$\Rightarrow$ A szögsebesség azonos

Merev test impulzus momentuma

$$\underline{N} = r_0 \times M \underline{v_0} + \underline{N_s} \qquad \text{ahol} \quad N_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho_i} \times (m \underline{\dot{\rho}_i})$$

$$\underline{\dot{\rho}_i} = \underline{\omega} \times \underline{\rho_i}$$

$$\underline{N_s} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \times (m_i \underline{\dot{\rho}_i}) = \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho_i} \times (m_i \underline{\omega} \times \underline{\rho_i}) = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(m \rho_i^2 \underline{\omega} - (\underline{\rho_i} \underline{\omega}) \underline{\rho_i} \right) = \sum_{i=1}^{N} m \left(\rho_i^2 \underline{\omega} - \rho_i \circ \rho_i \underline{\omega} \right) = \sum_{i=1}^{N} \left[\rho_i^2 \underline{\underline{1}} - (\rho_i \circ \rho_i) \right] \underline{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\Theta}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\rho_i^2 \underline{\underline{1}} - \rho_i \circ \rho_i \right)}$$

$\rho_i = (x_i, y_i, z_i)$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Theta}}$$

$\underline{\Theta}$ sajátértékei valósak, melyben a koordinátarendszerben a $\underline{\Theta}$ diagonális

Továbbá $\underline{a}\,\underline{\Theta}\,\underline{a} \geq 0$

$$\frac{d\,\underline{N_s}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M_i}$$

DE az abszolút koordinátarendszerben $\underline{\Theta}(t)$ nem konstans

TKP rendszerben

$$M\,\underline{\ddot{r}_0} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i}$$

← Ez az egyenlet nem függ az erők testen belüli helyétől, csak az iránytól és a nagyságtól

A koncentrációnál is ⇒ Az erők a hatásvonal mentén eltolhatóak.

Kérdés: Lehetne-e egy testre ható erők hatását egyetlen erő hatásával egyenlővé tenni?

TFH lehet. Ennek támadáspontja $\underline{a}$

B $\underline{M} = \underline{a} \times \underline{F}$ eddig jó

$\underline{F}\,\underline{M} = \underline{F}(\underline{a} \times \underline{F}) = 0$ ← ez nem mindig jön ki, csak ha az eredő F és M merőlegesek.

Ha $\underline{F_i} = m_i g$ → $\underline{G} = \sum m_i \underline{g} = M \underline{g}$

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^{N} r_i \times m_i \underline{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r_i} \times \underline{g} = M\,\underline{r_0} \times \underline{g}$$

⇒ Agravitációs erő pont ilyen, úgyhogy mondhatjuk, hogy a nehézségi erő a TKP-ban hat.

DE csak homogén erőtérben (Ez az oka az árapálynak)

MECHANIKA

17. előadás (12.01)

$$E_{KIN} = \frac{1}{2} M \underline{v}_0^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{\rho}}_i^2 \qquad \text{ahol} \quad \dot{\underline{\rho}}_i = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i)(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \underline{a}(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\omega}(\underline{\rho}_i \times \underline{a}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\omega}\left(\underline{\rho}_i \times (\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \underline{\omega}\left(\underline{\rho}_i \times m(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i)\right) = \frac{1}{2}\underline{\omega}\underline{N}_S = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad E_{KIN} = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$$

$$E = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} + \sum_{i=1}^{N} \phi_i = \text{áll} \quad \Leftarrow \text{Energia megmaradás}$$

Merev testekre vonatkozó diff.-egyenletek:

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \quad ; \quad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

Merev testek rögzített tengely körüli forgása:

Van 6 egyenlet, de itt csak a φ változhat amihez látszólag 1 kell.

Ahhoz, hogy a tengely ne forduljon el, kellenek ismeretlen kényszererők, amiket $\underline{F}_i$ és $\underline{M}_i$ tartalmaz.

Ha TKP a tengelyen van, és z irány a tengely iránya, akkor erek z irányú forgató nyomatéka 0.

