RELATIVISZTIKUS
QED 2.

1. tétel: Szóráselmélet, hatáskeresztmetszet, aszimptotikus állapotok, redukciós formula

A részecskék kölcsönhatását úgy írjuk le, hogy van bejövő és kimenő állapotunk, és a kettő között történik valami: $|i, be\rangle \to |f, ki\rangle$.

Hogy közben mi történik, az bonyolult, s nem is érdekes, csak ami érdekel minket az a valószínűség:

$$w_{f\leftarrow i} = |\langle f, ki | i, be\rangle|^2$$

Ha a bemenet és a kimenet is KH-mentes, akkor a két halmaz között van egy izometria: $|f, ki\rangle = S\,|f, be\rangle$

belátható, hogy S invariáns, és kommutál a szimmetriákkal:

$$\Rightarrow \langle f, ki | i, be\rangle = \langle f, be | S | i, be\rangle = \langle f, ki | S | i, ki\rangle = S_{fi}$$

A lényegi rész: $S = 1 + iT$

$$\langle f | T | i\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)\,\langle f | \mathcal{T} | i\rangle \quad \leftarrow \text{ P-megmaradás miatt}$$

· 2 bejövő részecske:

$$|i, be\rangle = \int \frac{d^3p_1}{2p_1^0(2\pi)^3}\,\frac{d^3p_2}{2p_2^0(2\pi)}\, f_1(p_1)\, f_2(p_2)\, |p_1, p_2, be\rangle$$

Az f-ekhez tartozó KG-megoldás: $\tilde{f}(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3}\, e^{-ipx} f(p)$

Az átmeneti valószínűség:

$$W_{fi} = \int d\tilde{p}_1\, d\tilde{p}_2\, d\tilde{p}_1'\, d\tilde{p}_2'\; f_1^*(p_1)\, f_2^*(p_2)\, f(p_1')\, f(p_2') \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \cdot$$
$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1 - p_2)\, \langle f | \mathcal{T} | p_1, p_2\rangle^* \langle f | \mathcal{T} | p_1', p_2'\rangle$$

ahol $d\tilde{p} = \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3}$.

Kihasználva, hogy $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') = \int d^4x\, e^{-ix(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')}$

$$W_{fi} = \int d^4x\, |\tilde{f}_1(x)|^2\, |\tilde{f}_2(x)|^2\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1 - p_2)\, |\langle f | \mathcal{T} | p_1, p_2\rangle|^2$$

Mivel $\tilde{f}(x) = e^{i\bar{p}x} F(x)$ alakban írható, ahol $F(x)$ lassan változik, ezért

$$i\tilde{f}^*(x)\overleftrightarrow{\partial_\mu} f(x) \approx 2\bar{p}_\mu |\tilde{f}(x)|^2$$

ha az 1-es részecske mozog, a fluxus: $\Phi_1 = 2|\mathbf{p}_1||\tilde{f}_1(x)|^2$

ha a 2-es részecske nyugalomban van, a sűrűség: $\frac{dn}{dV} = 2m_2|\tilde{f}_2(x)|^2$

A HKM def-jából: $d\sigma = \dfrac{\frac{dW}{dV\,dt}}{\Phi_1 \cdot \frac{dn_2}{dV}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1 - p_2) \dfrac{1}{4m_2|\mathbf{p}_1|} |\langle f|T|p_1 p_2\rangle|^2$

A prefaktort Lorentz-kovariáns alakra hozva:

$$m_2|\mathbf{p}_1| = m_2\left[(p_1^0)^2 - m_1^2\right]^{1/2} = \left[(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2\right]^{1/2}$$

$$d\sigma = \frac{1}{4\left[(p_1p_2)^2 - m_1^2 m_2^2\right]^{1/2}} \int d\tilde{p}_3 \cdots d\tilde{p}_{n+2} |\langle p_3 \cdots p_{n+2}|T|p_1 p_2\rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - \cdots - p_{n+2})$$

TFH a $\varphi(x)$ állapot időben messze szabad térrel közelíthető:

$$x^0 \to -\infty \Rightarrow \varphi(x) \to Z^{1/2} \varphi_{be}(x)$$

A $Z^{1/2}$ faktor renormalizálásból jön: $\varphi_{be}(x)|0\rangle$ 1 részecskét ad, $\varphi(x)|0\rangle$ nem feltétlen, így

$\langle 1|\varphi_{be}|0\rangle \lesssim \langle 1|\varphi|0\rangle$ x-függésre megegyezik, de értékük nem biztos.

Tanulság, a konvergencia csak $\varphi(x)$ mátrixelemeire igaz, önmagára nem.

Nézzük Z értékét:

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle \overset{\text{eltolás inv miatt}}{=} \sum_\alpha \left[\langle 0|\varphi(0)|\alpha\rangle e^{-ip_\alpha(x-y)} \langle\alpha|\varphi(0)|0\rangle + (x \leftrightarrow y)\right] =$$

$$= \sum_\alpha |\langle 0|\varphi(0)|\alpha\rangle|^2 \left(e^{-ip_\alpha(x-y)} - e^{ip_\alpha(x-y)}\right) =$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q) \left(e^{-ip_\alpha(x-y)} - e^{ip_\alpha(x-y)}\right)$$

ahol $\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_\alpha \delta^{(4)}(p_\alpha - q) |\langle 0|\varphi(0)|\alpha\rangle|^2$ sűrűségfv.

$\rho(q)$ a $\delta^{(4)}$ miatt eltűnik, ha q nincs a jövőbeli fénykúpban, tehát írható így:

$$\rho(q) = \sigma(q^2)\,\Theta(q^0) \qquad \text{ahol } \sigma(q^2) = 0 \text{ ha } q^2 < 0. \text{ Ezzel:}$$

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \sigma(q^2)\,\Theta(q^0) \left(e^{-iq(x-y)} - e^{iq(x-y)}\right) =$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} dm'^2\, \delta(q^2 - m'^2)\, \sigma(m'^2)\, \Theta(q^0) \left(e^{-iq(x-y)} - e^{+iq(x-y)}\right) =$$

$$= i\int_0^\infty dm'^2\, \sigma(m'^2)\, \Delta(x-y, m')$$

ahol $i\Delta(x-y, m)$ az m tömegű szabad tér propagátora: $i\Delta(x, m) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \Theta(q^0)\delta(q^2 - m^2) e^{-iqx}$

Leválasztva egy $m_1^2 > m^2$-ig való integrált, a sűrűségfüggvény $|Z^{1/2}|^2$ járulékot ad:

$$\langle 0|[\varphi(x)\,\varphi(y)]|0\rangle = i\,Z\,\Delta(x-y,m) + i\int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2\,\sigma(m'^2)\,\Delta(x-y,m')$$

idő szerint deriválva mindkét oldal $\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{y})$ járulékot ad. Ezeket kiintegrálva:

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2\,\sigma(m'^2) \quad\Rightarrow\quad 0 \le Z < 1.$$

$Z=1$ csak akkor, ha $\varphi = \varphi_{in}$, de ez nem releváns.

$x^0 \to +\infty$ esetén u.a.: $\varphi(x) \to Z^{1/2}\,\varphi_{ki}(x)$

Nézzük adott esetben az S_{fi} mátrixelemet:

$$\langle p_1\cdots p_n, ki\,|\,q_1\cdots q_e, be\rangle = \langle p_1\cdots p_n, ki\,|\,a^\dagger_{be}(q_1)\,|\,q_2\cdots q_e, be\rangle =$$

$$= \int d^3\underline{x}\; e^{-iq_1x}\,\frac{1}{i}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle p_1\cdots p_n, ki\,|\,\varphi_{be}(x)\,|\,q_2\cdots q_e, be\rangle = \text{ mivel } t \text{ tetszőleges}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} Z^{-1/2}\int d^3\underline{x}\; e^{-iq_1x}\,\frac{1}{i}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle p_1\cdots p_n, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,q_2\cdots q_e, be\rangle = *$$

használjuk ki, hogy $\left(\lim_{t\to\infty} - \lim_{t\to-\infty}\right)\int d^3\underline{x}\;\psi(x) = \lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}} \int_{t_i}^{t_f} dt\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int d^3\underline{x}\;\psi(x)$

$$* = \langle p_1\cdots p_n, ki\,|\,a^\dagger_{ki}(q_1)\,|\,q_2\cdots q_e, be\rangle + i\,Z^{-1/2}\int d^4x\;\partial_0\left[e^{-iq_1x}\,\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle p_1\cdots p_n, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,q_2\cdots q_e, be\rangle\right]$$

az első tagban $a^\dagger_{ki}$ eltünteti q_1-t, ha van, egyébként 0.

