RELATIVISZTIKUS QED

1. előadás (02.12.)

bodri.elte.hu/~vargadi/vqed

10:15 – 12:45 (11:15 – 11:30 break) Szabolcsi Virág

QED a legpontosabb mai elmélet: elmélet + mérés.

mindkettő nagyon pontos és egyező.

pl.: anomális mágneses momentum.

e^--re: $\mu_e = 2{,}00231930437 4(8)$ elmélet

$= 2{,}0023193044 02(27)$ mérés

9 jegy

Miért van hibája az elméletnek? mert perturbatív számítás.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}$$

az eredmény ennek a rendjében van: $\mu = \_ + \alpha \_ + \alpha^2 \_ + \alpha^3 \_ + \cdots$

QFT A QED egyfajta QFT, tehát ezzel is fogunk majd foglalkozni.

Ez volt az első kidolgozott QFT, ezért is fontosak az itteni módszerek.

minden részfizika QFT-t használ: – elektrodinamika
– gyenge kH
– erős kH.

Két dolgot tanulunk: 1) elemi építőköveket
2) ezek kölcsönhatásait } leírható univerzum

A QFT azért jó, mert minden követhető a szimmetriákból.

- speciális relativitás: invariancia eltolásokra $x \to x + a$
  $t \to t + t_0$

  rotációkra $\underline{x} \to \underline{\underline{R}}\, \underline{x}$ $\quad \underline{\underline{R}}^T R = 1$

  Lorentz-boostra $x_\mu = \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

relat. emlékeztető:

x_1 irányban: $\quad ct' = \dfrac{ct - x_1 \, v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_1' = \dfrac{x_1 - \frac{v}{c}\, ct}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

A Lorentz-csoport: Térbeli forgatások (3 paraméter)
boostok (3 paraméter) $\Rightarrow$ 6 paraméter

Poincaré-csoport: teljes Lorentz-csoport + eltolások $\Rightarrow$ 10 paraméter.

Ha a QFT ~~...~~ tartalmazza a speciált, akkor invariáns kell legyen erre a 10 paraméterre. (minden ilyenekkel keressük)

+ lehetnek egyéb szimmetriák is, és ez mindig meghatároz egy konkrét QFT fajtát.

A QFT konstrukcióján általában megpróbálom az elméletet pusztán szimatolással, de a számítások bonyolultak.

Történelmi áttekintés:

1927, Dirac: QM + sugárzás elmélete „relativisztikus QM"

1928, Dirac: elektron elmélete relativisztikus QM-ben: Dirac-egyenlet → antianyag

1929, Heisenberg, Pauli: egyéb dolgok

1932: antianyag felfedezése (Caltech) kozmikus sugárzásból

1930's: A fejlődés lelassult, mert egy csomó probléma bejött problémák: a szabad fokok véges száma a QM-ben, de itt van végtelen sok belőle a terek miatt végtelen. Kezdték azt hinni, hogy az egész dolog értelmetlen

1949: Tomonaga, Schwinger, Feynman [Nobel, 1965] sikerült véges eredményeket kapni.

több módszer: a renormalizáció (Dirac nem szerette) a kísérletek alátámasztották

1950's: QED már egyértelmű volt. ⇒ általánosították a többi KH-ra.

1970's: a módszereket alkalmazták másra

QED: $U(1)$
weak $SU(2)$ [T'Hooft, Veltman, Nobel]
strong $SU(3)$ [Gross, Wilczek, Politzer, Nobel később]

Az egész együtt a Standard modell. 2012-re bizonyított lett.

QED alapötlete:

- klasszikusan: Maxwell-egyenletek $\underline{E}, \underline{B}$ ezek relativisztikusan invariánsak.

- A QM eredetileg nem volt relativisztikus:

$$q(t), p(t) \longrightarrow \hat{q}_i(t), \hat{p}_i(t) \text{ operátorok}$$

ahol $[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$

H-képben: $\hat{x}_i(t), \hat{p}_i(t) \Rightarrow x_i$ és x_0 nagyon különbözően kezelt, amit nem lehet relativisztikusan kezelni

- próbáljuk meg: $q_i(t) \to \hat{q}_i(t)$ mintára $E(\underline{x}, t), \underline{B}(\underline{x}, t) \to \hat{\underline{E}}(\underline{x}, t), \hat{\underline{B}}(\underline{x}, t)$

ahol $\underline{x}$ csak az index, hogy melyik szab. fokot nézzük:

$$\hat{q}_i(t) \sim \hat{\underline{E}}_{\underline{x}}(t)$$

véges szab. fok — végtelen szab. fok

de itt még mindig különbözőn x és t kezelése.

Tehát az alapötlet: próbáljuk a QM-t az ismert folyamatok leírására
+ relativisztikus invariancia.

QM és speciális ismétlése

$\hbar = 1 \quad c = 1$

következmény: • mass dimenziós

$\rightarrow$ hossz: $\frac{1}{\text{mass}}$

idő: hossz

energia: tömeg

$\Rightarrow$ minden kifejezhető a tömeg dimenziójával $(\text{mass})^{k} \leftarrow$ mass-dimenziós

nagyságrend: eV

4-es jelölés: $x^\mu = (x^0, \underline{x})$

metrikus tenzor: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ inverze: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$$

skalár szorzat: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad y^\mu = (y^0, y^1, y^2, y^3)$

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

Lorentz-trafó:

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x'^\mu \quad \text{és} \quad g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = x^\mu y_\mu$$

ennek feltétele: $g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma$

Hilbert-tér $\mathcal{H}$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ állapotok

A megfigyelhető mennyiségek: $\hat{A}$ operátorok

$\bar{A} = \langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle$ várható érték

időfejlődés: $i \frac{\partial |\phi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\phi(t)\rangle$ Schr.-egyenlet

$\hat{H}(t)$ Hamilton-operátor

Schr.-kép.

QM kanonikus formalizmus:

klasszikusan: $S = \int L \, dt \quad [L = \int \mathcal{L} \, d^3x]$

$L(q, \dot{q})$

legkisebb hatás elve: $q \rightarrow q + \delta q, \ \delta S = 0$

$\Rightarrow$ EL-egyenlet: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

kanonikus impulzus: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, Hamilton-fv: $L(q, \dot{q}) \rightarrow H(q, p)$

kvantálás: $(q, p) \rightarrow$ operátorok.

kommutációs relációk: $[p_i, q_j] = -i \delta_{ij}$

$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$

$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q})$.

Schrödinger kép $\longleftrightarrow$ Heisenberg-kép

$$\langle\phi(t)|\hat A|\phi(t)\rangle \longleftrightarrow \langle\phi|\hat A(t)|\phi\rangle$$

$$\left.\begin{matrix}|\phi(t)\rangle\\ \hat A\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left.\begin{matrix}|\phi\rangle\\ \hat A(t)\end{matrix}\right\}$$

Áttérés:
$$|\phi(t)\rangle_S = e^{-i\hat H t}\,|\phi\rangle_H$$
$$\hat A(t)_H = e^{i\hat H t}\,\hat A_S\, e^{-i\hat H t}$$

A kanonikus kommutációs relációk a Schr.-képben vannak. A Heisenberg-képben

$$[\hat p_j(t), \hat q_k(t)] = \frac{\delta_{jk}}{i}$$

csak azonos időre írhatjuk fel.

Térelméletekben használatos a Heisenberg-kép (ezt fogjuk használni)

Klasszikus térelmélet:

$$S = \int dt\, L = \int dt\, d^3x\, \mathcal{L} = \int d^4x\, \mathcal{L}$$

S invariáns akkor, ha $\mathcal{L}$ is az.

skalár terek klasszikus elmélete:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad S = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\, d^4x$$

pl.: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi$

a hatáselv: $\varphi(x) \to \varphi(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow \delta S = 0$

EL-egyenlet: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}$

Ha pl. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \Rightarrow (\Box + m^2)\varphi(x) = 0$

Klein-Gordon-egyenlet.

Ha QM-ben: $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ akkor QFT-ben: $\pi(x) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi(x)} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi(x))}$

Tehát két mezőnk van: $\varphi = \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(t, \mathbf{x})$

$\pi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \pi(t, \mathbf{x})$

Kanonikus egyenlő idejű kommutációs reláció:

$$[\pi(t,\mathbf{x}), \varphi(t,\mathbf{y})] = \frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{i} \qquad [\pi, \pi] = 0, \quad [\varphi, \varphi] = 0$$

Cél: találni egy jól definiált H-t, és találni $\varphi(\mathbf{x},t)$, $\pi(\mathbf{x},t)$, amik kielégítik a komm. relációkat. Téroperátorok.

Hogyan tehetjük ezt meg? Az egyetlen kiinduló pont a $\mathcal{L}$

Hogy néz ki a Lagrange? $\mathcal{L}$-t megszabják a szimmetriák, amelyekben a mezők alakulnak

(azaz, ha tudjuk milyen részecskék vannak)

REL QED

2. előadás (02.26.)

$$\Pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a(x)}$$

$$[\Pi_a(\underline{x},t), \varphi_b(\underline{y},t)] = \frac{1}{i}\delta_{ab}\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

$\varphi_a(x), \Pi_a(x)$ operators on $\mathcal{H}$

Szimmetriák:

Szimmetria: olyan trafó, ami a hatást helyben hagyja.

$\Rightarrow$ Az EL-egyenlet ezáltal változatlan lesz.

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}$$

pl.: • eltolások $\quad x^\mu \to x^\mu + a^\mu$

• rotations: $\quad \underline{x} \to \underline{\underline{R}}\,\underline{x} \qquad \underline{\underline{R}} \in SO(3)$

• Lorentz-trafó: $\quad x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad \Lambda \in$ Lorentz-group

Általánosan: $\quad x \to f_g(x) = x' \qquad g \in G$

f_g a téridőn hat.

ha van egy terünk, az is módosulhat a trafó hatására

$$\varphi_a \to (T_g)_{ab}\varphi_b$$

A szimmetria teljes hatása: téridő trafója + terek trafója

$$\varphi'_a(x') = T_{ab}\varphi_b(x)$$

a kettő ekvivalens, de mikor melyik egyszerűbb.

$$\varphi'_a(f_g(x)) = T_{ab}\varphi_b(x) \Rightarrow \underline{\varphi'_a(y) = T_{ab}\varphi_b(f^{-1}(y))}$$

infinitezimális trafó:

$g \in G$ általában felírható $g = e^{\varepsilon}$ alakban, és ha ε értéke kicsi, sorbafejthető

$$g_{ab} = [e^{\varepsilon}]_{ab} = [1 + \varepsilon + \cdots]_{ab}$$

$\Rightarrow x \to x' = x + \delta x \quad \Rightarrow$ A változások: $\begin{cases}\delta x \\ \delta\varphi_a\end{cases}$

pl.: $\begin{aligned} x' &= x + \delta x \\ \varphi'_a &= \varphi_a + \varepsilon_{ab}\varphi_b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_a = \varphi'_a - \varphi_a = \varepsilon_{ab}\varphi_b$

tehát a megváltozás: $\varphi'_a(x) = T_{ab}\varphi_b(f^{-1}(x)) = (\delta_{ab} + \varepsilon_{ab})\varphi_b(x - \delta x) = (\delta_{ab} + \varepsilon_{ab})(\varphi_b(x) - \partial_\mu\varphi_b(x)\delta x^\mu) =$

$= \varphi_a(x) + \varepsilon_{ab}\varphi_b(x) - \partial_\mu\varphi_a(x)\delta x^\mu \Rightarrow \underline{\delta\varphi_a = \varepsilon_{ab}\varphi_b(x) - \partial_\mu\varphi_a(x)\cdot\delta x^\mu}$

Azért jók a infinitezimális trafók, mert egymásutánba kerekíti őket, és ha ezek békén hagyják az S-t, akkor a teljes trafó is.