Ekkor: $$\frac{dN_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_{iz} \Leftarrow$$

M_{iz} csak a külső erők forgató nyomatékából jön.

Ezt az egyenletet megoldva, visszaszámolhatók a kényszererők a többi egyenletből, de a mozgás szempontjából ezek nem kellenek.

Tudjuk, hogy $\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$ és $\underline{N} = \underline{N}_S = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$ Mivel $\underline{\omega}$-nak csak z komponense van, $N_z = \Theta_{33}\omega$ (1)

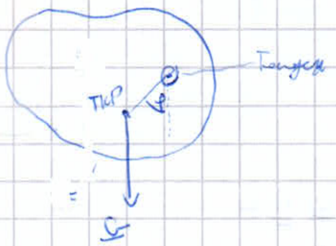
$$\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega}\times\underline{r}_i) = \underline{\underline{\Theta}}^* \underline{\omega} \qquad \Theta^* \text{ nem a TKP-ra, hanem az origóra}$$

Mivel $\Theta_{33}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)$ szerint a KR-re: $\dot{\Theta}_{33}^* = 0$

(1)-t deriválva $\Theta_{33}^* \beta = \sum_{i=1}^{N} M_{iz}$

Ha a külső erő a nehézségi erőtér:

Az külső erők egyetlen erővel helyettesíthető:

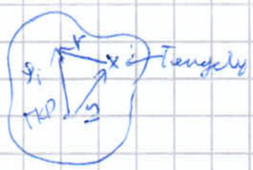


$$\Theta_{33}^{*}\ddot{\varphi} = -Gs\sin\varphi$$

kis φ-re: $\ddot{\varphi} = -\frac{Gs}{\Theta_{33}^{*}}\varphi \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{Gs}{\Theta_{33}^{*}}$

Fizikai inga

Mennyi a Θ_{33}^{*}?



$$\Theta_{33}^{*} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \quad \text{a tengelytől}$$

$$\Theta_{33}' = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\rho_{ix}^2 + \rho_{iy}^2\right) \quad \text{a TKP-tól}$$

Mivel $\underline{r}_i = \underline{s} + \underline{\rho}_i$ $\quad \Theta_{33}^{*} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left((s_x + \rho_{ix})^2 + (s_y + \rho_{iy})^2\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i\left(s_x^2 + s_y^2\right) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\rho_{ix}^2 + \rho_{iy}^2\right)}_{\Theta_{33}} + 2s_x \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i\rho_{ix}}_{\text{a TKP helye}} + 2s_y \sum_{i=1}^{N} m_i\rho_{iy} =$$

a TKP rendszerben $= 0$

$$\boxed{\Theta_{33}^{*} = \Theta_{33} + Ms^2 = Ms^2 + \underline{n}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{n}}$$

Steiner-tétel

Merev testek síkmozgása

test amely nem ismeri a feladatát

$$M \underline{\ddot{r}_0} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i} \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M_i}$$

A 6 egyenletből 3 kell (2 a síkmozgás és 1 a forgás miatt)

A kényszererő mindig merőleges a síkra, így csak 2 komponense van (így 2 irányú forg. nyomatot nem okoz)

$$M \ddot{x}_0 = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}$$

$$M \ddot{y}_0 = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}$$

$$\frac{dN_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_{iz}$$

DE ezek tartalmazzák a súrlódást, ami viszont a kényszererőktől függ

$$\frac{dN_{Sz}}{dt} = M_z$$ ahol $\underline{N_S} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$ és $\underline{\omega}$-nak csak z komponense van

$$\Rightarrow N_{Sz} = \Theta_{33}\,\omega \Rightarrow \Theta_{33}\,\dot{\omega} = \sum_{i=1}^{N} M_{iz}$$

Merev testek rögzített pont körüli forgása

P rögzített pont

Hány adat kell? 3 a három forgás miatt

A pontban hat egy kényszererő, de ha az origó P-ben van, akkor az egyáltalán nem okoz forg. nyomatot

$$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M_i}}$$

tetszőleges pont sebessége: $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

$\underline{N} = \underline{\Theta}^{**}\underline{\omega}$ DE itt már Θ^{**} függ az időtől

Viszont a TKP koordináta rendszerben $$\frac{d\underline{N}}{dt} = \frac{d\underline{N}^{TKP}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N}^{TKP} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M_i}$$

ahol $\underline{N}^{TKP} = \underline{\Theta}\,\underline{\omega}$ itt már Θ nem függ az időtől

MECHANIKA

18. előadás (12.02.)

