A nehézségi gyorsulás mérése megfordítható ingával

Asztalos Bogdán
Hétfői csoport

mérés időpontja: 2017. 11. 27.
jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2017. 12. 04.

A mérés célja

A mérés során egy megfordítható ingával végzünk méréseket. A megfordítható inga a fizikai ingák egy olyan fajtája, ami két, szemben lévő, egymással párhuzamos ék körül tud rezgéseket végezni. Mivel egy fizikai inga lengésideje egyértelműen kifejezhető a nehézségi gyorsulásból és a tengelyéhez képesti tömegeloszlásból, a tömegeloszlást változtatva mérni tudjuk a nehézségi gyorsulást. A megfordítható ingával ennek az elvnek egy speciális alkalmazására van lehetősségünk, ugyanis mivel ugyanannak a testnek különböző tengelyek körüli lengését vizsgáljuk, több összefüggést is kaphatunk a tömegeloszlás és a lengésidő között, amiket egymással összehasonlítva még pontosabban megállapítható a nehézségi gyorsulás.

Emellett, a megfordítható ingának, mint fizikai ingának egyéb jellemzőit is vizsgáljuk, mint például azt, hogyan változik a tömegközéppont helyzete, és ez hogyan befolyásolja a lengésidőt.

A mérés eszközei

- Megfordítható inga, kialakított felfüggesztéssel
- Az ingán csúsztatható tolósúly
- Lengésdetektáló óra
- Mérőszalag
- Ék a súlypont helyzetének mérésére

A mérés menete

Először megmérjük az inga lengésidejét mindkét ék körül a tömegeloszlás változtatásával nagyvonalakban. A tömegeloszlás változtatását úgy végezzük, hogy az ingára szerelt tolósúly helyzetét változtatjuk. A tolósúly pozíciója az ingán lévő félcentis beosztás segítségével leolvasható a két ék közötti szakasz felezőpontjához képest (előjelesen). Az első mérésben a tolósúly helyzetét 5 cm-enként változtatjuk, -40 cm-től 40 cm-ig. A lengésdetektáló óra egy fénykapuval érzékeli, hogy az inga alja mikor halad át közte, majd 10 lengést követően kiírja a mért időt.

Miután a lengésidőt megmértük mindkét ék körüli lengésre a tolósúly helyzetének függvényében, megkeressük, hogy a tolósúlynak nagyjából mely helyzeteiben volt a két ék körüli rezgés körülbelül azonos. Kiválasztva az egyiket, e körül a helyzet körül részletesebben, $0,5$ cm-ként is megmérjük a lengésidő tömegeloszlás függvényét. A fizikai ingák elmélete szerint ez a tömegeloszlás speciális tulajdonságú, ugyanis ilyenkor a tömegközéppont vagy a két ék között félúton van (triviális megoldás) vagy olyan helyzet áll fenn, amikor a két élhez tartozó redukált hossz egyenlő, és ez az érték az ékek távolsága. Ez alapján a nem triviális helyzetekhez nemcsak, hogy mindkét ék körüli lengésidő egyenlő, de minden nem triviális helyzet körül ugyanakkora ez a lengésidő. Ezt a lengésidőt kimérve, és a matematikai inga képleteit alkalmazva tudjuk kiszámolni a nehézségi gyorsulás értékét.

Ha viszont találunk egy olyan helyzetet, amikor mindkét ék körüli lengésidő azonos, még nem lesz feltétlenül biztos, hogy a mért lengésidővel kiszámolható a nehézségi gyorsulás, hiszen lehet, hogy a kimért helyzet pont a triviális megoldás, amikor elvárt, hogy a két rezgésidő azonos legyen. Így a mérés ellenőréséül végül az ék segítségével megkeressük az inga tömegközéppontjának helyzetét a tolósúly külöböző pozíciói mellett, annak érdekében, hogy meghatározzuk, hol van a triviális megoldás, illetve, hogy lássuk, az a helyzet amit részletesen megvizsgálunk nem a triviális.

