RENORMÁLÁS

1. előadás (09.12.)

Wilson-féle renorm. módszer: Hogyan lehet fizikai rendszert különböző távolságskálán nézni?

Két terület: - kritikus viselkedések
- térelmélet

Ph. T.	QFT
• paraméterek beállításával a rendszert kritikus pontba visszük	• renormálható csatolásokat állítunk be úgy, hogy leírja a fizikát, amit látunk.
• rács, a atomi skálán van, és $L \gg a$ hosszúságú fizika érdekel. ↑ Erre lenne a statfiz, de a kritikus pontban ez nem igazán működik (majd látjuk miért)	• rácsállandó a, de ez egy matematikai segédeszköz (regularizáció), és $a \to 0$ esetén érdekel a fizika. Matematikailag itt is $L \gg a$, így a módszer u.a. de a végpontos elmélet más.
• különböző rendszerek azonos kritikus viselkedést mutatnak (univerzalitás)	• mindegy, hogy adott rácson hogyan definiált a QFT, ha a szimmetriák megegyeznek, u.a. az elmélet.

A lényeg valahol egy kis statfiz

sok mikro fok van $\Rightarrow$ sok mikroállapot

Ezek valószínűségi leírásával akarunk makroszkopikus termodinamikát kapni

Ehhez a nagy rendszer részrendszereit kell átlagolni. A részrendszerek száma is nagy és i.i.d.

$\Rightarrow$ Az átlagok eloszlása Gauss, $\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ -nel.

Ezért működik a termodinamika, mert $\sigma \to 0$ nagy rendszerekre.

A mikroállapotok valószínűségeit a Shannon-entrópia maximalizálásával kapjuk:

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i - k\lambda \sum_i p_i - k\beta \sum_i p_i E_i$$

A KHE-tételhez i.i.d.-kell, de a függetlenség nem kritikus, hogy teljesül.
Ha a kölcsönhatás exp. cseng le, akkor igen, de a kritikus pontban a rendszer bármekkora méreten a kiterjedésen, tehát a korrelációs hossz megnő.

Ising-modell

rácspontokon spinek: $S_i = \pm 1$

teljes energia: $$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i$$

definiálunk egy kollektívát: $m = \left\langle \frac{\sum S_i}{L^2} \right\rangle$ egy $L \times L$-es ablak átlag mágnesezettsége.

Mik a p_i mikrovalószínűségek?

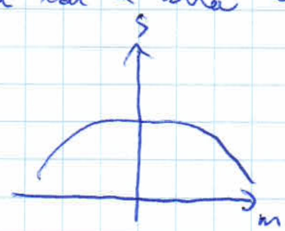
2 lépés: 1) rögzítjük m-et, és keressük meg $S(m,T)$ minimumát

2) Váltsunk m-re keressük $S(m,T)$ max-ját.

Ha kiszámoljuk, azt kapjuk, hogy

$T > T_c$ $T < T_c$

Kérdés: mi van a kettő között? A $m=0$ gyakorlatilag átmegy --> +



nagyon lapos entrópiaváltozás,
⇒ nem tudjuk m eldönteni, hogy hova álljon be.

⇒ nagy lesz a beáll ingadozás, akkor a szomszéd:
⇒ erős korreláció, divergens korrelációs hossz, nagy fluktuáció.

Az Ising-modell szimulációja

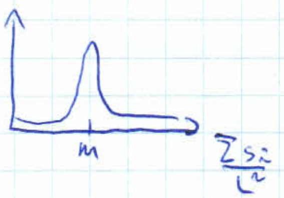
$$Z(\beta J, \beta H) = \sum_{\{s\}} \exp\Big(\overset{j}{\widetilde{\beta J}} \sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j + \overset{h}{\widetilde{\beta H}} \sum_i s_i\Big)$$

összes konf

$$m = \langle s_i \rangle = \Big\langle \frac{\sum_i s_i}{L^2} \Big\rangle = \frac{1}{L^2} \frac{\partial \ln Z}{\partial h}\Big|_{h=0}$$

A kritikus pont megtalálható az egzakt mo. alapján: $j_c = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

Elméleti számolgatás sok velük, de nem szükséges. Az m eloszlás:



Ha tudunk egy olyan módszert találni, ami mindig az eloszlás csúcsánál mintavételez, az jó lenne.

MH-algoritmus: Vegyünk egy véletlen bolyongást a konfig térben, ahol az előf. valószínűség $\frac{e^{-\beta E[s]}}{Z}$. $\to S_1, S_2, S_3 \dots$

Ekkor a átlag egyszerűen $\langle m_i \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m[S_i]$ mert a valószínűség már a samplingben benne van.

a bizonytalanság általában $\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}}$

a Véletlen bolyongás meghatározza az $s_i \to s_j$ átmenetek valószínűségét. jelöljük $T(i\to j)$-vel.

Leírom ezt, hogy ha bizonyos tulajdonságok esetén $T(i\to j)$ fixpontja a kívánt eloszlásnak. (1) $\forall i \ \sum_j T(i\to j) = 1$

(2) $\forall j \ \ p_j = \sum_i p_i T(i \to j)$

(3) $\forall i$ amely $p(i) \neq 0$ legyen elérhető $\forall j$-ből >0 valószínűséggel.

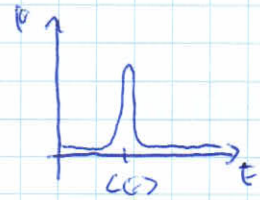
Látni fogunk egy konkrét $T(i\to j)$-t, ami ezeknek jó.

RENORMÁLÁS
2. előadás (09.19.)

Véletlen bolyongást használunk a konfig. térben úgy, hogy az i konfig valség

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$ legyen.

Ezzel a konfig-ok csak töredékét fogjuk látni, de azok a lényeges tartományból.



$T(i \to j)$: Az i-ből j-be jutás valsége.

Mi legyen $T(i \to j)$, hogy a határeloszlás p_i legyen?

Beláttató, hogy a múlt órai kritériumoknak megfelelő T-k ilyenek.

Egy egyszerű $T(i \to j)$ konstrukció:

- Legyen $\forall i,j$-re: $p_i T(i \to j) = p_j T(j \to i)$ (részletes egyensúly)

Ha összegzünk i-re:

$$\sum_i p_i T(i \to j) = \sum_i p_j T(j \to i) = p_j \overbrace{\sum_i T(j \to i)}^{1} = p_j$$ és épp a (2) felt.

<u>Metropolis-algoritmus</u>

Ising-modellre, de általánosítható másra.

1) véletlenszerűen választunk egy spint
2) átfordítjuk $\min(1, e^{-\beta \Delta E})$ valószínűséggel, ahol ΔE az energia megváltozása az átfordítás után

HF: Lássuk be, hogy ez teljesíti a részletes egyensúlyt, ha $p_i \sim e^{-\beta E_i}$

Felmerülő kérdések:

(1) Ez egy lassú folyamat, mert egy spin forgatása után ΔE kicsi, ezért lassú a konvergencia. Hogyan lehet gyorsítani?

egy lépésben többször ismételjük (1-2)-t, ne csak egyszer.

(2) Oké, kapunk egy eredményt, de mekkora a bizonytalanság?

A minták korreláltak, tehát a szokásos empirikus szórás képlete nem jó.

Korrelált mérés bizonytalanság:

$x_1, x_2, \dots x_n$. az átlag. $\langle x \rangle = \frac{\sum_i x_i}{n}$

x_i-k bizonytalanság: $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}$

mérés bizonytalanság: $\Delta x = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n-1}}$

DE számoljuk ki az alábbit:

$$y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_3+x_4}{2} \quad \dots \quad y_{n/2} = \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$$

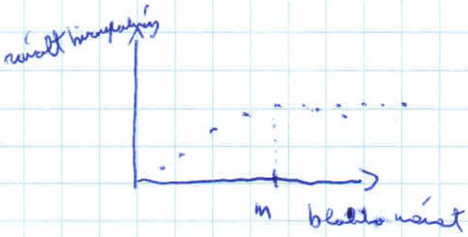
Ekkor $\langle y \rangle = \langle x \rangle$ és $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}$, $\Delta y = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{n/2-1}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2/2}{n/2-1}} \approx \Delta x$

Ez nem meglepő, hisz u.a. információ.

DE mi van, ha x-ek korreláltak? Akkor pl. a közeli x-ek hasonlók, így az y-ok már kevésbé lesznek korreláltak.

Folytatva a „blokkolást” $z_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z_2 = \frac{y_3+y_4}{2}$ ....

a becsült változó bizonytalansága nő.