$$\langle p_1\cdots p_n, ki\,|\,a^\dagger_{ki}(q_1)\,|\,q_2\cdots q_e, be\rangle = \sum_{i=1}^{n} 2p_i^0\,(2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\underline{p}_i - \underline{q}_1)\,\langle p_1\cdots \hat{p}_i\cdots p_n, ki\,|\,q_2\cdots q_e, be\rangle$$

„lekapcsolódott tagok”

a második tag:

$$\int d^4x\;\partial_0\left[e^{-iq_1x}\,\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\beta, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,\alpha, be\rangle\right] =$$

$$= \int d^4x\left[\left(\partial_0^2\, e^{-iq_1x}\right)\langle\beta, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,\alpha, be\rangle + e^{-iq_1x}\,\partial_0^2\,\langle\beta, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,\alpha, be\rangle\right] =$$

$$= \int d^4x\left[\left((-\Delta+m^2)\,e^{-iq_1x}\right)\langle\beta, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,\alpha, be\rangle + e^{-iq_1x}\,\partial_0^2\,\langle\beta, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,\alpha, be\rangle\right] = \text{parcintés} =$$

$$= \int d^4x\; e^{-iq_1x}\,(\Box + m^2)\,\langle\beta, ki\,|\,\varphi(x)\,|\,\alpha, be\rangle$$

Válasszuk le p_1-et is! Először hasonlóan

$$\langle p_1 \cdots p_n, ki\,|\,\varphi(x_1)\,|\,q_2 \cdots q_\ell, be\rangle = \langle p_2 \cdots p_n, ki\,|\,a_{ki}(p_1)\,\varphi(x_1)\,|\,q_2 \cdots q_\ell, be\rangle =$$

$$= \lim_{y_1^0 \to \infty} i Z^{-1/2} \int d^3\underline{y}_1\, e^{ip_1 y_1}\, \overleftrightarrow{\partial}_{y_1^0} \langle p_2 \cdots p_n, ki\,|\,\varphi(y_1)\,\varphi(x_1)\,|\,q_2 \cdots q_\ell, be\rangle$$

A két φ-t meg kéne cserélni, hogy a majd bejövő $a_{be}(p_1)$ a jobboldalra hasson.

Mivel $y_1^0 > x_1^0$, ezért az időrendezés alkalmas:

$$\langle p_1 \cdots p_n, ki\,|\,\varphi(x_1)\,|\,q_2 \cdots q_\ell, be\rangle = \langle p_2 \cdots p_n, ki\,|\,\varphi(x_1)\,a_{in}(p_1)\,|\,q_2 \cdots q_\ell, be\rangle +$$

$$+ i Z^{-1/2} \int d^4y_1\, e^{ip_1 y_1} (\Box_{y_1} + m^2) \langle p_2 \cdots p_n, ki\,|\,T\,\varphi(y_1)\,\varphi(x_1)\,|\,q_2 \cdots q_\ell, be\rangle$$

Ez minden részecskével megismételhető, a végeredmény:

$$\boxed{\begin{aligned}\langle p_1 \cdots p_n, ki\,|\,q_1 \cdots q_\ell, be\rangle = {} & \text{lekapcsolódott tagok} + \\ & + (i Z^{-1/2})^{n+\ell} \int d^4y_1 \cdots d^4y_n\, d^4x_1 \cdots d^4x_\ell\, \exp\Big(i \sum_{k=1}^{n} p_k y_k - i \sum_{\nu=1}^{\ell} q_\nu x_\nu\Big) \cdot \\ & \cdot (\Box_{y_1} + m^2) \cdots (\Box_{y_n} + m^2)(\Box_{x_1} + m^2) \cdots (\Box_{x_\ell} + m^2) \langle 0\,|\,T\,\varphi(y_1) \cdots \varphi(y_n)\,\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_\ell)\,|\,0\rangle\end{aligned}}$$

Lehmann – Symanzik – Zimmermann – féle redukciós formula.

Jó, mert a közelítés nélkül megadja az S_{fi} mátrixelemet

a lekapcsolódott tagok általában kiválaszthatók

2. tétel: Kölcsönhatások és perturbációs elmélet

Egy rendszer Green-fv-e $G(x_1\cdots x_n) = \langle 0|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle$.
ezt akarjuk kiszámolni.

A terek a kezdeti állapottól az alábbi módon fejlődnek:

$$\varphi(x) = U^{-1}(t)\,\varphi_{be}(x)\,U(t) \qquad \text{ahol} \quad U(t) = T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{t} dt'\, H_{int}(t')\right] = T\exp\left[i\int_{-\infty}^{t} dt'\int d^3x\, \mathcal{L}_{int}(x)\right]$$

$$t = x^0$$

Az U fv: $\quad U(t_1,t_2) = T\exp\left[i\int_{t_1}^{t_2} dt'\int d^3x\, \mathcal{L}_{int}(x)\right]$

$$\Rightarrow \quad U(t,t) = 1\,; \quad U(t_1,t_2)\,U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3)\,; \quad U(t) = U(t,-\infty)$$

A Green-fv.: $\quad$ TFH $x_1^0 > x_2^0 > \cdots x_{n-1}^0 > x_n^0$

$$G(x_1\cdots x_n) = \langle 0|T\,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle = \langle 0|\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle =$$

$$= \langle 0|U^{-1}(t_1)\,\varphi_{be}(x_1)\,U(t_1,t_2)\,\varphi_{be}(x_2)\cdots U(t_{n-1},t_n)\,\varphi_{be}(x_n)\,U(t_n)|0\rangle =$$

Legyen $t \gg t_1, |t_n| \Rightarrow U(t_n) = U(t_n,-t)\,U(t)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad U^{-1}(t_1) = U^{-1}(t)\,U(t,t_1)$

$$= \langle 0|U^{-1}(t)\,T\,\varphi_{be}(x_1)\cdots\varphi_{be}(x_n)\exp\left[-i\int_{-t}^{t} dt'\, H_{int}(t')\right]U(-t)|0\rangle$$

ez felbontható a köztes U-kra, amit a T operátor a helyükre rak.

Ha $|0\rangle$ a kezdeti vákuumot jelöli, akkor $U(-t)|0\rangle = |0\rangle$

$$\langle 0|U^{-1}(t) = \langle 0|U^{-1}(t)|0\rangle\langle 0| = \frac{1}{\langle 0|U(t)|0\rangle}\langle 0|$$

$$\boxed{G(x_1\cdots x_n) = \frac{\langle 0|T\,\varphi_{be}(x_1)\cdots\varphi_{be}(x_n)\exp\left\{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}[\varphi_{be}(x)]\right\}|0\rangle}{\langle 0|T\exp\left\{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}[\varphi_{be}(x)]\right\}|0\rangle}} \qquad (*)$$

A levezetés nem volt precíz, de az az eredmény. Ezt lehet kiszámolni.

Konkrét példa: $\mathcal{L}_{int}[\varphi(x)] = -\frac{\lambda}{4!}:(\varphi(x))^4:$

Wick-tételből a kontrakció: $\overbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \langle 0|T\,\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}$

A $:\;:$-n belüli szorzók nem kontrahálandók, csak egymás között $\Rightarrow$ gráfok, 4-es csúcsok

Páros db külső vonal van. ($n \to 2n$ a jelölésben.)

A (*) számlálója:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^p}{p!} \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2n}) \int d^4y_1\cdots d^4y_p \frac{:\varphi^4(y_1):}{4!}\cdots\frac{:\varphi^4(y_p):}{4!}|0\rangle$$

x-k: külső pontok a gráfban

y-k: belső pontok a gráfban, mindegyikben a kifejtődés $4!$ féle-képpen $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a nevező $4!$ faktora kiesik.

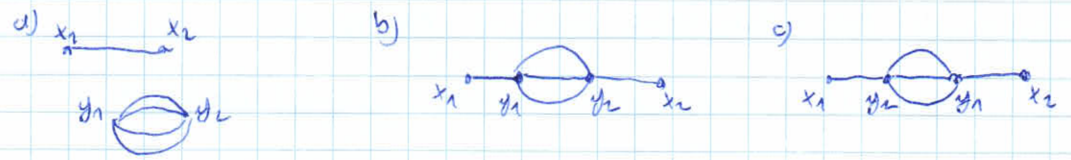
gráfszabályok: 1) rajzoljunk fel minden különböző diagramot $2n$ külső és p belső ponttal

2) minden csúcs járuléka $-i\lambda$

3) z_i és z_j közötti él járuléka $\overline{\varphi(z_i)\varphi(z_j)}$

4) minden gráf osztva van a hozzá tartozó szimmetriacsoport rendjével.