A szimmetriák következménye:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta(\partial_\mu\varphi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$$

$$\delta S = \int d^4x' \, \mathcal{L}(\varphi_a', \partial_\mu\varphi_a', x') - \int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x)$$

kell nekünk a $x \to x'$ Jacobija:

$$d^4x' = \det\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \cdot d^4x$$

általában: $x' = f(x)$, tehát $\det\dfrac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu}$ kell.

infinitezimális esetben:

$$\det\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \det\frac{\partial(x^\mu + \delta x^\mu)}{\partial x^\nu} = \det\left(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu\delta x^\mu\right) = *$$

állítás:

$$\det(\mathbb{1} + \underline{\underline{M}}) = 1 + \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{M}} + \dots$$

bizonyítás $\underline{\underline{M}}$ diagonalizálásával.

$$* = 1 + \partial_\mu\delta x^\mu$$

Tehát az integrál-mértéke: $d^4x' = (1 + \partial_\mu d x^\mu)\, d^4x$

$$\delta S = \int(1+\partial_\mu\delta x^\mu)\, d^4x\, \mathcal{L}' - \int d^4x\, \mathcal{L} = \int d^4x\left[\mathcal{L}' - \mathcal{L} + \partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L}\right] =$$

itt $\mathcal{L}'$ lenne, de mivel úgy δx-szel van szorozva, a $\delta\mathcal{L}$ elhagyható.

$$= \int d^4x\left(\delta\mathcal{L} + \partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L}\right) = \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta(\partial_\mu\varphi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \partial_\mu\delta x^\mu\cdot\mathcal{L}\right] =$$

$$= \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta(\partial_\mu\varphi_a) + \partial_\mu(\mathcal{L}\cdot\delta x^\mu)\right] \doteq 0$$ szimmetria def miatt

Akkor, hogy 0 legyen, teljes divergenciának kell lennie, tehát $\exists\,\phi^\mu$, ami

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta(\partial_\mu\varphi_a) + \partial_\mu(\mathcal{L}\,\delta x^\mu) = \partial_\mu\phi^\mu \qquad (\Delta)$$

bevezetve $J^\mu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a + \mathcal{L}\,\delta x^\mu - \phi^\mu$ belátható, hogy $\partial_\mu J^\mu = 0$ ha φ_a megoldás.

biz: $\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a + \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\partial_\mu\delta\varphi_a + \partial_\mu(\mathcal{L}\,\delta x^\mu) - \partial_\mu\phi^\mu =$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\partial_\mu\delta\varphi_a + \partial_\mu(\mathcal{L}\,\delta x^\mu) - \partial_\mu\phi^\mu = (\Delta)\text{ miatt} = 0.$$

Noether-tétel tartalmazása: ha van egy szimmetria, van egy J^μ áram, ami $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Noether következménye:

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0 \Rightarrow \int d^3\underline{x}\,(\partial_0 J^0 + \partial_i J^i) = 0 \Rightarrow \partial_0 \int d^3\underline{x}\, J^0 = 0$$

0 a 3D-s Gauss miatt az 0

$$\text{ha } Q = \int d^3x\, J^0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow Q \text{ állandó (a Noether töltés)}$$

Eddig ez klasszikus volt. Nézzük QFT-ben!

J^μ, Q operátorok.

$\dim G$: A független generátorok száma

Ahány áramunk van, ahány generátorunk: $J^A_\mu \quad A = 1 \dots \dim G$

ugyanúgy töltés is: $Q_A = \int d^3\underline{x}\, J^0_A$

Q_A-k $\mathcal{H}$-n hatnak $\Rightarrow$ Ezek a szimmetriacsoport reprezentációját adják.

[repr: ha $g \in G$, $U(g)$ unitér op $\mathcal{H}$-n:

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1 g_2)$$]

Szimmetria trafó hatására:

$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \qquad |\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle$

$\varphi_a(x) \to \varphi_a'(x) = U(g)\varphi_a(x)U^{-1}(g)$ mert

$$\langle\psi_1|\varphi_a(x)|\psi_2\rangle \underset{\text{szim miatt}}{=} \langle\psi_1'|\varphi_a'(x)|\psi_2'\rangle = \langle\psi_1|U^{-1}(g)\,\varphi_a'(x)\,U(g)|\psi_2\rangle$$

$$\Rightarrow \varphi_a(x) = U^{-1}(g)\,\varphi_a'(x)\,U(g)$$

$$\Rightarrow \varphi_a'(x) = U(g)\,\varphi_a(x)\,U^{-1}(g)$$

ez a kvantum tér trafója.

Lorentz (Poincaré) csoport

Lorentz: forgatások + Lorentz-boostok

$SO(3)$ 3 generátor, 3 generátor $\to$ 6 generátor

def: $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ahol $\Lambda^\mu{}_\nu$ együttható mátrixok invariánsak

$$x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} = x'^\mu y'^\nu g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma y^\sigma g_{\mu\nu} \quad \forall x, y\text{-ra}$$

$$\Rightarrow g_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} \qquad \Lambda^T g \Lambda = g$$

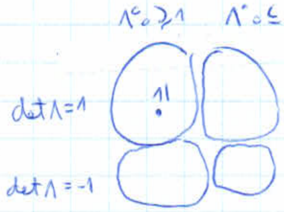
ha g a 4×4 egység lenne, akkor a Lorentz a $SO(4)$ lenne.

Mivel $g = \begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}$ ezért $SO(3,1)$-gyel jelöljük

1) Mivel $\det g = -1 \Rightarrow (\det\Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det\Lambda = \pm 1$

2) $\rho = \sigma = 0$ esetén: $1 = \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\sigma{}_0 g_{\mu\sigma} = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^i{}_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$

$$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ vagy } \Lambda^0{}_0 \leq -1$$



proper Lorentz-csoport: Azon rész ahol $\det\Lambda = 1$
és $\Lambda^0{}_0 \geq 1$

Ha a QFT relativisztikusan invariáns, akkor a Lorentz-csoport szimmetriacsoport.
$\Rightarrow$ Léteznie $\mathcal{H}$-n reprezentációja

(Jó lenne tudni a proper Lorentz-csoport összes repr.-ját)

$SO_+(3,1)$

Kezdjük egyszerűbben: $SO(3)$

R: 3×3 mátrix $R \in SO(3)$, $R^T R = \mathbb{1}$

$$R = e^{i\vartheta_i T_i}$$

paraméterek ↑, generátor ↑

Ti-k a 3x3-as antiszimmetrikus mátrixok. ← mert R ortogonális

3 van belőlük.

$$(T_i)^{jk} = -i\,\varepsilon^{ijk}$$

$$\Rightarrow [T_i, T_j] = i\,\varepsilon_{ijk} T_k$$

Ha SO(3) repr.-jét keressük, ezt a relációt kell megtartanunk:

$$[\tau_i, \tau_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\tau_k \qquad \text{pl.: } \begin{array}{ll} 2\times2: & \tau_i = \sigma_i \\ 3\times3: & \tau_i = T_i \\ & \vdots \end{array}$$

Minden repr.-t megad egy j szám: $j = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2 \dots\}$

$$\dim = 2j+1$$

Ha $m \in \{-j \dots j\}$ ahány ilyen féle, olyan dimes a repr.

$|jm\rangle$ az m-ik generátor sajátvektora.

QM-ből ezeket ismerjük

QFT-nél egy $\varphi(x)$ transzformáció: $\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x) = T_{ab}\,\varphi_b(R^{-1}x)$

$$\text{ha } R = e^{\varepsilon} \Rightarrow R^{-1}x \approx x - \varepsilon x \qquad \varepsilon = i\vartheta_i T_i$$

inf. hatásra nézve: $L_i = i\,\varepsilon_{ijk}\, x_j\, \partial_k$

belátható, hogy $[L_i, L_j] = i\,\varepsilon_{ijk} L_k$

$$\text{a tereken változás: } \varphi(x) \to U(\vartheta)\,\varphi(x)\,U^{-1}(\vartheta) \qquad \text{ahol } U(\vartheta) = e^{i\vartheta_i L_i}$$

Ha vektortérre van szó, akkor a vektor index is változni:

$$\varphi_i(x) \to R_{ij}(\vartheta)\, U(\vartheta)\, \varphi_j(x)\, U^{-1}(\vartheta)$$

fermion-tér esetén $\alpha = 1,2$, $j = 1/2$ $\quad D_{\alpha\beta}(\vartheta) = e^{i\vartheta_i \sigma_i}$

$$\psi_\alpha(x) \to D_{\alpha\beta}(\vartheta)\, U(\vartheta)\, \psi_\beta(x)\, U^{-1}(\vartheta)$$

Ezt az egészet csináljuk meg $SO(3,1)$-csoportra! De előbb $SO(4)$:

$SO(4)$:

R 4×4 mátrixok, $R = e^{\varepsilon}$, ε 4×4 antiszim. mátrixok. 6 db független van.

$\Rightarrow$ 6 generátor van.

Bevett bázis: $(M^{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$

$$\left.\begin{matrix} j, i = 1,2,3,4 \\ i < j \end{matrix}\right\} \text{ 6 db } (i,j) \text{ pár}$$

HF: - Lássuk be, hogy M^{ij}-k teljes bázist a 4×4 antiszim. mátrixok terén

- $[M^{ij}, M^{lm}] = i(\delta_{jl}M^{im} + \delta_{im}M^{jl} - \delta_{il}M^{jm} - \delta_{mj}M^{il})$

Belátható, hogy az inf. trafó hatása a klasszikus téren:

$$L^{ij} = i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) \qquad i<j$$

HF: Lássuk be, hogy L^{ij}-k kommutálnak u.a.m. M^{ij}-k.

$R(\omega) = e^{i\omega^{ij}M^{ij}}$

$U(\omega) = e^{i\omega^{ij}L^{ij}}$ $\qquad$ $\varphi(x)$ és $\varphi_i(x)$ kvantumterek trafója hasonló $SO(3)$-hoz.

De még nem tudjuk az összes reprezentáció alakját... TBC.

RQED

3. előadás (03. 11.)

A Lorentz és a Poincaré csoport repr.-jét keressük

Lorentz: $SO(3,1)$, ez hasonlít az $SO(4)$-hez.

Láttuk $SO(3) \subset SO(4)$
$\subset SO(3,1)$

Az $SO(3)$ repr.-je: a j-ik repr. $2j+1$ dimes, a dimek $m = -j \dots j$-vel jelölték

$|j\,m\rangle$.

Az $SO(4) \sim SO(3) \times SO(3)$ (Lie-algebra szintjén)

Ez nem triviális, de belátjuk:

- 3D-ben van egy tengely és a körüli tetsz. szöggel forgatunk.
- 4D-ben a generátorok M_{ij} $\quad i,j = 1,2,3,4$, $i<j$

6 db van

ezek: $(M^{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$

$$[M^{ij}, M^{kl}] = i(\delta_{jl} M^{ik} + \delta_{ik} M^{jl} - \delta_{il} M^{jk} - \delta_{kj} M^{il})$$

$$(M^{ij})^T = -M^{ij}$$

Tehát az általános alak:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -k_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -k_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}$$

A J-s generátorok egyeznek a 3D-ben forgatással: $J^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} M^{jk}$

A k-k: $k^i = M^{0i}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} [k^i, k^j] &= -i\varepsilon^{ijk} J^k \\ [J^i, J^j] &= i\varepsilon^{ijk} J^k \\ [J^i, k^j] &= i\varepsilon^{ijk} k^k \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ A J-k $SO(3)$ részcsoport, de a k-k nem zártak.

Vezessünk új változókat:

$$A^j = \frac{1}{2}(J^j + i k^j)$$
$$B^j = \frac{1}{2}(J^j - i k^j)$$

HW

állítás:
$$\boxed{\begin{aligned} [A^i, B^j] &= 0 \\ [A^i, A^j] &= i\varepsilon^{ijk} A^k \\ [B^i, B^j] &= i\varepsilon^{ijk} B^k \end{aligned}}$$

n. egységgyökös: $SO(4)$ és $SO(3,1)$ esetét csupán a különbség, hogy A és B definíciójában az i benne van.

Tehát a reprezentációkat két j-vel címkézzük: (j_1, j_2)

- $\dim(j_1, j_2) = (2j_1+1)(2j_2+1)$

pl.:
- $(0,0)$: skalár tér 1D
- $(\frac{1}{2},0)$: spinor tér 2D (bal kezes)
- $(0,\frac{1}{2})$: jobb kezes spinor tér 2D.
- $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$: Dirac-spinor 4D
- $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$: vektor repr

(van több is, de ezeket használjuk)

Poincaré-csoport

Lorentz-csoport + eltolások

$SO(3,1) \subset$ Poincaré. 10D-s csz, mert $6\ (\text{Lorentz}) + 4\ (\text{eltolás}) = 10$

Minden QFT, amit nézni fogunk, Poincaré inv kell legyen!

A Lorentz-csoport generátorai a terek terén:

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \qquad (\text{ezt láttuk})$$

Az eltolások generátorai:

Tudjuk, hogy $x \to x'$ és $\varphi'(x') = \varphi(x)$

$$\varphi'(y) = \varphi(f^{-1}(y)) \qquad \text{ha } x' = f(x) = x+a$$

$$= \varphi(y-a) = \varphi(y) - a^\mu\partial_\mu\varphi(x)$$

$\Rightarrow$ tehát a generátor: $P_\mu = i\partial_\mu$

Tehát a Poincaré-csoport generátorai terekben:

$$\boxed{\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ P_\mu &= i\partial_\mu \end{aligned}}$$

Kommutátorok:

$$\boxed{\begin{aligned} [L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] &= i\left(g^{\nu\rho}L^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}L^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}L^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}L^{\mu\rho}\right) \\ [L_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu) \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \end{aligned}}$$

HW

Mik az irreducibilis repr.-ek?

emlékeztető az SU(2)-ről:

tudtuk, hogy $[\sigma_i, \sigma_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$

konstruáltuk a Casimirt: $[C, \sigma_i] = 0$ $\qquad C = \sum_i \sigma_i \sigma_i$

beláttuk, hogy $C \sim I \Rightarrow C = \lambda I$ és hogy $\lambda = j(j+1)$ aztán a léptetőkkel

láttuk, hogy j-k lépkednek.

konklúzió: a Casimir volt a kulcs.