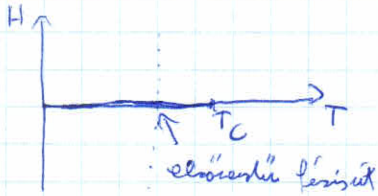


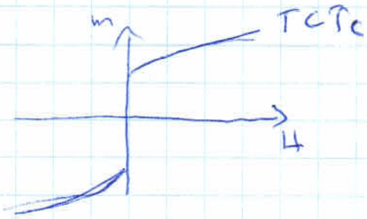
Interpretáció: Hiába mérünk n db-ot, a korrelált információ csak n/m független méréssel ekvivalens.

RENORMÁLÁS

3. előadás (09.26.)

2D-s Ising-modell kritikus pontja



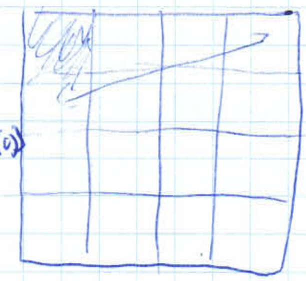


spontán szimmetriasértés

$$m = \lim_{H\to 0} \lim_{V\to\infty} m(V, H, T<T_c) \neq 0$$

De ha a két lim-t felcseréljük, akkor $=0$.

Miért van probléma véges méretnél? Azért, mert ha felosztjuk véges részekre, amelyek nem korreláltak:



$$G(\vec{r}) = \langle S(0)\cdot S(\vec{r})\rangle - \langle S(0)\rangle\langle S(0)\rangle$$

általában: $G(r) \underset{r\to\infty}{\sim} e^{-r/\xi}$

ahol ξ: a korrelációs hossz. véges ξ-vel.

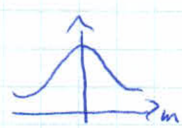
A termodinamikai limesz jelentése, hogy $L \gg \xi$ (L: a lineáris méret)

Ekkor tehát végtelen olyan blokkra bontható a rendszer, amelyek függetlenek.

De ha $\xi\to\infty$, akkor az egész rendszer korrelált. (T_c-nél ez van)

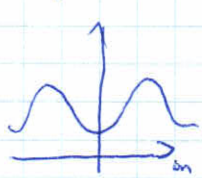
Mi történik $T>T_c$, $T\to T_c$ esetén (rögzített L)

$$m = \frac{\sum S_i}{L^2}$$ egy 0-közepű eloszlású lesz



Ahogy $T\to T_c$, úgy ξ nő, és egyre nagyobb blokkok lesznek.

Ha $\xi>L$, és az egész rendszer egy blokk. m eloszlás továbbra is szimmetrikus, de kétpúpú



Ha ezután megnöveljük L-et eléggé, mindenképpen az egypúpú esetben leszünk $T>T_c$ esetén.

$T < T_c$ alatt viszont

véges L növelésével a két csúcs egyre szűkebb lesz.

$\Rightarrow$ véges L-nél nem lehet eldönteni, hogy T_c alatt vagy felett vagyunk, mert u. o. látjuk.

Ha viszont $H > 0$, akkor az egyik csúcs nagyobb, és a termodinamikai limeszben a másik csúcs eltűnik, és azután már eltüntethető H. (Az E különbség $\pm m$ között $\sim V$)
mert kell előbb $V \to \infty$, és csak $H \to 0$.

Szuszceptibilitás: $\left[\left\langle \frac{\sum s_i}{V} \frac{\sum s_j}{V}\right\rangle - \left\langle \frac{\sum s_i}{V}\right\rangle^2\right]$ $\leftarrow$ ξ az m eloszlás szélessége

Tudjuk, hogy $\sigma^2 \sim \frac{1}{V}$ $\Rightarrow$ $\sigma^2 V = \chi$ véges

DE kritikus pontban $\chi \to \infty$.

1D Ising-modell hom.-hossza

- periodikus HF
- $J = 1$
- $\frac{J}{kT} = \beta$

$$Z = \sum_{s_1=-1}^{1} \sum_{s_2=-1}^{1} \cdots \sum_{s_N=-1}^{1} e^{\beta \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1}} =$$ Használjuk fel, hogy $e^{\beta s_i s_{i+1}} =$

$$= \mathrm{ch}\,\beta + s_i s_{i+1}\, \mathrm{sh}\,\beta$$

$\forall s_i, s_{i+1}$ párra.

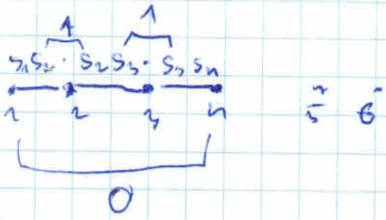
$$= \sum_{s_1=\pm1} \cdots \sum_{s_N=\pm1} \prod_{i=1}^{N} \left(\mathrm{ch}\,\beta + s_i s_{i+1}\, \mathrm{sh}\,\beta\right) =$$

$$= \sum_{[s]} \left(\mathrm{ch}^N \beta + \mathrm{ch}^{N-1}\beta\, \mathrm{sh}\,\beta\, (s_1 s_2 + \cdots) + \mathrm{ch}^{N-2}\, \mathrm{sh}^2\beta\, (s_1 s_2 s_3 s_4 + \cdots) \right) = 2^N \mathrm{ch}^N \beta + \text{valami}$$

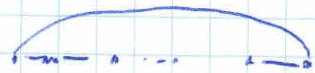
Mivel $\sum_{s_1} \sum_{s_2} s_1 s_2 = \sum_{s_1} s_1 \cdot \sum_{s_2} s_2 = 0$, minden vonatlan tag 0.

Minden $s_i s_{i+1}$-t reprezentálj egy vonallal.
- Ha egy vonal lett egy helyen akkor $= 0$
- Ha két vonal lapozódik $s_i \cdot s_i = 1$

$\Rightarrow$ Csak az a-tag marad, amikor az összes elem össze van kötve, ill. amikor



el kontinuál Tg:



$$Z = 2^N \left(ch^N\beta + sh^N\beta \right)$$

$$\langle S_i \cdot S_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{[S]} S_i \cdot S_{i+r}\, e^{\beta \sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1}} =$$ a módon u.a. mint az előbb, csak az i-ik és $i+r$-ik között olyanból van egy él.

$$= \frac{2^N}{Z(\beta)} \left(ch^{N-r}\beta \cdot sh^r\beta + ch^r\beta \cdot sh^{N-r}\beta \right) =$$

$$= \frac{th^r\beta + th^{N-r}\beta}{1 + th^N\beta} \xrightarrow[N\to\infty]{} th^r\beta$$

$\langle S_i \rangle = 0$, mert akkor mindig páratlan S_i faktor van.

Tehát a korr. hossz: $th^r\beta = C e^{-r/\xi} \Rightarrow r \ln th\beta = \ln C - \frac{r}{\xi}$

$$\Rightarrow \forall r \Rightarrow C = 1 \qquad \xi = -\frac{1}{\ln th\beta}$$

Renormálási csoport módszer alapötlete

Hogyan írjuk le a rendszert egy másodrendű fázisátalakulási pont közelében?

T_c-hez közel nagy a korrelációs hossz $\Rightarrow$ nagy, korrelált blokkok

Mivel a blokkok együtt korreláltak, ezért tekintsük inkább a blokkokat, mint egységet, és vizsgálódjunk csak a blokkállapotokkal! Milyen KH van a blokkállapotok között? (Feltéve, hogy a renormált mennyiségek u.a.-k)

RENORMÁLÁS

4. előadás (90.03.)

Renorm csoport alapötlete

Blokkoljuk a változókat, és tekintsük csak a blokkváltozókat!

Mi az a modell, ami a blokkspinekkel u.a. infó-t hordozza, mint az eredeti?

Mit jelent pontosan a blokkolás?

$$[s] \longrightarrow [s']$$

finom rácson spin-konfig.   durva rácson spin konfig.

Ez a leképezés nyilván nem invertálható, mert több s-hez tartozik u.a. s'.

Boltzmann-súlyok: $e^{-E[s]} \longrightarrow e^{-E'[s']}$ kérdés, hogy mi legyen az $E'[s]$ fv.

Def-juk az alábbit $T([s'],[s]) := \begin{cases} 1 & \text{ha } [s] \to [s'] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

és legyen $e^{-E'[s']} = \sum_{[s]} T([s'],[s]) \cdot e^{-E[s]}$ $\Rightarrow$ Z u.a. lesz, így a hosszútávú fizika is

E paramétereit jelöljük K-val (ez lehet több is).

Az E' paramétereit hasonlóképpen K'_b, ahol b a blokkok mérete.