Létezhetnek nem összefüggő gráfok, ahol néhány belsőpont nem megy ki. pl. $2n=2$ eset:



Az a) diagramban y_1 és y_2 egy belső „vákuum-vákuum"-diagram. Minden ilyen mellé elképzelhető az összes lehetséges összefüggő diagram, amik aztán kiemelhetők, és a vákuum-vákuum-diagramok járuléka faktorizálható.

Formálisan (*)-ből:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1\cdots d^4y_p \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\mathcal{L}(y_1)\cdots\mathcal{L}(y_p)|0\rangle =$$

összefüggő gráf

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1\cdots d^4y_p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\mathcal{L}(y_1)\cdots\mathcal{L}(y_k)|0\rangle^{(1)} \cdot \langle 0|T\mathcal{L}(y_{k+1})\cdots\mathcal{L}(y_p)|0\rangle =$$

konfigurációk száma — vákuum-vákuum-gráf

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4y_1\cdots dy_k \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\mathcal{L}(y_1)\cdots\mathcal{L}(y_k)|0\rangle^{(1)} \cdot \sum_{p=k}^{\infty} \frac{i^{p-k}}{(p-k)!} \int d^4y_{k+1}\cdots d^4y_p \langle 0|T\mathcal{L}(y_{k+1})\cdots\mathcal{L}(y_p)|0\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4y_1\cdots dy_k \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\mathcal{L}(y_1)\cdots\mathcal{L}(y_k)|0\rangle^{(1)} \cdot \langle 0|T\exp\left[i\int dx\,\mathcal{L}(x)\right]|0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad G(x_1\cdots x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4y_1\cdots d^4y_k \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\mathcal{L}(y_1)\cdots\mathcal{L}(y_k)|0\rangle^{(1)}$$

Tehát G csak az összefüggő gráfok járulékainak összege.

Térjünk át Fourier-térbe!

$$\tilde G(p_1\cdots p_{2n}) = \int d^4x_1\cdots d^4x_{2n}\, \exp\left(-i\sum_{j=1}^{2n} p_j x_j\right) G(x_1,\cdots x_{2n})$$

~~[illegible]~~ Impulzusmegmaradás miatt $\sum_{j=1}^{2n} p_j = 0$, tehát $\tilde G$ írható így:

$$\tilde G(p_1\cdots p_{2n}) = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+\cdots+p_{2n})\, G(p_1,\cdots p_{2n})$$

Minden belső pontban a y-ra való integrálás: $\int d^4y_j\, e^{-iy_jq_j} = (2\pi)^4\delta(q_j)$

ahol q_j a beérkező impulzus $\Rightarrow$ minden csúcsban teljesül az impulzusmegmaradás.

gráfszabályok $\tilde G(p_1\cdots p_{2n})$-re:

1) rajzoljunk fel minden topológiailag különböző, összefüggő gráfot $2n$ külső és k belső ponttal! A befutó impulzusok $p_1\cdots p_{2n}$, a belső impulzusok $k_1\cdots k_k$ - k

2) A j-ik külső vonal járuléka: $\dfrac{i}{p_j^2-m^2+i\varepsilon}$

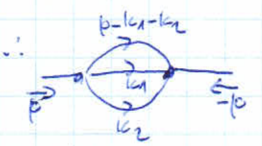
3) Az l-ik belső él járuléka: $\dfrac{d^4k_l}{(2\pi)^4}\,\dfrac{i}{k_l^2-m^2+i\varepsilon}$

4) Minden csúcs járuléka $(-i\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(q_j)$ ahol q_j a befutó impulzus.

5) Integráljunk a k-kra, és osszunk le a szimmetriafaktorral!

6) Összegezzünk a különböző topológiájú gráfokra!

Általában V csúcs és I belső él esetén $I-V+1$ db integrálást kell végezni

Pl.: 

$$=\frac{(-i\lambda)^2}{3!}\left(\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\right)^2\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{i^3}{(k_1^2-m^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2+i\varepsilon)\left[(p-k_1-k_2)^2-m^2+i\varepsilon\right]}$$

3. tétel: QED Feynman-szabályai, Furry-tétel

Az elektrodinamika Lagrange-a:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{\gamma} + \mathcal{L}_0^{e^+e^-} + \mathcal{L}_{int} \qquad \text{ahol} \qquad \mathcal{L}_0^{\gamma} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2}(\partial A)^2$$

$$\mathcal{L}_0^{e^+e^-} = \frac{i}{2}\bar\psi\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi - m\bar\psi\psi$$

$$\mathcal{L}_{int} = -e\,\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu \qquad M := \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Ez alapján:

- elektron propagátor:

$$\langle 0|T\,\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)|0\rangle = \overline{\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)} = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-ik(x-y)}\left(\frac{i}{\not k - m + i\varepsilon}\right)_{\alpha\beta}$$

- foton propagátor:

$$\langle 0|T\,A_\rho(x)A_\nu(y)|0\rangle = \overline{A_\rho(x)A_\nu(y)} = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-ik(x-y)}(-i)\left(\frac{g_{\nu\rho} - k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} + \frac{k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-M^2+i\varepsilon}\right)$$

- kölcsönhatási csúcs:

$$\mathcal{L}_{int}(z) = \mathcal{L}_{int}\left[\psi_{in}(z), \bar\psi_{in}(z), A_\mu(z)\right] \Rightarrow$$

$$= -ie(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}$$

A teljes Green-fv: (Töltésmegmaradás miatt ψ és $\bar\psi$ száma egyenlő $\Rightarrow$ páros x van.)

$$G(x_1\dots x_{2n}, y_1\dots y_p) = \langle 0|T\,\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar\psi(x_{n+1})\cdots\bar\psi(x_{2n})A_{\nu_1}(y_1)\cdots A_{\nu_p}(y_p)|0\rangle =$$

$$= \frac{\langle 0|T\,\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar\psi(x_{n+1})\cdots\bar\psi(x_{2n})A_{\nu_1}(y_1)\cdots A_{\nu_p}(y_p)\exp\left(i\int d^4z\,\mathcal{L}_{int}(z)\right)|0\rangle}{\langle 0|T\exp\left(i\int d^4z\,\mathcal{L}_{int}(z)\right)|0\rangle}$$

A skalárosztéhez hasonlóan a nevező itt is kiesik, ha csak az összefüggő gráfokat nézzük.

A fermion-vonalak lehetnek nyíltak (külső ponttól külső pontig), és hurkok.

A hurkok: $\overline{\psi(z_1)\bar\psi}(z_2)\overline{\psi(z_2)\bar\psi}(z_3)\cdots\overline{\psi(z_q)\bar\psi}(z_1)$.

Az átrendezés miatt egy hurok (-1) faktort ad.

Továbbá két gráf egymáshoz képest (-1)-gyel tér el, ha a belső pontok permutációja páratlan.

A q-adrendű gráfnál a q belső pontra vett integrálás $q!$-féle kombinációban lehet $\Rightarrow$ az $\frac{1}{q!}$ faktor eltűnik.

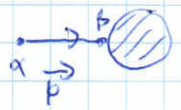
Fourier-trafó:

$$G_c(x_1\cdots x_{2n}, y_1\cdots y_p) = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_{2n}}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4q_p}{(2\pi)^4}\exp\left(i\sum_{i=1}^{2n}p_ix_i + i\sum_{j=1}^{p} q_jy_j\right)\cdot$$

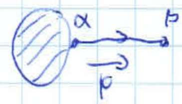
$$\cdot\, \tilde{G}_c(p_1\cdots p_{2n}, q_1\cdots q_p)$$

Tehát a Feynman-szabályok impulzustérben:

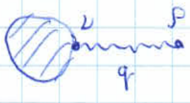
1) külső vonalak járuléka:



$$= \left(\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}\right)_{\beta\alpha}$$

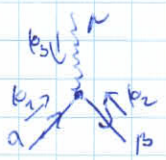


$$= \left(\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}\right)_{\beta\alpha}$$



$$= -i\left(\frac{g_{\rho\nu} - q_\rho q_\nu/\mu^2}{q^2-\mu^2+i\varepsilon} + \frac{q_\rho q_\nu/\mu^2}{q^2-M^2+i\varepsilon}\right)$$

2) csúcsok:



$$= -ie(\gamma_\nu)_{\beta\alpha}\,(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_2+k_3)$$

3) Propagátorok:

$$= \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{\not k - m + i\varepsilon}\right)_{\beta\alpha}$$

$$= \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-i)\left(\frac{g_{\nu\rho} - k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} + \frac{k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-M^2+i\varepsilon}\right)$$

4) (-1) minden zárt fermionhurok után, plusz a külső permutációnak megfelelően.

