Rugalmas állandók mérése

Asztalos Bogdán

Hétfői csoport

mérés időpontja: 2017. 12. 04.
jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2017. 12. 11.

A mérés célja

Szilárd testek alakváltozásához szükséges erő-, illetve energiaviszonyok leírásához szükséges ismernünk a test anyagára jellemző rugalmas állandókat. A mérés során ilyen rugalmas tulajdonságokat fogunk mérni két módszerrel: az első esetben egy fémrúd Young-moduluszát mérjük meg statikus terheléssel, a másodikban egy huzal torziómoduluszát mérjük dinamikusan, torziós lengéssel.

A mérés eszközei

- Két kiadott fém rúd (*S1* és *A1* jelű minták)
- Egy kétkarú emelős szerkezet, amibe befoghatók a rudak, és az emelő egyik oldalára súlyokat akasztva, a rúd közepével erővel terheli
- Terhelő súlyok
- Mérőóra, ami a rúd deformációját méri
- Torziós szál
- Speciális búra, ami alatt a torziós inga lengéseket végezhet
- Lengő szerkezet, benne rovátkákkal
- Két henger alakú teher, amit a rovátkákba lehet rakni (*5*-ös és *6*-os minta)
- Fénykapu, ami 10 lengés idejét méri
- Elektronikus mérleg
- Mérőszalag, tolómérő, csavarmikrométer

A mérés menete

Az első mérésben, két féle képpen vizsgáljuk a fémrúd deformációját: először fix hosszúságal befogjuk a terhelő szerkezetbe a rudat, és a mérőórával mérjük, hogy terhelőerő függvényében mérjük, mennyit hajlik meg a rúd az egyensúlyi helyzetéhez képest. Ezt a mérést két rúddal végeztük, a téglalap keresztmetszetű *A1*-essel, és a kör keresztmetszetű *S1*-essel. Ezután a terhelő erőt fixáljuk, és a befogott hosszat változtatjuk, és így mérjük meg az elhajlást. Ezt csak az *S1*-es rúddal végeztük el. Mivel a rúd befogott hossza, a terhelő erő, a Young-modulusz és a kitérés között egyértelmű kapcsolat van, ezekből a mérésekből meghatározhatjuk a Young-modulusz nagyságát.

A második mérésben a torziós szál torziómoduluszát mérjük meg, úgy, hogy torziós ingának a felfüggesztéseként használjuk: egyik végén felfüggesztjük a búra tetejére, másik végére pedig a lengő szerkezetet akasztjuk. Ezt elforgatjuk úgy, hogy közben a szál függőleges maradjon, és a visszatérés közben végzett rezgések lengésidejét mérjük a fénykapuval. Az ingát visszatérítő erő a szál torziójától függ, ezért ezt mérve, megkaphatjuk a torziós modulust. Mivel azonban a szerkezet tehetetlenségi nyomatéka is szerepel a képletekben, ezt viszont bonyolultabb lenne megmérni, nem elég pusztán a lengésidőt mérni. A legcélszerűbb, ha az inga tehetetlenségi nyomatékát ismert módon változtatgatjuk, és az ennek hatására történő lengésidő változásból közvetlenül is kiszámíthatjuk a szál torziómoduluszát. Erre használjuk a két hengert, amiket az inga rovátkáiba helyezhetünk el szimmetrikusan, és a középponttól való távolságukat változtatjuk.

Kiértékelés

Young-modulusz mérése

Lehajlás a terhelő erő függvényében A téglalap keresztmetszetű rudat kétféle képpen is be tudjuk fogatni, úgy, hogy a hosszabbik oldala vízszintes legyen és úgy, hogy függőleges. Ezzel mindkétféle képpen elvégeztük a mérést, a kör keresztmetszetű rúddal (értelemszerűen) csak egyféle képpen. A terhelő szerkezet úgy volt kialakítva, hogy a különböző tömegű súlyokat különböző erőkarral tudjuk ráakasztani a kétkarú emelőre, amik ennek hatására erőt fejtenek ki a rúdra. A rudat az emelőtől egységnyi távolságra húzza a szerkezet, a súlyokat pedig fel lehetett akasztani kettő, három, négy és öt egységnyi távolságra. Ennek köszönhetően, különböző variációjú tömegnek megfelelő erővel hathatunk a rúdra. Ha az m_i tömeget a k_i karra akasztjuk, akkor az az erő, ami a rúdra hat: $\sum_i k_i m_i g$. Innentől ezt a rövidség miatt kmg-vel jelöljük.