Tehát a blokkolásra tekinthetünk a $K \to K'_b$ leképezésként.

Az tudni, hogy $\xi' = \frac{\xi}{b}$ (feltéve, hogy r-t a rácsállandókban mérjük)

DE ha $T = T_c$, akkor $\xi = \infty \Rightarrow \xi' = \xi$

Ha különböző b-kre definiáljuk a blokkolást, akkor a $K'(b)$ fv egy trajektóriát ad meg a csatolások terében. Mi van egy olyan rendszerben, ahol létezik kritikus pont? Ez azt jelenti, hogy a csatolásokat meghatározott módon kell hangolni $\Rightarrow$ A K-térben egy alacsonyabb dimenziós felület felel meg a kritikus állapotnak

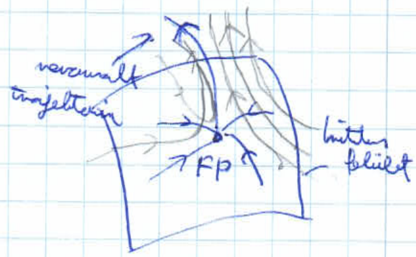
TFH ∃K paraméterválasztás, amire $K_b' = K$ ∀b-re. (fixpont)

(tipikusan van ilyen)

Ilyenkor a korrelációs hossz $\xi = 0$ vagy $\xi = \infty$, hisz az nem változhat.

Az utóbbi eset épp a kritikus felületen van, az érdekel minket.

Mi történik a fixpont környezetében lévő trajektóriákkal?



- Ha ξ véges, és b-t növeljük, akkor távolodik.
- Ha ξ végtelen, akkor a felületen belül marad.

TFH: A felületen belül a fixpont stabil!
(sok valós rendszer ilyen)

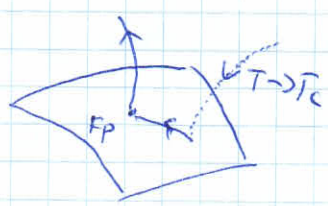
- A „majdnem kritikus" rendszerek egy ideig közelednek a fixponthoz, majd utána távolodnak a vastagított trajektória közelében.

⇒ A FP után közvetlen tehát minden kezdeti „majdnem kritikus" rendszerben u.a. hosszútávú fizika történik a kezdeti K-tól függetlenül

univerzalitás: Akárhogyan kezdtük a kritikus állapotot, a blokkolás után u.a. lesz. (pl.: a ξ ugyanúgy fog divergálni)

Megjegyzések:
1) Sokféle renormcsoport trafó létezik.
2) A FP helyzete függ a blokkolástól
3) A FP létezése és tulajdonságai (stabil és instabil irányok száma) nem függ a blokkolástól

Nézzük kvantitatívan!



Tartsunk $T \to T_c$-hez, és nézzük a $\xi(T-T_c)$ függést

A tapasztalat, hogy kritikus exp-k vannak, és ezek univerzálisak

$$\xi(T-T_c) \sim (T-T_c)^{-\nu}$$

tipikusan a tér dim-től és a rend. fok. szimmetriájától függnek.

Ide: rend. fok. szimmetriájától

Tudjuk, hogy $\frac{\xi(T-T_c)}{b} = \xi_0$

Mivel ξ_0 adott, ezért b is függ $T-T_c$-től

⇒ itt is látszik, hogy a blokkolás függ a kezdeti pontától.

$$\Rightarrow \quad \frac{\xi(T-T_c)}{b(T-T_c)} = \xi_0 \quad \Rightarrow \quad \xi(T-T_c) = \xi_0\, b(T-T_c) \sim (T-T_c)^{-\nu}$$

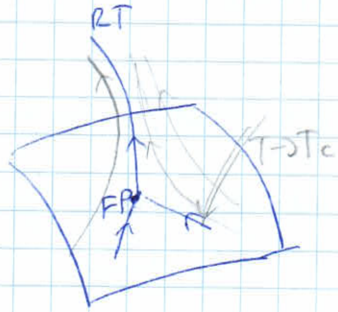
$\Rightarrow$ A korrelációs hossz tehát divergál ahogy T_c-hez közelítünk

Látni fogjuk, hogy a FP közelében tölt el sok időt a közeli trajektória.
↳ ez fog divergálni

$\Rightarrow$ A kritikus viselkedést a renormcsoport transzformáció fixpont körüli viselkedése határozza meg. Ez az oka valahol az univerzalitásnak is.

RENORMÁLÁS

5. előadás (10.10.)



A T_c-hez közeli trajektóriák adott renorm-trafó után a fix pont közelében lesznek. Minél közelebb vannak T_c-hez, annál több időt tölt el FP közelében.

Vizsgáljuk csak FP környezetét, és $T \to T_c$ után a viselkedés ellen fog tartani.

Linearizált renormcsoport-trafó az FP közelében

csatolások: $g = (g_1, g_2, \dots)$

renorm trafó: $g \to g' = R_b(g)$

fixpont g^*: $R_b(g^*) = g^*$ $\forall b$-re.

lineáris közelítés: $g'_i - g^*_i = \sum_j T_{ij} (g_j - g^*_j)$ ahol $T_{ij} = \frac{\partial R_{bi}}{\partial g_j}(g^*)$

TFH T_{ij} diagonalizálható, és ismerjük meg a sajátirányokat!

Ezen $\alpha^{(k)}$ a sajátvektorok:
$$\sum_j T_{ji} \alpha_j^{(k)} = \lambda^{(k)} \alpha_i^{(k)}$$

Legyen $u^{(i)} := \sum_j \alpha_j^{(i)} (g_j - g^*_j)$

Ennek a trafója: $$u^{(i)'} = \sum_j \alpha_j^{(i)} (g'_j - g^*_j) = \sum_j \alpha_j^{(i)} \sum_k T_{jk} (g_k - g^*_k) =$$
$$= \sum_k \lambda^{(i)} \alpha_k^{(i)} (g_k - g^*_k) = \lambda^{(i)} u^{(i)}$$

Tudjuk, hogy ha $b = 1$, akkor $\lambda = 1$, hiszen ekkor nem csináltunk semmit.

Mi van, ha először b-vel, majd μ-vel blokkolunk? U.a.-nak kell lennie, mint a $b \cdot \mu$-vel való blokkolásnál.

$\Rightarrow \lambda(b \cdot \mu) = \lambda(\mu)\lambda(b)$

Deriváljuk μ szerint: $b \cdot \lambda'(b\mu) = \lambda'(\mu)\lambda(b)$

$\mu = 1$ esetén: $b\lambda'(b) = \lambda'(1) \cdot \lambda(b) \Rightarrow \lambda(b) = C \cdot b^{\lambda'(1)}$

Mivel $\lambda(1) = 1 \Rightarrow C = 1$

Tehát $\lambda^{(i)}(b)$ függvény: $\lambda^{(i)}(b) = b^{y_i}$

3 eset:
- $y_i > 0 \Rightarrow |u^{(i)}|$ nő a blokkolás során
- $y_i < 0 \Rightarrow |u^{(i)}|$ csökken a blokkolás során
- $y_i = 0 \Rightarrow$ lineáris rendben nem változik $|u^{(i)}|$

$u^{(i)}$-k: skálázó változók. Ezek lehetnek
- relevánsak $(y>0)$
- irrelevánsak $(y<0)$
- marginálisak $(y=0)$

$\Rightarrow$ A kritikus hiperfelületben lévő irányok irrelevánsak.

A kritikus hiperfelületre merőleges irányok a relevánsak. Ezeket kell hangolni.

Hogyan használjuk ezt kritikus viselkedés leírására?

Legyen egyetlen csatolás (u), és ez legyen releváns.

Mi történik, ha u-t közelítjük a fixponthoz?

Legyen u_0 rögzített, és blokkoljuk u-t addig, amíg $u' = u_0$

$\left(\text{pl. } u = \frac{T-T_c}{T_c}\right)$

TFH u és u_0 is elég közel van FP-hoz, és linearizálhatunk.

$u \xrightarrow{b(u)} u_0$. Előző óra miatt: $\xi(u_0) = \frac{\xi(u)}{b(u)}$

Mai óra miatt: $u_0 = b(u)^{y}\, u$ $\Rightarrow$ $b(u) = \left(\frac{u_0}{u}\right)^{1/y}$

$$\Rightarrow \xi(u) = \xi(u_0)\, b(u) = \underbrace{\xi(u_0)\, u_0^{1/y}}_{\text{konstans}}\, u^{-1/y}$$

Mivel $\xi \sim u^{-\nu} \Rightarrow \underline{\nu = \frac{1}{y}}$

Nézzük meg ugyanezt a fajhővel! Ehhez a szabadenergia kell.