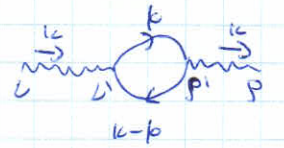
Furry-tétel: Azok a diagramok, amikben páratlan csúcsot tartalmazó fermionhurok van, nem adnak járulékot, mert a hurok irányának megfordításával, ellentétes járulékot adnak, így kiejtik egymást.

1. tétel: 1-hurok vákuumpolarizáció

A fotonpropagátor:  $= G^{(0)}_{\rho\nu}(k) = -i\left(\dfrac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} + \dfrac{k_\rho k_\nu}{k^2-M^2+i\varepsilon}\right)$

$$M = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Közben történhetnek párkeltések, amik a végén annihilálódnak. A legalacsonyabb rendben:



$$= G^{(1)}_{\rho\nu}(k) = G^{(0)}_{\rho\rho'}(k)\, \bar\omega^{\rho'\nu'}(k)\, G^{(0)}_{\nu'\nu}(k) \qquad \text{ahol}$$

$$\bar\omega^{\rho\nu}(k) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{Tr}\left(\gamma^\rho \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}\, \gamma^\nu \frac{i}{\not p - \not k - m + i\varepsilon}\right)$$

A p-szerinti integrál kvadratikusan divergál nagy p-re.

Pauli–Villars-regularizáció: TFH a foton csatolódik még S db. nagy tömegű spinortérhez, és kössük ki, hogy így a divergencia megszűnik, végül tegyük a csatolást limesbe.

Kicsi csatolás $\Rightarrow$ A mértékinvariancia megmarad.

$$\bar\omega^{\rho\nu}(k,m) \longrightarrow \bar\omega^{\rho\nu}(k,m,\Lambda) = \bar\omega^{\rho\nu}(k,m) + \sum_{s=1}^{S} C_s\, \bar\omega^{\rho\nu}(k, \lambda_s m) \quad \text{ahol } \lambda_s \gg 1$$

Nézzük $\bar\omega^{\rho\nu}$-t.

$$\bar\omega^{\rho\nu}(k,m) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\operatorname{Tr}\left(\gamma^\rho(\not p + m)\gamma^\nu(\not p - \not k + m)\right)}{(p^2-m^2+i\varepsilon)\left((p-k)^2-m^2+i\varepsilon\right)} =$$

$$= -4e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\rho(p-k)^\nu + p^\nu(p-k)^\rho - g^{\rho\nu}(p^2 - pk - m^2)}{(p^2-m^2+i\varepsilon)\left((p-k)^2-m^2+i\varepsilon\right)} =$$

$$= -4e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{\partial}{\partial t_1^\rho}\frac{\partial}{\partial t_2^\nu} + \frac{\partial}{\partial t_1^\nu}\frac{\partial}{\partial t_2^\rho} - g_{\rho\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t_1^\sigma}\frac{\partial}{\partial t_{2\sigma}} + m^2\right)\right] \cdot \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2\, \exp\Big[i\big(\alpha_1(p^2-m^2) + \alpha_2((p-k)^2-m^2) +$$

$$+ t_1 p + t_2(p-k)\big)\Big]_{t_1=t_2=0} =$$

integrálva p-re

$$= \frac{i\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \underbrace{\left[\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} k^\rho k^\nu - g^{\rho\nu}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} - \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2} + m^2\right)\right]}_{2(k^\rho k^\nu - g^{\rho\nu}k^2)\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} - g^{\rho\nu}\left(m^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}k^2 - \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2}\right)} \exp\left[i\left(-m^2(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right)\right]$$

Beláthatjuk, hogy a második tag 0.

$$\Delta\bar{\omega} = -\frac{i\alpha}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\left(m^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}k^2 - \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\exp\left[i\left(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right)\right] =$$

$$= -i\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\, i\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\exp\left[i\rho\left(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right)\right]\Bigg|_{\rho=1} =$$

$$= \frac{\alpha\rho}{\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3\rho}\exp\left[i\rho\left(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right)\right]\Bigg|_{\rho=1} = \qquad \alpha_i' = \rho\alpha_i$$

$$= \frac{\alpha\rho}{\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty d\alpha_1'\int_0^\infty d\alpha_2' \frac{1}{(\alpha_1'+\alpha_2')^3}\exp\left[i\left(-m^2(\alpha_1'+\alpha_2')+\frac{\alpha_1'\alpha_2'}{\alpha_1'+\alpha_2'}k^2\right)\right]\Bigg|_{\rho=1}$$

Az integrál eredménye ρ-független $\Rightarrow$ $\Delta\bar{\omega} = 0$.

Visszatérve ω-ra: $\quad \bar{\omega}^{\rho\nu}(k,m) = -i(g^{\rho\nu}k^2 - k^\rho k^\nu)\,\bar{\omega}(k,m)$ alakú, ahol

$$\bar{\omega}(k,m) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2 \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^4}\exp\left[i\left(-m(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right)\right] =$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\int_0^\infty d\rho\,\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2)\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho^4}\exp\left[i\left(-m\rho+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho}k^2\right)\right] = \qquad \alpha_i'' = \frac{\alpha_i}{\rho}$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 d\alpha_1''\int_0^1 d\alpha_2''\,\alpha_1''\alpha_2''\,\delta(1-\alpha_1''-\alpha_2'')\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\exp\left[i\rho\left(-m+\alpha_1''\alpha_2''k^2\right)\right]$$

A ρ-ra való integrál divergens, de a divergencia foka 0, így regularizációval eltüntethető. A módosított $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}(k,m,\Lambda) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 d\alpha_1''\int_0^1 d\alpha_2''\,\alpha_1''\alpha_2''\,\delta(1-\alpha_1''-\alpha_2'')\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\sum_{s=0}^S C_s\exp\left[i\rho\left(-m_s+\alpha_1''\alpha_2''k^2\right)\right]$$

ahol $C_0=1$. Mivel a többi C_s önkényes, legyenek $\sum_{s=1}^S C_s = -1$! Ekkor a ρ-ra való integrálás konvergens lehet.

Legyen $k^2 < 4m^2$! Mivel $\alpha_1'', \alpha_2'' \le 1$, és $\alpha_1''+\alpha_2''=1$ miatt $\alpha_1''\alpha_2'' \le \frac{1}{4}$, így a kitevő tisztán $\Rightarrow$ $\rho' := -i\rho$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_\eta^\infty\frac{d\rho'}{\rho'}\sum_{s=0}^S C_s\, e^{-\rho'(m_s^2-\alpha_1''\alpha_2''k^2)} = \lim_{\eta\to 0}\sum_{s=0}^S C_s\left[\left(-e^{-\rho''}\ln\rho''\right)\Big|_{\rho''=\eta(m_s^2-\alpha_1''\alpha_2''k^2)} + \int_0^\infty d\rho'''e^{-\rho'''}\ln[(\ldots)\rho''']\right]$$

Az első taggal lenne baj $\ln\eta$ miatt, de a C_s választás miatt kiesik. Amúgy így:

$$= -\sum_{s=0}^S C_s\ln(m_s^2-\alpha_1''\alpha_2''k^2) = \quad \text{mivel } m_s^2 \gg k^2 \quad = -\left[\ln\left(1-\frac{\alpha_1''\alpha_2''k^2}{m^2}\right)+\sum_{s=1}^S C_s\ln d_s^2\right]$$

legyen Λ olyan, hogy $\sum_{s=1}^S C_s\ln d_s^2 = \ln\frac{\Lambda^2}{m^2}$. A végső integrál:

$$\bar{\omega}(k^2,m,\Lambda) = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 d\alpha_1''\,\alpha_1''(1-\alpha_1'')\left[-\ln\frac{\Lambda}{m^2}+\ln\left(1-\alpha_1''(1-\alpha_1'')\frac{k^2}{m^2}\right)\right] = \text{ez már elvégezhető} =$$

$$= -\frac{\alpha}{3\pi}\left[-\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{1}{3}+2\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\cdot\operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\right)-1\right)\right]$$

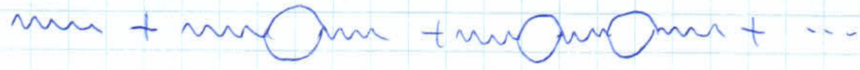
Közelítsünk más irányból!