Kérdés: Mi a Poincaré Casimir-operátora? (operátorai?)

Állítás: $C_1 = P_\mu P^\mu$

ellenőrzés: • $[C_1, P_\mu] = 0$ (hiszen $[P, P] = 0$ miatt)

• $[C_1, L_{\mu\nu}] = [P_\rho P^\rho, L_{\mu\nu}] = P_\rho [P^\rho, L_{\mu\nu}] + [P_\rho, L_{\mu\nu}] P^\rho =$

$= P_\rho\, i\left(g_\mu^\rho P_\nu - g_\nu^\rho P_\mu\right) + i\left(g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu\right) P^\rho =$

$[g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu]$ $\qquad = i\left(P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu + P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu\right) = 0$

$\square$

C_1 s.é.-je: $C_1 = m^2 I$ (matematikailag m egy szám, fizikailag a tömeg, mert $p_\mu p^\mu = m^2$)

Állítás: ha $W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu L_{\rho\sigma}$ (Pauli–Lubanski-vektor)

akkor $C_2 = W_\mu W^\mu$ (4-ed rendű a generátorokban)

másik Casimir: $[C_2, L_{\mu\nu}] = 0$

HW $\qquad [C_2, P_\mu] = 0$

Állítás: nincs több Casimir-operátor

C_2 s.é.-je: mi a fizikai interpretáció?

TFH $m \neq 0$ és legyen nyugalomban: $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$

így: $W^i = -\frac{1}{2} m\,\varepsilon_{ijk0}\, J^{jk} = -m L_i$ $\quad \sim$ spin (vonatkoztatási n.r. spin)

$W^0 = 0$

$\Rightarrow C_2 = W_\mu W^\mu = -m^2 \underbrace{L_i L_i}_{SU(2)\text{-es Casimir}} = -m^2 s(s+1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} C_1 &= m^2 \\ C_2 &= -m^2 s(s+1)\end{aligned}}$ $\qquad$ A Poincaré-csoport repr.-jei m és s-sel vannak címkézve, (m, s) és adott m-re $2s+1$ D-s.

Mi van $m=0$-nál?:

$P_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle$ esetén: $P_\mu P^\mu |p\rangle = 0$

$W_\mu W^\mu |p\rangle = 0$ $\Rightarrow$ $W_\mu |p\rangle = h\, P_\mu |p\rangle$

$W^\mu P_\mu |p\rangle = 0$

$\Rightarrow$ W és P csak $m=0$ esetén „arányosak", a helicitásnak is csak itt van értelme.

$h = \frac{J_i P_i}{|p|}$ $\rightarrow$ a spinnek az impulzus irányú vetülete.

Mindig két eset van: $h = \pm s$, minden s esetén. HW

Összegzés: A QFT $\mathcal{L}$-je tartalmazza a Poincaré csoport repr.-jait

Az állapotok részecskék, amik ha $m \neq 0$ $2s+1$ állapotúak

ha $m=0$ akkor 2 állapotúak

DE! Ezek csak a kinematikailag releváns dolgok! A többi most is nyitott.

Pl.: ki mondta, hogy $m^2 > 0$? Senki. Megkonstruálhatunk $m^2 < 0$ dolgokat

Tachion: képzetes tömegű részecskék, amik mindig gyorsabbak c-nél, de ilyet nem látunk.

Valós skalártér

• $m \neq 0$, $s = 0$ $\qquad S = \int d^4x\, \mathcal{L}$

$\varphi(x)$ valós

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ (ez az egyetlen kvadratikus lehetőség *)

Kanonikus kvantálás: $\Pi(\underline{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi(\underline{x},t)} = \dot\varphi(\underline{x},t)$

*: azért kell kvadratikus $\mathcal{L}$, hogy az EL-egyenlet lineáris legyen és ne legyen KH.

$\mathcal{H} = \Pi\dot\varphi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\Pi^2 + \partial_i\varphi\,\partial_i\varphi + m^2\varphi^2\right)$

$[\varphi(\underline{x},t), \Pi(\underline{y},t)] = i\,\delta(\underline{x}-\underline{y})$ (Heisenberg-képben)

megjegyzés: nem értelmes rátekinteni $\underline{x}$ és T-t mint változókra, de egyenként igen, tehát tök mindegy.

Fourier: $k_\mu = \begin{pmatrix} E \\ \underline{k} \end{pmatrix}$ $\qquad k_0 = E > 0$.

KG-t megoldva Fourier-térben: $\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4k\, \delta(k^2-m^2)\,\Theta(k_0)\left[A(k)e^{-ikx} + A^+(k)e^{ikx}\right]$

Ami itt az EL-egyenlet.

diszp. rel. miatt

$E>0$ miatt

Fourier-koefficiensek és eh.-k.

Végezzük el a dk_0 szerinti integrálást!

emlékeztető: $\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$

$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(F(x)) f(x)\, dx = \sum_{\substack{x_e \\ F(x_e)=0}} \frac{f(x_e)}{|F'(x_e)|}$

Nekünk $\delta(k_0^2 - \underline{k}^2 - m^2)$ van $\Rightarrow$ $k_0 = \pm\sqrt{\underline{k}^2 + m^2}$

$$\Rightarrow \int dk_0\, \delta(k_0^2 - \underline{k}^2 - m^2)\, (\ ) = \int \frac{\delta(k_0 - \sqrt{\underline{k}^2+m^2}) + \delta(k_0 + \sqrt{\underline{k}^2+m^2})}{2k_0}\, (\ )\, dk_0$$

Mivel van egy $\Theta(k_0)$ tényező, ezért csak az egyik δ kell nekünk.

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\underline{k}}{2\omega_{\underline{k}}} \left(A(\underline{k})\, e^{-ikx} + A^+(\underline{k})\, e^{ikx} \right)$$

$\omega_{\underline{k}} = \sqrt{m^2 + \underline{k}^2}$

$kx = k^\mu x_\mu = k_0 t - \underline{k}\,\underline{x} =$

$= \omega_{\underline{k}} t - \underline{k}\,\underline{x}$

bevezetve $A(\underline{k}) = \sqrt{2\omega_{\underline{k}}}\; a(\underline{k})$ -t

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\underline{k}}{\sqrt{2\omega_{\underline{k}}}} \left(a(\underline{k})\, e^{-ikx} + a^+(\underline{k})\, e^{ikx} \right)$$

Ez megoldja a KG-t.

Fejezzük ki $\Pi(x)$-et is!

$$\Pi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\underline{k}}{\sqrt{2\omega_{\underline{k}}}}\, i\omega_{\underline{k}} \left(-a(\underline{k})\, e^{-ikx} + a^+(\underline{k})\, e^{ikx} \right)$$

Ha φ és Π kielégítik a $[\ ]$-t, akkor ez feltételt ad a és a^+ $[\ ]$-jára.

Tudjuk, hogy

$$[\varphi(x), \Pi(y)]_{ET} = i\,\delta(\underline{x} - \underline{y})$$

Állítás: Ha $[a(\underline{k}), a^+(\underline{k}')] = \delta(\underline{k} - \underline{k}')$, akkor $[\varphi(\underline{x},t), \Pi(\underline{y},t)] = i\,\delta(\underline{x} - \underline{y})$

bizonyítás:

$$[\varphi, \Pi] = \int \frac{d^3\underline{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\underline{k}}}} \frac{d^3\underline{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\underline{k}'}}}\, i\omega_{\underline{k}'} \left[a(\underline{k}) e^{-ikx} + a^+(\underline{k}) e^{ikx},\ -a(\underline{k}) e^{-ikx} + a^+(\underline{k}) e^{ikx} \right] =$$

$= $ ha $[a,a]=0$ és $[a^+,a^+]=0$ $=$

$$= \int \frac{d^3\underline{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\underline{k}}}} \frac{d^3\underline{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\underline{k}'}}}\, i\omega_{\underline{k}'} \left(\delta(\underline{k} - \underline{k}')\, e^{ikx - ik'y} + \delta(\underline{k} - \underline{k}')\, e^{-ikx + ik'y} \right) =$$

$$= \int \frac{d^3\underline{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\underline{k}}}\, i\omega_{\underline{k}} \left(e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)} \right) = \text{Mivel } x_0 = y_0 = t =$$

$$= \int \frac{d^3\underline{k}}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} \left(e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{y})} + e^{-i\underline{k}(\underline{x}-\underline{y})} \right) \underset{\text{szim. miatt}}{\overset{*}{=}} i \int \frac{d^3\underline{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{y})} = i\,\delta(\underline{x} - \underline{y})$$

$\square$

Tanulság:

$a(\underline{k})$ és $a^+(\underline{k})$ olyanok, mint végtelen sok harmonikus oszcillátor

$\varphi, \Pi, \mathcal{H}$ az oszcillátorok egyenleteivel kifejezhetők.

$$H = \frac{1}{2}\int d^3\underline{x}\,(\Pi^2 + \partial_i\varphi\partial_i\varphi + m^2\varphi^2) \;=\; \text{számold ki } a \text{ és } a^+\text{-al!}$$ HW

itthonról, távoktatásban (Kaku: Quantum field theory alapján)

$$H = \frac{1}{2}\int d^3\underline{x}\,(\pi^2 + \partial_i\varphi\,\partial_i\varphi + m^2\varphi^2) = \text{kifejezve } a(\underline{k})\text{-val mindent} =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3\underline{k}\;\omega_{\underline{k}}\left[a(\underline{k})a^+(\underline{k}) + a^+(\underline{k})a(\underline{k})\right] \quad = \int d^3\underline{k}\;\omega_{\underline{k}}\left[a^+(\underline{k})a(\underline{k}) + \frac{1}{2}\right]$$

$$P_\mu = -\int \Pi\,\underline{\nabla}\varphi\;d^3\underline{x} = \frac{1}{2}\int d^3\underline{k}\cdot\underline{k}\left[a^+(\underline{k})a(\underline{k}) + a(\underline{k})a^+(\underline{k})\right] = \int d^3\underline{k}\cdot\underline{k}\left[a^+(\underline{k})a(\underline{k}) + \frac{1}{2}\right]$$

képlet az energia-impulzus tenzorból.

Legyen vákuum állapot az, ami $a(k)|0\rangle = 0$.

Legyen egyrészecske állapot: $a^+(k)|0\rangle = |k\rangle$ $\Rightarrow$ keltő-eltüntető formalizmus

A probléma, hogy $\langle 0|H|0\rangle = \infty$ a $+\frac{1}{2}$ miatt, de ha ezt (nullponti energia) mindig levonjuk az jó, mert csak az energiakülönbség számít.

Ezzel ekvivalens formális módszer: normálrendezés.

$$\phi = \underbrace{\phi^+}_{\text{keltő tag}} + \underbrace{\phi^-}_{\text{eltüntető tag}}$$

$$(:\phi_1\phi_2:) := \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \underbrace{\phi_2^-\phi_1^+}_{\text{e a tag kicserélődött}} + \phi_1^-\phi_2^-$$

Ezzel a $[a^+, a]$ kommutátort kiszoláltuk ki, ami a $+\frac{1}{2}$-ért felelős.

