

Hővezetés gömbi rendszerekben

Számítógépes szimulációk, 2. projekt

Asztalos Bogdán

2019. december 6.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető, motiváció	2
2. Elméleti megalapozás	2
2.1. A hővezetés alapegyenlete	2
2.2. Diszkretizáció és véges differenciák	3
2.3. Szingularitások és határfeltételek kezelése	4
3. Numerikus vizsgálatok	6
3.1. Neumann-stabilitás	6
3.2. Egyenletesen melegen tartott gömb	7
3.3. Egy pontban melegített gömb	7
4. Összegzés	11

1. Bevezető, motiváció

A hővezetés problémája egy elméletben megoldott probléma: szilárd testekben a hőmérséklet pontról pontra változhat, ám a termodinamika II. főtétele értelmében a rendszer a maximális entrópiával rendelkező állapotra törekszik, így – külső hatás hiányában – a hőmérséklet kiegyenlítődésképpen törekszik. Ennek részeként, a testben hőáram indul el, ami a magasabb hőmérsékletű helyekről az alacsonyabb hőmérsékletű pontokba szállítja a hőenergiát. A hőáramot tanulmányozva, különböző összefüggések írhatók fel az energia és a hőmérséklet viszonyára, végeredményben pedig megkaphatjuk a hőáramlást teljesen leíró differenciálegyenletet (lásd, (3) egyenlet).

A hőáramlás alapegyenlete egy másodrendű parciális differenciálegyenlet a hőmérsékletmezőre, amelynek bizonyos feltételek mellett bizonyítottan létezik megoldása, de ennek megtalálása már bonyolult feladat, főleg általános geometriai elrendezés esetén. Ugyan egy parciális differenciálegyenlet diszkretizálással megoldható, de a különböző alakú testek esetén különböző paraméterezés és különböző határfeltételek fordulhatnak elő, amelyek megfelelő kezelése minden esetben egy külön feladat.

Ebben a dolgozatban az [1] forrásban bemutatott módszerből indulunk ki, amely először véges differenciákkal közelíti a parciális deriváltakat és így old meg egy egydimenziós problémát. Az itt felvázolt problémákban szintén a véges differencia módszert fogjuk használni, de olyan esetekben, amelyek gömbi geometriával rendelkeznek, így leírásukra a gömbi polárkoordináták lesznek a legalkalmasabbak.

A fizikában a derékszögű geometriai feltételek mellett gömbi rendszereket vizsgálnak leggyakrabban, így természetesen adódik a kérdés, hogy hogyan kell egy ilyen rendszerben kezelni az adott problémát. Bár gömbi geometriával rendelkező rendszerben egy lineáris parciális differenciálegyenlet meg lehet oldani analitikusan is, ha a gömbfüggvények bázisán fejezzük ki az érintett mezőket, de az eredmény általában ilyenkor egy komplex függvényekből álló végtelen sorösszeg, amelyek sokkal kevésbé szemléletesek, mint egy számítógépes közelítéssel található konkrét megoldás.

2. Elméleti megalapozás

2.1. A hővezetés alapegyenlete

Az energiamegmaradás alapján a hőáramra felírhatunk egy mérlegegyenletet:

$$\frac{\partial w_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_Q = S_Q \quad (1)$$

ahol w_Q a termikus energiasűrűség: $w_Q = \rho c T$, \mathbf{j}_Q pedig a hőáramsűrűség. A Fourier-törvény alapján, a hőáramsűrűség arányos a hőmérséklet-mező gradiensével, vagyis:

$$\mathbf{j}_Q = -\lambda \text{grad } T \quad (2)$$

Ezeket beírva a mérlegegyenletbe, egy differenciálegyenletet kapunk a hőmérséklet-mezőre:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = S_Q \quad (3)$$

ahol a hőmérséklet $T(\mathbf{r}, t)$ egy helytől és időtől függő skalármező. Fejazzük ki mindent gömbi koordinátákkal, vagyis ekkor a hőmérséklet helyfüggését a három gömbi koordináta függvénye: $T(r, \vartheta, \varphi, t)$, a Laplace-operátor pedig egy sokkal hosszabb kifejezéssé változik. Mivel a későbbiekben nem foglalkozunk olyan problémákkal, ahol a rendszerben belső forrástag van, S_Q -tól eltekintünk. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\text{ctg } \vartheta \cdot \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] \quad (4)$$

2.2. Diszkrétizáció és véges differenciák

Hogy a hőmérséklet-mezőt számítógéppel is eltárolhassuk, a teret fel kell bontanunk véges mennyiségű pont halmazára, úgy, hogy minden koordinátát egyenlő részekre osztunk, így a hőmérsékletmező végül egy 4-indexes tömb lesz:

$$T_{i,j,k,l} = T(i\Delta r, j\Delta \vartheta, k\Delta \varphi, l\Delta t) \quad (5)$$

Ebben a formában a parciális deriválások osztásként fejezhetők ki:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i,j,k,l} \approx \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l}}{\Delta r} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)_{i,j,k,l} \approx \frac{T_{i+1,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l} - 2T_{i,j,k,l}}{(\Delta r)^2} \quad (7)$$

Ugyanígy a többi koordináta esetén is.