Láttuk, hogy $\bar\omega \propto \alpha$, tehát kezelhető perturbatívan.

Az alábbi operátort sorbafejtve:

$$\left(G^{(0)\,-1}_{\rho\nu} - \bar\omega_{\rho\nu}\right)^{-1} = G^{(0)}_{\rho\mu}\left(\delta^\mu_\nu - G^{(0)\mu\sigma}\bar\omega_{\sigma\nu}\right)^{-1} = G^{(0)}_{\rho\mu}\left(\delta^\mu_\nu - \bar\omega^{\mu\sigma}G^{(0)}_{\sigma\nu}\right)^{-1} =$$

$$= G^{(0)}_{\rho\nu} + G^{(0)}_{\rho\mu}\,\bar\omega^{\mu\sigma}\,G^{(0)}_{\sigma\nu} + G^{(0)}_{\rho\mu}\,\bar\omega^{\mu\sigma}\,G^{(0)}_{\sigma\tau}\,\bar\omega^{\tau\varphi}\,G^{(0)}_{\varphi\nu} + \dots$$

gráfokkal: 

Egy hurok járulékát ismerve, meghatározhatjuk az összes egyhurok-lánc járulékának összegét.

$$G^{(0)\,-1}_{\rho\nu} - \bar\omega_{\rho\nu} = i\left[(k^2-\mu^2)g_{\mu\nu} - (1-\lambda)k_\rho k_\nu + (g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu)\,\bar\omega\right]$$

$$iG_{\rho\nu} = i\left(G^{(0)}_{\rho} - \bar\omega_{\rho\nu}\right)^{-1} = \frac{g_{\rho\nu} - (1+\bar\omega(k^2))k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2(1+\bar\omega(k^2)) - \mu^2} + \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\,\frac{1}{k^2-\mu^2/\lambda}$$

A szabadpropagátor pólusa $k^2=\mu^2$-ben volt, ennek $k^2 = \frac{\mu^2}{1+\omega(k^2)}$-ben van.

Valójában μ-t a kishullámhosszú problémaként vezettük be, de az igazából $\mu \to 0$.
$\mu = 0$-val nézve a propagátor

$$iG_{\rho\nu} = \frac{g_{\rho\nu}}{k^2(1+\bar\omega(k^2))} + \frac{k_\rho k_\nu}{k^4}\,\frac{1+\bar\omega(k^2)-\lambda}{\lambda(1+\bar\omega(k^2))}$$

itt akkor van pólus, ha $k^2(1+\bar\omega(k^2)) = 0$, azaz $k^2=0$.
A reziduum $(1+\bar\omega(0))^{-1}$. Mivel a mennyiségek általában jGj alakú mátrixelemből következnek, akkor j megmaradó áram, szerint a $\bar\omega(0)$ korrekció ebbe is beleszámít.

Az elemi töltés az, ami a Coulomb-tv.-ben az $\frac{1}{4\pi r}$ együtthatója, így a Green-fv alapján: $$e^2 = \frac{e_0^2}{1+\bar\omega(0)}$$ ahol e_0 a $\mathcal{L}$-ben szereplő „csupasz" csatolási állandó.

$\bar\omega(0)$ az α miatt kicsi a 1-hez képest; de a $\ln\Lambda^2$ miatt értelmetlen.
Ahhoz, hogy e-re értelmes, véges eredményt kapjunk, e_0-nak is értelmetlennek kéne lennie, de nem baj, mert a Green-fv-ben mindig az előző kombinációban fordul elő, így a mérhető mennyiségek mindig végesek és jól definiáltak.

jelölés: $$Z_3 := \frac{1}{1+\bar\omega(0)} \simeq 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots$$

$$e^2 = Z_3\, e_0^2$$

(Mivel α és α_0 csak α rendjében tér el, ezért ott mindegy melyik van.)

Mivel minden névleges mennyiség $j G j$ alakú, ezért $Z_3 e_0^2$ kerül elő, ami e^2 lesz. Praktikus lenne kapásból e-t egy normált G-vel szorozni, hogy az eredmény rögtön véges legyen. A G $k^2=0$ pólusában az értelmetlen rész könnyen eltávolítható:

$$iG^R_{\rho\nu}(k) = \frac{g_{\rho\nu}}{k^2\left(1+\bar\omega(k^2)-\bar\omega(0)\right)} + k_\rho k_\nu\text{-vel arányos tagok}$$

Ez a Green-fv megkapható akkor is, ha az eredeti $\mathcal{L}$-t módosítjuk:

$$\mathcal{L}(e_0, m_0, \dots) \to \mathcal{L}(e, m, \dots) + \delta\mathcal{L} \qquad \text{ahol } \delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}^{[1]} + \delta\mathcal{L}^{[2]} + \dots$$

a hurkok számának rendjében.

$$\delta\mathcal{L}^{[1]}_{F^2} = -\frac{1}{4}\left(Z_3-1\right)^{[1]} F_{\rho\nu}F^{\rho\nu}$$

Ebből levezetve a Feynman-szabályokat és kiszámolva $\bar\omega$-t:

$$\bar\omega_{\rho\nu}(k) \to \bar\omega_{\rho\nu}(k) - (Z_3-1)^{[1]}\, i\left(g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu\right)$$

$$\bar\omega(k^2,\Lambda) \to \bar\omega(k^2,\Lambda) + (Z_3-1)^{[1]} = \bar\omega(0) + (Z_3-1)^{[1]} + \bar\omega(k^2) - \bar\omega(0) =$$

$$= \underbrace{\frac{(\bar\omega(0))^2}{1+\bar\omega(0)}}_{\propto\, \alpha^2 \;\Rightarrow\; \text{elsőrendben elhagyjuk}} + \underbrace{\bar\omega(k^2)-\bar\omega(0)}_{:= \bar\omega^R(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\left[\frac{1}{3} + 2\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\,\operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\right)-1\right)\right]}$$

Tehát $$iG^R_{\rho\nu}(k) = \frac{g_{\rho\nu}}{k^2\left(1+\omega^R(k^2)\right)} + k_\rho k_\nu\text{-vel arányos tagok}$$

ami u.a.

Vákuumpolarizáció jelensége:

ω^R sorfejtése: $\quad \bar\omega^R(k^2) \approx \frac{\alpha}{15\pi}\frac{k^2}{m^2} + O\left(\frac{k^4}{m^4}\right)$

statikus esetben, amikor $k^2 = -\underline{k}^2$ a Coulomb-tér megkapható:

$$\frac{e^2}{\underline{k}^2} \to \frac{e^2}{\underline{k}^2\left(1+\bar\omega^R(-\underline{k}^2)\right)} \approx \frac{e^2}{\underline{k}^2}\left(1+\frac{\alpha}{15\pi}\frac{\underline{k}^2}{m^2}\right)$$

$$V_C(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi r} \to \left(1-\frac{\alpha\Delta}{15\pi m^2}\right)\frac{-Ze^2}{4\pi r} = -\frac{Ze^2}{4\pi r} - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{Ze^2}{m^2}\delta(\underline{r})$$

Elsőrendben csak a mag helyén változik a potenciál $\Rightarrow$ s-pályák energiája változik

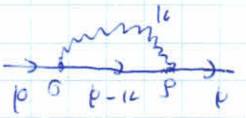
$$\delta E_{n,l} = -\frac{Z\alpha e^2}{15\pi m^2}\int d^3\underline{r}\, \psi^*_{n,l}(\underline{r})\,\delta^{(3)}(\underline{r})\,\psi_{n,l}(\underline{r}) = -\frac{Z\alpha e^2}{15\pi m^2}|\psi_{n,l}(0)|^2 =$$

$$= -\frac{4}{15\pi}\frac{Z^4\alpha^5}{n^3}m\,\delta_{l,0}. \qquad \text{Ez kimérhető.}$$

5. tétel: 1-hurok elektron sajátenergia

Az elektron propagátor: $\xrightarrow{p} = \dfrac{i}{\not p - m + i\varepsilon}$

Közben kibocsáthat egy fotont, amit újra elnyel. A korrekció:



$$= \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}\left(-i\,\Sigma(p)\right)\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} \quad \text{ahol}$$

$$-i\,\Sigma(p) = (-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\left[\frac{g_{\rho\sigma}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}+\frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(\lambda k^2-\mu^2+i\varepsilon)}\right]\gamma^\rho\frac{i}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\sigma$$

Amellett, hogy nagy k-ra $\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{|k|^3}$ nem konvergens, még kis k-nál is bajok vannak, ezért tartunk $\mu\neq 0$-nak!