Többrészecske állapot: $|\underline{k}_1 \cdots \underline{k}_N\rangle = a^+(\underline{k}_1)\cdots a^+(\underline{k}_N)|0\rangle$

Részecskeszám operátor: $N = \int d^3\underline{k}\; a^+(\underline{k})\,a(\underline{k})$

saját állapotai a tiszta részecske állapotok: $N|n(k)\rangle = n(k)|n(k)\rangle$

$$|n(k)\rangle = \frac{a^+(k)^{n(k)}}{\sqrt{n(k)!}}|0\rangle$$

több részecske esetén: $|n(k_1)n(k_2)\cdots n(k_m)\rangle = \prod_{i=1}^{m}\frac{(a^+(k_i))^{n(k_i)}}{\sqrt{n(k_i)!}}|0\rangle$

$$N|n(k_1)\cdots n(k_m)\rangle = \left(\sum_{i=1}^{m} n(k_i)\right)|n(k_1)\cdots n(k_m)\rangle$$

normálás: $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle k|k'\rangle = \delta^{(3)}(\underline{k}-\underline{k}')$

$\varphi(x)|0\rangle$ olyan, mint egy részecske x-ben. $\sim |x\rangle$

9. tétel: Töltött skalártér

Általános esetben a skalártér lehet komplex, ekkor két független valós komponense van:

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$

Lagrange-sűrűség: $\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi$

Impulzustér: $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \partial^0 \varphi^+$,

kvantálás: $[\varphi(\underline{x},t), \pi(\underline{y},t)] = i\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{y})$

Fourier-térben felírva:

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_i(\underline{k}) e^{-ikx} + a_i^+(\underline{k}) e^{ikx} \right)$$

ahol $[a_i(\underline{k}), a_j^+(\underline{k}')] = \delta^{(3)}(\underline{k}-\underline{k}')\delta_{ij}$

Vezessünk be új operátorokat: $a(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\underline{k}) + i a_2(\underline{k}))$, $a^+(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^+(\underline{k}) - i a_2^+(\underline{k}))$

$b(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1(\underline{k}) + i b_2(\underline{k}))$, $b^+(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1^+(\underline{k}) - i b_2^+(\underline{k}))$

$$\Rightarrow a_1(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(\underline{k}) + b(\underline{k})) \ , \quad a_1^+(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+(\underline{k}) + b^+(\underline{k}))$$

$$a_2(\underline{k}) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a(\underline{k}) - b(\underline{k})) \ , \quad a_2^+(\underline{k}) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+(\underline{k}) - b^+(\underline{k}))$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \left(a(\underline{k}) e^{-ikx} + b^+(\underline{k}) e^{ikx} \right)$$

Belső szimmetria: $\mathcal{L}$ invariáns az alábbi trafóra: $\varphi \to \varphi' = e^{i\vartheta}\varphi$

$\varphi^+ \to \varphi^{+\prime} = e^{-i\vartheta}\varphi^+$

mátrix alakban: $\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$

szimmetriacsoport: $SO(2) \sim U(1) \Rightarrow 1$ generátor

1 db Noether-áram:

$$J^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \left.\frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=0} = -\partial^\mu \varphi^+ \cdot i\varphi - \partial^\mu \varphi^+ (-i)\varphi = i\varphi^+ \partial^\mu \varphi - i\varphi \partial^\mu \varphi^+$$

$$Q = \int d^3\underline{x}\, i(\varphi^+ \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^+) = \int d^3\underline{k} \left(a^+(\underline{k}) a(\underline{k}) - b^+(\underline{k}) b(\underline{k}) \right) = N_a - N_b$$

Intuíció:

Schrödinger eredetileg a KG-egyenletet írta fel, és az itt bevezetett J^0-t valószínűségi áramként értelmezte. A probléma, hogy Q lehet negatív is.

Feloldás: Pauli, Weisskopf (1934)

Q nem a valószínűség, hanem egy, a részecskére jellemző töltés (elektromos töltés).

a és b ugyanazon részecske pozitív és negatív töltésű változatát jelenti (vagy tünteti el)

$\Rightarrow$ antirészecskék.

$\Rightarrow$ Végül el kell vetni, hogy φ egy darab részecske viselkedését írja le, valójában N_a db a és N_b db b részecske együttesét.

6. tétel: Skalár propagátorok

Nem zérus tér esetén a KG egyenletben van forrástag:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = J(x)$$

Megoldás Green-fv-nel: $\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4y\, \Delta_F(x-y)\, J(y)$

ϕ_0: homogén egyenlet megoldása

ahol $(\Box + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x)$

Fourier-ben: $(k^2 - m^2)\Delta_F(k) = 1 \Rightarrow \Delta_F(k) = \dfrac{1}{k^2-m^2}$

$$\Rightarrow \Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}$$ ← divergál a $k^0 = \pm\sqrt{m^2 - \underline{k}^2}$ helyeken

Kitekintés sima QM-be: A nem relat Schr-egyenlet Green-fvé:

$$\left[i\partial_t - H_0\right] G_0(x) = \delta^{(4)}(x) \Rightarrow G_0(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega - \underline{p}^2/2m} e^{-ipx}$$

Toljuk el a pólust $i\varepsilon$-nal:

$$G_{ret}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{\omega - \underline{p}^2/2m + i\varepsilon}$$

kihasználva, hogy $\Theta = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} d\omega$

$$= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\underline{p}\underline{x} - i\frac{\underline{p}^2}{2m}t}\,\Theta(t) =$$

$$= -i \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{\frac{im\underline{x}^2}{2t}}\,\Theta(t)$$

A másik irányba tolva:

$$G_{av}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{\omega - \underline{p}^2/2m - i\varepsilon} = i\left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{\frac{im\underline{x}^2}{2t}}\,\Theta(-t)$$

G_{av} és G_{ret} $\varepsilon \to 0$ esetén ugyanúgy kielégíti a Green-fv feltételét, így megoldását adják a Schr-nek, de G_{av} időben visszafelé terjedő állapotot ír le $\Rightarrow$ sérti a kauzalitást $\Rightarrow$ elvetjük.

Toljuk el a pólust: $\Delta_F(k) = \dfrac{1}{k^2 - m^2 + 2i\varepsilon}$

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{2k^0}\left(\frac{1}{k^0 - \sqrt{m^2+\underline{k}^2} + i\varepsilon} + \frac{1}{k^0 + \sqrt{m^2+\underline{k}^2} - i\varepsilon}\right) =$$ reziduum-tétel

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left[(-2\pi i)\left(\frac{e^{-ikx}}{2k^0}\right)\bigg|_{k^0=\omega_{\underline{k}}-i\varepsilon} \cdot \Theta(t) + (2\pi i)\left(\frac{e^{-ikx}}{2k^0}\right)\bigg|_{k^0=-\omega_{\underline{k}}+i\varepsilon} \Theta(-t)\right] =$$

$$\Delta_F(x) = -i\,\Theta(t)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k}\,e^{-ikx} - i\,\Theta(-t)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k}\,e^{ikx}$$

Az első tag a pozitív energiájú eset, ami időben előre terjed.
Ez a jól ismert fizikai megoldás.
A második tag energiája negatív, de időben visszafelé terjed.
$(WTF)^2$ = minden oké. Kísérletileg nem lehet különbséget tenni időben előre haladó pozitív energia és időben vissza haladó negatív energia között. Ez egy új fajta tulajdonságú anyag ⟹ antianyag.

Beláttató, hogy a skalártér (normált) vákuumbeli várható értéke a propagátor:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(k)\,e^{-ikx} + a^+(k)\,e^{ikx}\right)$$

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k\,d^3k'}{\sqrt{4\omega_k\omega_{k'}}}\langle 0|\,a(k)a(k')\,e^{-ikx-ik'x'} + a(k)a^+(k')\,e^{-ikx+ik'x'} +$$
$$+\,a^+(k)a(k')\,e^{ikx-ik'x'} + a^+(k)a^+(k)\,e^{ikx+ik'x'}\,|0\rangle$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k\,d^3k'}{\sqrt{4\omega_k\omega_{k'}}}\,e^{-ikx+ik'x'}\,\underbrace{\langle k|k'\rangle}_{\delta^{(3)}(k-k')} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k}\,e^{-ik(x-x')}$$

$$\langle 0|\varphi(x')\varphi(x)|0\rangle = \text{u.a.} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\cdot 2\omega_k}\,e^{ik(x-x')}$$

$$\Rightarrow\ i\Delta_F(x-x') = \langle 0|\,T(\varphi(x)\varphi(x'))\,|0\rangle$$

⟸ Ez a sorrendiség kapcsolja össze a propagátorokat a terekkel, fontos ezz.

Fontos még, hogy ez a tér nem közvetíti gyorsabban az infót, mint a fény. Ehhez az kell, hogy az térszerű $\varphi(x)$ és $\varphi(y)$ kommutáljon:

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = i\Delta(x-y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\,\delta^{(4)}(k^2-m^2)\cdot\mathrm{sgn}(k)\,e^{-ik(x-y)} = \text{belátható} =$$

$$= \frac{i}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases} J_0\left(m\sqrt{t^2-r^2}\right) & t>r \\ 0 & -r<t<r \\ -J_0\left(m\sqrt{t^2-r^2}\right) & t<-r \end{cases}$$

ahol $t = x^0-y^0$, $r = |\underline{x}-\underline{y}|$

$$\Rightarrow\ \Delta(x-y) = 0 \quad \text{ha}\quad (x-y)^2<0$$

7. tétel: Szabad Dirac-tér

Keressük a relativisztikus Schrödinger-egyenletet.

nem-relativisztikusan: $E = \frac{p^2}{2m} + V \Rightarrow \left(i\partial_t - \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - V\right)\psi = 0$

relativisztikusan: $E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow \left((i\partial_t)^2 - (-i\nabla)^2 - m^2\right)\psi = 0$ KG-egyenlet

Jó lenne időben elsőrendű egyenletet találni, ami „gyököt vonunk" a KG-ből:

$$i\partial_t\psi = (-i\alpha_i\partial^i + \beta m)\psi$$ megfelelő α_i és β eh.-kal.

Négyzetre emelve:

$$-\partial_t^2\psi = (-i\alpha_i\partial^i + \beta m)^2\psi =$$

$$= -\alpha_i\alpha_j\partial^i\partial^j - im(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\partial^i + \beta^2 m^2 \stackrel{!}{=} -\nabla^2 + m^2$$

$\Rightarrow$ feltétel α_i és β-ra:
$$\{\alpha_i,\alpha_j\} = 2\delta_{ij}$$
$$\{\alpha_i,\beta\} = 0$$
$$\beta^2 = 1$$

Bevezetve $\gamma^0 := \beta$, $\gamma^i := \beta\alpha^i$.

Dirac-egyenlet: $\underline{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$ ahol $\underline{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}}$

A ψ milyen ábrázolása a Lorentz-csoportnak? TFH a transzf. szabálya: $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$
$x' = \Lambda x$

A Dirac-egyenlet transzformáltja:

$$S^{-1}(\Lambda)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S(\Lambda)\psi = (iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\partial_\mu - m)\psi = 0$$

koordinátatranszf.-val $(i\gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu - m)\psi = 0$

$\Rightarrow S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu \Rightarrow \gamma^\mu$ Lorentz-vektor mennyiség az adott ábrázolásban

Képezzük az alábbit: $\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ Az antikommutátoros azonosság alapján belátható, hogy

$$\left[\frac{\sigma_{\mu\nu}}{2},\frac{\sigma_{\rho\sigma}}{2}\right] = \frac{i}{2}\left(-g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\sigma_{\mu\rho} + g_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\sigma}\right) \Rightarrow \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2}$$ a Lorentz-csoport ábrázolásának generátora

SPINOR-ábrázolás

A ψ-k transzformálásának teljes generátora: $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2}$

ahol $L_{\mu\nu}$: koordináta transzformáció

$\frac{\sigma_{\mu\nu}}{2}$: spinor transzformáció $\Rightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\frac{\sigma_{\mu\nu}}{2}\omega^{\mu\nu}}$

Tehát a Dirac-egyenlet: $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$

Konjugáltja: $\psi^+(i\gamma^{+\mu}\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0$

Vegyük észre, hogy a $\psi^+\psi$ szorzat nem skalár, mert transzformálna:

$$\psi^+\psi \to \psi'^+\psi' = \psi^+ S^+(\Lambda)S(\Lambda)\psi \quad \text{ez csak akkor } = \psi^+\psi \text{, ha } S^+ = S^{-1}$$

de mivel a Lorentz-csoport nem kompakt, nem létezik véges dimenziójú unitér ábrázolása (Moretti-tétel)

De belátható, hogy mivel $[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(\delta_\alpha^\mu\gamma_\beta - \delta_\beta^\mu\gamma_\alpha)$ levezethető

$$\gamma^0 S(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$$

$\Rightarrow$ $\bar\psi := \psi^+\gamma^0$ megfelelő Dirac-konjugált, mert

$$\bar\psi' = \psi'^+\gamma^0 = \psi^+S^+(\Lambda)\gamma^0 = \bar\psi\gamma^0S^+(\Lambda)\gamma^0 = \bar\psi S^{-1}(\Lambda)$$

$\Rightarrow$ $\bar\psi'\psi' = \bar\psi S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi = \bar\psi\psi$ ez már skalár.