Ezeket a véges differenciákat behelyettesítve a Laplace-operátor képletébe, az is kifejezhetővé válik ilyen módon, emiatt pedig egy adott $T_{i,j,k,l}$ hőmérséklet-konfiguráció esetén ki tudjuk számítani a következő időlépésre érvényes újabb konfigurációt:

$$T_{i,j,k,l+1} = T_{i,j,k,l} + \eta (\Delta T)_{i,j,k,l} \cdot \Delta t \quad (8)$$

ahol $\eta = \frac{\lambda}{\rho c}$. Így tehát egy megadott kezdeti feltételből lépkedve, kiszámolható tetszőleges időpillanatban a hőmérséklet-mező.

2.3. Szingularitások és határfeltételek kezelése

A (4) egyenletben lévő deriváltakat kifejeztük véges differenciákkal, így úgy tűnik, mintha tetszőleges i, j, k, l koordináták esetén ki tudnánk számolni $(\Delta T)_{i,j,k,l}$ mennyiséget, de mivel a deriváltak együtthatói függenek maguktól a koordinátáktól, ezért ezek helyről helyre változnak, sőt, valahol szingulárisává válnak. Folytonos esetben ezzel általában nincs probléma, mert ha egy konkrét helyzetben a derivált olyan helyen válna szingulárisává, ahol nem várnánk, akkor általában a l'Hospital-szabály alkalmazásával belátható, hogy a deriváltfüggvény határértéke véges. Itt viszont, még ha a hőmérsékletmező valóban véges értékhez konvergálna is, a numerikus számolás mindenképpen értelmetlenné válik, ha 0-val kéne osztani, vagy π radián kotangensét kéne kiszámolni.

Szintén probléma lép fel a koordináták szélsőértékein, hiszen egy i indexszel jelzett koordináta szerinti második deriváltjának kiszámításához szükség van az $i + 1$ és $i - 1$ indexű értékekre is. Mivel a három koordinátából csak a sugár határértéke tartozik valódi, fizikai határhoz, ezért a másik kettő koordináta minden értékénél ki kell tudnunk számolni a derivált értékeit, így ezt is valahogy kezelni kell.

A következőkben koordinátánként végignézzük, hogy a felmerülő problémákat hogyan lehet megoldani.

Polárszög A polárszöggel kapcsolatban szingularitás nem lép fel, csak a határon lehet gond, és mivel a erre egy egyszerű periodikus határfeltétel vonatkozik, ezért ezt lesz a legegyszerűbb kezelni. Ha a $\varphi \in [0, 2\pi]$ tartományt N részre osztjuk fel, és a k -ik pont értéke $\varphi_k = k\Delta\varphi$, ahol $\Delta\varphi = 2\pi/N$, akkor $\varphi_N = \varphi_0 + 2\pi$. Így tehát $\varphi_{N+1} = \varphi_1 + 2\pi$ és $\varphi_{-1} = \varphi_{N-1} - 2\pi$. Külön kényelmes, hogy a Numpy-tömbök indexelésénél értelmezve vannak a negatív számok, tehát a deriváló kódrészlet majdhogynem változtatás nélkül is tökéletesen működik, egyedül a 2π különbségre kell odafigyelni.

Sugár Az $r = 0$ esettel azért van baj, mert a Laplace-operátor kifejezésében több tag is van, amely r -nek valamely negatív hatványával arányos. Ahhoz, hogy ezt kezeljük, tekintsük a Laplace-operátor eredeti definícióját, derékszögű koordinátákkal:

$$\Delta T(0) = \partial_x^2 T(0) + \partial_y^2 T(0) + \partial_z^2 T(0) \quad (9)$$

A gömbi diszkretizálás miatt, mind a három derékszögű koordinátatengely mentén Δr távolságra van a legközelebbi pont, vagyis felírva a véges differenciákat:

$$\begin{aligned} \Delta T(r=0) &\approx \frac{T_{x=\Delta r} + T_{x=-\Delta r} - 2T_0 + T_{y=\Delta r} + T_{y=-\Delta r} - 2T_0 + T_{z=\Delta r} + T_{z=-\Delta r} - 2T_0}{(\Delta r)^2} \approx \\ &\approx 6 \frac{\overline{T}_{r=\Delta r} - T_0}{(\Delta r)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

ahol $\overline{T}_{r=\Delta r}$ a Δr sugárhoz tartozó pontok hőmérsékletének átlaga. Ez a képlet már kiszámolható $r = 0$ érték esetén.

