Hangfrekvenciás memchanikai rezgések vizsgálata

Asztalos Bogdán
Hétfői csoport

mérés időpontja: 2017. 09. 18.
javított jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2017. 10. 05.

A mérés célja

Hosszú, téglalap keresztmetszetű fém rudat időben váltakozó mágneses térbe téve, benne örvényáramok indukálódnak. Ha ezt a rendszert egy erős állandó mágnes terébe tesszük, akkor a mágneses tér, és az övényáramok kölcsönhatása miatt a rúdra kis mértékű (szintén időben váltakozó) erő hat, és el kezd rezegni. Ez a rezgés kicsi, de a megfelelő eszközök segítségével mégis tudjuk mérni a főbb tulajdonságait, mint például a rúd alakváltozása, vagy a rezgésének hely és időfüggése. A mérésünk során ezeket az adatokat fogjuk vizsgálni, és mivel a rezgés tulajdonságait leginkább a minta rugalmas tulajdonságai határozzák meg, a kapott eredményekből ki fogjunk tudni számolni a néhányat az anyagok rugalmas adatai közül, mint például a Young-modulust vagy a rezgést csillapító tényezőt.

A mérés eszközei

- Egy vastagabb végű (B jelzésű) minta
- Téglatest alakú (*14* jelzésű) minta
- A minták befogására alkalmas satu
- A befogott mintával párhuzamos sínek, és rajta csúsztatható elektromágnes.
- Feszültségjel-generátor
- Állandó mágnes
- Piezoelektromos kristály, és hozzá csatlakozó tű
- Mutatós voltmérő műszer
- Oszcilloszkóp
- Tolómérő
- Csavarmikrométer
- Elektromos mérleg

A mérés menete

Az egyik mintát befogjuk a satuba, aláigazítjuk az elektromágnest, amire rákapcsoljuk a függvénygenerátort, így megadott frekvenciával tudjuk gerjeszteni a minta rezgését. A mérési berendezés alatt elhelyeztünk egy erős állandó mágnest is ami a mintában kialakuló örvényáramokkal kölcsönhatva biztosítják a megadott frekvenciájú rezgést. Mivel azonban az örvényáramok az elektromágnes változó terével is kölcsönhatnak, ezért a minta rezgései nem csak a függvénygenerátor frekvenciájával gerjesztődnek, hanem annak kétszeresével is, így mindig figyelnünk kell arra, hogy egy adott, a függvénygenerátoron beállított frekvencia esetén nem rezeg-e a minta a frekvencia kétszeresével is.

A rezgés nagyságát a ráhelyezett piezoelektromos kristállyal érzékeljük. A piezoelektromos kristályon a mechanikai deformáció hatására feszültség mérhető, aminek nagyságát a mutatós voltmérővel, időbeli alakulását az oszcilloszkóppal mérjük.

Ha a minta az egyik sajátmódusával gerjesztődik, akkor a rezgési amplitúdója elég nagy lesz ahhoz, hogy a mutatós voltmérőn megjelenjen a piezoelektromos kristály feszültsége. (A mutatós műszer ugyan nem pontosan az a kristályban kialakult feszültsége mutatja, hiszen a valódi feszültség váltófeszültség lesz, de a mért effektív érték arányos lesz a váltófeszültség amplitúdójával.) Mivel a minta egyszerre két frekvenciával is gerjesztődik, ezért ugyanazt a rezgési módust a feszültséggenerátor két különböző állása mellett is megtaláljuk: a módus gerjesztési frekvenciájánál, és annak a felénél.

Az első mérés során vastag végű minta első négy rezgési módusát keressük meg, és mérjük meg a hozzájuk tartozó gerjesztési frekvenciát. Azt vizsgáljuk, hogy ezek a frekvenciák egymáshoz képest valóban úgy aránylanak-e, ahogy az előre kiszámolt k_i konstansok mutatják, majd a pontos értékükből kiszámoljuk a minta anyagának Young-modulusát.