Hasonlóan: $\bar\psi'\gamma^\mu\psi' = \bar\psi S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi = \bar\psi\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi$ vektor

$\bar\psi'\sigma^{\mu\nu}\psi' = \dots = \bar\psi\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho\sigma^{\sigma\rho}\psi$ tenzor

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho$$

γ^5 úgy trafálódik, ahogy $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ $\Rightarrow$ paritásra előjelet vált $\Rightarrow$ pszeudoskalár

bilineárisok:

$\bar\psi\psi$	skalár	1 db
$\bar\psi\gamma^\mu\psi$	vektor	4 db
$\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$	tenzor	6 db
$\bar\psi\gamma^5\gamma^\mu\psi$	pszeudovektor	4 db
$\bar\psi\gamma^5\psi$	pszeudoskalár	1 db

$\Rightarrow$ 16 db független 4×4 mátrix

$\Rightarrow$ bázis a 4×4 mátrixok terén

Mivel γ^μ vektor, ezért az alábbi $\mathcal{L}$ skalár:

$$\mathcal{L} = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \qquad \text{továbbá:} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

$\Rightarrow$ megfelelő Lagrange

Dirac-reprezentáció:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{boost esetén: } S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \underline{\sigma}\,\underline{n}\operatorname{sh}\chi \\ \underline{\sigma}\,\underline{n}\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\underline{\sigma}\,\underline{p}}{E+m} \\ \frac{\underline{\sigma}\,\underline{p}}{E+m} & 1 \end{pmatrix}$$

ahol m nyugalmi tömeg, E pedig a boost utáni energia

Keressük a Dirac-egyenlet síkhullám megoldásait!

bázis a bispinorokra: $u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

boostolva őket: $u_\alpha(p) = S(\Lambda)\, u_\alpha(0)$; $v_\alpha(p) = S(\Lambda)\, v_\alpha(0)$

Ezek kielégítik az alábbit:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(p) = 0 \qquad \leftarrow \text{pozitív energia}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)\, v(p) = 0 \qquad \leftarrow \text{negatív energia}$$

Konkrét alakjuk:

$$u_1(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$v_1(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahol $p_\pm = p_x \pm i p_y$

Szeretnénk különválasztani a különböző spint. nyugalmi rendszerben: $s_\mu = (0, \underline{s})$

$p_\mu = (m, 0)$

$\Rightarrow \quad p_\mu s^\mu = 0$

$s_\mu s^\mu = -1$

Tudjuk, hogy $\underline{\sigma}\,\underline{s}$ a spin-operátor, így

$$\underline{\sigma}\,\underline{s}\, u_\alpha(0) = u_\alpha(0)$$

$$\underline{\sigma}\,\underline{s}\, v_\alpha(0) = -v_\alpha(0)$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$ spin kiválasztás a alábbi projektorral történik: $P(\underline{s}) = \frac{1 \pm \underline{\sigma}\,\underline{s}}{2}$

Definiáljuk $P(s) := \frac{1+\gamma_5 \slashed{s}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\underline{\sigma}\,\underline{s} & \\ & 1-\underline{\sigma}\,\underline{s} \end{pmatrix}$ operátort, sajátértékei:

$P(s)\, u(k,s) = u(k,s)$

$P(s)\, v(k,s) = v(k,s)$

$P(-s)\, u(k,s) = P(-s)\, v(k,s) = 0$

$\Rightarrow$ Azért jó a spinorokat a $u_\alpha(0)$, $v_\alpha(0)$ bázisban kifejezni, mert felbonthatjuk a teret két spinű részekre, és ezt a boost megtartja.

Az alábbi normálással: $\bar{u}(p,s)\, u(p,s) = 1$; $\bar{v}(p,s)\, v(p,s) = -1$

Teljesül a teljesség: $\sum_s u_\alpha(p,s)\, \bar{u}_\beta(p,s) - v_\alpha(p,s)\, \bar{v}_\beta(p,s) = \delta_{\alpha\beta}$

Kvantálás: $\mathcal{L} = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = i\psi^+$$

Fourier-komponensekre kifejtve: $\psi(x) = \int\sqrt{\frac{m}{k_0}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\alpha=1,2}\left(b_\alpha(k)u_\alpha(k)e^{-ikx}+d^+_\alpha(k)v_\alpha(k)e^{ikx}\right)$

$$\bar\psi(x) = \int\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\alpha=1,2}\left(b^+_\alpha(k)\bar u_\alpha(k)e^{ikx}+d_\alpha(k)\bar v_\alpha(k)e^{-ikx}\right)$$

b: eltüntet egy pozitív energiájú elektront

d^+: kibocsát egy pozitív energiájú pozitront (negatív energiájú elektron)

$H = \int d^3x\,(\pi\dot\psi - \mathcal{L}) = \int d^3x\,\bar\psi\, i\gamma^0\partial_0\psi =$ kifejezve mindent b és d-vel:

$= \int d^3k\, k_0 \sum_\alpha \left(b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) - d_\alpha(k)d^+(k)\right)$ probléma: a − előjel miatt H lehet negatív is.

Feloldás: kommutátor helyett kvantáljunk antikommutátorral: $\{b_\alpha(k), b^+_{\alpha'}(k')\} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta^{(3)}(k-k')$

$$\{d_\alpha(k), d^+_{\alpha'}(k')\} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta^{(3)}(k-k')$$

Az energiaszintet normálrendezéssel eltoljuk,

$$H = \int d^3k\, k_0 \sum_\alpha \left(b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) + d^+_\alpha(k)d_\alpha(k)\right)$$

$$\underline{P} = \int d^3k\, \underline{k} \sum_\alpha \left(b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) + d^+_\alpha(k)d_\alpha(k)\right)$$

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{L}$ invariáns az alábbira: $\psi \to e^{i\Lambda}\psi$, $\bar\psi \to \bar\psi e^{-i\Lambda}$

$\Rightarrow$ Noether-áram: $j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$ töltés: $Q = \int d^3x\, j^0 = \int d^3x :\psi^+\psi: =$

$$= \int d^3k \sum_\alpha \left(b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) - d^+_\alpha(k)d_\alpha(k)\right)$$

ez már lehet negatív, de ezen nem lehet valószínűség

$\Rightarrow$ Az anyag „töltése" ellentétes az antianyagéval.

Az antikommutátor miatt egy állapotban 1db részecske lehet, mert $d^+_\alpha(k)d^+_\alpha(k)|0\rangle = 0$

Tetszőleges állapot: $|k_i s_i \bar k_j \bar s_j \dots\rangle = \prod_{i=1}^{N} d^+_{s_i}(k_i)\prod_{j=1}^{M} b^+_{s_j}(k_j)|0\rangle$

Spin-statisztika tétel:
- egész spin kvantálás $\to$ kommutátor, Bose-Einstein $\to$ bozon
- feles spin kvantálás $\to$ antikommutátor, Fermi-Dirac $\to$ fermion

Energia-impulzus-tenzor: $T^{\mu\nu} = i\bar\psi\gamma^\mu\partial^\nu\psi$

El-momentum-tenzor: $\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = i\bar\psi\gamma^\lambda\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi$

$\Rightarrow$ megmaradó impulzus-momentum: $M^{\mu\nu} = \int d^3x\, i\psi^+\left(\underbrace{x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu}_{\text{pálya}} - \underbrace{\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}}_{\text{spin}}\right)\psi$

$i[P_\mu, \psi] = \partial_\mu \psi$

$i[M^{\mu\nu}, \psi] = (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu})\psi$

Ezek alapján a Poincaré-csoport trafója: $U(\Lambda, a)\psi_\alpha(x)U^{-1}(\Lambda, a) = S^{-1}(\Lambda)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\Lambda x + a)$

$\Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}$

Nézzük, hogy propagálnak időben!

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{J}(x) \quad \underset{\text{Dirac-propagátor}}{\Longrightarrow} \quad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S_F(x) = \delta^{(4)}(x)$$

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^4y\, S_F(x-y)\mathcal{J}(y)$$

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\gamma^\mu p_\mu - m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Delta_F(x)$$

ahol Δ_F a Klein-Gordon-propagátor. Beírva:

$$S_F(x-x') = \int d^3p \left(-i\,\Theta(t-t')\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x)\bar{\psi}_p^r(x') + i\,\Theta(t'-t)\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x)\bar{\psi}_p^r(x')\right)$$

ahol $\psi_p^r(x) = \sqrt{\frac{m}{E}}(2\pi)^{-3/2} w_r(p)\, e^{-i\varepsilon^r px}$ $\qquad \varepsilon^r = (1, 1, -1, -1)$

$$w_r = (u_1, u_2, v_1, v_2)$$

És a 2 kvantált esethez hasonlóan belátható:

$$iS_F(x-y)_{\alpha\beta} = \langle 0|T\,\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle$$

8. tétel: Elektromágneses mező

Maxwell-egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\,\underline{E} &= \rho \\ \mathrm{rot}\,\underline{B} - \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} &= \underline{j} \\ \mathrm{div}\,\underline{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\,\underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad + \text{ kontinuitás: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0$$

Ha $\underline{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$, $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$, $A^\mu = (\phi, \underline{A})$, $j^\mu = (\rho, \underline{j})$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

EM-hatás: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$

Maxwell-egyenletek: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu$

kontinuitás: $\partial_\mu j^\mu = 0$

Bevezetve transzverzális A-t: $\underline{A}_\perp := \underline{A} - \underline{\nabla} \frac{1}{\Delta} \underline{\nabla}\,\underline{A}$

$$\Box \underline{A}_\perp = \Box \underline{A} - \Box\left(\underline{\nabla} \frac{1}{\Delta} \underline{\nabla}\,\underline{A}\right) = \text{Maxwellből} =$$

$$= \underline{j} + \underline{\nabla}\left(\partial_t A^0 + \underline{\nabla}\,\underline{A}\right) - \underline{\nabla} \frac{1}{\Delta} \underline{\nabla}\,\underline{j} - \underline{\nabla} \underbrace{\frac{1}{\Delta} \underline{\nabla}\,\underline{\nabla}}_{1} \left(\partial_t A^0 + \underline{\nabla}\,\underline{A}\right) =$$

$$= \underline{j} - \underline{\nabla} \frac{1}{\Delta} \underline{\nabla}\,\underline{j} + \underbrace{\underline{\nabla}(\partial_\mu A^\mu) - \underline{\nabla}(\partial_\mu A^\mu)}_{0} = \underline{j}_\perp$$

Vegyük észre hogy:
- A Maxwellben $\mu = 0$-ra nem szerepel A^0 idő deriváltja, általában viszont az összes A^μ idő deriváltja szerepel.
  $\Rightarrow$ Ez nem egy dinamikai egyenlet, hanem egy kényszer A^0-ra
- $\underline{\nabla}\,\underline{A}_\perp = 0 \Rightarrow \underline{\nabla}\,\underline{A}$ értéke újabb feltételt szab az $\underline{A} - \underline{\nabla} A_\perp$ komponensre.

$\Rightarrow$ 4 szabadsági fok helyett csak kettő van (ld. Poincaré-csoport $m=0$ ábrázolása.)

Mértéktrafó: $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. A releváns mennyiség: $\underline{A}_\perp \to \underline{A} + \underline{\nabla}\Lambda - \underline{\nabla} \frac{1}{\Delta} \underline{\nabla} A - \underline{\nabla} \overbrace{\frac{1}{\Delta} \underline{\nabla}\,\underline{\nabla}}^{1} \Lambda =$

$$= \underline{A} - \underline{\nabla} \frac{1}{\Delta} \underline{\nabla}\,\underline{A} = \underline{A}_\perp$$

$\Rightarrow$ A mozgásegyenlet mértékinvariáns.

A Lagrange is mértékinv, hisz: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \to \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda = F^{\mu\nu}$

$$j_\mu A^\mu \to j_\mu A^\mu + j_\mu \partial^\mu \Lambda = j_\mu A^\mu + \underbrace{\partial^\mu (j_\mu \Lambda)}_{\text{teljes div.}} - \Lambda \underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{0}$$

Probléma a kvantálással:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = \partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu = -F^{0\mu} \Rightarrow \pi^0 = 0$$

nem lehet felírni a kanonikus kommutátor relációkat ☹

megoldás: rögzítjük a mértéket, azaz egy olyan $\mathcal{L}$ -t írunk, ami csak egy adott Λ esetén adja vissza a Maxwellt, így az mértékinvariancia eltűnik, és π^0 nem lesz nulla.

A lokális tér és operátorok alakja így önkényes lesz, de belátjuk, hogy a mérhető mennyiségek invariánsak.

Gupta – Bleuler – kvantálás: Lorentz-mértéket vesz alapul: $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \qquad \text{(egyelőre források nélkül)}$$

mozgásegyenlet: $\Box A_\mu = 0$ kanonikus impulzus: $\pi^\mu = -\partial_0 A^\mu$

A kvantálás megegyezik a $m=0$ tömegű skalártérre, komponensenként:

$$[A_\mu(\underline{x},t), A_\nu(\underline{y},t)] = [\pi_\mu(\underline{x},t), \pi_\nu(\underline{y},t)] = 0$$

$$[A_\mu(\underline{x},t), \pi_\nu(\underline{y},t)] = i g_{\mu\nu} \delta(\underline{x}-\underline{y})$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\underline{k}|}} \left(a_\mu(\underline{k}) e^{-ikx} + a_\mu^+(\underline{k}) e^{ikx} \right)$$

ahol $[a_\mu(\underline{k}), a_\nu(\underline{k}')] = [a_\mu^+(\underline{k}), a_\nu^+(\underline{k}')] = 0$

$$[a_\mu(\underline{k}), a_\nu^+(\underline{k}')] = -g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\underline{k}-\underline{k}')$$

Polarizált fotonokra: $a_\mu(\underline{k}) = \varepsilon_\mu^{(\lambda)} a_{(\lambda)}(\underline{k})$ ahol $\varepsilon^{(\lambda)}$ ON vektorok

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\underline{k}|}} \left(\varepsilon_\mu^{(\lambda)} a_{(\lambda)}(\underline{k}) e^{-ikx} + \varepsilon_\mu^{(\lambda)*} a_{(\lambda)}^+(\underline{k}) e^{ikx} \right)$$

$$[a_{(\lambda)}(\underline{k}), a_{(\lambda')}(\underline{k}')] = [a_{(\lambda)}^+(\underline{k}), a_{(\lambda')}^+(\underline{k})] = 0$$

$$[a_{(\lambda)}(\underline{k}), a_{(\lambda')}^+(\underline{k}')] = -g_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\underline{k}-\underline{k}')$$

Két probléma: 1) $-g_{00} = -1$ vagyis $a_{(0)}^+(\underline{k})|0\rangle$ normája negatív.