Amikor r értéke eléri a maximálisat, a derivált ekkor sem számítható ki, de mivel ez az eset a valódi fizikai határhoz tartozik, ezért az itteni hőmérséklet-viszonyokat amúgy is az adott probléma határfeltétele szabja meg, így derivált kiszámolására nincs szükség.

Azimutszög Az azimutszöggel azért van baj, mert a Laplace-operátor szög szerinti részénél minden tagot osztunk $\sin \vartheta$ -val, ami $\vartheta = 0$ vagy π esetében 0. Mivel ilyenkor csak a szög szerinti tagokkal van probléma, ezért a sugár szerinti deriváltakat tartalmazó tagokat hagyjuk úgy ahogy vannak, és vizsgáljuk meg mi történik adott sugár esetében, a gömbfelületen $\vartheta = 0$ környezetében!

Paraméterezzük a gömbfelületet olyan u és v változókkal, amelyek egy közös pontban metszik a z -tengelyt, úgy hogy közben egymásra merőlegesek! Ebben az esetben is írjuk fel a Laplace-operátor definícióját, ezekkel az adott altérben merőleges koordinátákkal, lokálisan a z -tengely környezetében:

$$\Delta_{uv} T(\vartheta = 0) = \partial_u^2 T(\vartheta = 0) + \partial_v^2 T(\vartheta = 0) \quad (11)$$

Itt is használjuk ki, hogy a diszkretizáció ϑ szerint van, vagyis a legkisebb lehetséges u és v értékek: $\Delta u = \Delta v = r \cdot \Delta \vartheta$. Felírva az előző kifejezést véges differenciákkal:

$$\Delta_{uv} T(\vartheta = 0) \approx \frac{T_{v=r\Delta\vartheta} + T_{v=-r\Delta\vartheta} - 2T_{v=0} + T_{u=r\Delta\vartheta} + T_{u=-r\Delta\vartheta} - 2T_{u=0}}{r^2 (\Delta\vartheta)^2} \quad (12)$$

Mivel u és v egy pontban metszik a z tengelyt, ezért $T_{v=0} = T_{u=0} = T_{r,\vartheta=0}$. Ebből

$$\Delta_{uv} T(\vartheta = 0) \approx 4 \frac{\overline{T}_{r,\vartheta=\Delta\vartheta} - T_{r,\vartheta=0}}{r^2 (\Delta\vartheta)^2} \quad (13)$$

ahol $\overline{T}_{r,\vartheta=\Delta\vartheta}$ az r sugárhoz, és $\Delta\vartheta$ azimutszöghöz tartozó pontok hőmérsékletének átlaga. Ez alapján a teljes Laplace:

$$\Delta T(\vartheta = 0) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + 4 \frac{\overline{T}_{r,\vartheta=\Delta\vartheta} - T_{r,\vartheta=0}}{r^2 (\Delta\vartheta)^2} \quad (14)$$

ahol a sugár szerinti deriváltak a szokásos módon közelíthetők a véges differenciákkal. Ugyanilyen gondolatmenettel belátható, hogy

$$\Delta T(\vartheta = \pi) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + 4 \frac{\overline{T}_{r,\vartheta=\pi-\Delta\vartheta} - T_{r,\vartheta=\pi}}{r^2 (\Delta\vartheta)^2} \quad (15)$$

Most már tehát minden pontban ki tudjuk számolni a hőmérséklet-mező deriváltjait, így alkalmazhatjuk a léptetést.

3. Numerikus vizsgálatok

Az alábbi részben két konkrét problémára alkalmazzuk az előző fejezetben felépített, hővezetést szimuláló algoritmusunkat. Tekintettel arra, hogy a kód nem egy optimalizált, általánosan használt program, csak egy szemléltető feladat, valamint hogy gömbi rendszernél már viszonylag durva felbontásnál megnő kiszámolandó pontok száma a program futási ideje egy komolyabb probléma esetében elég hosszú. Ezen okok miatt, a továbbiakban bemutatott két példa csupán két kezdetleges eset, amelyek elképzelhetővé teszik, hogyan működik egy ilyen program. Ezek ismertetése előtt viszont még kitérünk arra, hogy milyen feltételnek kell teljesülnie, hogy a kód stabilan működjön.

3.1. Neumann-stabilitás

Mivel a feladat megoldása során numerikus közelítést végzünk, természetes módon lesz az eredménynek hibája is, ami egyrészt adódik a deriválás véges differenciával való közelítéséből, másrészt a számítógép véges számábrázolásából és kerekítéséből. Mivel a módszerünk lényege, hogy egy adott időpillanat-beli állapotot mindig az előző időlépésből számoljuk, ezért a számolásban megjelenő hibák folyamatosan öröklődnek. A számolásunk akkor lesz jó, ha ezek a hibák végig korlátosak maradnak.