A második mérésben a rezonancia jelnségét vizsgáljuk a 0. sajátmódus környékén. Először megkeressük, hogy a rezgési amplitúdó milyen gerjesztési frekvencia mentén maximális, majd a gerjesztést kicsit módosítva, megvizsgáljuk, hogy mennyire változik a gerjesztésre adott válasz. Ez az rezonanciagörbe mentén fog változni, aminek a szélességéből következtetni tudunk a minta csillapítási tényezőjére.

Végül a harmadik részben a hasáb alakú mintával dolgozunk. Ezt a mintát olyan módon tudjuk behelyezni a satuba, hogy a rezgő rész hosszát mi határozzuk meg, így meg tudjuk mérni, hogy hogyan függenek a módusok gerjesztési frekvenciái a rezgő hossztól. A hosszfüggésből szintén ki tudjuk számolni a minta Young-modulusát.

Kiértékelés

A minta geometriai jellemzői

A rezgés tulajdonságainak vizsgálatához tudni kell, hogy a minták pontosan milyen geometriai és anyagi tulajdonsággal rendelkeznek. Ehhez megmértük a minták méreteit, a tolómérővel és a csavarmikrométerrel, valamint tömegüket az elektromos mérleggel. A kapott értékeket az 1. táblázat tartalmazza. A tolómérő pontossága 0,1 mm, a csavarmikrométer pontossága 0,01 mm volt, ezeket tekintjük a hosszmérés hibáinak. A mérleg sokkal pontosabban megmérte minták tömegét, mint amennyire pontosak voltak a hosszmérések, így a mért tömegeket abszolút pontosnak tekinthetjük.

	Vastag végű minta (B)		Hasáb alakú minta (14)
vastagság (z)	vékony részen	2,03 mm	3,05 mm
	vastag részen	10,00 mm	
szélesség (y)	15,0 mm		15,0 mm
hossz (x)	teljes	100,0 mm	100,0 mm
	vastag rész	20,0 mm	
tömeg (m)	14,639 g		39,925 g

1. táblázat. A B jelölésű, vastag végű minta és a 14 jelölésű, téglatest alakú minta geometriai adataik. A hosszúságmérés hibája a vastagságok esetén $\Delta l = 0,01\ mm$ a többi esetben pedig $\Delta l = 0,1\ mm$. A tömegmérés hibáját elhanyagolhatónak tekintjük a többi bizonytalansághoz képest.

Ezekből kiszámolható a minták sűrűsége, rezgési keresztmetszete és másodrendű felületi nyomatéka. A vastag végű mintára:

$$\varrho_B = 2,693\,\frac{g}{cm^3} \pm 0,036\,\frac{g}{cm^3} \qquad I_B = 10,46\,mm^4 \pm 0,22\,mm^4 \qquad q_B = 30,45\,mm^2 \pm 0,35\,mm^2$$

A hasáb alakú mintára:

$$\varrho_{14} = 8,727\,\frac{g}{cm^3} \pm 0,096\,\frac{g}{cm^3} \qquad I_{14} = 35,47\,mm^4 \pm 0,5854\,mm^4 \qquad q_{14} = 45,75\,mm^2 \pm 0,46\,mm^2$$

Különböző rezgési módusok vizsgálata

A mérésnek ebben a részében először megkerestünk egy olyan gerjesztési frekvenciát, aminél a rezgés amplitúdójának lokális maximuma van, ez a $\nu = 255,4 Hz$ volt. Mivel ennek frekvenciának nagyjából a felénél szintén van lokális maximuma van a kitérésnek, a talált frekvencia az egyik sajátmódus gerjesztési frekvenciája, de azt nem tudtuk, hogy melyik. Hogy ezt megtudjuk, feltettük, hogy az ez a 0. felharmonikus, és kiszámoltuk a többire, hogy az elmélet szerint mekkora frekvenciával kéne gerjeszteni őket (ν_{sz}), és kipróbáltuk, hogy ilyen gerjesztés mellett vannak-e lokális maximumok. Mivel az első három felharmonikusnak megfelelő frekvencia közelében mind találtunk maximumot, elfogadjuk, hogy valóban az alapmódust találtuk meg először.