A . táblázat (a), (b) és (c) része a rudak kitérését mutatja az emelőre akasztott tömegek függvényében. A terhelő tömegeket g-vel szorozva megkapjuk a terhelő erőt, ezeket grafikusan az 1., a 2. és a 3. ábrák ábrázolják.

$km\,[g]$	$s\,[mm]$
500	0,03
2000	0,59
3000	0,96
3250	1,06
3500	1,16
4000	1,35
4500	1,53
5000	1,72
5500	1,91
5750	2,00

(a)

$km\,[g]$	$s\,[mm]$
500	0,39
2000	0,63
2500	0,71
4500	1,05
5500	1,21
6000	1,30
6500	1,46
8000	1,62
10000	1,95
12000	2,28

(b)

$km\,[g]$	$s\,[mm]$
500	0,64
2000	1,17
3000	1,53
3500	1,70
4000	1,86
5000	2,24
5500	2,39
6000	2,57

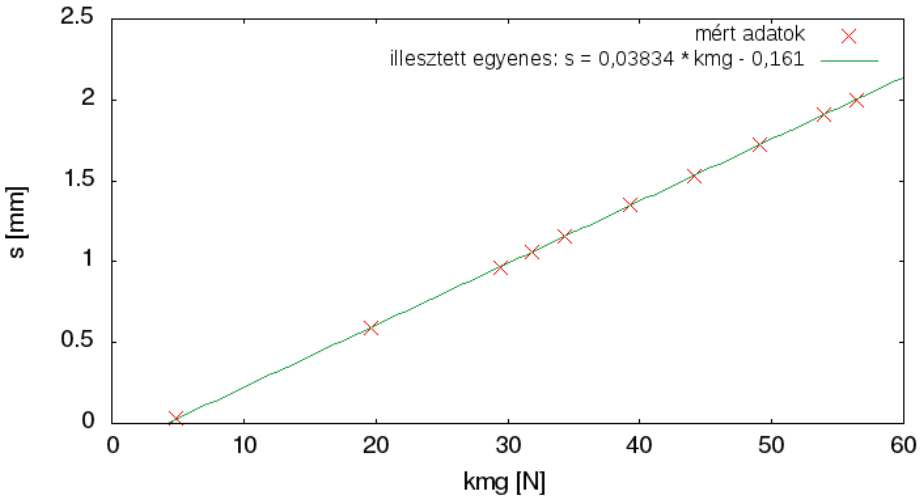
(c)

$l\,[mm]$	$s_0\,[mm]$	$s_1\,[mm]$
400	0,64	2,39
378	0,70	2,16
348	0,24	1,39
334	0,22	1,39
300	0,57	1,32
276	0,45	1,04
250	0,41	0,86
226	0,46	0,77
200	0,35	0,58

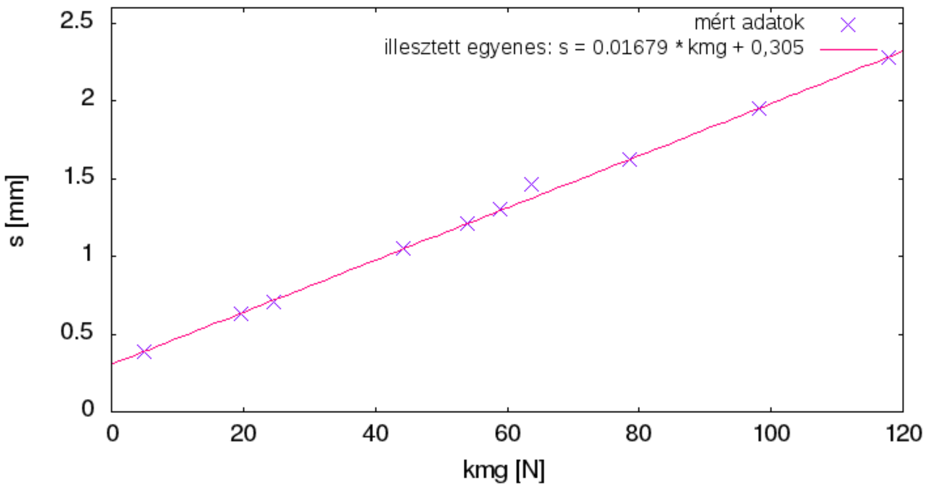
(d)