Szünet a vizsgáknál

Pörgettyű-mozgás (TFH: minden pörgettyű szimmetrikus 2 tengelyre)

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i$$

nincsenek ~~külső~~ forgatónyomatékok, mert az erőkar 0

$$\underline{N} = \underline{\underline{\Theta}}^* \underline{\omega}$$

Θ^* időfüggő, mert a külső koordinátákban forog

Rögzítsük a koord. rendszert a forgó testhez, de az nem inerciarendszer

$$\left[\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{d\underline{A}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{A}\right.$$ ⇐ Ez nem tanultuk mi, valami általános tét

$$\frac{d\underline{N}_{inercia}}{dt} = \frac{d\underline{N}_{forgó}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N}^{forgó} = \underline{M}$$

A forgó rendszerben nem változik a tétel

A forgó rendszer irányai legyenek a $\underline{\underline{\Theta}}$ sajátirányai

$$\underline{\underline{\Theta}}_{forgó} = \begin{pmatrix} \Theta_x & & \\ & \Theta_y & \\ & & \Theta_z \end{pmatrix}$$

szintén:

$$\frac{d\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N} = \underline{M}$$ ahol $\underline{N} = \underline{\underline{\Theta}}_{forgó}\, \underline{\omega}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_x}{dt} + (\omega_y N_z - \omega_z N_y) = M_x \\ &\frac{dN_y}{dt} + (\omega_z N_x - \omega_x N_z) = M_y \\ &\frac{dN_z}{dt} + (\omega_x N_y - \omega_y N_x) = M_z \end{aligned}\right\}$$

N-t behelyettesítve:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (\Theta_z - \Theta_y) = M_x \quad (1) \\ &\Theta_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z (\Theta_x - \Theta_z) = M_y \quad (2) \\ &\Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (\Theta_y - \Theta_x) = M_z \quad (3) \end{aligned}\right\}$$

Euler-féle pörgettyű egyenlet

Súlytalan pörgettyű esetén $M_x = M_y = M_z = 0$

A szimmetria miatt x és y irányú nyjátérték egyenlő $\Rightarrow \Theta_x = \Theta_z$

$$(1) \rightarrow \quad \Theta_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (\Theta_z - \Theta_x) = 0$$

$$(2) \rightarrow \quad \Theta_x \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z (\Theta_x - \Theta_z) = 0$$

$$(3) \rightarrow \quad \Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_z \text{ nem változik}$$

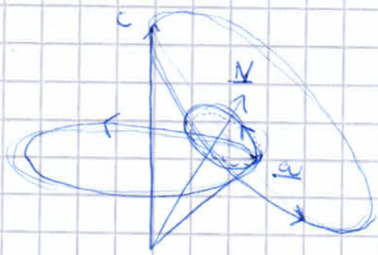
(1) és (2) alapján:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_x \frac{d\omega_x}{dt}\omega_x + \omega_x \omega_y \omega_z (\Theta_z - \Theta_x) = 0 \\ \Theta_x \frac{d\omega_y}{dt}\omega_y + \omega_x \omega_y \omega_z (\Theta_x - \Theta_z) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Theta_x \left[\omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \frac{d\omega_y}{dt}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_x \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{állandó}$$

Ezek alapján: $|\underline{\omega}| =$ állandó, de mivel ω_z is az, ezért $\underline{\omega}$ és z által bezárt szög is állandó

Az inercia: A forgási energia állandó: $E_{forg} = \frac{1}{2} \underline{N}\,\underline{\omega} =$ áll.
Mivel nincs forg. nyom. $\underline{N} =$ áll $\Rightarrow$ $\underline{N}$ és $\underline{\omega}$ szöge is állandó



Ez a jelenség a nutáció. Az a kúp, amit a c tengely az $\underline{N}$ vektor körül leír, a nutációs kúp.