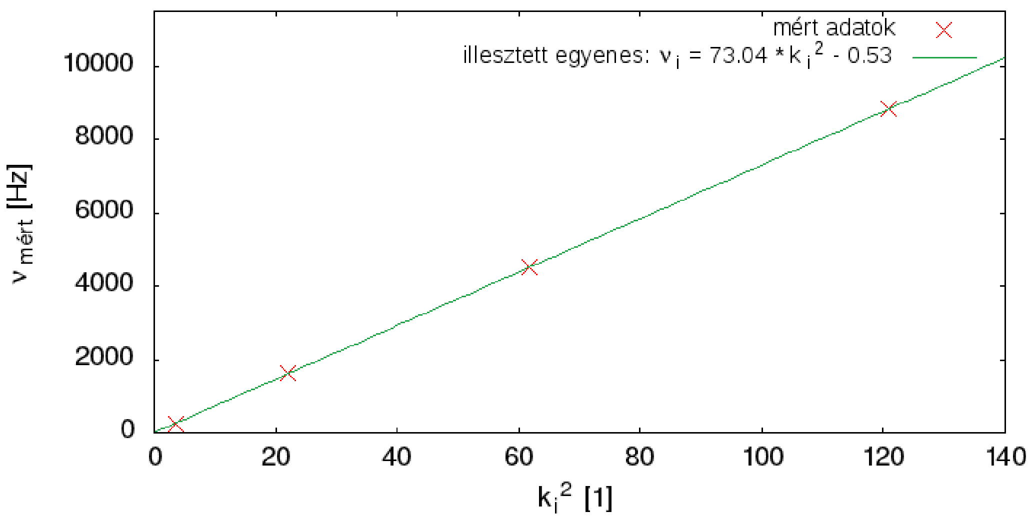
Az előzőekben leírtak szerint megkerestük és megmértük azokat a frekvenciákat, ahol az első négy rezgési módus gerjesztődik (ν_m). Ezeket, a számított frekvenciákat és a tőlük való eltérésüket a 2. táblázat tartalmazza. Látható, hogy a várt értékektől a mért értékek egy esetben sem térnek el lényegesen, tehát valóban megtaláltuk a rezgési módusokat. Kimértük továbbá azokat a frekvenciákat is, amik esetén a köráramok gerjesztik az adott móduson a rendszert, ezek mindig az adott gerjesztési módus felénél vannak.

i	k_i^2	ν_{sz} [Hz]	ν_m [Hz]	δh[%]
0	3,51600	-	255,4	-
		127,7	127,9	0,2
1	22,0345	1600,6	1610,9	0,6
		800,3	805,5	0,6
2	61,8544	4492,5	4515,6	0,5
		2246,2	2258,3	0,5
3	120,901	8783,2	8830,5	0,5
		4391,6	4410,5	0,4

2. táblázat. Az első három rezgési módus gerjesztési frekvenciája a B minta esetében. A felső sorban lévő adatok arra az esetre vonatkoznak, amikor az elektromágnes gerjeszti a rezgést, az alsó sorban lévő adatok arra, amikor az örvényáramok.
i a módus száma, k_i a módusra jellemző állandó, ν_{sz} az adott módus várt frekvenciája, a 0. módus frekvenciája alapján kiszámolva, ν_m az adott módus valóban megmért frekvenciája, δh pedig a ν_{sz} és a ν_m relatív eltérése

A 2. táblázat adatai alapján grafikonon ábrázoltuk az adott módusok gerjesztési frekvenciáját a k_i konstansok négyzetei alapján. Az elméleti számítások szerint ezek között lineáris kapcsolat van, így egyenest illesztettünk rá. Ez az 1. ábrán látható.