Írjuk $\Sigma(p) = \Sigma^a(p) + \frac{1-\lambda}{\lambda}\Sigma^b(p)$ alakban, ahol Σ^a a Feynman-gauge-ban tartozik ($\lambda=1$). Ebben részletesen vizsgálva, értelmes eredményt kapunk. Σ^b szintén értelmes lesz, csak bonyolultabb.

$$\Sigma^a(p) = -4ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not p-\not k+m}{(k^2-\mu^2)((p-k)^2-m^2)} = \text{paraméteres reprezentációval} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\left(2m-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\not p\right)\exp\left[i\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2 m^2\right)\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\,\delta(1-\alpha_1-\alpha_2)\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\left(2m-\alpha_1\not p\right)\exp\left[i\rho\left(\alpha_1\alpha_2 p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2 m^2\right)\right]$$

A regularizáció bevezetéséhez az integrál $\int\frac{d\rho}{\rho}e^{i\rho(\cdots)} \longrightarrow \int\frac{d\rho}{\rho}\left(e^{i\rho(\cdots)}-e^{i\rho\alpha_1\Lambda^2}\right)$ hisz Λ^2 tömegű fotonokat képzelünk. Az eredmény:

$$\Sigma^a(p,\Lambda) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta\,(2m-\beta\not p)\,\ln\left[\frac{\beta\Lambda^2}{m^2(1-\beta)+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2-i\varepsilon}\right]$$

Amíg μ^2 véges, ameddig $p^2<(m+\mu)^2$, úgy $(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2 \geq \left[(1-\beta)m-\beta\mu\right]^2$.
Ekkor Σ^a valós, egyébként komplex lenne, de ha feltesszük hogy $\mu=0$ mellett $p^2<m$

$$\Sigma^a(\not p,\Lambda,\mu=0) = \frac{\alpha}{2\pi}\left[\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\left(2m-\frac{1}{2}\not p\right)+2m\left(1+\frac{m^2-p^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\not p\left(\frac{3}{2}+\frac{m^4-(p^2)^2}{(p^2)^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)+\frac{m^2}{p^2}\right)\right]$$

$p^2=m^2$ esetén ez a képlet egyszerűen nem érvényes.

Az összes 1-hurokrendű járuléka:

$$\frac{i}{\not{p}-m_0}+\frac{i}{\not{p}-m_0}\left(-i\Sigma(\not{p})\right)\frac{i}{\not{p}-m_0}+\frac{i}{\not{p}-m_0}\left(-i\Sigma(\not{p})\right)\frac{i}{\not{p}-m_0}\left(-i\Sigma(\not{p})\right)\frac{i}{\not{p}-m_0}+\dots=\frac{i}{\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})}$$

És tehát a módosított elektronpropagátor.

A szabad elektronpropagátor pólusa $\not{p}=m_0$-ban volt, ennek $\not{p}=\underbrace{m_0+\Sigma(\not{p})}_{m\,:\ \text{renormált tömeg}}$-ban.

Ez egy implicit egyenlet, de tudjuk, hogy $\Sigma \ll m \Rightarrow \Sigma$-t sorbafejtve $\not{p}=m$ körül:

$$\Sigma(\not{p},\Lambda)=\delta m(\Lambda)-\left(Z_2^{-1}(\Lambda)-1\right)(\not{p}-m)+Z_2^{-1}(\Lambda)\,\Sigma_R(\not{p})$$

ahol def szerint $\delta m(\Lambda):=\Sigma(\not{p},\Lambda)\big|_{\not{p}=m}$

$$-\left(Z_2^{-1}(\Lambda)-1\right):=\frac{\partial\Sigma(\not{p},\Lambda)}{\partial\not{p}}\bigg|_{\not{p}=m}$$

$$Z_2^{-1}(\Lambda)\,\Sigma_R(\not{p}):=\Sigma(\not{p},\Lambda)-\delta m(\Lambda)+\left(Z_2^{-1}(\Lambda)-1\right)(\not{p}-m)$$

Az utolsó interpretációja: $\not{p}-m-\Sigma_R(\not{p})=Z_2(\Lambda)\left(\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})\right)$

ami pont az, amit szeretnénk: Z_2-vel kell megszorozni $(\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p},\Lambda))$-t ahhoz, hogy a renormált tömeget és egy Λ-független Σ_R-t kapjunk.

Kiszámolva az új mennyiségeket:

$$\delta m^a(\Lambda)=m\,\frac{3\alpha}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{1}{2}\right)$$ (itt a $\mu\to 0$-t el is tudtuk végezni.)

$$\left[Z_2^{-1}(\Lambda)-1\right]^a=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta\,\beta\left[\ln\left(\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)^2m^2}\right)-\frac{2(1-\beta)(2-\beta)}{(1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2}\right]=$$ $\mu^2\ll m^2$-tel élve

$$=\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{9}{4}+O\left(\frac{\mu}{m}\right)\right)$$

$$\Sigma_R^a(\not{p})=\frac{\alpha}{2\pi}\left[2m\left(\frac{5}{8}+\frac{m^2-p^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right)-\frac{\not{p}}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{m^2}{p^2}+\frac{m^4-(p^2)^2}{(p^2)^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+(\not{p}-m)\left(\frac{9}{4}+\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right]$$ ami már véges. ✓

A Lagrange-ba szükséges ellentagok: $-m\bar{\psi}\psi \longrightarrow -m_0\bar{\psi}\psi=-m\bar{\psi}\psi+\delta m\,\bar{\psi}\psi$

tehát $\delta\mathcal{L}^{[1]}_{\bar{\psi}\psi}=\delta m\,\bar{\psi}\psi$

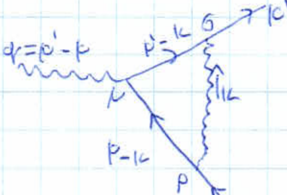
A másik: $\delta\mathcal{L}^{[1]}_{\left(\frac{i}{2}\right)\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}\psi-m\bar{\psi}\psi}=(Z_2-1)\left(\frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\not{\partial}}\psi-m\bar{\psi}\psi\right)$

Az ezekből számolt elektronpropagátor már Σ_R-t fogja adni.

6. tétel: 1-hurok vertexfüggvény, Ward-azonosság

A csúcs járuléka:  $= -ie\Lambda^{(0)}_\mu(p',p) = -ie\gamma_\mu$

Ha van egy belső foton-él:



$= -ie\Lambda^{(1)}_\mu(p',p) = -ie\left(\gamma_\mu + \Gamma^{(1)}(p',p)\right)$ ahol

$$\Gamma^{(1)}(p',p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\left(\frac{g_{\rho\sigma}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} + \frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(\lambda k^2-\mu^2+i\varepsilon)}\right)\times$$

$$\times\left(\gamma^\sigma \frac{i}{\not p' - \not k - m + i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{i}{\not p - \not k - m+i\varepsilon}\gamma^\rho\right)$$

Elektrodinamikában úgy kaptuk meg a tér és anyag kH-ját, hogy az impulzust lecseréltük az ált impulzusra: $\not p \to \not p - e\not A$. Ez alapján a csatolás és az elektron propagálás között szoros kapcsolat van.

Betéve egy külső foton élt egy e-propagátorba, megkapjuk a 3-él függvényt:

- 0-ad rendben:

$i(\not p - m)$ $\longrightarrow$ $ie\not A$

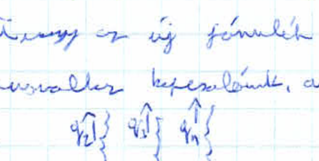
- 1. rendben:

$-i\Sigma^{(1)}(p)$ $\longrightarrow$ $-ieA^\mu\Gamma_\mu(p',p)$

(belátható a fenti képletből)

Kérdés: általánosan ez mit eredményez?