2) $\partial_\mu A^\mu \neq 0$ mert

$$[\partial_\mu A^\mu(\underline{x},t), A^0(\underline{y},t)] = [\partial_0 A^0(\underline{x},t), A^0(\underline{y},t)] + \overbrace{[\nabla \underline{A}(\underline{x},t), A^0(\underline{y},t)]}^{\text{felcserélhető} = 0} =$$

$$= [-\pi_0(\underline{x},t), A_0(\underline{y},t)] = [A_0(\underline{y},t), \pi(\underline{x},t)] = i\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{y}) \neq 0.$$

megoldás: $\partial_\mu A^\mu = 0$ ne operátorazonosság legyen, hanem az állapotokon megkövetelt feltétel:

TFH $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$! Legyen $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{fizikai} \subset \mathcal{H} \iff \langle\psi|\partial_\mu A^\mu(x)|\psi\rangle = 0$

Átírva: $\langle\psi|\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle = (\langle\psi|\partial_\mu A^\mu_-)|\psi\rangle + \langle\psi|(\partial_\mu A^\mu_+|\psi\rangle) = 0$

vagyis általánosan: $\langle\psi'|\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle = 0$ feltéve, hogy $|\psi\rangle, |\psi'\rangle \in \mathcal{H}_{fizikai}$

Tehát $\partial_\mu A^\mu$ nem 0-operátor, csak a fizikailag megvalósuló állapotokon vett hatása.

Mit jelent ez a normára nézve?

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}}\left(k^\mu a_\mu(k)e^{-ikx} - k^\mu a^\dagger_\mu(k)e^{ikx}\right) =$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{2|k|}\left(L(k)e^{-ikx} - L^\dagger(k)e^{ikx}\right)$$

ahol $L(k) := k^\mu a_\mu(k) = k^\mu \varepsilon^{(\lambda)}_\mu a_{(\lambda)}(k) = k^0 a_{(0)}(k) - |k|\, a_{(3)}(k) =$

$$= k^0\left(a_{(0)}(k) - a_{(3)}(k)\right)$$

$$[L(k), L^\dagger(k')] = k^\mu k'^\nu [a_\mu(k), a^\dagger_\nu(k')] = -g_{\mu\nu}k^\mu k'^\nu \delta^{(3)}(k-k') = 0$$

$L^\dagger(k)$ csak időszerű és longitudinális fotonokat gerjeszt.

Bontsuk fel az állapotokat transzverzális szorzatokra: $|\psi\rangle = |\psi_T\rangle\,|\phi\rangle$

ahol $|\phi_n\rangle = \int d\Omega_{k_1}\cdots d\Omega_{k_n}\, C^{(n)}(k_1\cdots k_n)\, L^\dagger(k_1)\cdots L^\dagger(k_n)\,|0\rangle$ $\qquad |\phi\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle$

$\langle\phi_{n'}|\phi\rangle =$ $L(k)$ kommutálása miatt csak akkor nem 0, ha nincs $L(k)$ ami eltüntet $=$

$= \delta_{n'0}\,\delta_{n0}$

Tehát ha $C^{(0)} = 1 \implies \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_T|\psi_T\rangle$

ha $C^{(0)} = 0 \implies \langle\psi|\psi\rangle = 0$ $\qquad$ függetlenül $C^{(n\neq 0)}$-tól

Tehát $|\psi_z\rangle = |\psi\rangle|0\rangle + \sum_{n\neq 0}|\chi_{Tn}\rangle|\phi_n\rangle = |\psi\rangle + |z\rangle \implies \langle\psi_z|\psi_z\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$

ha két vektor normája megegyezik, csak egy 0 normájú vektorban különböznek $\implies$ $\mathcal{H}_{fizikai}$-n belül ekvivalenciaosztályokat kell létrehozni és ezek lesznek az új elemek.

$\implies$ $\mathcal{H}_{fizikai}$ valóságos elemei a transzverzális fotonok, ezek normája pedig > 0.

TFH $\mathcal{O}$ egy megfigyelhető mennyiség : $\mathcal{O}^+ = \mathcal{O}$

Akkor, hogy az ekvivalenciaosztályon adott értéket vegyen fel

$$[L(\underline{k}), \mathcal{O}] = M L(\underline{k}) \quad \text{és} \quad [L^+(\underline{k}), \mathcal{O}] = -L^+(\underline{k}) M^+ \qquad \text{adott } M\text{-mel}.$$

Beláthatóan, hogy $\mathcal{O} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\underline{k}}{\sqrt{2|\underline{k}|}}\, O(\underline{k})\, N(\underline{k})$ alakú operátorral jók

ahol $N(\underline{k}) = -g^{\mu\nu} a_\mu(\underline{k}) a_\nu^+(\underline{k})$

mert $[L(\underline{k}), \mathcal{O}] = L(\underline{k})\, O(\underline{k})$

valamint $\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\underline{k}}{\sqrt{2|\underline{k}|}}\, O(\underline{k}) \langle\psi| \sum_{j=1}^{2} a_j(\underline{k})\, a_j^+(\underline{k}) |\psi\rangle$

Megfigyelhető mennyiség pl.

- P_μ négyesimpulzus $\quad P_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\underline{k}}{\sqrt{2|\underline{k}|}}\, k_\mu\, a(\underline{k})\, a^+(\underline{k})$
- Minden mértékinvariáns $\mathcal{F}[A_\mu]$ fv.-e A-nak

mert $[L(\underline{k}), A_\mu(x)] = \delta_{L(\underline{k})} A(\underline{k}) \quad \Rightarrow [L(\underline{k}), \mathcal{F}[A]] = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{F}[A]}{\delta A_\mu(x)} \delta_{L(\underline{k})} A_\mu(x) = 0$

Foton propagátor:

mivel A_μ négy független skalártér

$$\langle 0|T(A_\mu(x) A_\nu(y))|0\rangle = -g_{\mu\nu}\, i\, \Delta_F(x-y)$$

$$\Box_x (g_{\mu\nu} \Delta_F(x-y)) = \partial_{x_0}^2\, i \langle 0|T(A_\mu(x) A_\nu(y))|0\rangle - \Delta_x i \langle 0|A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle =$$

$$= i\langle 0|T(\partial_0 A_\mu(x) A_\nu(y))|0\rangle - \underset{\substack{\uparrow \\ \Theta(x^0-y^0)\text{-ból és } [\partial_0 A_\mu, A_\nu]\text{-ből jön}}}{g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-y)} - i\langle 0|\Delta A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle =$$

$$= i\langle 0|T(\underbrace{\Box A_\mu(x)}_{0} \cdot A_\nu(y))|0\rangle - g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-y) = -g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-y)$$

tehát ez valóban Green-fv.

Impulzus térben: $\quad p^2 \Delta_F(p) = -1 \quad \Rightarrow \Delta_F(p) = \frac{-1}{p^2 + i\varepsilon}$

$$\Rightarrow \Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{-1}{p^2 + i\varepsilon}$$

10. tétel: Kölcsönható Lagrange és kölcsönhatási kép

Egy általános Lagrange függ a terektől és annak deriváltjaitól (x-től a Lorentz-invariancia miatt nem.)

$\mathcal{L}(\varphi_a, \partial\varphi_a) \rightarrow$ mozgásegyenlet: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} = 0$

ezt meg kell oldani, majd előírni a kanonikus kommutációs relációt:

$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_a)} \qquad [\pi_a(\underline{x},t), \varphi_b(\underline{y},t)] = -i\,\delta(\underline{x}-\underline{y})\,\delta_{ab}$$

Probléma: a mozgásegyenlet általában nem lineáris, nem tudjuk megoldani

megoldás: a valódi részecske mozgását leíró KG-t ismerjük. tegyünk úgy, mintha minden ebből állna!

A Hamilton: $H = H_0 + V$ ahol H_0-t meg tudjuk oldani.

$$\varphi(x) = e^{iHt}\varphi(0,\underline{x})e^{-iHt} \qquad\qquad \dot\varphi(x) = i[H, \varphi(t,\underline{x})]$$
$$\pi(x) = e^{iHt}\pi(0,\underline{x})e^{-iHt} \quad\Rightarrow\quad \dot\pi(x) = i[H, \pi(t,\underline{x})]$$

Bontsuk fel $\mathcal{L}$-t: $\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi,\partial\varphi) + \mathcal{L}_I(\varphi)$ ha ez megtehető;

$$\pi(\varphi,\partial\varphi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_0\varphi)} = \pi_0(\varphi,\partial\varphi)$$

Ekkor a Hamilton is szétbomlik:

$$H = \int d^3\underline{x}\left(\pi(t,\underline{x})\dot\varphi(t,\underline{x}) - \mathcal{L}(\varphi(t,\underline{x}),\partial\varphi(t,\underline{x}))\right) =$$
$$= \int d^3\underline{x}\left(\pi_0(t,\underline{x})\dot\varphi(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_0(\varphi(t,\underline{x}),\partial\varphi(t,\underline{x})) - \mathcal{L}_I(\varphi(t,\underline{x}))\right) =$$
$$= H_0[\varphi,\pi_0] - \int d^3\underline{x}\left(\mathcal{L}_I(\varphi(t,\underline{x}))\right) = H_0[\varphi,\pi] + V[\varphi]$$

H időfüggetlen, ezért nézzük $t=0$-ban:

$$H[\varphi(t,\underline{x}),\pi(t,\underline{x})] = H[\varphi(0,\underline{x}),\pi(0,\underline{x})] = H_0[\varphi(0,\underline{x}),\pi(0,\underline{x})] + V[\varphi(0,\underline{x})]$$

Tegyünk úgy mintha a terek úgy fejlődnének, mint H_0-lal:

$$\varphi_I(t,\underline{x}) = e^{iH_0t}\varphi(0,\underline{x})e^{-iH_0t} \qquad\qquad \dot\varphi_I(x) = i[H_0, \varphi_I(t,\underline{x})] = \frac{\partial H_0}{\partial\pi}$$
$$\pi_I(t,\underline{x}) = e^{iH_0t}\pi(0,\underline{x})e^{-iH_0t} \quad\Rightarrow\quad \dot\pi_I(x) = i[H_0, \pi_I(t,\underline{x})] = -\frac{\partial H_0}{\partial\varphi}$$

Ezek már megoldhatók a szokásos módokon.