Az illesztett egyenes meredeksége $m = 73,04\,Hz \pm 0,02\,Hz$, és a ν tengelyt a $-53\,Hz$-ben metszi, de mivel a mért adatok ennél sokkal nagyobbak, ez lényegileg csak a mérés, és



1. ábra. A rezgési módusok gerjesztési frekvenciája az elméletből kiszámolt k_i konstansok függvényében.

az illesztés hibájából származik. Kijelenthetjük tehát, hogy a vizsgált mennyiségek között tehát valóban lineáris kapcsolat van.

Az elméleti levezetéseket felhasználva, tudhatjuk, hogy, az előbb megállapított meredekségből, és a minta egyéb adataiból a Young modulus, és annak relatív hibája az alábbi módos számolható:

$$E = 4\pi^2 l^4 m^2 \frac{\varrho q}{I} = 4\pi^2 l^4 m^2 \frac{12\varrho}{z^2} \qquad \delta E = 4\delta l + 2\delta m + \delta\varrho + 2\delta z$$

ahol l a minta rezgő hossza, ϱ, q és I pedig a már korábban kiszámolt geometriai jellemzők. Az adott érékeket behelyettesítve, az kapjuk, hogy a minta Young-modulusának értéke: $E_B = 67,6\, GPa \pm 3,9\, GPa$. A minta sűrűségéből arra lehet következtetni, hogy az anyaga alumínium volt, aminek a Young-modulusának irodalmi értéke[1] 70 GPa. Egy konkrét minta anyagának Young-modulusa nyilvánvalóan függ a minta egyéni tulajdonságaitól mint például az ötvözés, de mivel a mért érték elég közel van a hivatalos adathoz, ezért feltehetjük, hogy jól mértünk.

Rezonanciagörbe vizsgálata

A rezonancia jelenségét a 0. rezgési módus körül vizsgáltuk. Először megkerestük, hogy milyen frekvenciájú gerjesztésnél lesz a B jelű minta amplitúdója maximális (ez a 2. táblázatból is látszik, hogy 255,4 Hz-nél volt), majd ezt a frekvenciát kicsit megváltoztatva, megmértük, hogy a mutatós voltmérő által mért feszültség hogyan változik.

A voltmérőn mért legnagyobb feszültség 31 mV volt, a azokat a gerjesztési állapotokat kerestük, amikor a mért feszültség ennek a 90, 80, …10 százaléka. Mivel elméleti

[1] forrás: http://hu.wikipedia.org/wiki/Alum%C3%ADnium

megfontolások miatt a rezonanciagörbe alakjára a

$$A(\nu) = \frac{f_0}{2\pi\sqrt{4\pi^2\left(\nu_0^2 - \nu^2\right)^2 + 4\kappa^2\nu^2}} \tag{1}$$

alakú függvényt várjuk, ezért minden amplitúdó két gerjesztési frekvenciánál is megjelenik, a rezonanciafrekvencia alatt és fölött. (f_0 a gerjesztés nagyságától függő amplitúdó állandó, ν_0 a satájfrekvencia, κ pedig a csillapítási tényező.) Feltesszük, hogy a voltmérőn mért feszültség arányos a rezgési amplitúdóval, így a frekvenciának is ilyen görbe mentén kell elhelyezkedniük. A mért adatokat a 3. táblázat tartalmazza.

$\frac{A}{A_{max}}$ [%]	ν_{alatt}	ν_{folott}
10	248,75	263,89
20	251,69	259,49
30	252,90	258,01
40	253,53	257,28
50	253,96	256,80
60	254,26	256,47
70	254,51	256,21
80	254,73	255,99
90	254,95	255,75
100	255,40	

3. táblázat. A B mintán a különböző rezgési amplitúdóhoz szükséges gerjesztési frekvenciák a 0. módus közelében. A mért maximális amplitúdónak megfelelő feszültség $A_{max} = 31mV$.