Súlyos pörgettyű:

$$\frac{d\underline{N}_{in}}{dt} = \underline{M}$$ ← grav. erő

$$(\underline{M}_{in})_z = 0 \Rightarrow N_{in\,z} = \text{áll}$$

$$\underline{N}_{in} \frac{d\underline{N}_{in}}{dt} = \underline{N}_{in}\,\underline{M}$$

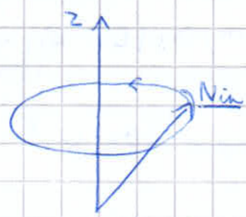
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} N_{in}^2 = \underline{N}_{in}\,\underline{M}$$

Ha gyorsan megforgatjuk a tengely körül akkor lesz $\underline{\omega} \parallel \underline{N}$

Mivel a test szimmetrikus $\underline{g}$ rajta van c-n, így $M_c = 0 \Rightarrow$ tehát $\underline{M} \perp \underline{N}$

$$\underline{N}_{in}\,\underline{M} = 0 \Rightarrow N_{in}^2 = \text{áll}$$

$\Rightarrow$ z és $\underline{N}_{in}$ szöge áll



Precesszió

kis kitérés esetén $\underline{N}_{in}$ körül nutáció

Mivel a Nap tere nem tekinthető a Földre nézve nem tekinthető homogénnek, a Föld tengelye precesszál (Agyőhán csillagászok nutációra hívják)

MECHANIKA
19. előadás (12.08.)

Árapály

Adott pont potenciáljának kiszámítása (próbatömeg: m^*)

$$\phi_g = -\gamma \frac{m^* m}{R} - \gamma \frac{m^* M}{\sqrt{r_N^2 + R^2 - 2 r_N R \cos\varphi}}$$

$$a_g = -\gamma \frac{M}{r_N^2} \Rightarrow$$ a Föld gyorsul, tehát kell tehetetlenségi erő

Létezik-e olyan Φ_t, amire $-\operatorname{grad} \Phi_t = m a_g$

Igen!: $\Phi_t = \gamma \frac{m^* M}{r_N^2} x = \gamma \frac{m^* M}{r_N^2} R\cos\varphi$

Mivel $r_N \gg R$

$$-\gamma \frac{m^* M}{\sqrt{r_N^2 + R^2 - 2 r_N R \cos\varphi}} = -\gamma \frac{m^* M}{r_N \sqrt{1 + \frac{R^2}{r_N^2} - 2\frac{R}{r_N}\cos\varphi}} \approx$$

$$\approx -\gamma \frac{m^* M}{r_N}\left[1 - \frac{R^2}{2r_N^2} + \frac{R}{r_N}\cos\varphi + \frac{3}{4}\left(\frac{R^2}{r_N^2} - 2\frac{R}{r_N}\cos\varphi\right)^2\right] =$$

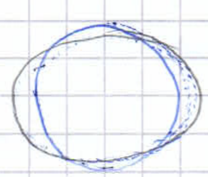
$$\Phi(R,\varphi) = \phi_g + \phi_t = \Phi_0(R) \underbrace{- \gamma \frac{m^* M}{r_N}\frac{R}{r_N}\cos\varphi + \gamma \frac{m^* M}{r_N^2} R\cos\varphi}_{0} - \gamma \frac{m^* M}{r_N}\frac{3}{4}\Big(\underbrace{\frac{R^2}{r_N^2}}_{\approx 0} - 2\frac{R}{r_N}\cos\varphi\Big)^2 =$$

$$= \Phi_0(R) + \frac{3}{2}\gamma \frac{m^* M}{r_N^3} R^2 \cos^2\varphi$$

Mivel $\Phi_0(R)$ gömbszimmetrikus ez nem igazán számít a $\cos^2\varphi$ miatt pedig $\varphi = 0$ és $180°$-nál ugyanaz lesz.