1. táblázat. (a) A téglalap keresztmetszetű rúd elhajlása a terhelő tömeg függvényében a vízszintes állapotban. (b) A téglalap keresztmetszetű rúd elhajlása a terhelő tömegfüggvényében a függőleges állapotban. (c) A kör keresztmetszetű rúd elhajlása a terhelő tömeg függvényében. (d) A kör keresztmetszetű rúd elhajlása 5000 g tömeg hatására a befogot hossz függvényében.

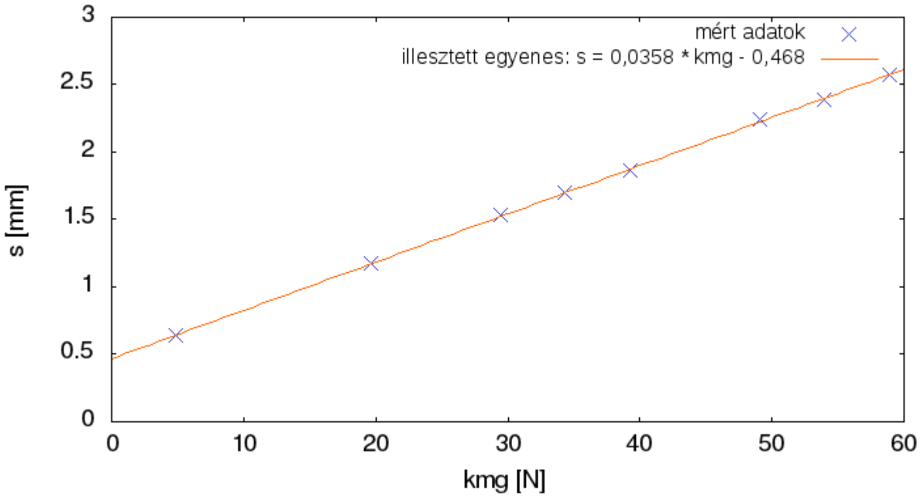
Az 1., a 2. és a 3. ábrákon látszódik, hogy a terhelőerő függvényében a lehajlásra minden esetben egyenes illeszthető. Az egyenesek meredeksége a vízsintes, a függőleges és



1. ábra. A téglalap keresztmetszetű rúd lehajlása a terhelő erő hatására vízszintes helyzetben



2. ábra. A téglalap keresztmetszetű rúd lehajlása a terhelő erő hatására függőleges helyzetben



3. ábra. A kör keresztmetszetű rúd lehajlása a terhelő erő hatására

a kör esetében:

$$m_v = 0.03834\ \frac{mm}{N} \pm 0,00009\ \frac{mm}{N}$$
$$m_f = 0,01679\ \frac{mm}{N} \pm 0,00004\ \frac{mm}{N}$$
$$m_k = 0.03577\ \frac{mm}{N} \pm 0,00021\ \frac{mm}{N}$$

A Young-modulusz a meredekségből az alábbi módon számítható: $E = \frac{l^3}{48mI}$, ahol l a rúd befogott hossza, I pedig a másodrendű felületi nyomaték. A hiba $\delta E = 3\delta l + \delta m + \delta I$. A másodrendű felületi nyomaték a minták geometriai adataiból következnek, ezeket a tolómérővel és a csavarmikrométerrel mértük meg. A téglalap keresztmetszetű minta hosszabbik oldala $l_h = 11,98\ mm \pm 0,02\ mm$, rövidebbik oldala $l_r = 7,91\ mm \pm 0,01\ mm$. A kör keresztmetszetű rúd átmérője $d = 0,70\ mm \pm 0,01\ mm$. Ezek alapján a felületi nyomaték a különböző esetekben:

$$I_v = 494\ mm^4 \pm 3\ mm^4$$
$$I_f = 1133\ mm^4 \pm 7\ mm^4$$
$$I_k = 475\ mm^4 \pm 8\ mm^4$$