Mivel $F = -kT \ln Z$, és mivel Z megmarad átskálázás során, F is.

$$\Rightarrow F(u) = F(u_c) \quad *$$

A szabadenergia sűrűség viszont a V-vel való osztás: $f = \frac{F}{V}$

$$f(u) = \frac{F}{V}, \qquad f(u_c) = \frac{F}{Vb^{-d}} \Rightarrow f(u) = f(u_c)\, b^{-d} = f(u_c) \left(\frac{u_c}{u}\right)^{\frac{d}{y}}$$

A fajhő: $c \sim \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \sim \frac{d^2}{du^2}\left(u^{d/y}\right) \sim u^{\frac{d}{y}-2}$

Mivel $c \sim u^{-\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha = 2 - \frac{d}{y}}$

A kettő exponens tehát nem független: $\alpha = 2 - \nu d$ ← hiperskálatörvény

Általában minden kritikus exponens kifejezhető a releváns y-k segítségével. Mivel több exponens van, mint y ⇒ skálatörvények.

$$F = -kT \ln Z(\beta, V)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -k \ln Z - kT(-U)\left(-\frac{1}{kT^2}\right) = -k \ln Z - U \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -k \frac{\partial \ln Z}{\partial T} - \frac{\partial U}{\partial T} \cdot \frac{1}{T} + U \frac{1}{T^2} = \underbrace{-k(-U)\left(-\frac{1}{kT^2}\right)}_{-\frac{U}{T^2}} - \frac{\partial U}{\partial T} \frac{1}{T} + U \frac{1}{T^2} = -\frac{1}{T} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial T}}_{c_V}$$

$$\Rightarrow c_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sim T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$$

*: ugyan a T változik a átskálázás során, de mivel $T \to T_c$ van, ezért az csak egy konstans szorzó

RENORMÁLÁS
6. előadás (10.15.)

Nézzük az 1D Ising modellt blokkolással

$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad \dots \quad s_n$

A blokktrafót úgy kapjuk, hogy minden másodikat kiszedjük

$s_1 \quad s_3 \quad s_5$

$$Z = \sum_{s_1=\pm1} \sum_{s_2} \cdots \sum_{s_n} (\mathrm{ch}\beta + s_1 s_2\, \mathrm{sh}\beta)(\mathrm{ch}\beta + s_2 s_3\, \mathrm{sh}\beta) \cdots$$

Amikor s_2-re összegzünk: $\sum_{s_2} (\mathrm{ch}\beta + s_1 s_2\, \mathrm{sh}\beta)(\mathrm{ch}\beta + s_2 s_3\, \mathrm{sh}\beta) =$

$$= \sum_{s_2} \Big[\mathrm{ch}^2\beta + s_1 s_3\, \mathrm{sh}^2\beta + \underbrace{s_2(\cdots)}_{\text{az összegzés után } = 0}\Big] = 2(\mathrm{ch}^2\beta + s_1 s_3\, \mathrm{sh}^2\beta)$$

Miután az összegzést elvégeztük a párosakra, csak a páratlanok maradnak

$\Rightarrow$ A fele ennyi spinre u.a. KH-t kapjuk.

Az új csatolás def-je: $\left.\begin{matrix} \mathrm{ch}^2\beta = C\cdot \mathrm{ch}\beta' \\ \mathrm{sh}^2\beta = C\cdot \mathrm{sh}\beta' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{th}\beta' = \mathrm{th}^2\beta$

Mi van, ha egyszerre több spint integrálunk ki?

$s_1 \quad s_{b+1} \quad s_{2b+1}$

ugyanilyen módon belátható, hogy $\mathrm{th}\beta' = \mathrm{th}^b\beta$

$\Rightarrow$ Tehát a „renormálás": $g := \mathrm{th}\beta \Rightarrow g' = g^b$

$g = 0$ stabil FP $(T \to \infty)$

$g = 1$ instabil FP $(T \to 0)$

Valóban, véges T-nél nincs kritikus, de $T \to 0$ esetén igen.

Linearizáljuk a trafót $y = 1$ körül.

$$u := 1-y \quad \Rightarrow \quad u \ll 1$$

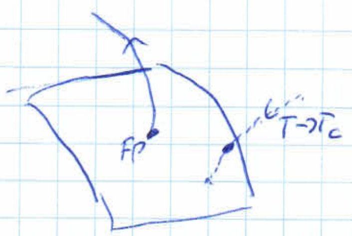
$$u' = 1-y' = 1-y^b = 1-(1-u)^b = bu + \mathcal{O}(u^2) \Rightarrow y = 1$$

$$\nu = 1$$

ellenőrzés: korábban láttuk, hogy

$$\xi = -\frac{1}{\ln \operatorname{th}\beta} = -\frac{1}{\ln(1-u)} \approx \frac{-1}{-u} = u^{-1} \quad \checkmark$$

Irreleváns csatolások szerepe



Általában sok csatolás van, mert a blokkolás is generálhat új csatolásokat.*

*: mert az új rendszer csak akkor lehet ekvi. a eredetivel, ha vannak plusz csatolások.

TFH: 1 db releváns csatolás van $\Rightarrow$ 1 kontrollparaméterrel lehet [illegible]

- A kritikussá tett rendszer nincs a FP közelében
  - $\Rightarrow$ nem használhatjuk a lineáris közelítést
  - $\Rightarrow$ másak a skálázó csatolások

Blokkoljuk a rendszert úgy, hogy lejjebb FP közelébe! Ha $t \to t_c$, akkor a sűrűség, b annál kevésbé függ g-ktől minél közelebb van t_c-hez

A blokkolt rendszer már jellemezhető az $\underset{y>0}{u}, \underbrace{g_1, g_2, \dots}_{y<0}$ skálázó változókkal

Mivel a blokkolás véges, a csatolások analitikus fv-eit-nek: $u(t), g_1(t), g_2(t), \dots$

Mivel $t \to 0$ esetén $u \to 0$, ezért $u(t) \sim t + \mathcal{O}(t^2)$

analógia — A lényeg: Előző órán u-val dolgoztunk, ha a egy absztrakt csere a FP közelében, de most már látjuk, hogy u és t arányos mozdulnak u.a., tehát a t-vel is ugyanúgy lehet számolni u.a.-t.

Skálázzuk a rendszert tovább a RT mentén egy referenciapontban.

$$\xi(\underset{u_0}{\overset{\parallel}{u'}}, g_1', g_2' \dots) = \frac{1}{b}\,\xi(u, g_1, g_2 \dots) = \xi_0$$

$$u' = u \cdot b^{y}$$

$$g_1' = g_1 b^{y_1}$$

$$g_2' = g_2 b^{y_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Rightarrow \xi(u, g_1, g_2, \dots) = b\,\xi(u_0, g_1 b^{y_1}, g_2 b^{y_2}, \dots)$$

Mivel $b = u_0^{1/y} \cdot u^{-1/y}$ ezért

$$\xi(u, g_1, g_2, \dots) = u_0^{1/y}\, u^{-1/y}\, \xi\left(u_0, g_1\left(\frac{u_0}{u}\right)^{y_1/y}, g_2\left(\frac{u_0}{u}\right)^{y_2/y}, \dots\right)$$

Mivel $y_i < 0$, ezért a $g_i\left(\frac{u_0}{u}\right)^{y_i/y} \to 0$, tehát a vezető rendet az adja, ami a múltkor, de a ξ többi változója adhat még járulékot, csak kisebbet.

Az asszimptotikus viselkedés tehát $\nu = \frac{1}{y}$ + korrekciók.

RENORMÁLÁS
7. előadás (10.17.)

Klaszter-algoritmus (Wolff-féle klaszter-algoritmus)

A MH-algoritmussal az a baj, hogy $T \to T_c$ esetén $\xi \to \infty$, ezért a lokális algoritmus lassul, mert az óriási méretű klaszterek lassan váltanak.

Kritikus lelassulás: ez a jelenség minden lokális algoritmus nehézsége.

Megoldás: • Próbáljunk egyszerre több spint átfordítani!

elfogadási valsége a korábbiak alapján: $e^{-\beta N_{\text{átfordítandó}}}$

DE mivel N nagy, ezért egyszerre egyszerre csak kevés spint fordítanánk át.

• Ne véletlenszerűen, hanem klasztereket fordítsunk át!

Ez ezért is jó, mert a valsz. $e^{-\beta N_{\text{széle}}}$

+ ötlet: Növeljük a klaszter méretét úgy, hogy 1 legyen az átfordítás valsége.