Kiértékelés

A mérés első részében a lengésidőt (T) mértük a tolósúly helyzetének (x) a függvényében. A tolósúlyt -40 cm-től 40 cm-ig toltuk, és 5 cm-ként mértük meg 10 lengés idejét. A mért értékeket az 1. tartalmazza. A lengésidőt a tolósúly helyzetének a függvényében grafikusan az 1. ábra ábrázolja. (A mért pontok alapján az összefüggést x és T pontok között egy negyedfokú polinommal becsültük, ennek az elmélet szempontjából nincs jelentőssége, csupán annyi, hogy a grafikonon a mért pontokra jól illeszkedik, így a mérési tartományban jó becslést ad az olyan helyeken, ahol nem történt mérés.)

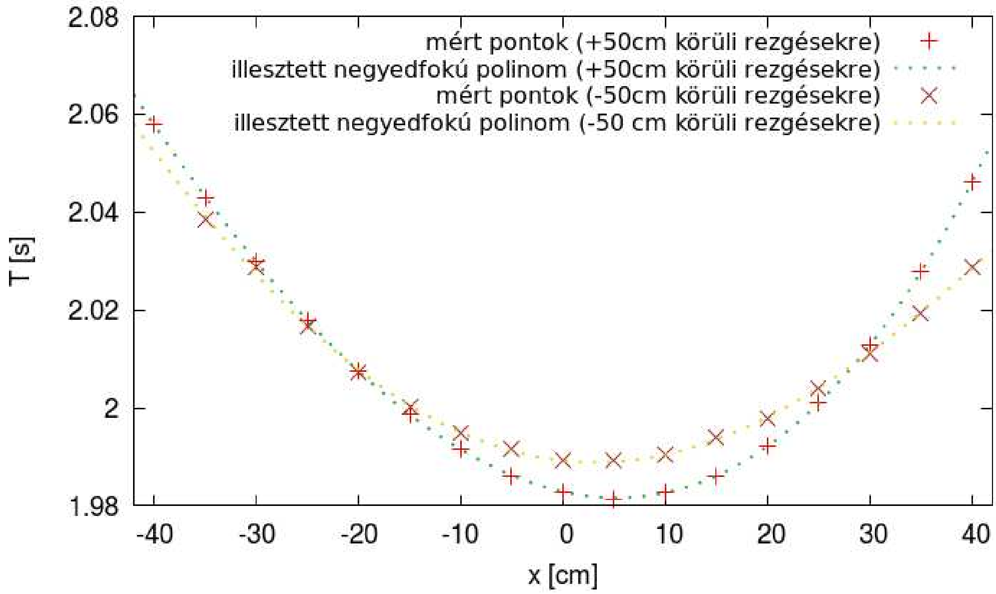
x $[cm]$	$10T_1$ $[s]$	$10T_2$ $[s]$	x $[cm]$	$10T_1$ $[s]$	$10T_2$ $[s]$
40	20.460	20.286	-5	19.860	19.915
35	20.279	20.194	-10	19.917	19.948
30	20.127	20.111	-15	19.988	20.001
25	20.010	20.040	-20	20.076	20.073
20	19.921	19.979	-25	20.178	20.167
15	19.861	19.940	-30	20.299	20.286
10	19.828	19.904	-35	20.428	20.384
5	19.814	19.891	-40	20.580	
0	19.829	19.892			

1. táblázat. Az inga 10 lengésének periódusideje a tolósúly helyzetének függvényében. T_1 a $+50$ cm-nél lévő tengely esetében, T_2 a -50 cm-nél lévő tengely esetében.

Az ábráról is nagyjából megállapítható, hogy a mérési tartományban T_1 és T_2 két pontban metszi egymást. Az egyik metszéspont $x \approx -21$ cm-nél a másik $x \approx 29$ cm-nél van. Mivel a 29 cm-nél lévő metszéspontnál a két görbe által bezárt szög nagyobb, itt pontosabban meg lehet állapítani majd a metszéspont pontos helyét, úgyhogy ezt vizsgáltuk meg jobban.