A Furry-tétel miatt, ha belső fermionhurokba kapcsolunk egy fotonélt, akkor vagy az eredeti, vagy az új járulék 0 lesz. $\Rightarrow$ Nézzük csak azokat, amikor olyan fermionvonalba kapcsolódik, ami lineáris. Adott gráf esetén az összesre összegzünk:



$$\sum \int d^4p\, \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\not p - m+i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{1}{\not p - m+i\varepsilon}\gamma_2 \frac{1}{\not p + \not q_2 - m+i\varepsilon}\gamma_3\frac{1}{\not p+\not q_2+\not q_3 - m+i\varepsilon}\cdots \gamma_{2p}\right)$$

Mivel $\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}$

a deriválás kiemelhető minden tagból az adott fermionvonal tagszorzójára

$$\Rightarrow \quad \Gamma_\mu(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) \qquad \text{Ward-azonosság}$$

Ez alapján $\quad \Lambda_\mu(p,p) = \gamma_\mu + \Gamma(p,p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu}(\not p - m - \Sigma(p))$

Visszatérve 1-hurok esetre:

$$\Gamma_\mu(p',p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) + \Gamma_\mu(p',p) - \Gamma_\mu(p,p) =$$

$$= \gamma_\mu(Z_2^{-1}-1) + \Gamma_\mu(p',p) - \Gamma_\mu(p,p) - Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^R(p) = \text{egyes. } \Gamma \text{ renormálása}$$

$$= \gamma_\mu(Z_1^{-1}-1) + Z_1^{-1}\Gamma^R(p',p)$$

def szerint $\quad Z_1 = Z_2$

$$\Gamma_\mu^R(p',p) = Z_1\left(\Gamma_\mu(p',p) - \Gamma_\mu(p,p)\right) - \frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^R(p)$$

Γ_μ és Γ_μ^R ebből már kiszámolható, de nem írom le, mert bazmi bonyolult és semmi értelme.

Ward-azonosság bizonyítása értelmesebb módon, mértékinvarianciával

A csatolás: $\bar\Psi(\gamma^\mu\partial_\mu - ie\gamma^\mu A_\mu)\Psi \quad \Rightarrow$ vertexfv. a propagátorból: $\not p \to \not p - e\not A$

propagátor szinten: $(\not p - m)^{-1} \to (\not p - e\not A - m)^{-1}$

1-hurok szinten: $-ie\Sigma^{(1)}(\not p) \longrightarrow \Gamma_\mu^{(1)}(p,p)A^\mu(-ie)$

általánosan: Mivel $A^\mu(p=0)$ konstans, ezért bár $\Sigma(\not p - e\not A)$-ban bonyolult az A-függés, de lineárisan kifejtve $\Gamma(p,p)$-t kapjuk.

$\Rightarrow \; e\Gamma_\mu(p,p) = \frac{\partial}{\partial A^\mu}\Sigma(p)$. Mivel a p-függés megegyezik $-eA$ függéssel, ezért $\quad \Gamma_\mu(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p)$

Mivel a $p \to p - eA$ eltolás elve a mértékinvarianciából közvetlenül, ezért a Ward azonosság is ebből származik.

7. tétel: Ellentagok, renormalizáció

Kiszámoltuk Z_1, Z_2, Z_3 és δm divergens mennyiségeket, és láttuk, hogy az alábbi módon kiegészített Lagrange véges eredményeket ad:

$$\mathcal{L} = -\frac14 F^2 + \frac{\mu^2}{2}A^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial A)^2 + \frac{i}{2}\bar\psi \overleftrightarrow{\not\partial}\psi - m\bar\psi\psi - e\bar\psi \not A\psi$$
$$-\frac14(Z_3-1)F^2 + (Z_2-1)\left(\frac i2 \bar\psi\overleftrightarrow{\not\partial}\psi - m\bar\psi\psi\right) + Z_2\,\delta m\,\bar\psi\psi - e(Z_1-1)\bar\psi\not A\psi$$

A kérdés, hogy az összes, összetettebb Green-fv-ek is végesek lesznek-e.

1-hurok esetben a következő a módszer:

Legyen a hurok által szállított impulzus k! A fermion propagátorok $|k|^{-1}$, a bozon propagátorok $|k|^{-2}$ faktort hoznak be. Ha Λ a levágás, akkor a divergens járulék:
$\Lambda^{4-I_F-2I_B}$ ha $4-I_F-2I_B>0$
$\ln\Lambda$ ha $4-I_F-2I_B=0$

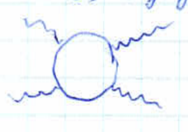
divergencia foka: $\omega(G)=4-I_F-2I_B$.

Pl.: • Vákuumpolarizációnál $I_F=2,\ I_B=0 \Rightarrow \omega=2$
DE töltésmegmaradás miatt a $(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)$ faktor miatt ezt sikerült 2-vel csökkenteni
• Elektron sajátenergiánál $I_F=1,\ I_B=1 \Rightarrow \omega=1$
DE mivel Σ arányos volt $(\not p-m)$-mel, ez is csökkentette 1-gyel.
• csúcsfüggvényre $I_F=2,\ I_B=1 \Rightarrow \omega=0$.

Mivel a gráfokat a külső élekkel jellemezhetjük könnyen, ezért praktikus lenne ezekkel kifejezni ω-t. A csúcsok száma $V=I_B+I_F$ (1). Továbbá mivel egy csúcsban két fermion és egy bozon csatlakozik, ezért $2V=2I_F+E_F$ (2) és $V=2I_B+E_B$ (3). Az (1-3) összefüggések miatt

$$\omega(G)=4-\frac32E_F-E_B$$

Ez alapján az összes lehetséges divergens gráf:

E_F	E_B	gráf	$\omega(G)$	
0	2		2	DE redukálható 0-ra
0	3	töltés konjugálási szimetria miatt nem lehetséges		
0	4		0	De redukálható konvergensre
2	0		1	DE redukálható 0-ra
2	1		0	

A több külső élt tartalmazó gráfok eleve abszolút konvergensek.

A teljes, renormált Lagrange tehát:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2 Z_3 A^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial A)^2 + Z_2\left(\frac{i}{2}\bar\psi \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/}\psi - (m-\delta m)\bar\psi\psi\right) - Z_1 e \bar\psi A\!\!\!/ \psi$$

Ennek interpretációja, ha definiáljuk a renormálatlan tereket és csat. állandókat:

$$\psi_0 = Z_2^{1/2}(\Lambda)\psi \qquad m_0 = m - \delta m(\Lambda)$$

$$\bar\psi_0 = Z_2^{1/2}(\Lambda)\bar\psi \qquad \mu_0^2 = Z_3^{-1}(\Lambda)\mu^2$$

$$A_0 = Z_3^{1/2}(\Lambda) A \qquad e_0 = Z_1(\Lambda) Z_2^{-1}(\Lambda) Z_3^{-1/2}(\Lambda) e = Z_3^{-1/2}(\Lambda) e$$

akkor átírható a csupasz mennyiségekre:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_0^2 + \frac{\mu_0^2}{2} A_0^2 - \frac{\lambda}{2} Z_3^{-1}(\Lambda)(\partial A_0)^2 + \frac{i}{2}\bar\psi_0 \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/}\psi_0 - m_0 \bar\psi_0\psi_0 - e_0 \bar\psi_0 A\!\!\!/_0 \psi$$

$\lambda_0 = Z_3^{-1}(\Lambda)\lambda$-val ez is eltüntethető (csak tudnám miért nem írta előbb!)

Az előbbi kapható renormált Green-fv véges, így az eredetileg kapott:

$$G_0(p_1,\dots,p_{2n},k_1,\dots,k_e,\mu_0,m_0,e_0,\lambda_0,\Lambda) = Z_2^n(\Lambda) Z_3^{e/2}(\Lambda) G_R(p_1,\dots p_{2n},k_1,\dots,k_e,\mu,m,e,\lambda)$$

RGED2 VIZSGÁRA

Vákuumpolarizáció kiszámítása dimenzióregularizációval

Felhasznált azonosságok.

1) Nevezőben lévő szorzat négyzetté alakítható az alábbi Feynman-paraméterrel:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{\left[A+(B-A)x\right]^2}$$

A számolás során használt alak:

$$\frac{1}{(p^2-m^2+i\varepsilon)((p-k)^2-m^2+i\varepsilon)^2} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{\left[p^2-m^2+i\varepsilon+(-2pk+k^2)x\right]^2} =$$

$$= \int_0^1 dx \, \frac{1}{\left[p^2-2pkx+k^2x^2-k^2x^2+k^2x-m^2+i\varepsilon\right]^2} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{(p'^2-\Delta+i\varepsilon)^2}$$

ahol $p' = p - xk$ és $\Delta = m^2 - k^2 x(1-x)$

2) A Dirac-mátrixok általános d dimenzióban is az alábbi módon:

Legyenek γ^μ d db olyan 4×4 mátrix, amelyre teljesül a $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ reláció, ahol a metrikus tenzor $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d$.

A trace-ekre vonatkozó azonosságok a 4-dimenziós esethez hasonlóak:

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = d\, g^{\mu\nu}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = d\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right)$$

3) Az alábbi integrálok egyszerűsíthetők:

$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu}{(p^2-\Delta)^2} = 0$$ Mivel az integrandus páratlan p-ben.