Ezekkel az adatokkal már ki tudjuk számolni a rudak Young-moduluszát:

$$E_v = 70,4\ GPa \pm 1,6\ GPa$$
$$E_f = 70,1\ GPa \pm 1,7\ GPa$$
$$E_k = 78,4\ GPa \pm 2,9\ GPa$$

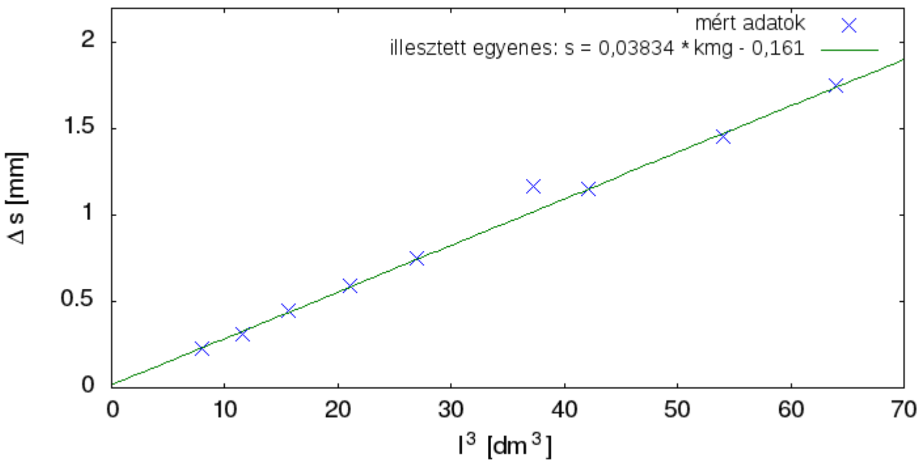
Mint látható tehát a téglalap keresztmetszetű rúd Young-modulusza mindkét mérési majdnem pontosan ugyanazt adta (még a mérés pontossága is megegyezik).

Lehajlás a befogott hossz függvényében A rúd meghajlásának mérete attól is függ, hogy milyen hosszú rész deformálódik. Ezért, a kör keresztmetszetű rúd rögzítési pontjait is módosítjuk. Minden esetben a terhelés körül szimmetrikusan állítjuk be a befogó pontokat. Minden hossz esetén két erő hatására való lehajlást mérünk, s_0-t $km = 500\ g$-nak megfelelő erőnél, s_1-t pedig $km = 5500\ g$-nak megfelelő erőnél. A kettő különbsége 5000 g, így a terhelőerő $F = 49,05\ N$. A mért értékeket a . táblázat (d) része tartalmazza. A 4. ábra a befogott távolság köbének a függvényében ábrázolja a két lehajlás különbségét.

Mint látható, a 4. ábra adataira egyenes illeszthető, ennek meredeksége $m = 0,0270\ \frac{mm}{dm^3} \pm 0,0002\ \frac{mm}{dm^3}$. (Ugyan van egy kiugró pont, de azt az egyenesillesztéskor nem vettük figyelembe.) Az erő ebből a $E = \frac{F}{48mI}$ képlettel számolható, ahol a hiba $\delta E = \delta m + \delta I$ (a súlyok tömegének illetve a gravitációs gyorsulás mérésének hibáját elhagyjuk). Ez alapján a kör keresztmetszetű minta Young-modulusza:

$$E = 79,7\ GPa \pm 1,9\ GPa$$

Ez összeegyeztethető az előző módszerből kapott mérés eredményével.



4. ábra. A kör keresztmetszetű rúd lehajlása $km = 5000\ g$ plussz terhetlőtömeg hatására a befogott hossz köbének függvényében

$a\,[cm]$	$10T\,[s]$
3	35.70
4	40.249
5	45.49
6	51.09
7	57.03
8	63.23
9	69.45
10	76.04