Lépések: 1) Véletlenszerűen választunk egy spint: $C = \{s_i\}$

$s := s_i$

2) s_i elsőszomszédai közül megnézzük, melyek állnak s irányba, és mindegyiket p valséggel hozzácsapjuk őket a klaszterhez

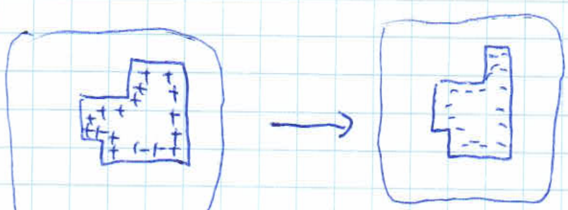
3) Az újonnan bekerült spinek ~~addig még nem vizsgált~~ szomszédait is p valószínűséggel hozzácsapjuk a klaszterhez

4) A 3. lépést ismételjük addig, amíg már nem adunk hozzá egy új spint sem.

5) A klasztert átfordítjuk

Kérdés: Hogyan válasszuk p-t, hogy a részletes egyensúly teljesüljön?

$p_a T(a \to b) = p_b T(b \to a)$ ahol p_a és p_b a Boltzmann-súly, T pedig az átmeneti valség



a b

Ami a két állapot között változik, az a határon való kH.

n_{az}: A klaszter irányával azonos irányba mutató szomszédok száma

n_e: A klaszter irányával ellentétes irányba mutató szomszédok száma

$$\frac{p_b}{p_a} = e^{-\beta(E_b - E_a)} \qquad \text{ahol} \qquad \begin{aligned} E_a &= E_{kint} + E_{bent} - n_{az} + n_e \\ E_b &= E_{kint} + E_{bent} + n_{az} - n_e \end{aligned}$$

$$\frac{p_b}{p_a} = e^{-2\beta(n_{az} - n_e)}$$

$$T(a \to b) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ez nem bonyolult amúgy}}}{Pr(\text{A C-beli spinek kiválasztása})} \cdot \underbrace{Pr(\text{A szomszédos azonos irányú spinek nem választása})}_{(1-p)^{n_{az}}}$$

ugyanígy $T(b \to a) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ez u.a. mint az előbb}}}{(\cdots)} \cdot (1-p)^{n_e}$

A cél, hogy p legyen olyan, hogy $\frac{p_b}{p_a} = \frac{T(a \to b)}{T(b \to a)} = \frac{(1-p)^{n_{az}}}{(1-p)^{n_e}}$
$\stackrel{!}{=} e^{-2\beta(n_{az} - n_e)}$

$$\Rightarrow p = 1 - e^{-2\beta}$$

Konkrét program lépései (nagy vonalakban):

1) Választunk egy spint: s_i, és eltároljuk az irányát: $s_c := s_i$
és bevezetünk egy listát: list := [s_i]

2)
```
While (list nem üres) {
    newlist := []
    for s in list {
        for t in s.szomszédok {
            if (t = s_c) fordítjuk át t-t p valószínűséggel
            if (t átfordult) newlist += [t]
        }
    }
    list = newlist
}
```

Az Ising modell analitikus eredménye egyébként:

$$m = \left[\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,(1-6x^2+x^4)^{1/2}\right]^{1/4} \qquad \text{ahol} \quad x = e^{-2\frac{J}{kT}}$$

Ising-modell

Itt már 2 kontroll paraméter van: T és H. $\quad t = \frac{T-T_c}{T_c} \quad h = \frac{H}{kT}$

$\Rightarrow$ 2 releváns skálázó változó: $u_t \sim t$

$u_H \sim h$

Elvileg semmi nem garantálja azt, hogy a FP körüli sajátirányok ortogonálisan legyenek a kontrollparaméterekre, csak az azok lin. kombinációja.

$$u_1 = \alpha_{11} t + \alpha_{12} h$$
$$u_2 = \alpha_{21} t + \alpha_{22} h$$

DE ha úgy választjuk a skálaváltozókat, hogy megőrizze a szimmetriát, akkor csak diagonális tagok lesznek $\neq 0$-k.

$\Rightarrow$ lesz majd y_H és y_t, és a kritikus exp.-k ezekkel lesznek kifejezhetők.

például, amit megmérünk: $m \sim \frac{\partial f}{\partial h} \qquad m(t, h\to 0) \sim t^{\beta}$

$\chi \sim \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \qquad \chi(t, h\to 0) \sim t^{-\gamma}$

RENORMÁLÁS

8. előadás (10.24.)

Ising-modell több releváns csatolással.

$$t = \frac{T-T_c}{T_c} \qquad h = \frac{H}{kT} \qquad \begin{matrix} u_t \sim t \\ u_h \sim h \end{matrix}$$ a fixpont közelében

$$f(t', h', \dots) = b^d f(t, h, \dots)$$

egy irreleváns csatolás példa

lin. köz.

$$= f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b^{y_1} u_1, \dots)$$

$$\Rightarrow f(t, h, u_1, \dots) = b^{-d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b^{y_1} u_1, \dots)$$

Válasszuk b-t úgy, hogy $t' = b^{y_t} t = t_0$ rögzített legyen!

$$\Rightarrow b = t_0^{1/y_t} t^{-1/y_t}$$

$$f(t, h, u_1, \dots) = t_0^{-d/y_t} t^{d/y_t} f(t_0, t_0^{y_h/y_t} t^{-y_h/y_t} h, \underbrace{t_0^{y_1/y_t} t^{-y_1/y_t} u_1}_{\substack{\text{A kritikus pont közelében} \\ \to 0}}, \dots)$$

Tehát a kritikus pont közelében az irreleváns csatolástól f nem függ

$$f(t, h, u_1, \dots) \sim t^{d/y_t} \tilde{f}(t^{-y_h/y_t} \cdot h)$$

ez f, ahol t és $u_1, \dots$ konstans.

$$m \sim \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h\to 0} = t^{d/y_t} \cdot t^{-y_h/y_t} \cdot \tilde{f}'(0) \sim t^{\frac{d-y_h}{y_t}} \Rightarrow \underline{\beta = \frac{d-y_h}{y_t}}$$

$$\chi \sim \left.\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}\right|_{h\to 0} \sim \left.\frac{\partial}{\partial h}\left[t^{\frac{d-y_h}{y_t}} \tilde{f}'(t^{-y_h/y_t} h)\right]\right|_{h\to 0} \sim$$

$$\sim t^{\frac{d-2y_h}{y_t}} \tilde{f}''(0) \Rightarrow \gamma = \frac{2y_h - d}{y_t}$$

Ez szép exakt eredmény, de csak aszimptotikusan igaz. Hogyan lehet numerikusan kiszámolni?

Ugyan csak véges rendszerünk van, de vizsgáljuk meg, hogyan függ a lényeges infót hordozó mennyiség a rendszermérettől

$$f(t,h,L^{-1}) \xrightarrow[\text{blokkolás}]{} f(t',h',L'^{-1}) = b^{d} f(t,h,L^{-1})$$

$$f(t,h,L^{-1}) = b^{-d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b L^{-1})$$

A kritikus pontban $L^{-1}=0$, és ezért további L^{-1} irányban, mivel egy releváns csatolás lenne $y_L = 1$-gyel.

Legyen $t_0 = t b^{y_t} \Rightarrow b = t_0^{1/y_t} t^{-1/y_t}$

Kifejezve u.a.-t:

$$\chi \sim t^{\frac{d-2y_h}{y_t}} \cdot \tilde{f}\left(t^{-1/y_t} \cdot L^{-1}\right)$$

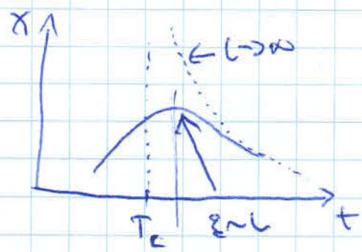
az előző $\hat{f}$ kiterjesztése, és dominált az $h \to 0$ limeszben

A korr. hossz $\xi \sim t^{-\nu}$ volt, ahol $\nu = \frac{1}{y_t}$, tehát a $\tilde{f}$ csak a ξL^{-1} arányától függ.

Tehát $\chi(t, L^{-1}) \sim t^{-\gamma} \cdot g(t^{-\nu} L^{-1})$

- $L \to \infty$ esetén χ divergál $t \to 0$-nál
- Ha L nagy, de nem ∞, nézzük mi történik t változtatásával

amikor a ξ eléri L-et, a fluktuációk nőni(?) ..., ezért a χ csökkenni fog



Minél nagyobb a rendszer, annál inkább esik a maximum T_c-hez.