$\Rightarrow$ Az ekvipotenciális felület szimmetrikusan lapul el

(Belül jobban vonzza a Nap, kívül vagy kisodródik)



Az amplitúdó alapesetben 60 cm lenne, de különböző tehetetlenségi okok miatt az értéke néhány nagyságrendű

A z alakváltozás működéssel járó energiaveszteség ⇒ az árapály lassítja a forgást. Ezért látjuk a Holdnak egyszerűen az oldalát

Szabad tengely körüli forgás

$$\Theta_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (\Theta_z - \Theta_y) = 0$$

$$\Theta_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (\Theta_x - \Theta_z) = 0$$

$$\Theta_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (\Theta_y - \Theta_x) = 0$$

Például: $\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$ esetben → triviális megoldás

⇒ A hármasfajta alakú testet a sajátirányai körül megforgatva, forogni fog

De természetesen ilyen a valóságban nincs, így meg kell nézni perturbációval

Legyen $\underline{\omega}^* = (\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z + \omega)$ ahol $\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z \ll \omega$

lineáris stabilitás analízis

egyenletek

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_x (\dot{\delta\omega_x}) + \delta\omega_y \, \omega (\Theta_z - \Theta_y) = 0 \\ &\Theta_y (\dot{\delta\omega_y}) + \delta\omega_x \, \omega (\Theta_x - \Theta_z) = 0 \\ &\Theta_z (\dot{\delta\omega_z}) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta\omega_z = \text{áll.} \Rightarrow \omega \text{ állandónak lehet}$$

Sejtés $\begin{pmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\omega_{0x} \\ \delta\omega_{0y} \end{pmatrix} e^{\lambda t}$

behelyettesítve:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_x \lambda \, \delta\omega_{0x} e^{\lambda t} + \delta\omega_{0y} e^{\lambda t} \omega (\Theta_z - \Theta_y) = 0 \\ &\Theta_y \lambda \, \delta\omega_{0y} e^{\lambda t} + \delta\omega_{0x} e^{\lambda t} \omega (\Theta_x - \Theta_z) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \Theta_x \lambda & \omega(\Theta_z - \Theta_y) \\ \omega(\Theta_x - \Theta_z) & \Theta_y \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\omega_{0x} \\ \delta\omega_{0y} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

A létezési feltétel, hogy a mátrix det-je legyen 0!

$$\Theta_x \Theta_y \lambda^2 - \omega^2 (\Theta_z - \Theta_y)(\Theta_x - \Theta_z) = 0$$

$$\lambda_1 = \pm \omega \sqrt{\frac{(\Theta_z - \Theta_y)(\Theta_x - \Theta_z)}{\Theta_x \Theta_y}}$$

- Szimmetrikus pörgettyű esetén $\lambda = 0$

- Ha a gyökjel alatt ⊕ szám áll, akkor $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

  λ_2: Az összes megoldás a 2 lineáris kombinációja

  Mivel $\lambda_2 > 0$ szerint exp-en nő $\delta\omega$, vagyis a helyzet <u>instabil</u>

- Ha a gyökjel alatt ⊖ szám áll, akkor λ_1 és λ_2 egymás konjugáltja, vagyis $\delta\omega$ harmonikus rezeg, tehát a helyzet stabil

  Ennek feltétele: $(\Theta_z - \Theta_y)(\Theta_z - \Theta_x) \geq 0$

  $\Rightarrow$ Ha Θ_z a legnagyobb, akkor a z tengely körüli forgás stabil

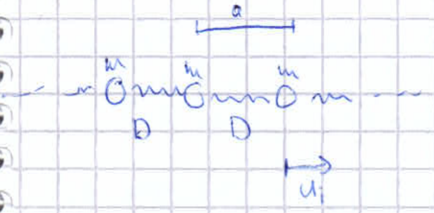
  $\Rightarrow$ Ha Θ_z a legkisebb, akkor szintén

  <u>Két stabil szabadtengely van</u>

De a kísérlet mást mutatott!!!