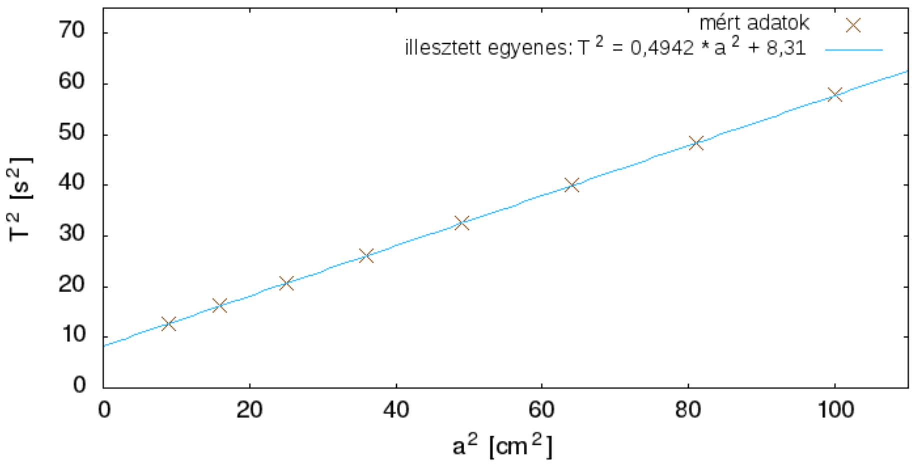
2. táblázat. Az inga lengésideje a korongoknak a középponttól való távolságának függvényében

Torziómodulusz mérése

A huzal torziómoduluszának meghatározása A mérésnek ebben a részében a vizsgált huzalra lógattuk a lengő szerkezetet, aminek bizonyos rovátkáiba a beletettük a korongokat, és megmértük a torziós lengéseket. A rovátkák centinként voltak elhelyezve, de a korongok nagysága miatt a középponthoz legközelebb lévő, amibe bele tudtuk rakni, a középponttól 3 cm-re volt. Az óra 10 lengés idejét mérte. Ezeket a mért $10T$ időket a korongoknak a középponttól való a távolságuk függvényében a 2. táblázat tartalmazza. Az elmélet szerint a középponttól való távolság nézgyzete a lengésidő négyzetével arányos. Ezeket a mennyiségeket grafikusan az 5. ábra ábrázolja. Mint látható, mért pontokra egyenes illeszthető, aminek egyenlete:

$$T^2 = m \cdot a^2 + b \qquad \text{ahol} \qquad \begin{aligned} m &= 0,4945\ \frac{s^2}{cm^2} \pm 0,0007\ \frac{s^2}{cm^2} \\ b &= 8,30\ s^2 \pm 0,04\ s^2 \end{aligned}$$

Elméleti megfontolások szerint a huzal torziós nyomatéka a kapott értékekből: $G =$



5. ábra. Az inga lengésidejének négyzete a középponttól való távolságának négyzetének függvényében

$\frac{8\pi l M}{r^4 m}$, ahol l a huzal hossza, M a tárcsák teljes tömege, r pedig a huzal keresztmetszetének sugara. A hibája ez alapján $\delta G = \delta l + \delta M + 4\delta r + \delta m$. A mérőszalag, valamint a tolómérővelvégzett mérés alapján a huzal hossza: $l = 59,3\ cm \pm 0,1\ cm$, sugara pedig $r = 0,35\ mm \pm 0,01\ mm$. A két korong adatait szintén megmértük: $m_5 = 194,62\ g$, $m_6 = 196,20\ g$, $r_5 = r_6 = 22,5\ mm \pm 0,01\ mm$ (a tömegmérés hibáját a többihez képest elhanyagoljuk). Ezek alapján a torziómodulusz:

$$G = 78,5\ GPa \pm 9,2\ GPa$$

Az üres inga forgatónyomatékának meghatározása A mérést könnyű lett volna elvégezni, ha ismerjük a lengő rész tehetetlenségi nyomatékát, mert akkor a lengésidőből egyértelműen kiszámolható a torziómodulusz. Mivel azonban ezt nem ismertük, a Steiner-tételt kellett használnunk, és a tehetetlenségi nyomatékot folyamatosan változtatni. Ennek hatására viszont nem csak a huzal torziómoduluszát kaptuk meg, hanem visszaszámolható belőle a tárcsák nélküli tehetetlenségi nyomatékot.

Szintén az elméletből következik, hogy az üres inga tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta_c = \frac{Mb}{m} - \Theta_5 - \Theta_6$, ahol Θ_5 és Θ_6 a két korong tehetetlenségi nyomatéka. A hiba: $\Delta\Theta_c = \frac{Mb}{m}(\delta b + \delta m) + \Delta\Theta_5 + \Delta\Theta_6$. A mért értékek alapján az üres inga tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_c = 5,57\ kg \cdot m^2 \pm 0,04\ kg{\cdot}m^2$$