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\gamma t^{-\gamma-1} g(t^{-\nu} L^{-1}) + t^{-\gamma} g'(t^{-\nu} L^{-1}) L^{-1} (-\nu) t^{-\nu-1} =$$

$$= t^{-\gamma-1}\left[-\gamma g(t^{-\nu} L^{-1}) - \nu g'(t^{-\nu} L^{-1}) L^{-1} t^{-\nu}\right]$$

itt minden csak $t^{-\nu} L^{-1}$-től függ.

~~Keressük $\chi(t)$ maximumát $t^{\nu} L^{-1}$ függvényében~~

Ha a fenti derivált zérushelye $x_0 = t_0(L^{-1})^{-\nu} L^{-1}$-nél van, akkor

$t_0(L) = x_0^{-1/\nu} \cdot L^{-1/\nu}$

$\Rightarrow$ Ha kimérjük a $\chi(t)$ maximumát különböző L-ek esetén, akkor $t_0(L)$ illesztésével meghatározható ν értéke.

$\gamma(t_0(L), L^{-1})$ maximumának értéke

$$\gamma(t_0(L), L^{-1}) \sim t_0^{-\gamma}\, g(t_0^{-\nu} L^{-1}) \sim x_0^{\gamma/\nu} L^{\gamma/\nu} g(x_0)$$

Mivel x_0 konstans, mérhető $\gamma_{max}(L) \sim L^{\gamma/\nu}$-t illesztve γ is meghatározható.

Ez a véges méret skálázás módszere

RENORMÁLÁS

9. előadás (11.07.)

Mágnesezettség eloszlás

$$m = \frac{\sum_i s_i}{V} \qquad \sigma_m^2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 \qquad \chi = \sigma_m^2 \cdot V$$

Független spinek esetén $\sigma_m \sim \frac{1}{\sqrt{V}} \Rightarrow \chi \sim V^0 \Rightarrow \chi$ véges érték a termodinamikai limeszben.

Teljesen korrelált rendszerre $\sigma_m^2 \sim V^0$.

Egy reális esetben a kettő között: $\sigma_m^2 \sim V^{-\vartheta}$ ahol $0 \le \vartheta \le 1$

- ha $\vartheta < 1$, akkor a korrelációs hossz div $\Rightarrow$ a spinek nem függetlenek $\Rightarrow$ CLT nem érvényes $\Rightarrow$ A Gaussnál szélesebb eloszlás lesz.

  $\chi \sim V^{1-\vartheta}$ (Ez egyébként tipikus jellemzője a II. rendű PT-knek)
- ha $\vartheta = 1$ azt láttuk fent
- ha $\vartheta = 0$, akkor két eset van, az állapot be van fagyva, $\langle m \rangle$-nek pedig van egy véges értéke

  $\Rightarrow \chi \sim V$ (ez tipikus az I. rendű PT-nél)

Renormálás QFT-ben

A szabadsági fokok klasszikus során, amik lokálisan hatnak kölcsön.

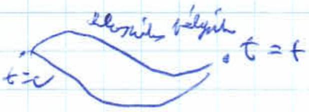
KH leírása hatásfunkcionállal: $S[\phi] = \underbrace{S_0[\phi]}_{\text{kvadratikus}} + \sum_i g_i K_i[\phi]$

A kvadratikus tag írja le a szabad részecskét

A többi felelős a KH-ért.

Kvantálás: sok féle módszer van (pl.: kanonikus), de a legáltalánosabb a pályaintegrál.

Pályaintegrál:



Az átmeneti amplitúdót lehet számolni Schr. amplitúdóval,

de QFT-ben kényelmesebb a klasszikus hatás exp-ét összegezni

$$M \sim \sum_{(\text{traj})} e^{i S_{traj}}$$

generáló funkcionál: $Z([J]) = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi] + \int J(x)\phi(x)\,dx}$

ez analóg a statisztikával, mert $\frac{\partial Z}{\partial J}$-ben a $\phi(x)$ lejön az exp-ből,

és ezzel lehet különböző korrelációs függvényeket számolni.

pl.: Green-fv.-s módszerrel.

$\mathcal{D}\phi$: integrálás az összes klasszikus térkonfigurációra

ez matematikailag nem túl értelmezhető

kétféle def-et szoktak használni:

1) exp-t kifejtjük:

$$e^{iS[\phi]} = e^{iS_0[\phi] + i\sum_i g_i K_i[\phi]} = \underbrace{e^{iS_0[\phi]}}_{\text{Gauss-int.}}\left(1 + i\sum_i g_i K_i[\phi] + \dots\right)$$

ha a csatolás kicsi, akkor a Gauss-os járulék korrekcióit kiszámolhatjuk adott rendben, és ez jó közelítés.

ez azért jó, mert a Gauss-integrált lehet formálisan értelmezni, és ebből fizikai mennyiségeket számolni a csatolási rendekben.

„perturbatív sorfejtés”

y) felosztjuk a téridőt egy diszkrét rácsra, és $\phi(x)$ mező helyett $\phi(x_i)$-eket tekintünk. Ekkor

$$\int \mathcal{D}\phi := \prod_i \int d\phi(x_i)$$

Problémák: 1) · A Gauss-integrál az ami biztos, hogy jól definiált
· a sorfejtés nem mindig konvergens

2) · A rácson minden dimenzióban, tehát a rácsállandó csökkentése nem túl jól értelmezhető.

· Minden fizikai mennyiséget rácsegységekben kapjuk. Ebből viszont tudjuk számolni a rácsállandót, mert a fizikai mennyiség értékét ismerjük.

Hogy válasszunk úgy egy új rácsméretet, hogy az új rácsállandó [illegible] kisebb legyen? Erre a válasz nem triviális

RENORMÁLÁS

10. előadás (11.14.)

Részben áttekintjük a részecsketömegek renormálását, és fogjuk összekötni a QFT-t a statfizzel.

Tömegmérés módja:

- Térjünk át euklideszi térre: $t \to -it$ $\quad (e^{iS} \to e^{-S})$
- részecske keltése $\mathcal{O}$ operátorral, eltüntetése t-ben. Számoljuk ki ennek az amplitúdóját: $\langle 0 | \mathcal{O}(t)\, \mathcal{O}^{+}(0) | 0 \rangle$

  hogy mi az $\mathcal{O}$ operátor, az függ a pontos részecskétől

$$= \langle 0 | e^{tH} \mathcal{O}(0) e^{-tH} \mathcal{O}^{+}(0) | 0 \rangle = e^{tE_0} \langle 0 | \mathcal{O}(0) \overbrace{\sum_n |n\rangle\langle n|}^{1} e^{-tH} \mathcal{O}^{+}(0) | 0 \rangle$$

$$= \sum_n e^{t(E_0 - E_n)} \underbrace{\langle 0 | \mathcal{O}(0) | n \rangle}_{=: c_n} \langle n | \mathcal{O}^{+}(0) | 0 \rangle = \sum_n e^{-t(E_n - E_0)} |c_n|^2 \xrightarrow[t \to \infty]{}$$

Mivel $\mathcal{O}^{+}(0)|0\rangle$ az 1-részecske állapot, ezért csak akkor ~~[illegible]~~ $n=1$, és ekkor $E_n - E_0$ épp a tömeg és ha $t \to 0$, akkor a többi tag elhanyagolható járulékot ad.

$$\Rightarrow \; = \sim e^{-tm} \quad \xrightarrow[t \to \infty]{}$$

Mi a hasonlóság a statfizzel?

Pályaintegrál	stat fiz
$d+1$ dimenziós eukl. tér	$d+1$ dim euklideszi tér
$\Phi(x_i)$ mező fajták	s_i mező fajták
$e^{-S[\Phi]}$ gyenlő függvény	partíciós $Z[s_i]$ függvények
részecske propagálási amplitúdó $\sim e^{-tm}$	korrelációs fv. $\sim e^{-r/\xi}$

a két mennyiség matematikailag teljesen analóg módon számítandó

A rácson számolt tömeg rácsállandóban mért, tehát, hogy fizikai mennyiség legyen, azt be kell szorozni a rácsállandó megfelelő hatványával:

$$m_{fizikai} = \frac{1}{a_{fiz}}\, m_{rács} \Rightarrow a_{fiz} = \frac{m_{rács}}{m_{fiz}}$$ ← ennyi a rácsállandó, azt utólag tudjuk.

Hogyan érjük el, hogy $a_{fiz} \to 0$?