Kölcsönhatási potenciál: $V_I(t) := e^{iH_0t}V[\varphi(0,\underline{x})]e^{-iH_0t} = V[\varphi_I(t,\underline{x})] =$

$$= -\int d^3\underline{x}\,\mathcal{L}_I(\varphi_I(t,\underline{x}))$$

Tapasztalat: A laborban elő tudunk állítani szabad részecskét, amiket ütköztetve hosszú idő után jó közelítéssel újból szabad részecskék lesznek:

$$\lim_{t\to-\infty} \| e^{-iHt}\psi - e^{-iH_0t}\varphi_i \| = 0 \qquad \text{Bemeneti állapot: } \psi_+ = \lim_{t\to-\infty} e^{iHt} e^{-iH_0t}\varphi_i$$

$$\lim_{t\to+\infty} \| e^{-iHt}\psi - e^{-iH_0t}\varphi_f \| = 0 \qquad \text{kimeneti állapot: } \psi_- = \lim_{t\to+\infty} e^{iHt} e^{-iH_0t}\varphi_f$$

$$\Omega_\pm := \lim_{t\to\mp\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t} \quad \Rightarrow \quad \psi_\pm = \Omega_\pm \varphi_{i/f}$$

$$\Omega_\pm^\dagger \Omega_\pm = 1\!\!1 \qquad \text{(izometrikus, de nem unitér)}$$

Mekkora valószínűséggel lesz $\varphi_i \to \varphi_f$:

$$\langle \psi_- | \psi_+ \rangle = \langle \psi_- | e^{iHT_f} e^{-iHT_f} | \psi_+ \rangle = \langle \psi_- | e^{iHT_f} e^{-iH(T_f-T_i)} e^{-iHT_i} | \psi_+ \rangle \to$$

$$\to \lim_{T_f\to\infty}\lim_{T_i\to-\infty} \langle \psi_- | e^{iHT_f} e^{-iHT_f} e^{iHT_i} e^{-iHT_i} | \psi_+ \rangle =$$

$$= \lim_{T_f\to\infty}\lim_{T_i\to-\infty} \langle \varphi_f | e^{iH_0T_f} e^{-iHT_f} e^{iHT_i} e^{-iH_0T_i} | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_f | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | \varphi_i \rangle$$

$$=: \langle \varphi_f | S | \varphi_i \rangle \qquad \text{ahol} \qquad S = \Omega_-^\dagger \Omega_+$$

Legyen $U(t_2,t_1) = e^{iH_0t_2} e^{-iHt_2} e^{iHt_1} e^{-iH_0t_1}$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2,t_1) = e^{iH_0t_2} i(H_0 - H) e^{-iHt_2} e^{iHt_1} e^{-iH_0t_1} = -e^{iH_0t_2} iV e^{-iH_0t_2} U(t_2,t_1) =$$

$$= -iV_I\, U(t_2,t_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} U(t_2,t_1) = \text{u.a.} = i\, U(t_2,t_1) V_I$$

$$\Rightarrow U(t_2,t_1) = T\exp\left(-i\int_{t_1}^{t_2} dt\, V_I(t)\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(V(\tau_1)\cdots V(\tau_n)\big)$$

belátható, hogy ez megfelel a diffegyenletnek.

S felírása U-val:

$$S = \lim_{T_f\to\infty}\lim_{T_i\to-\infty} e^{iH_0T_f} e^{-iHT_f} e^{iHT_i} e^{-iH_0T_i} = U(-\infty,\infty) =$$

$$= T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, V_I(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n\, T\big(V_I(\tau_1)\cdots V_I(\tau_n)\big)$$

Tulajdonságok:

- hogyan $\Omega_\pm$ nem unitér, de S igen:

  TFH: $\Omega_\pm^\dagger \Omega_\pm = 1\!\!1$ és $\Omega_\pm \Omega_\pm^\dagger = 1\!\!1 - \Pi_B$ ahol Π_B egy kötött altérre projektor

  de $\Omega_\pm^\dagger \Pi_B = 0$

  $$\Rightarrow S^\dagger S = \Omega_+^\dagger \Omega_- \Omega_-^\dagger \Omega_+ = \Omega_+^\dagger (1\!\!1 - \Pi_B)\Omega_+ = \Omega_+^\dagger \Omega_+ = 1\!\!1$$

  $SS^\dagger =$ hasonlóan $= 1\!\!1$

- $$e^{iHs}\Omega_\pm = \lim_{t\to\mp\infty} e^{iH(s+t)}e^{-iH_0 t} = \lim_{t\to\mp\infty} e^{iH(s+t)}e^{-iH_0(s+t)}e^{iH_0 s} =$$

$$= \lim_{t'\to\mp\infty} e^{iHt'}e^{-iH_0t'}e^{iH_0 s} = \Omega_\pm e^{iH_0 s} \quad\Rightarrow\quad H\Omega_\pm = \Omega_\pm H_0$$

hasonlóan $\Rightarrow$ $H_0\Omega_\pm^\dagger = \Omega_\pm^\dagger H$

Ekkor $H_0 S = H_0\Omega_-^\dagger\Omega_+ = \Omega_-^\dagger H\,\Omega_+ = \Omega_-^\dagger\Omega_+ H_0 = S H_0 \Rightarrow [S, H_0]$

Ez nem meglepő, hiszen ha a Lagrange invariáns az eltolásra, akkor

$$e^{i\alpha P_\mu}S\,e^{-i\alpha P_\mu} = S \quad\Rightarrow\quad [P_\mu, S] = 0$$

És minden Noether-töltés: $\qquad [Q_0^a, S] = 0$

- Lorentz-trafó

$$U_0(\Lambda)\,S\,U_0(\Lambda)^\dagger = \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n\, U_0(\Lambda)\,T_x\left(:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(x_1)):\cdots:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(x_n)):\right)U_0^\dagger(\Lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n\, T_x\left(:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(\Lambda x_1)):\cdots:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(\Lambda x_n)):\right) =$$

= ugyan az időrendezés x szerint van, a változók Λx szerint, de csak azok cserélődnek, amik térszerűen vannak elválasztva, azok kommutálnak úgy is.

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n\, T_{\Lambda x}\left(:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(\Lambda x_1)):\cdots:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(\Lambda x_n)):\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4(\Lambda x_1)\cdots\int d^4(\Lambda x_n)\, T_x\left(:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(x_1)):\cdots:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(x_n)):\right) = \text{mivel } \det\Lambda = 1$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n\, T_x\left(:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(x_1)):\cdots:\mathcal{L}_I(\varphi_{in}(x_n)):\right) = S$$

$\Rightarrow [U_0(\Lambda), S] = 0 \quad\Rightarrow\quad [\underline{J}, S] = 0$

$\Rightarrow$ S mátrix nem változtatja meg a Poincaré-állapotokat.

13. tétel: Wick-tétel és Feynman-gráfok

Az S-mátrix sorbafejthető:

$$S_{fi} = \langle \varphi_f | S | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_f | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \, T\left\{ :\mathcal{L}_I(x_1): \cdots :\mathcal{L}_I(x_n): \right\} | \varphi_i \rangle$$

ahol $\mathcal{L}_I(x) = \mathcal{L}_I(\varphi(x))$

A releváns mennyiség:

$$\langle \varphi_f | \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \, T\left\{ :\mathcal{L}_I(x_1): \cdots :\mathcal{L}_I(x_n): \right\} | \varphi_i \rangle =$$

$$= \langle \varphi_f | e^{-ix_nP} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \, T\left\{ :\mathcal{L}_I(x_1 - x_n): \cdots :\mathcal{L}_I(0): \right\} e^{ix_nP} | \varphi_i \rangle =$$

$$= \int d^4x_n \, e^{-ix_n(P_f - P_i)} \langle \varphi_f | \int d^4y_1 \cdots \int d^4y_{n-1} \, T\left\{ :\mathcal{L}_I(y_1): \cdots :\mathcal{L}(y_{n-1})::\mathcal{L}_I(0): \right\} | \varphi_i \rangle =$$

$$= (2\pi)^4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{impulzusmegmaradás}}}{\delta^{(4)}(P_f - P_i)} \underbrace{\langle \varphi_f | \int d^4y_1 \cdots \int d^4y_{n-1} \, T\left\{ \mathcal{L}_I(y_1): \cdots :\mathcal{L}(y_{n-1})::\mathcal{L}_I(0): \right\} | \varphi_i \rangle}_{\text{átmeneti mátrix}}$$

jelölés: P a $\{x_1, \ldots, x_n\}$ változók permutációinak halmaza.

Állítás:

$$T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_P \Big(:\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{n-2m}): \langle 0 | T(\varphi(x_{n-2m+1})\varphi(x_{n-2m+2})) | 0 \rangle \cdots$$
$$\cdots \langle 0 | T(\varphi(x_{n-1})\varphi(x_n)) | 0 \rangle \Big)$$

Bizonyítás teljes indukcióval:

- $n=2$

$$:\varphi(x_1)\varphi(x_2): = \varphi(x_1)\varphi(x_2) - [\varphi_+(x_1), \varphi_-(x_2)] = \text{mivel a } [\,] \text{ csak egy szám} =$$
$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2) - \langle 0 | [\varphi_+(x_1), \varphi_-(x_2)] | 0 \rangle =$$
$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2) - \langle 0 | \varphi_+(x_1)\varphi_-(x_2) | 0 \rangle =$$
$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2) - \langle 0 | \varphi(x_1)\varphi(x_2) | 0 \rangle$$

- TFH $n \geq 2$-re igaz! Nézzük $n+1$-re!
- TFH $x_1^0 > x_2^0 > \cdots x_n^0 > x_{n+1}^0$! Ha ez nem igaz, a változók átnevezésével ugyanezt az összegfüggvényt kapjuk.

$$T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(x_{n+1})) =$$
$$= \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_P \Big(:\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{n-2m}):\varphi(x_{n+1}) \cdot \langle 0 | T(\varphi(x_{n-2m+1})\varphi(x_{n-2m+2})) | 0 \rangle \cdots$$
$$\cdots \langle 0 | T(\varphi(x_{n-1})\varphi(x_n)) | 0 \rangle \Big)$$

$$\sum_P :\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{n-2m}):\varphi(x_{n+1}) = \sum_P \sum_{k=0}^{n-2m} \varphi_-(x_1)\cdots\varphi_-(x_k)\varphi_+(x_k)\cdots\varphi_+(x_{n-2m})\left(\varphi_+(x_{n+1}) + \varphi_-(x_{n+1})\right) =$$

$$= \sum_P \sum_{k=0}^{n-2m} \Big(\varphi_-(x_1)\cdots\varphi_-(x_k)\varphi_+(x_{k+1})\cdots\varphi_+(x_{n-2m})\varphi_+(x_{n+1}) + \varphi_-(x_{n+1})\varphi_-(x_1)\cdots\varphi_-(x_k)\varphi_+(x_{k+1})\cdots\varphi_+(x_{n-2m}) +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n-2m} \varphi_-(x_1)\cdots\varphi_-(x_k) \frac{\varphi_+(x_{k+1})\cdots\varphi_+(x_{n-2m})}{\varphi_+(x_j)} \underbrace{[\varphi_+(x_j), \varphi_-(x_{n+1})]}_{\langle 0 | T(\varphi(x_j)\varphi(x_{n+1})) | 0 \rangle} \Big) =$$

$$= \sum_P :\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{n-2m})\varphi(x_{n+1}): + \sum_P \sum_{j=1}^{n-2m} :\frac{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{n-2m})}{\varphi(x_j)}: \langle 0|T(\varphi(x_j)\varphi(x_{n+1}))|0\rangle$$

Az első tag az m. járulékban van a rész, ahol x_{n+1} φ-ben szerepel, a második tag az $m+1$-ben van a járulék, ahol x_{n+1} a kontrakcióban.

A P-re való szumma miatt minden tag megvan. $\square$

Beszorozva az állítás mindkét oldalát $\langle 0| \cdots |0\rangle$-val, a normálrendezések eltűnnek, így:

$$\langle 0|T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n))|0\rangle = \sum_P \langle 0|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))|0\rangle \cdots \langle 0|T(\varphi(x_{n-1})\varphi(x_n))|0\rangle$$

(Páratlan n-re 0)

Fermionokra ugyanez van, csak az antikommutátor miatt

$$T(\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar\psi(y_1)\cdots\bar\psi(y_{\bar n})) = \sum_{m=0}^{\min(n,\bar n)} \sum_P \Big((-1)^{\sigma_P} :\psi(x_1)\cdots\psi(x_{n-m})\bar\psi(y_1)\cdots\bar\psi(y_{\bar n-m}): \langle 0|T(\psi(x_{n-m+1})\bar\psi(y_{\bar n-m+1}))|0\rangle \cdots$$
$$\cdots \langle 0|T(\psi(x_n)\bar\psi(y_{\bar n}))|0\rangle \Big)$$

2 Példa:

1) $\mathcal{L}_I(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$

$$\langle \varphi_f|S-1|\varphi_i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\lambda}{4!}\right)^n \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \langle \varphi_f| T(:\varphi(x_1)^4: \cdots :\varphi(x_n)^4:)|\varphi_i\rangle$$

A $T()$-t kifejtve, azok a tagok maradnak meg, ahol a $\langle \varphi_f| :\sqcup: |\varphi_i\rangle$ tényezőben a + és − komponensek pontosan visszaviszik φ_f-t és φ_i-t a $|0\rangle$-ba.

A megjelenő $\langle 0|T(\varphi(x_i)\varphi(x_j))|0\rangle = i\Delta_F(x_i-x_j)$ propagátorok x_i és x_j közötti terjedést írják le. A $:\sqcup:$ tényezők a vonalat keltik/tüntetik el, $\Rightarrow$ külső vonalak.
$\Rightarrow$ A kezdeti és végső vonalak száma = a külső vonalakéval.