Itt most nem megyünk bele a stabilitásvizsgálat részleteibe, csak nagyságrendi becslést adunk arra, hogy a különböző mennyiségeknek hogyan kell egymáshoz viszonyulniuk. Az [1] forrásban vázolt probléma esetében, ha az 1 dimenziós mintát Δx nagyságú részekre osztjuk, az időlépés nagysága pedig Δt , akkor a stabilitás feltétele

$$\eta < \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (16)$$

Esetünk kicsit bonyolultabb, mert itt háromdimenziós, gömbi mintát vizsgálunk, így nem lehet egyértelműen egy ilyen Δx -t találni. Ehelyett becsüljük Δx -t a két egymáshoz legközelebbi lévő pont távolságával! Ha a sugár, az azimutuszög és a polárszög felbontása rendre Δr , $\Delta\vartheta$ és $\Delta\varphi$, akkor a két legközelebbi pontot akkor kapjuk, ha a Δr sugáron, a $\Delta\vartheta$ azimutuszöghöz tartozó körív két, egymástól $\Delta\varphi$ ívszögre lévő pontját nézzük. Ezek távolsága:

$$\Delta x_{\min} = \Delta r \sin \Delta\vartheta \cdot \Delta\varphi \quad (17)$$

A Δt időlépés adott, így a (16) egyenlet ad egy felső határt η -ra.

Ugyan egy konkrét probléma esetében η az adott, és ehhez igazítjuk Δx és Δt értékeket, de jelen esetben egyéb szempontokat is figyelembe kell venni, mint például, ahhoz, hogy értelmezhető eredményeket kapjunk, kell egy minimális felbontás, hogy ne csak néhány pontot válasszunk ki a gömbből. Ugyanakkor nem is szabad nagyon kicsi felbontást választani, mert akkor sokáig tart a program futtatása. Az idő választása is elég korláto-

mennyiség	érték
R	1 m
T	5000 s
η	$10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
Δr	0,01 m
Δt	0,2 s

1. táblázat. Az egyenletesen melegen tartott gömb problémájának adatai.

zott hasonló okok miatt, hogy a futási idő ne nőjön túl nagyra, így a legegyszerűbb magát az anyagi paraméter értékét hozzáigazítani a feltételhez. Mivel ezen dolgozat témája a numerikus módszerek megismerése, így nem az adatok konkrét értékén van a hangsúly.

3.2. Egyenletesen melegen tartott gömb

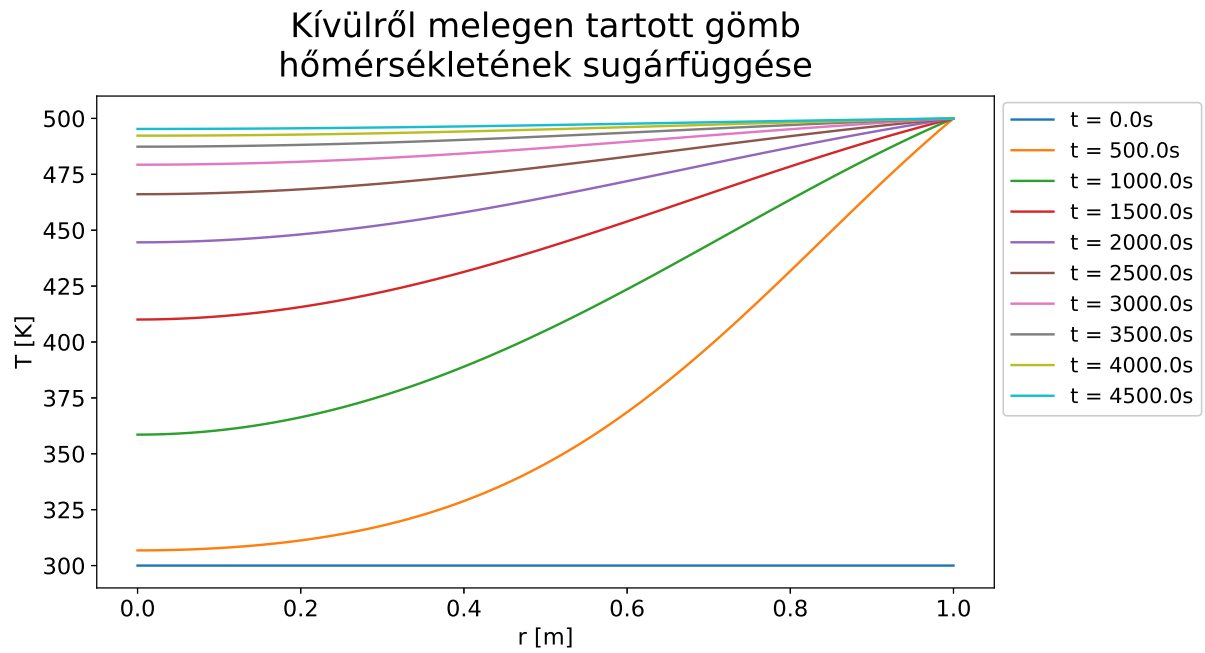
Hogy a program futását még jobban egyszerűsítsük, először oldjunk meg egy izotrop problémát: Adott egy ismert hővezetési tulajdonságokkal rendelkező homogén gömb, amely kezdetben termodinamikai egyensúlyban van, $T_0 = 300$ K-en. Hogyan változik a hőmérséklete, ha behelyezzük egy $T_k = 500$ K hőmérsékletű környezetbe? A gömb sugara $R = 1$ m, az anyagi tulajdonságokból számolható η paraméter pedig $\eta = 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