Belátható, hogy ha Θ_z a legkisebb, akkor $\delta\omega_z$-nek nagyon kicsinek kell lenni, hogy a fenti számolás jó legyen. $\Rightarrow$ Stabilitási tartomány: az csak numerikus módszerrel számolható

MECHANIKA
10. előadás (12. 09.)



$$m\ddot{u}_i = D(u_{i+1}-u_i)+D(u_{i-1}-u_i)$$ legyen $\omega_0=\frac{D}{m}$

$$\ddot{u}_i = \omega_0(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i)$$

Sejtés: $u_i = A_i e^{j\omega t}$

$$-\omega^2 A_i \cancel{e^{j\omega t}} = \omega_0^2(A_{i+1}+A_{i-1}-2A_i)\cancel{e^{j\omega t}}$$

baloldal az $\underline{A}$ vektor i. eleme

jobb oldalt:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \underline{A}$$

Legyen az első és az utolsó összekötve így a sarkokban is lesz 1-es

$$\omega\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = -\omega_0 \begin{pmatrix} -2 & 1 & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 1 & & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$$ ← sajátérték probléma

Mi van, ha $A_i = A_q e^{jqai}$

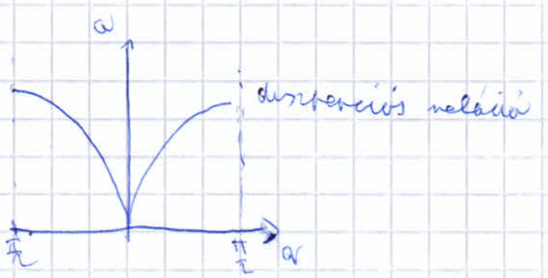
$$-\omega^2 A_q e^{jqai} = \omega_0\left(e^{jqa(i+1)}+e^{jqa(i-1)}-2e^{jqai}\right)A_q$$

$$-\omega^2 = \omega_0^2\left(e^{jqa}+e^{-jqa}-2\right) = -2\omega_0^2\left[1-\cos(qa)\right]$$

$$\omega^2 = \omega_0^2\, 2\left(1-\cos(qa)\right) \quad (1)$$

$u_i(t) = A_q e^{j(\omega t + aqi)}$ DE ez csak akkor, ha teljesül az (1). (diszperziós reláció)

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{qa}{2} \Rightarrow \omega = 2\omega_0\left|\sin\frac{qa}{2}\right|$$ $q'a = qa + n2\pi$ ugyanaz



Végtelen megoldásvariáns van a $2n$ helyett, mert összeragasztottuk az elsőt az utolsóval

Újabb feltétel: $A_q = A_q e^{iqaN} \Rightarrow q_n = n\frac{2\pi}{N}\frac{1}{a}$

$\Rightarrow$ q nem tetszőleges, diszkrét értékeket vehet fel

~~N db~~

u_i az összes q-nak megfelelő megoldás összege, az N db.

Mivel A_q komplex, a szabad paraméter $2N$ ✓

Vissza az elejére: $m\ddot{u}_i = a^2 D \left(\dfrac{\frac{u_{i+1}-u_i}{a} - \frac{u_i-u_{i-1}}{a}}{a} \right)$

Legyen $u_i = u(ia)$

$$\left[m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{ia} = a^2 D \, \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{(i+1)a} - \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{ia}}{a} \right]$$

Valahogy, nem figyeltem: $m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ha $m = a q_0 \rho$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{aD}{q_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad E\text{: Young-modulus}$$

Mi a megoldás?