$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2-\Delta)^2}$$

Mivel ez egy tenzormennyiség, ami csak Δ skalártól függ, ezért az eredmény $g^{\mu\nu}$-vel arányos. Dimenzióanalízis alapján belátható, hogy a számláló $p^\mu p^\nu \to c\, g^{\mu\nu} p^2$-re cserélhető, valamilyen c számra. Az indexek összevonásával kapunk, hogy $c = \frac{1}{d}$, tehát

$$= \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{(p^2-\Delta)^2}.$$

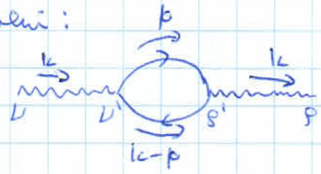
4) A következő két integrál általános d dimenzióban elvégezhető a Wick-forgatás segítségével:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p^2-\Delta+i\varepsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{\Delta^{2-d/2}}\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{p^2}{((p^2-\Delta+i\varepsilon)^2} = -\frac{d}{2}\frac{i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{\Delta^{1-d/2}}\Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right)$$

Számolás.

Az alábbi korrekciót kell kiszámolni:



$= G^{(0)}_{\rho\rho'}(k)\varpi^{\rho'\nu'}(k)G^{(0)}_{\nu'\nu}(k)$

ahol

$$\varpi^{\rho\nu}(k) = -(-ie)^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\rho\frac{i}{\not{p}-m+i\varepsilon}\gamma^\nu\frac{i}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon}\right) = \text{áttérve általános } d \text{ dimenzióba}$$

$$= -\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{tr}\left[\gamma^\rho(\not{p}+m)\gamma^\nu(\not{p}-\not{k}+m)\right]}{(p^2-m^2+i\varepsilon)((p-k)^2-m^2+i\varepsilon)}$$

Bevezetve a 1. azonosságban definiált Feynman-paramétert

$$= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{tr}\left[\gamma^\rho(\not{p}'+x\not{k}+m)\gamma^\nu(\not{p}'-\not{k}(1-x)+m)\right]}{(p'^2-\Delta+i\varepsilon)^2} \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{l} p'=p-xk \\ \Delta=m^2-k^2x(1-x)\end{array}$$

$$= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p'^2-\Delta+i\varepsilon)^2}\Big[\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma)(p'+xk)_\mu(p'-k(1-x))_\sigma +$$
$$+\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu)(p'+xk)_\mu m+\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma)m(p'-k(1-x))_\sigma +$$
$$+\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\nu)m^2\Big]$$

2. azonosság miatt

$$= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p'^2-\Delta+i\varepsilon)^2}\Big[d(g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}-g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}+g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu})(p'_\mu p'_\sigma+xk_\mu p'_\sigma-p'_\mu k_\sigma(1-x)-$$
$$-k_\mu k_\sigma x(1-x))+$$
$$+d\,g^{\rho\nu}m^2\Big]$$

3. azonosság miatt a p-vel lineáris tagok egyszerűsödnek

$$= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p'^2-\Delta+i\varepsilon)^2}\Big[(g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}-g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}+g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu})g_{\mu\sigma}p'^2 +$$
$$+d\,x(1-x)(2k^\rho k^\nu+g^{\rho\nu}k^2)+d\,g^{\rho\nu}m^2\Big] =$$

$$= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p'^2-\Delta+i\varepsilon)^2}\Big[(2-d)g^{\rho\nu}p'^2+x(1-x)d(g^{\rho\nu}k^2-2k^\rho k^\nu)+d\,g^{\rho\nu}m^2\Big]$$

A p'-re való integrálás elvégezhető a 4. azonossággal.

$$= -\mu^{4-d} e^2 \int_0^1 dx \left[(2-d) g^{\rho\nu} \left(-\frac{d}{2}\right) \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(x(1-x) d \left(g^{\rho\nu} k^2 - 2 k^\rho k^\nu\right) + d g^{\rho\nu} m^2 \right) \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \right]$$

kihasználva, hogy $\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) = \frac{2-d}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right)$

$$= -\mu^{4-d} e^2 d \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \left[-g^{\rho\nu}\Delta + x(1-x)\left(g^{\rho\nu}k^2 - 2k^\rho k^\nu\right) + g^{\rho\nu} m^2 \right] =$$

$$= -\mu^{4-d} \alpha d \frac{i}{(4\pi)^{d/2-1}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} 2x(1-x)\left(g^{\rho\nu}k^2 - k^\rho k^\nu\right)$$

Írjuk fel $\bar{\omega}^{\rho\nu}$-t az alábbi alakba: $\bar{\omega}^{\rho\nu}(k) = -i\left(g^{\rho\nu}k^2 - k^\rho k^\nu\right)\bar{\omega}(k^2)$

Ekkor

$$\bar{\omega}(k^2) = \mu^{4-d} \alpha \frac{2d}{(4\pi)^{d/2-1}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

Legyen a dimenzió $d = 4-2\epsilon$!

$$= \mu^{2\epsilon} \frac{\alpha}{\pi} (4\pi)^\epsilon (2-\epsilon) \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx\, x(1-x) \Delta^{-\epsilon} =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} (2-\epsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx\, x(1-x) \left(1 - \frac{k^2}{m^2} x(1-x)\right)^{-\epsilon}$$

Számoljuk ki a képletben szereplő integrált, és használjuk fel, hogy

$a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a + O(\epsilon^2)$.

$$\int_0^1 dx\, x(1-x)\left(1 - \frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right)^{-\epsilon} = \int_0^1 dx\, x(1-x)\left[1 - \epsilon \ln\left(1 - \frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right) + O(\epsilon^2)\right] =$$

$$= \int_0^1 dx\, x(1-x) - \epsilon \int_0^1 dx\, x(1-x) \ln\left(1 - \frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right) + O(\epsilon^2) =$$

$$= \frac{1}{6} - \epsilon \frac{1}{6} \underbrace{\left[2\left(\frac{2m^2}{k^2}+1\right)\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\, \operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\right) - 1\right) + \frac{1}{3}\right]}_{=:A(k^2)} + O(\epsilon^2)$$ feltéve, hogy $k^2 < 4m^2$.

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \epsilon A(k^2) + O(\epsilon^2)\right)$$

$$\bar{\omega}(k^2) = \frac{\alpha}{\pi}(2-\epsilon)\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \frac{1}{6}\left(1 - \epsilon A(k^2) + O(\epsilon^2)\right)$$ kihasználva, hogy $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)$

$$= \frac{\alpha}{6\pi}(2-\epsilon)\left(1 + \epsilon \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + O(\epsilon^2)\right)\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)\right)\left(1 - \epsilon A(k^2) + O(\epsilon^2)\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) - \frac{1}{2} - \gamma_E - A(k^2) + O(\epsilon)\right)$$

$\epsilon \to 0$ esetén két probléma van: · Az $\frac{1}{\epsilon}$ miatt $\bar{\omega}(k^2)$ szinguláris

· μ önkényes mennyiség, így $\bar{\omega}(k^2)$ nem jól definiált

A renormáláshoz számoljuk ki $\bar{\omega}(k^2=0)$-t! Mivel k-függés csak $A(k^2)$-ben van, azt vizsgáljuk meg:

$$A(k^2) = 2\left(\frac{2m^2}{k^2}+1\right)\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\,\operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\right)-1\right)+\frac{1}{3}$$

k^2 helyett vezessük be az $x = \sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}$ változót!

$$A(x) = (x^2+3)(x \operatorname{arccot} x - 1) + \frac{1}{3}$$

Az $\operatorname{arccot} x$-t Laurent-sorba fejtve

$$= (x^2+3)x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x^2 - \frac{8}{3} =$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{3} + 3 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x^2 - \frac{8}{3} = 0 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Longrightarrow A(k^2=0) = A(x\to\infty) = 0$$

Ez alapján

$$\bar{\omega}(k^2=0) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) - \frac{1}{2} - \gamma_E + O(\epsilon)\right)$$

Ezt kivonva $\bar{\omega}$-ból egyszerre tüntethető el a szingularitás és az önkényesség:

$$\bar{\omega}^R(k^2) = \bar{\omega}(k^2) - \bar{\omega}(0) = -\frac{\alpha}{3\pi}A(k^2) + O(\epsilon)$$

Erre elvégezhető az $\epsilon \to 0$ határátmenet és az eredmény véges.

$$\bar{\omega}^R(k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi}A(k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi}\left[2\left(\frac{2m^2}{k^2}+1\right)\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\,\operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}-1}\right)-1\right)+\frac{1}{3}\right]$$