A feladat megoldásához használt kódot az `isotrope.ipynb` fájl tartalmazza. A használt felbontást, és az adatok az 1. táblázatban találhatóak. Mivel a feladat izotrop, a Laplace-operátor szög szerinti deriváltjai mind 0-k, így nagyobb felbontással is el lehet végezni a szimulációt. Az 1. ábrán látható a hőmérséklet sugárfüggése különböző időpillanatokban, a 2. pedig ennek a deriváltja, vagyis a hőáramsűrűség sugárfüggése. Látható, ahogy a gömb kívülről fokozatosan veszi fel az 500 K hőmérsékletet, és végül tart a konstans értékhez. Külön érdekesség a 2. ábrán, hogy a hőáramsűrűség sugárfüggésének minden időpillanatban van egy maximuma, amely a halad befelé, ám ennek helye nem jut el a középpontba, hanem a teljes sugár 2/3-ához konvergál.

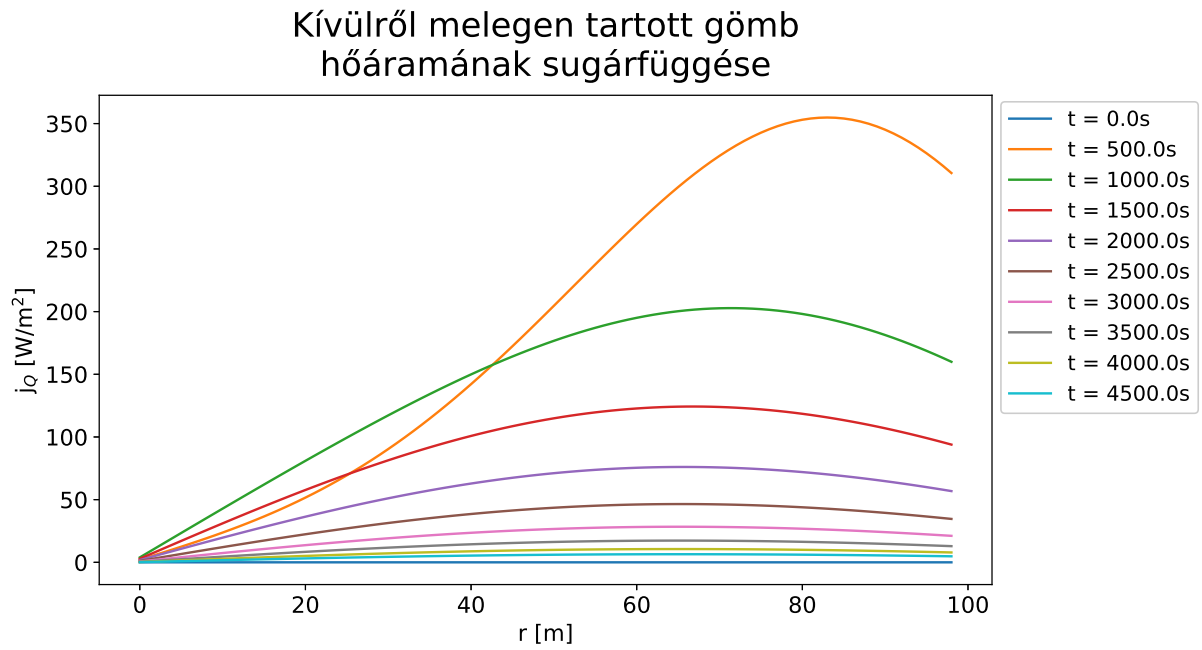
Továbbá, ábrázoltuk még az 1. ábrán a hőmérséklet időfüggését is különböző sugarak esetében. Ahogy azt várjuk, nagyon szépen látszik, hogy a hőmérséklet 500 K-hez tart, a felszínhez közel lévő pontok gyorsabban, míg a beljebb lévő pontok lassabban.