Mivel $m_{rács} = \frac{1}{\xi}$ egy QFT-vel analóg statfizben, ezért $a_{fiz} = \frac{1}{\xi \cdot m_{fiz}}$

tehát $a \to 0$, ha $\xi \to \infty$, vagyis ha a statfiz kritikus

kontinuum QFT $\sim$ statfiz modell másodrendű PhT

A statfiz-beli kritikusságra paramétereket kell jól hangolni, ezek száma = a FP-beli releváns irányokkal

Példa: QCD, két degenerált könnyű kvarkkal. paraméterek: m_q: kvarktömeg
g: mértékcsatolás

két fizikai mennyiség, amihez hangolni akarunk: $m_{\rho\, fiz} \approx 940\,\mathrm{MeV}$
$m_{\pi\, fiz} \approx 130\,\mathrm{MeV}$

$$\left.\begin{aligned} m_{\rho\, fiz} &= \frac{m_{\rho\, rács}(g, m_q)}{a_{fiz}} \\ m_{\pi\, fiz} &= \frac{m_{\pi\, rács}(g, m_q)}{a_{fiz}} \end{aligned}\right\}$$

$\forall g$ esetén $m_q(m_{\rho\, fiz}, m_{\pi\, fiz}, g)$, $a_{fiz}(m_{\rho\, fiz}, m_{\pi\, fiz}, g)$ megoldható (mondjuk)

$m_q(g)$, $a_{fiz}(g)$ ← konstans fizika vonala

$\Rightarrow$ g-t kell hangolni úgy, hogy a modell kritikus legyen, azaz $a_{fiz}(g) \to 0$

Ha elvégeznénk, akkor kiderül, hogy ez $g \to 0$-nál van

Ezek után m_q, g és a_{fiz} értékével már több más mennyiség kiszámolható, becsülhető

Kérdés: hogyan diszkretizáljuk a rácshatást?

jó hír: az univerzalitás miatt a rácsozás részletei nem számítanak a kontinuum limeszben.

nem túl jó hír: véges rácsállandónál a korrekciók függenek a diszkretizációtól.

Általában nagy bonyolult hatás vagy nagy felbontás kell szimmetriák lehetséges szerepe

- ∀ a esetén fennáll a szimmetria (pl.: mértékszimmetria)
- $a \neq 0$ esetén nincs szimmetria
  - $a \to 0$ esetén visszaáll (pl. Poincaré-szimmetria)
  - $a \to 0$ esetén nem áll vissza (pl.: királis szimmetria)

Perturbatív renormálás

Ha nem rácson gondolkodunk, az alábbit is lehet:

$$S[\phi] = S_0[\phi] + \sum_i g_i K_i[\phi]$$

„szabad" kvadratikus

- kölcsönhatási tag
- kicsi g_i

$$\int d\phi\, e^{S} \sim \underbrace{\int d\phi\, e^{S_0}}_{\text{formális Gauss-integrál}} \left(1 + \sum_i g_i k_i + \dots\right)$$

- A sorfejtés tagjai Feynman-gráfoknak felelnek meg
- g-k szerinti kifejtés ≡ hurkok száma szerinti kifejtés
- $\{g_i\}$-ket egyértelműen meghatározzák fizikai mennyiségek adott rendben

DE a hurokintegrálokban vett integrál divergens lehet

megoldás: regularizálás annak több módja van

pl.: • impulzus levágás $p < \Lambda$

• dim regularizáció $d = 4 - \varepsilon$

„paramétereket kell hangolni a levágás adott értéke mellett.

RENORMÁLÁS

11. előadás (11.21.)

perturbatív renormálásnál minden nagyságrendben van szükség:

regularizáció: - levágás $p < \Lambda$

- dim reg $d = 4 - \varepsilon$

A fizikai mennyiségek végesek, de függenek egy paramétertől

$f(\{g_i\}, \Lambda)$ ← impulzus levágás

↑ csupasz csatolás

1) Ki kell mérni annyi fizikai mennyiséget ahány paraméterünk van $\{f_i\}$

2) A csupasz csatolásokat úgy választjuk, hogy a fizikai mennyiségek reprodukálódjanak rögzített Λ-ra: $\Rightarrow$ $g_i(\{f_i\}, \Lambda)$

3) más fizikai mennyiségeket is kiszámolunk g_i-vel

4) $\Lambda \to \infty$ (Ha az elmélet jó, akkor a számolt fizikai értékek úgy is értelmesen maradnak)

Tipikus mennyiségek, amelyekkel rögzítünk: • tömeg (teljes prop. pólusa)

• effektív csatolás

Renormálható KH esetén ez a nagyon véges számú csatolás segítségével a perturbációszámítás bármely rendjében végrehajtható.

DE ez nem mindig van így! Adott KH esetén egyre magasabb rendben számolva kéne újabb és újabb tagokat adni, hogy véges eredményt kapjunk.

Állítás: Egy KH renormálható, ha a megfelelő operátor tömegdimenziója $\leq d$

d: téridő dimenziója

$\Longleftrightarrow$ a csatolás dimenziója ≥ 0

Hogyan függ ez össze a statfizzel?

szabad, nulla tömegű elmélet $\Longleftrightarrow$ Gauss-fixpont

renormálható csatolások $\Longleftrightarrow$ releváns és marginális paraméterek

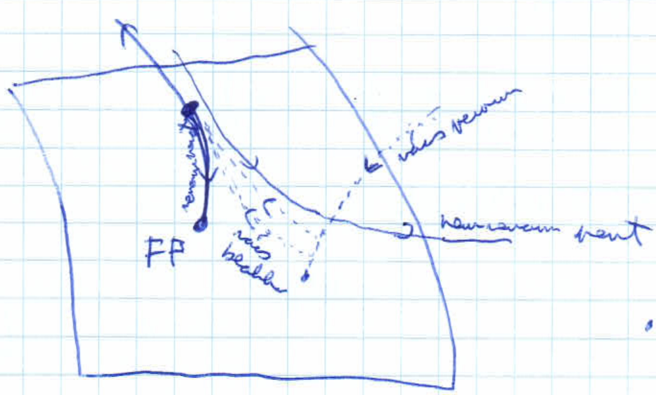
(a tömeg egy releváns irány)

nem renormálható csatolások $\Longleftrightarrow$ irreleváns paraméterek

Ha csak renormálható csatolás van, akkor a cutoff eltüntetése olyan, mintha a a renormált trajektórián mennénk vissza a fixpontba.

Ha vannak nem renormálható csatolások, akkor a cutoff eltüntetésével egyre messzebb kerülünk a fixponttól, mert egyre több csatolás jön be.

Úgy jelentkezik, hogy a magasabb rendekben is egyre több új tag.



- A rácson minden kH működik, mert ott az irreleváns csatolások eltűnnek mindenképpen.

- A perturbatív renormálásnál visszafelé az irány, ott nem jó minden. Ez azért van, mert ott az elején feltételezzük, hogy az elmélet a Gaussi elmélet környékén van.

A perturbatív intuíció onnan jön, hogy tapasztalat szerint a részecskék csoportba lehetnek kötve, de egyébként szabadok. De pl. az erős kH nem ilyen, hiszen ott a nem-fundamentális részecskék egymással vagyunk nem szabadon látszanak kötésben.

(Pl.: 3 MeV tömegű részecskék együtt miért GeV tömegű? És a tömeg nagy része ez.)

RENORMÁLÁS

12. előadás (11.28.)

Átlagtér-közelítés

Ising-modell: $E = -\beta \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i$

$$Z = \sum_{[s]} e^{-E[s]}$$

Tételezzük úgy, mintha minden spin ugyanolyan külső térben lenne!

Ehhez: $s_i s_j = \left[m + (s_i - m)\right]\left[m + (s_j - m)\right]$ ahol m egy átlag spin, és ettől eltérnek mennyire.

$$= m^2 + m(s_i - m) + m(s_j - m) + (s_i - m)(s_j - m)$$

ha feltesszük, hogy az átlagtól való eltérés nem túl nagy, akkor az utolsó tag elhanyagolható

szemléletesen az akkor jó, ha $\langle (s_i - m)^2 \rangle \ll m^2$

$$= m(s_i + s_j) - m^2$$

$$E = -\beta\left(-m^2 d N + m \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i + s_j)\right) - h \sum_i s_i =$$

$$= \beta m^2 d N - (2d\beta m + h) \sum_i s_i$$

$$Z = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \cdots \sum_{s_N} e^{-\beta m^2 d N + (2d\beta m + h) \sum_i s_i} = e^{-\beta m^2 d N} \left[2\cosh(2d\beta m + h)\right]^N$$

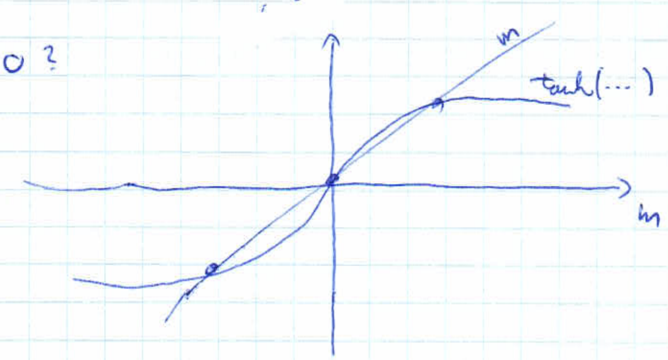
m idáig paraméter volt, de azzal a szemlélettel vezettük be, hogy $m = \langle s \rangle$. Rójuk ki ezt a feltételt, és nézzük, mi történik!