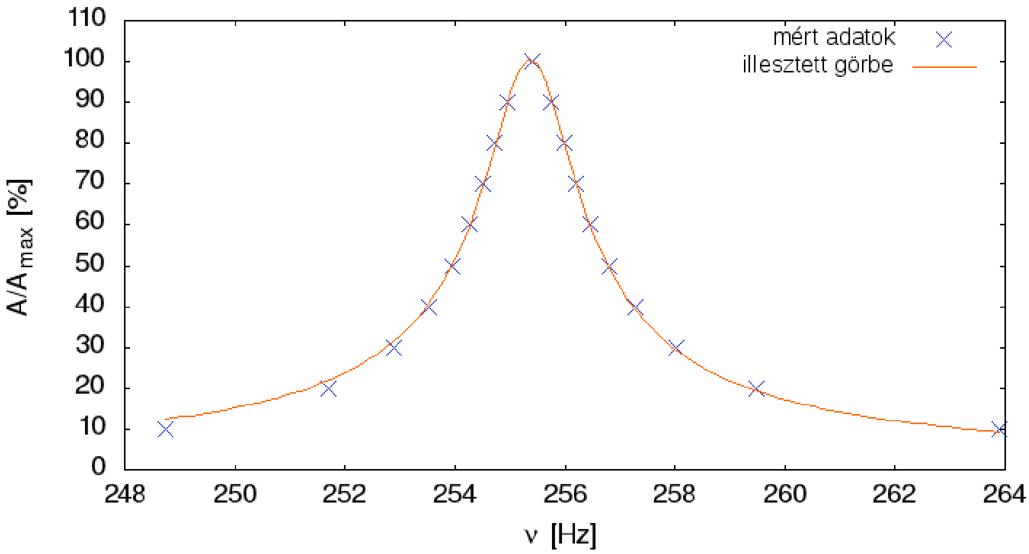
A mérési adatokat, mint amplitúdókat a gerjesztő frekvencia függvényét grafikonon ábrázoltuk, ez a 2. ábrán látható. A mérési pontokra megillesztettük az (1) képlet függvényét, ez szintén az ábrán látható. Az illesztés paraméterei:

$$f_0 = 1,649\ kHz^2 \pm 0,016\ kHz^2 \qquad \nu_0 = 255,4\ Hz \pm 0,0Hz \qquad \kappa = 5,104\ \frac{1}{s} \pm 0,075\ \frac{1}{s}$$

A csillapítási tényezőből kiszámolható a félértékszélesség: $\Delta\nu = \frac{\kappa}{\pi} = 1,625\ Hz \pm 0,024\ Hz$, ami összhangban is van a méréssel, hiszen a két 70%-os amplitúdójú (ami a 100-nak majdnem pont $\sqrt{2}$-ed része) pont frekvenciájának különbsége 1,7 Hz. Ez alapján pedig a jósági tényező: $Q^{-1} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 6,363 \cdot 10^{-3} \pm 0,094 \cdot 10^{-3}$

A rezonanciafrekvencia hosszfüggésének vizsgálata

Itt a *14*-es jelű mintával dolgoztunk, aminek a vége vékony, így a satuból kilógó részének hossza változtatható. Azt vizsgáltuk, hogy hogyan függ a 0. módus frekvenciája a rezgő hossztól.



2. ábra. A B minta 0. módus körüli rezonanciája.

Mivel ebben a mérésben másik mintát használunk, ugyanúgy meg kellett keresnünk a 0. módust, mint az előzőnél, ezt az ahhoz hasonlóan tettük meg. Mivel az elmélet előrejelzi, hogy a különböző hosszak esetén a módusok rezgési frekvenciái hogyan aránylanak egymáshoz, ezért a többi hossznál már nem ellenőriztük le, hogy amit találunk, az valóban a megfelelő rezgési módus-e, hiszen elég megnézni, hogy a várt hely közelében van-e.