3.3. Egy pontban melegített gömb

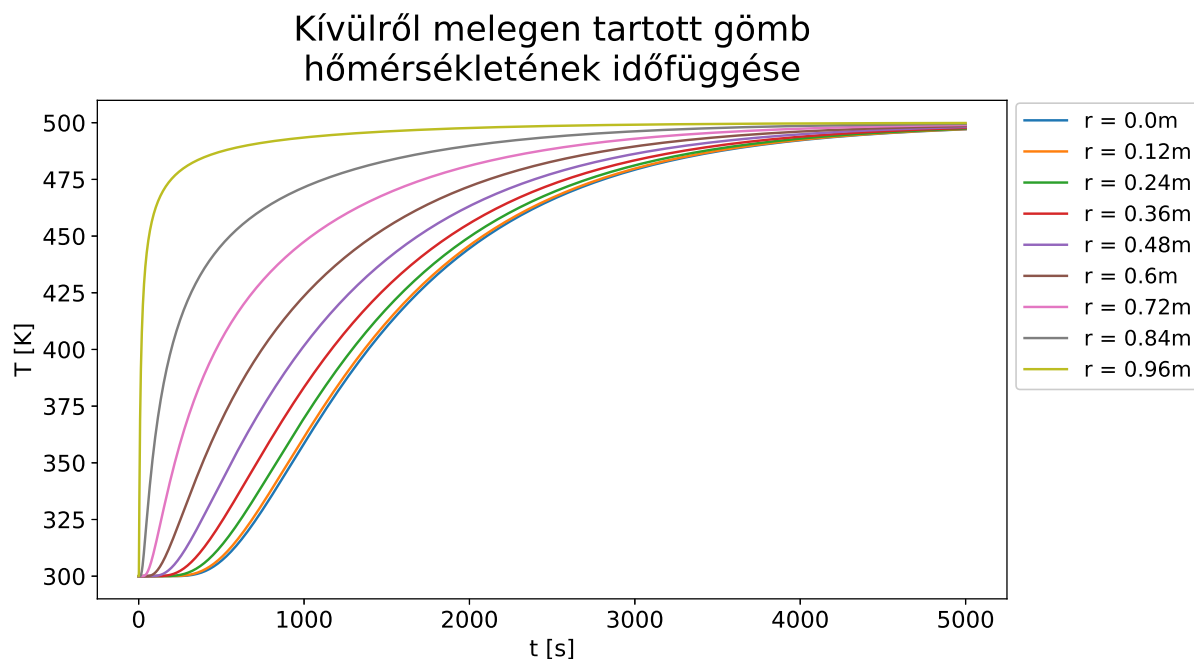
Ebben a részben már egy teljes háromdimenziós gömbbel dolgozunk, és figyelembe vesszük a szögfüggéseket is. A feladat a következő: Ismét adott egy ismert hővezetési tulajdonságokkal rendelkező gömb, megint csak $T_0 = 300$ K hőmérsékleten. Hogyan változik a hőmérséklet, ha az egyik pontját állandó 500 K hőmérsékleten tartjuk? A gömb sugara $R = 1$ m, az anyagi tulajdonságokból számolható η paraméter pedig $\eta = 6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.



1. ábra. A hőmérséklet sugárfüggése különböző időpontokban.



2. ábra. A hőáramsűrűség sugárfüggése különböző időpontokban.



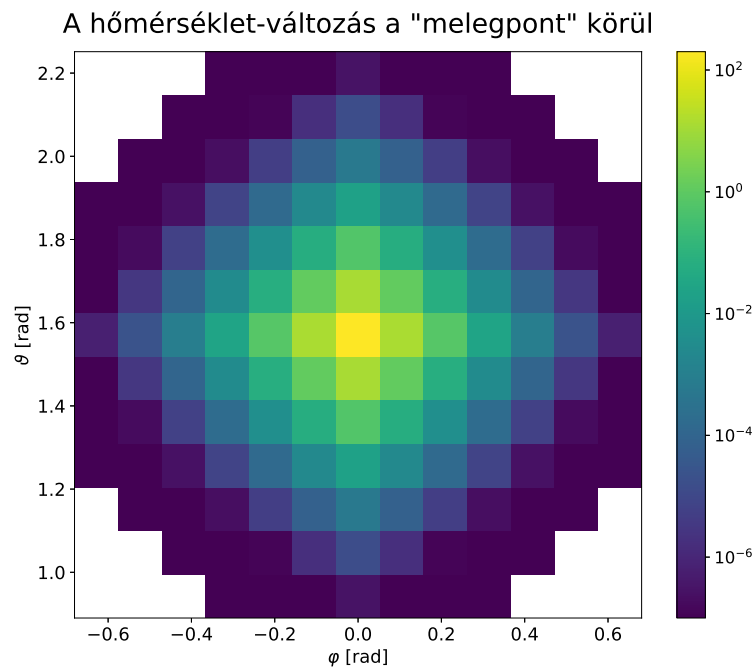
3. ábra. A hőmérséklet időfüggése különböző sugarak esetén.