$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial \ln Z}{\partial h} \overset{!}{=} m$$

$$\ln Z = -\beta m^2 d N + N \ln \cosh(2d\beta m + h) + N \ln 2$$

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \ln Z}{\partial h} = \tanh(2d\beta m + h) \overset{!}{=} m$$

Mi a megoldás $h = 0$?



Az $m = 0$ triviális megoldás mindig.

A másik két megoldás attól függ, hogy a Tanh$(\dots)$ deriváltja 0-ban $\gtrless 1$?

$$\frac{\partial \tanh(2d\beta m)}{\partial m}\Bigg|_{m=0} = \frac{1}{\cosh^2(2d\beta m)} \cdot 2d\beta \Bigg|_{m=0} = 2d\beta$$

Tehát a 3 megoldás akkor van, ha $\beta > \frac{1}{2d}$

$$T < \frac{2dJ}{k}.$$

Ekkor az $\ln Z$-t a szimmetriasértő állapotok fogják minimalizálni, tehát az a valódi megoldás

Ha T a T_c közelében van, és m kicsi, akkor csinálhatunk egy effektív térelméletet.

$m \sim \phi$ $\quad$ m: spinátlag

ϕ: ez mi tér. de ha blokkokat csinálunk, és mindig a blokkméret kisebb a ξ-nél, akkor a blokkokban lévő a spinek átlaga, és a kH is hasonló.

Tehát ϕ = egy ξ-nél kisebb méretű blokk átlaga

Ha ϕ kicsi, akkor akkor elég az alacsonyrendű sorfejtés:

$$E = \int d^dx \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + t\phi^2 + b\phi^4\right) \qquad \text{Landau-elmélet}$$

Ez belátható, hogy akkor minimális, ha

- ϕ térben konstans
- $2t\phi + 4b\phi^3 = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi \sim \sqrt{-t} = |t|^{1/2} \end{cases}$$

tehát T_c alatt $m \sim |T_c - T|^{1/2} \Rightarrow \beta = 1/2$ (megkaptunk egy krit exp-t)

ehhez hasonlóan más exponensek is kiszámíthatóak.

Mikor jó az átlagtér közelítés?

akkor, ha $\left| \dfrac{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2}{\langle m\rangle^2} \right| \ll 1.$ Ginzburg-kritérium

Nézzük meg ezt egy másodrendű kritikus pont közelében:

$$\frac{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2}{\langle m\rangle^2} = \frac{\chi}{V\langle m\rangle^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^{-\gamma}}{t^{\nu d}\, t^{2\beta}} = t^{-\gamma+\nu d-2\beta}$$

$$\uparrow \; \xi^d \sim t^{-\nu d}$$

Tehát, ha $-\gamma+\nu d-2\beta > 0$, akkor az átlagtér-közelítés jó a kritikus pontban

, ha $-\gamma+\nu d-2\beta < 0$, akkor a kritikus pont közelében elromlik.

Akkor jó, ha $d > \frac{2\beta-\gamma}{\nu}$ *, de az exp.-ok nem függnek a dim.-től

Ising esetére: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $d_{ki} = 4$.

Az átlagtér közelítés jó, ha $d > 4$.

*: felső kritikus dimenzió

RENORMÁLÁS

11. előadás (12.04.)

Az Ising-modell átlagtér közelítésben az energia:

$$E = t\phi^2 + \lambda\phi^4 - h\phi$$

$$\frac{\partial E}{\partial\phi} = 2t\phi + 4\lambda\phi^3 - h$$

Ebből számolhatók exponensek:

Pl.: $\chi \sim t^{-\gamma}$

TFH $t > 0$, $h = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$$\chi = \frac{\partial \phi_{min}}{\partial h}$$

megoldva a $dE/d\phi = 0$-t $\Rightarrow$ $\phi_{min} \sim \frac{h}{t}$

$$\Rightarrow \chi \sim \frac{1}{t} \sim t^{-1} \Rightarrow \gamma = 1$$

↑ ez még az előző órához tartozik.

Skálatérelmélet

$$S = \int d^dx \left(\frac{1}{2}\sum_\mu \partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + t\phi^2 + \lambda\phi^4\right)$$

statfizes nyelven ez az Ising-modell lassúsított effektív leírása

$\phi \sim$ blokkmágnesezettség

$S \sim$ blokkváltozók közötti effektív kcH

Kérdés: milyen renorm csoport fixpontok vannak?

- Gauss-fixpont: $t = 0$, $\lambda = 0$ (nincs tömeg és nincs kcH)

  ez bármely dimenzióban fixpont

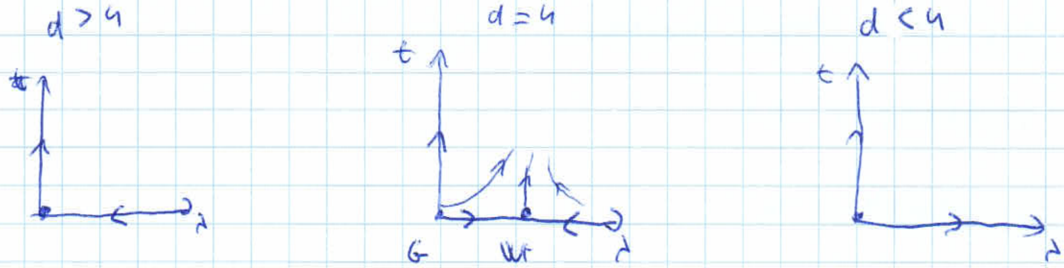
Láttuk, hogy egy csatolás releváns, ha a csatolás tömegdim. > 0.
(ez csak a Gauss-fixponton igaz!)

Mivel $[S] = 0$ és $[d^dx] = -d$, ezért $[\phi] = \frac{d}{2} - 1$

$[t] = 2 \Rightarrow$ ez releváns $\forall d$-ben.

$[\lambda] = 4 - d \Rightarrow$ $d < 4$ releváns, $d = 4$ marginális, $d > 4$ irreleváns

Mi történik λ-irányban, ha d-t folytonosan változtatjuk?



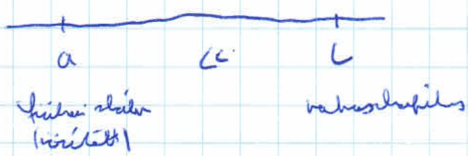
$d=4$-nél megjelenik a Wilson–Fisher-fixpont, ami $d<4$-nél átvette a $\lambda=\infty$-nél lenne

Nézzük meg a viselkedést $d=4-\varepsilon$-ban, és fejtsünk sorba ε-ban.
~~Sok esetben~~ $\varepsilon \ll 1$ esetén WF közel van G-hez, ezért jól közelíthető a Gauss-elmélettel, és sok esetben még $\varepsilon \simeq 1$ körül is jó eredményt ad.

<u>Összefoglalás</u>:

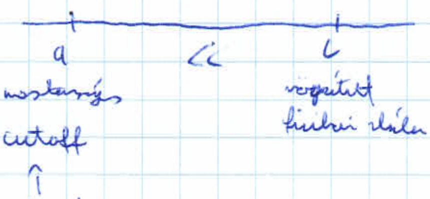
A renormcsoport módszere egy rácsrendszer az effektív KH távolságfüggésének vizsgálata

- kritikus jelenségek:



a kritikus pont körül univerzalitás van, tehát egy tényleges rendszer elfelejti a mikroszkopikus KH részleteit

- QFT: definíciót és számolási módszert is ad



ezzel tudjuk definiálni a KH-kat, de a fizikát a másik skálán mérjük

QFT kétféle definíciója:
- rácsos: a kontinuum limesszel a rendszert kritikus pontban vizsgáljuk
- perturbatív: Gauss-fixpont körüli sorfejtést ezen a nyelven értjük meg.

renormálhatósági fogalom: ez a def-ban mindig működik.