A részletesebb megvizsgálás során a lengésidőt úgy mértük, miközben a tolósúly az $x = 29$ cm-es helyzet 3 cm-es környezetében van, és ezen a tartományon belül is 0.5 cm-es közönként. Ezúttal is 10 lengés periódusidejét mértük, a mért adatokat a 2. táblázat tartalmazza, grafikusan pedig a 2. ábra.

Mivel ebben a részben a tolósúlyt egy rövid szakaszon mozgatjuk, úgy vesszük, hogy ebben a tartományban a lengésidő lineárisan változik. Egyenest illesztve a mért pontokra, látható, hogy ez a feltételezés nem volt alaptalan, mert valóban jól közelíthető ezzel. A 2. ábrán látható illesztett egyenesek egyenletei $T = m * x + b$ alakú, ahol az illesztési



1. ábra. Az inga lengésének periódusideje a tolósúly helyzetének függvényében a két szélső helyzet között.

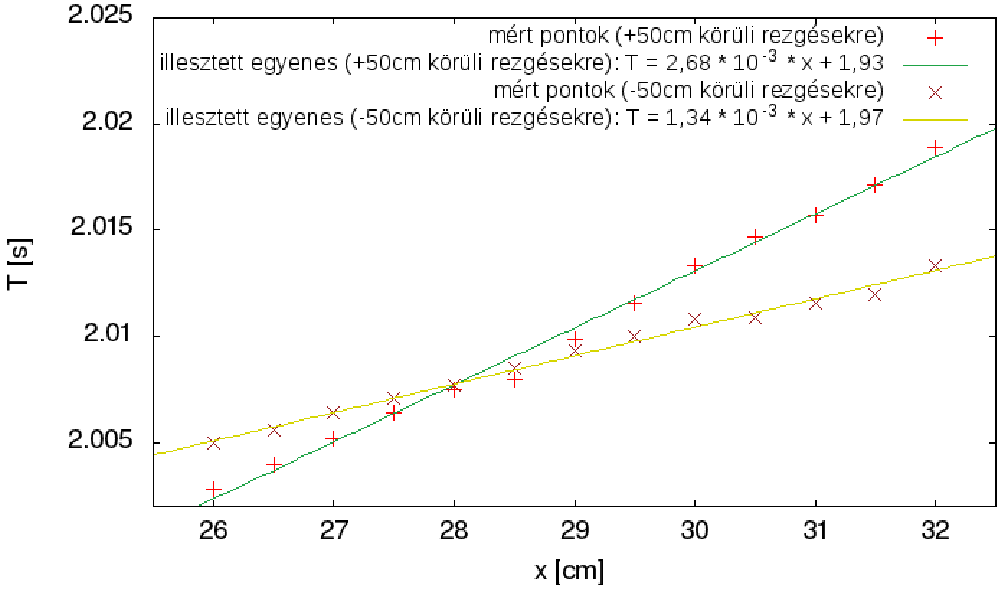
$x\,[cm]$	$10T_1\,[s]$	$10T_2\,[s]$	$x\,[cm]$	$10T_1\,[s]$	$10T_2\,[s]$
26	20.028	20.05	29.5	20.116	20.1
26.5	20.04	20.056	30	20.133	20.108
27	20.052	20.064	30.5	20.147	20.109
27.5	20.064	20.071	31	20.157	20.116
28	20.075	20.077	31.5	20.171	20.12
28.5	20.08	20.085	32	20.189	20.133
29	20.099	20.093			

2. táblázat. Az inga 10 lengésének periódusidje a tolósúly helyzetének függvényében az $x = 29\ cm$-es helyzet körül. T_1 a $+50\ cm$-nél lévő tengely esetében, T_2 a $-50\ cm$-nél lévő tengely esetében.

paraméterek értékeinek az alábbiakat kaptuk:

$$m_1 = 2,68 \cdot 10^{-3}\ \frac{s}{cm} \pm 0,06 \cdot 10^{-3} \frac{s}{cm}$$
$$b_1 = 1,933\ s \pm 0,002\ s$$
$$m_2 = 1,34 \cdot 10^{-3}\ \frac{s}{cm} \pm 0,03 \cdot 10^{-3} \frac{s}{cm}$$
$$b_1 = 1,970\ s \pm 0,001\ s$$