mennyiség	érték
R	1 m
T	240000 s
η	$6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
Δr	$\frac{1}{29}$ m
$\Delta \vartheta$	$\frac{\pi}{30}$
$\Delta \varphi$	$\frac{\pi}{30}$
Δt	10 s

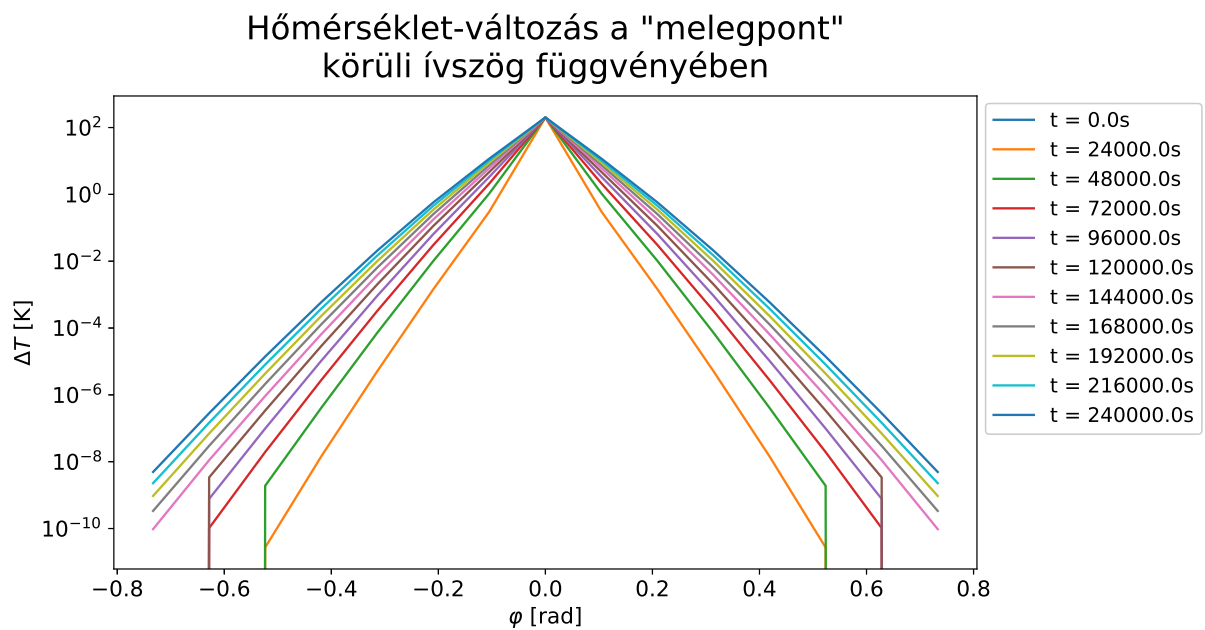
2. táblázat. Az egy pontban melegített gömb problémájának adatai.

A feladat megoldásához használt kódot az `spherical.ipynb` fájl tartalmazza. A használt felbontást, és az adatok a 2. táblázatban találhatóak. Mivel a stabilitási feltétel még meglehetősen durva felbontás esetén is olyan kicsi hővezetési együtthatót igényel, hogy a releváns dolgok lassan mennek végbe, ezért itt nem vártuk meg a folyamat lefutását, hanem egy idő után leállítottuk, ám ekkor még a gömb nem volt hőmérsékleti egyensúlyban. Emiatt, hogy a hőmérsékleti viszonyok mégis jól látszódnak, mindenhol az eredeti, T_0 hőmérséklethez képesti változást fogjuk ábrázolni, logaritmikus skálán, hogy a kisebb változások is észrevehetőek legyenek.