Külön:

$$A = \langle p'_1 \cdots p'_{n'}| :\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_m): |p_1 \cdots p_n\rangle \qquad \text{feltétel: } m = n + n'$$

$$= \sum_P \langle p'_1 \cdots p'_{n'}| \varphi_-(x_{P(1)}) \cdots \varphi_-(x_{P(n')})\varphi_+(x_{P(n'+1)}) \cdots \varphi_+(x_{P(n'+n)})|p_1 \cdots p_n\rangle =$$

$$= \sum_P \langle p'_1 \cdots p'_{n'}|\varphi_-(x_{P(1)}) \cdots \varphi_-(x_{P(n')})|0\rangle\langle 0|\varphi_+(x_{P(n'+1)}) \cdots \varphi_+(x_{P(n'+n)})|p_1 \cdots p_n\rangle$$

$$B = \langle 0|\varphi_+(x_1)\cdots\varphi_+(x_\ell)|p_1 \cdots p_\ell\rangle = \int d\Omega_{q_1} \cdots d\Omega_{q_\ell}\, e^{-iq_1x_1} \cdots e^{-iq_\ell x_\ell} \langle 0|a(q_1)\cdots a(q_\ell)a^\dagger(p_1)\cdots a^\dagger(p_\ell)|0\rangle$$

$$= \int d\Omega_{q_1} \cdots d\Omega_{q_\ell}\, e^{-iq_1x_1} \cdots e^{-iq_\ell x_\ell} \langle 0| \sum_P \prod_j 2p_j^0\, \delta^{(3)}(q_j - p_{P(j)})|0\rangle = \sum_P \prod_j e^{-ip_{P(j)}x_j} =$$

$$= \sum_P \prod_j \langle 0|\varphi_+(x_j)|p_{P(j)}\rangle$$

$\Rightarrow$ A-ban mindegyik φ-t hozzátársíthatjuk az egyik kiinduló/végső állapothoz, ezek permutációira pedig felösszegzünk.

Feynman-szabályok a koordináta-térben:

1. rajzoljuk le minden diagramot v csúccsal, és $n+n'$ külső éllel!

2. minden csúcs $\frac{i\lambda}{4!}$ tényezőt ad

3. minden belső él $i\Delta_F(x_i-x_j)$ tényezőt ad

4. távozása az x_i-be menő p_j impulzusú részecskék $e^{-ip_jx_i}$ tényezőt ad

5. x_i-ből kimenő p_j impulzussal $e^{ip_jx_i}$

6. belső vertexekre integrálni

7. Összegzünk a permutációkra $\sum_p \frac{1}{v!}$

A külső vonalak az $\frac{1}{v!}$, a belsők a $\frac{1}{4!}$ ejtik majd ki.

A propagátorokat Fourier-re: $\Delta_F(x_i-x_j) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_i-x_j)} \tilde{\Delta}_F(p)$

$\Rightarrow$ Minden belső élhez hozzárendeltünk egy impulzust, és a vertexekre való integrálás után az impulzusokra olyan integrálás marad, ami egy $\delta^{(4)}$-t hoz be minden vertex után, tehát az impulzus megmaradás érvényes.

Feynman-szabályok impulzus-térben:

1. Rajzoljuk le minden diagramot v belső vertexszel és $n+n'$ külső éllel!
2. Rendeljünk hozzá minden belső élhez egy impulzust, ..
3. $(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_i p_i\right)$ minden csúcspontban
4. Minden él $i\tilde{\Delta}_F(p_i)$ járulékot ad
5. külső élek 1 járulékot adnak
6. $\int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}$ a belső impulzusokra
7. Összegzés az összes járulékra $\frac{1}{v!}$ faktorral.

2) Yukawa-csatolás

Egy M tömegű skalártér és m tömegű Dirac-tér fut kölcsön: $\mathcal{L}_I = g\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\varphi(x)$

$$\langle \varphi_f|S-1|\varphi_i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(ig)^n\int dx_1 \dots \int d^4x_n \langle \varphi_f|T\left(:\bar{\Psi}(x_1)\Psi(x_1)\varphi(x_1):\dots:\bar{\Psi}(x_n)\Psi(x_n)\varphi(x_n):\right)|\varphi_i\rangle$$

Az előző eset leírásai itt is alkalmazhatók néhány különbséggel:

- Csak a saját típusú terek alkotnak együtt propagátort (először a skalár)
- A Dirac terek cserélgetésénél bejön egy (-1)-es szorzó, végeredményben egy $(-1)^{\sigma_P}$ a permutációtól függően.
- Egy kölcsönhatási csúcsban $\bar{\Psi}$, Ψ és φ terek vannak, vagyis 1 bemenő fermion, 1 kimenő fermion, 1 bozon.

Feynman-szabályok a fermionokra

1. Egy kölcsönható csúcs egy hullámos és két irányított vonalból áll, a járuléka ig
2. Koordinátatérben a $u_s(p)e^{-ipx}$ faktorokhoz egy x-be befutó p impulzusú, s spinű fermion tartozik, a $\bar{u}_{s'}(p')e^{ip'x}$ faktorhoz pedig az x-ből kimenő p' impulzusú s' spinű részecske. Impulzustérben csak a spinor.
3. relatív (-1)-es szorzó tartozik két olyan diagramhoz, amelyekben két külső él felcserélődik.
4. A 2. szabály antirészecskékre is alkalmazható: $\bar{u}_s(p)e^{-ipx}$ bejövő antirészecske, $u_{s'}(p')e^{ip'x}$ kimenő antirészecske.
5. Belső fermion vonalakhoz $iS_F(x-y)$ járulék koordinátatérben, impulzustérben $i\tilde{S}_F(p)$ (impulzusmegmaradás figyelembevételével)
6. Minden antifermion vonal, ami keresztülmegy a folyamaton (-1)-es faktor.

A skalártérre ugyanez igaz, mint eddig.

14. tétel: QED szórási folyamatok, Compton-szórás

Legegyszerűbb folyamat: Compton-szórás $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$

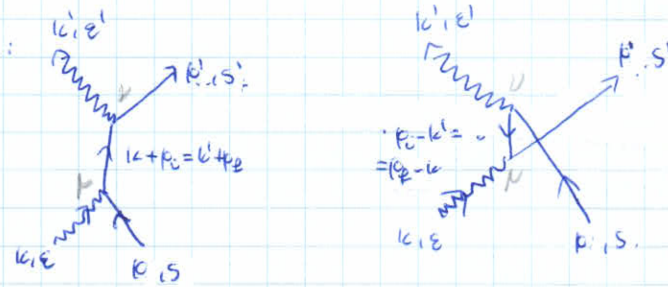
a Feynman-diagramja ekvivalens a pár-kioltásra: $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$

Általánosan is: $1+2 \to 3+4 \;\cong\; 1+\bar{3} \to \bar{2}+4$

Néhány példa:

- $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$ (Compton-szórás) $\longleftrightarrow$ $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$ (pár-kioltás)
- $e^- + e^- \to e^- + e^-$ (Møller-szórás) $\longleftrightarrow$ $e^- + e^+ \to e^- + e^+$ (Bhabha-szórás)
- $e^- + N \to e^- + N + \gamma$ (fékezési sugárzás) $\longleftrightarrow$ $\gamma + \gamma \to e^- + e^+$ (párkeltés)

Compton:



impulzus megmaradás: $p_i + k = p_f + k'$

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p',s')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon'_\nu(k')\frac{i}{\not p+\not k-m}\varepsilon_\mu(k)(-ie\gamma^\mu)u(p,s) +$$

$$+\bar{u}(p',s')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu(k)\frac{i}{\not p-\not k'-m}\varepsilon'_\nu(k)(-ie\gamma^\nu)u(p,s) =$$

$$= -ie^2\bar{u}(p',s')\left(\frac{\not\varepsilon'\not\varepsilon}{\not p+\not k-m}+\frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'}{\not p-\not k'-m}\right)u(p,s) =$$

$$= -ie^2\bar{u}(p',s')\left(\frac{\not\varepsilon'\not\varepsilon(\not p+\not k+m)}{(p+k)^2-m^2}+\frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'(\not p-\not k'+m)}{(p-k')^2-m^2}\right)u(p,s) =$$

$$= -ie^2\bar{u}(p',s')\left(\frac{\not\varepsilon'\not\varepsilon\not k+\not\varepsilon'\not\varepsilon(\not p+m)}{m^2+2pk+\underset{0}{\underset{\uparrow}{k^2}}-m^2}+\frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k'-\not\varepsilon\not\varepsilon'(\not p+m)}{-m^2+2pk'-\underset{0}{\underset{\uparrow}{k'^2}}+m^2}\right)u(p,s) =$$

$$= -ie^2\bar{u}(p',s')\left(\frac{\not\varepsilon'\not\varepsilon\not k}{2pk}+\frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k'}{2pk'}\right)u(p,s)$$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')\,|\mathcal{M}|^2}{\langle k,\varepsilon,p,s|k,\varepsilon,p,s\rangle\cdot|\underline{v}|}\cdot\prod_j\frac{d^3p_{fj}}{\langle p_{fj}|p_{fj}\rangle(2\pi)^3} =$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')\frac{e^4}{2k^0\frac{E}{m}}\frac{1}{2k'^0\frac{E'}{m}}\left|\bar{u}(p',s')\left(\frac{\not\varepsilon'\not\varepsilon\not k}{2pk}+\frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k'}{2pk'}\right)u(p,s)\right|^2\frac{d^3p'\,d^3k'}{(2\pi)^6}$$

$$= \frac{e^4m^2}{(2\pi)^2E\cdot 2k}\int\sum_{\text{spin}}|\bar{u}\,\Gamma\,u|^2\frac{1}{2k'^0E'}\,d^3k'\,d^3p'$$

Hosszú levezetés után:

$$\sum_{\text{spin}} |\bar{u}\Gamma u|^2 = \sum_{i=1}^{4} T_i \qquad \text{ahol} \qquad T_1 = 8pk\left(2(\varepsilon'\cdot k)^2 + k'\cdot p\right)$$

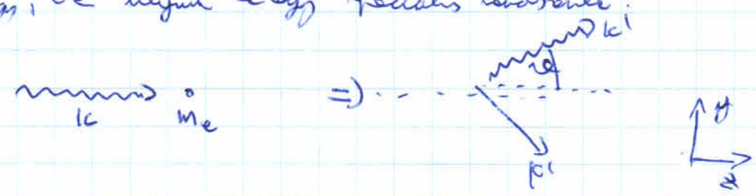
$$T_2 = 8 k\cdot p\, k'\cdot p'\left(2(\varepsilon'\cdot\varepsilon)^2 - 1\right) + 8(k'\varepsilon)^2 kp - 8(k\varepsilon')k'p$$

$$= T_3$$

$$T_4 = T_2\left((k,\varepsilon)\to(-k,\varepsilon')\right)$$

Ez egy teljesen általános eredmény, de üljünk be egy speciális rendszerbe:

$$p_\mu = (m,0,0,0)$$
$$k_\mu = (k,0,0,k)$$
$$k'_\mu = (k',0,k'\sin\vartheta, k'\cos\vartheta)$$
$$p'_\mu = (E,0,-k'\sin\vartheta, k-k'\cos\vartheta)$$



2 paraméter: k, ϑ

többi: $k' = \dfrac{k}{1+\frac{k}{m}(1-\cos\vartheta)}$ $\qquad E = m+k-k'$

Ezekkel $\sum_s |\bar{u}\Gamma u|^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}+4(\varepsilon'\cdot\varepsilon)^2-2\right)$

Ezt beírva $d\sigma$-ba, és kihasználva, hogy $\frac{1}{2E'} = \int dp'_0\, \delta(p'^2-m^2)\,\Theta(p'_0)$

valamint: $\delta(p'^2-m^2) = \delta\left(2m(k-k')-2kk'(1-\cos\vartheta)\right)$

$$\Rightarrow \delta^{(4)}(p+k-p'-k')\frac{d^3p'}{2E'}d^3k' = \frac{k'^2\, d\Omega}{(2mk/k')}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}+4(\varepsilon\varepsilon')^2-2\right) \qquad \text{Klein-Nishina-formula}$$

$k\to 0$ esetén $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{\alpha^2}{m^2}(\varepsilon\cdot\varepsilon')^2$ $\qquad$ Thomson-szórás

Nem polarizált foton esetén:
$$\varepsilon^{(1)} = (0,1,0,0)$$
$$\varepsilon^{(2)} = (0,0,1,0)$$
$$\varepsilon'^{(1)} = (0,1,0,0)$$
$$\varepsilon'^{(2)} = (0,0,\cos\vartheta,-\sin\vartheta)$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{pol}}(\varepsilon\cdot\varepsilon')^2 = \sum_{i,l}(\varepsilon^{(i)}\cdot\varepsilon'^{(l)})^2 = 1+\cos^2\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-\sin^2\vartheta\right)$$

Teljes HKM: $\sigma = \dfrac{\pi\alpha^2}{m}\displaystyle\int_{-1}^{1}dz\left(\frac{1}{(1+\alpha(1-z))^3}+\frac{1}{1+\alpha(1-z)}-\frac{1-z^2}{(1+\alpha(1-z))^2}\right)$

$k\to 0$ esetén $\sigma \to \sigma_{Th} = \dfrac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \approx 0{,}665\cdot 10^{-24}\,\text{cm}^2$