$u(x,t) = u_q e^{i(\omega t + qx)}$

Behelyettesítve: $-\omega^2 \rho u = -q^2 E u \Rightarrow \omega^2 = \frac{E}{\rho} q^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\, q$

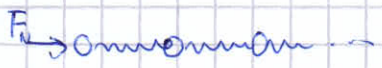
Kicsi q-kra az ugyanolyan, mint a diszperziós reláció

$\Rightarrow$ Ha a hullámhossz nagyobb az atomok távolságánál, nem látom az atomokat, egy elhelyezkedő ez a közelítés: Folytonos közeg

MECHANIKA

21. előadás (12. 15.)

Rugólánc kényszerrezgése



$$F_N = f_N \sin \omega t$$

$$m a_n = -F_n + F_{n-1}$$

$$F_{n-1} = -D(u_n - u_{n-1})$$

partikuláris megoldás: $u_n = A_n \sin(\omega t)$

~~behelyettesítve~~: $m\omega^2 A_n = -f_n + f_{n-1}$

effektív rugóállandó a n. tagra: $f_n = -D k_n A_n$

ebből: $\omega^2 m A_n = -D k_n A_n + D k_{n-1} A_{n-1}$ Legyen $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 A_n &= -k_n A_n + k_{n-1} A_{n-1} \\ \text{és} \quad k_{n-1} A_{n-1} &= A_n - A_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + k_n\right) A_n + k_{n-1} A_{n-1} \\ 0 &= A_n - (1 + k_{n-1}) A_{n-1} \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenlet, akkor tűnjön el a det.

$$-\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + k_0\right)(1 + k_{n-1}) - k_{n-1} = 0 \quad \leftarrow \text{ ez } k\text{-kra megszorítás}$$

$$k_n = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{k_{n-1}}{1 + k_{n-1}}$$ rekurziós formula, így meg kell nézni a 0. elemet.

$\Rightarrow$ A megoldás függ attól, hogy mi van a rugósor másik végén

Határérték: $k_\infty = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{k_\infty}{1 + k_\infty} \Rightarrow k_{\infty 1,2} = \dfrac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{2}$

A két megoldás közül melyik a jó?

Mi van, ha $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 4$? $\Leftarrow$ ilyenkor nem konvergens

Legyen $c = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

$$k_\infty = (c-1) \pm \sqrt{c^2 - 1}$$ ha $|c| < 1$ nem konvergens

$$k_+ = (c-1) + \sqrt{c^2 - 1}$$

Legyen $y_n = k_n - k_+$ $\quad y_{n+1} = \dfrac{(c - \sqrt{c^2-1})\, y_n}{c + \sqrt{c^2-1} + y_n}$ $\quad$ Legyen $S = c - \sqrt{c^2-1}$ $\quad S^* = c + \sqrt{c^2-1}$

ha $|c| < 1$ akkor $|S| = 1$

$$y_{n+1} = \frac{S y_n}{S^* + y_n}$$ Legyen $t_n = \frac{1}{y_n}$

$$t_n = \frac{1}{s} + \frac{s^*}{s} t_n$$

rekurzív formula explicitté alakítva

$$K_n = \frac{2\sqrt{c^2-1}}{\varphi_0 \left(\frac{s^*}{s}\right)^n - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2-1}$$

Ha $|c| < -1$ akkor $\frac{s^*}{s} < 1$ $K_N = c - 1 - \sqrt{c^2-1}$

Ha $-1 < c < 1$

$$s^* = c + \sqrt{c^2-1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0$$
$$s = c - \sqrt{c^2-1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0$$
$$\Rightarrow \frac{s^*}{s} = \cos(2\varphi_0) + i\sin(2\varphi_0)$$

$$\left(\frac{s^*}{s}\right)^n = \cos(2n\varphi_0) + i\sin(2n\varphi_0)$$

$$K_n = \cos\varphi_0 - 1 + \frac{\sin\varphi_0 \sin(\varphi_0 n + \varphi)}{|\varphi_0| \cos(n\varphi_0 + \varphi) - 1}$$

Ha $\varphi = \frac{2\pi}{k}$, akkor

$K(n)$ periodikus