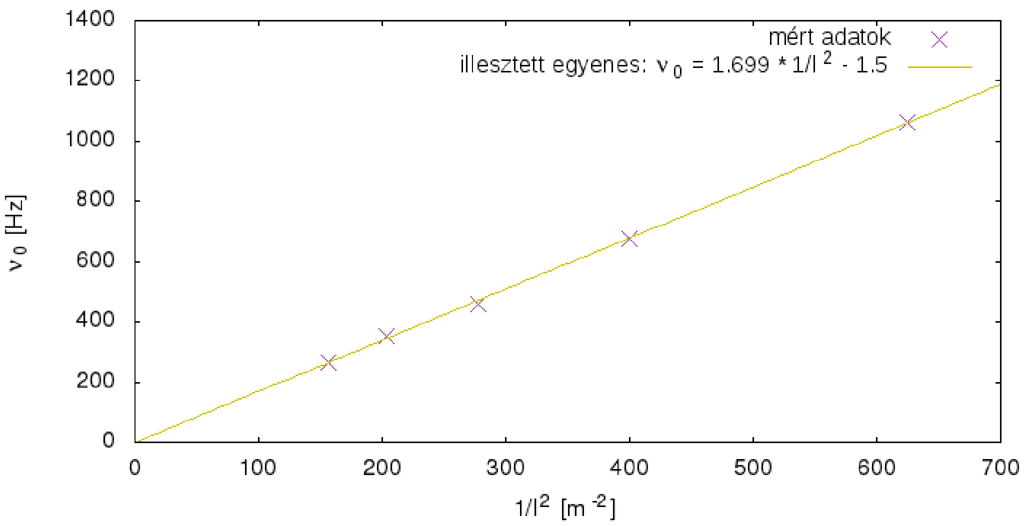
Összesen öt különböző rezgő hossz mellett mértük meg a rezgés frekvenciáját, ezeket a 4. táblázat tartalmazza.

l [cm]	ν_0 [Hz]
8	267,50
7	350,55
6	460,99
5	675,45
4	1063,77

4. táblázat. A különböző mintahosszok esetében a 0. módushoz rezgési frekvenciája a *14*-es jelzésű mintán.

Mivel az elmélet szerint a rezgési frekvencia fordítottan arányos a rezgő hossz négyzetével, ezért a ν_0 frekvencia és a $\frac{1}{l^2}$ módosított hossz között lesz lineáris kapcsolat. A mért értékeket a 3. ábrán ábrázoltuk grafikonon, és erre is illesztettünk egyenest. Az ábrán látszik, hogy a lineáris kapcsolat valóban teljesül, ahogy az elméletből vártuk.

Az illesztett egyenes meredeksége $m = 1,699\ Hz \cdot m^2 \pm 0,019\ Hz \cdot m^2$, a ν_0 tengely metszete pedig ezúttal is elhanyagolhatóan kicsi a többi adathoz képest, ahogy azt vártuk. A Young-modulust és a hibáját ezúttal is kiszámolhatjuk az egyenesillesztésből, ugyanis



3. ábra. A *14*-es minta 0. módusának rezgési frekvenciája a rezgő hossz négyzetének reciprokának függvényében.

kiszámolható, hogy a megmért m meredekség függvényében:

$$E = \frac{4\pi^2}{k_0^4}\frac{\varrho q}{I}m^2 = \frac{4\pi^2}{k_0^2}\frac{12\varrho}{z^2}m^2 \qquad \delta E = \delta\varrho + 2\delta z + 2\delta m$$

ahol k_0 a 0. módusra jellemző állandó, ϱ, q és I pedig a már korábban megmért geometriai jellemzők. Az adott értékeket behelyettesítve, azt kapjuk, hogy a minta Young-modulusának értéke: $E_{14} = 103.8\ GPa \pm 4.2\ GPa$. A sűrűségből arra lehet következtetni, hogy a minta anyaga réz volt, aminek Young-modulusának irodalmi értéke[2] 130 GPa. A mért érték szintén elég közel van a várt értékhez, tehát feltehetőleg ebben az esetben is jól mértünk.

[2]forrás: http://hu.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9z