A két görbe metszéspontját tehát úgy számítjuk, mintha a két egyenes metszépontja lenne. A mérési pontok köré felvéve azt a két egyenest, ami szélsőséges hiba esetén volna, a két egyenespár legnagyobb és legkisebb értékű metszéspontjából megkapjuk a metszésponthoz tartozó időt, és a hibáját (3. ábra). Ez alapján a keresett lengésidő $T = 2.008\ s \pm 0.003\ s$. A megfordítható inga elméletének felhasználásával belátható, hogy a nehézségi gyorsulás értéke kiszámolható az ékek l_e távolságából, valamint az előbb megmért közös lengésidőből

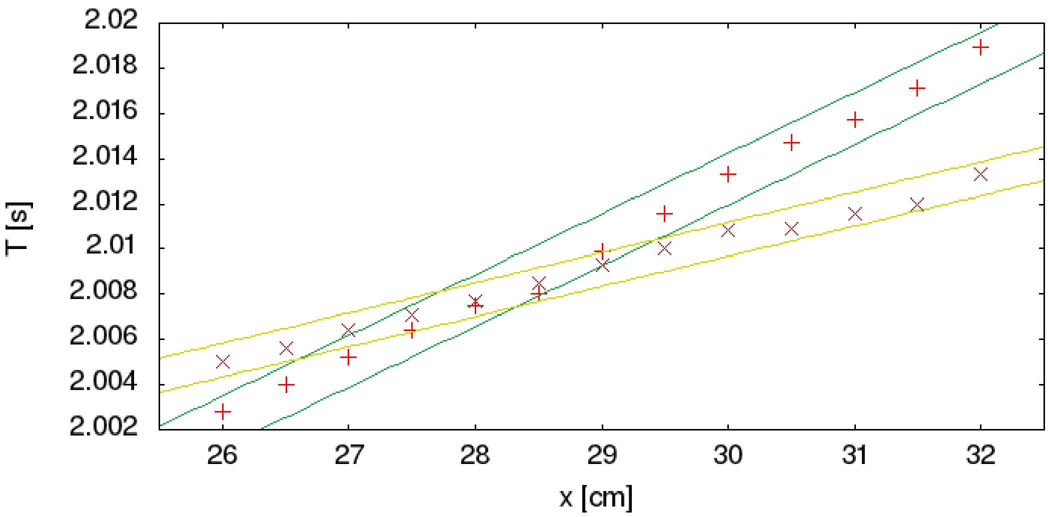


2. ábra. Az inga lengésének periódusideje a tolósúly helyzetének függvényében az $x = 29\ cm$-es helyzet környezetében.

az alábbi módon:

$$g = \frac{4\pi^2 l_e}{T^2} \qquad \text{a hiba pedig} \qquad \delta g = \delta l_e + 2\delta T$$

Mivel most már ezek közül minden mennyiséget ismerünk, a nehézségi gyorsulás kiszámolható: $g = 9,80\ \frac{m}{s^2} \pm 0,03\ \frac{m}{s^2}$. Ez megegyezik az irodalmi értékkel, így a mérésünk nagy valószínűséggel helyes.