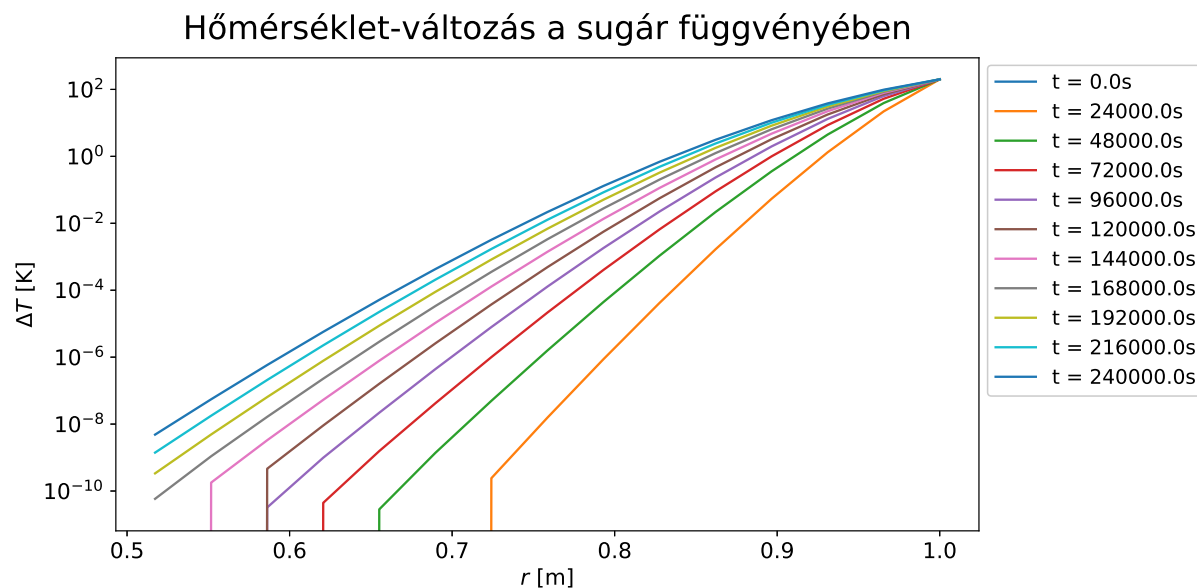
A gömb „melegpontját” a felület $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$ pontjába helyeztük. Ezen pont környezetének hőmérsékletét ábrázolja a szimuláció befejezésekor a 4. ábra. Mivel az elrendezés a pont körül forgásszimmetrikus ábrázolhatjuk a hőmérsékletet az ívszög függvényében, amit az 5. ábra szemléltet. Erről látható, hogy a hőmérséklet-változás görbéi elég jó köze-



4. ábra. A felszínen mérhető hőmérséklet-változás „melegpont” környezetében.



5. ábra. A felszínen mérhető hőmérséklet-változás a „melegpont” körüli ívszög függvényében különböző időpillanatokban.



6. ábra. A hőmérséklet-változás a „melegponthoz” tartozó sugáron a középponttól való távolság függvényében különböző időpillanatokban.

lítéssel egyenesek logaritmikuskálán, így tehát a hőmérséklet térbeli eloszlását a gömb felszínén mondhatjuk exponenciálisnak.

Hasonló jelenséget látunk, ha a hőmérséklet-változást a középponttól való távolság függvényében ábrázoljuk, ami a 6. ábrán látható. Itt már a görbéknek látható eltérésük van egy egyenestől, így nem mondhatjuk, hogy a hőmérséklet-eloszlás exponenciális, de hasonlóan az előzőekhez, elég a hőmérséklet értéke elég gyorsan lecsökken, de az megfigyelhető, hogy logikus módon, az idő függvényében a hőmérséklet kívülről befele, áramolva, egyre növekszik.

4. Összegzés

A dolgozatban gömbi geometriával rendelkező rendszerek hővezetésének numerikus szimulálásával foglalkoztunk. Először megvizsgáltuk, hogy a hővezetés jelenségét leíró egyenletek hogyan illeszkednek bele a gömbi koordinátákba, majd megvizsgáltuk, hogy a numerikus számolásoknál milyen problémákba ütközhetünk ezzel kapcsolatban. Eltüntettük a gömbi koordinátázás által okozott szingularitásokat a numerikus számolás szintén is, és kezeltük a koordináták határértékeinek problémáját is. Végül, megnéztünk két nagyon egyszerű konkrét problémát, hogy lássuk, hogyan is működik egy ilyen programkód. Sajnos a kód egyszerűsége, és a stabilitási feltétel együttesen azt okozták, hogy még a legelemibb problémák elejének vizsgálatához is viszonylag hosszú futási idő szükséges, így nem elemeztük az adatokat részletesen, de kvalitatíve megvizsgáltuk a jelenségek néhány tulajdonságát.

Hivatkozások

- [1] Rubin H. Landau, Manuel J. Paez, Cristian C. Bordeianu. *A Survey of Computational Physics - Introductory Computational Science*. Princeton University Press, 2008.
- [2] S. D. Harris, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*. 1.4. *Finite differences in polar coordinates* [link](#)
- [3] A. N. Ford Versypt, R. D. Draatz. *Analysis of finite difference discretization schemes for diffusion in spheres with variable diffusivity*. *Computers & chemical engineering* 71 (2014): 241-252
- [4] Laplace-operátor Wikipédia szócikk [link](#)
- [5] Véges differencia Wikipédia szócikk [link](#)