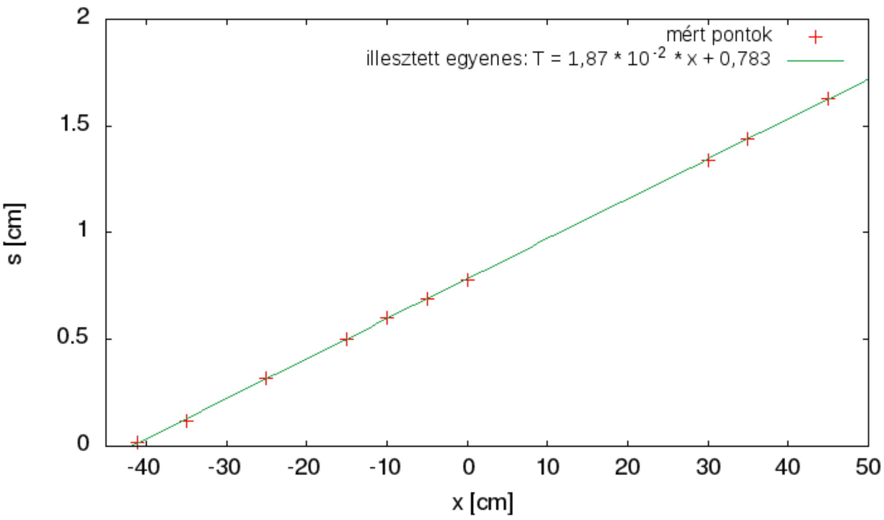


3. ábra. A lengésidőmérés hibája

Azt viszont még ellenőriznünk kell, hogy a megtalált és kimért helyzetben nem azért egyezik-e meg a két görbe, mert a triviális megoldás helyzetét találtuk meg. Ehhez az ék segítségével különböző tolósúly helyzetek (x) mellett kimértük, hogy hol van az inga tömegközéppontja (s). A mérési adatokat a 3. táblázat tartalmazza, grafikusan pedig a 4. ábrán ábrázoltuk.

$x\ [cm]$	$s\ [cm]$
45	16.3
35	14.4
30	13.4
0	7.8
-5	6.9
-10	6
-15	5
-25	3.2
-35	1.2
-41	0.2

3. táblázat. A tömegközéppont helyzete a tolósúly helyzetének a függvényében



htb

4. ábra. A súlypont helyzete a tolósúly helyzetének a függvényében

Mint a 4. ábrán látszik, a mérési pontok egy egyenesre illeszkednek amint azt az elméletből vártuk. Az illesztett egyenes egyenlete: $s = 18,7 \cdot 10^{-3} * x + 0,78$. Ez alapján a tömegközéppont akkor van a két éltől egyenlő távolságra, (azaz s akkor egyenlő 0-val,) amikor $x = -41,7\ cm$. Ez a mérési tartományon kívül van (az 1. ábra bal szélén kívül a két görbe megint metszené egymást), tehát a mi általunk vizsgált metszéspont nem a triviális megoldás.

Korrekciók A számolás során tettünk bizonyos közelítéseket, amik egy határon belül elfogadhatók, de a mérés pontosságát rontják. Ezeket vizsgáljuk most.

Először is, amikor a két $T-x$ görbe metszi egymást, akkor az ékek l_e távolsága egyenlő azzal a hosszal, amit a matematikai inga képletébe helyettesítve, ugyanazt a lengésidőt kapnánk, ami a valódi. A matematikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_e}{g}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right)}$$

ahol α az inga kitérése. Mivel ez kicsi, az eddigiekben csak a 0. rendű tagot használtuk, így jött ki az ismert $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_e}{g}}$ képlet. Ha már figyelembe vesszük a második tagot, akkor a képlet módosul, és g értékére $g = \frac{4\pi^2 l_e}{T^2}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ adódik. Az inga kitérése a felfüggesztésétől 153 cm-re kb. 20 cm volt, tehát a maximális szögkitérés $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{10}{153} = 0,12998$ volt. Ezt beírva a lengésidő képletébe, a szükséges korrekció $\Delta T_{\text{szög}} = \frac{4\pi^2 l_e}{T^2}\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0,021\ \frac{m}{s^2}$-nak adódik.

A másik korrekció a hidrodinamikai korrekció. Ezt az okozza, hogy a levegő felhajtóereje, és az ingával együttmozgó levegőtömeg lassítja a lengést. Ezt úgy tudjuk figyelembe venni, hogy az inga lengésidejét növeljük $\Delta T = 0,8\frac{\varrho_{\text{lev}}}{\varrho_{\text{inga}}}T = 0,238\ ms$-mal.

Az új lengésidővel, és a módosított képlettel számolva az nehézségi gyorsulás: $g = 9,81\ \frac{m}{s^2} \pm 0,03\ \frac{m}{s^2}$.